ANNALES DE L'I. H. P.

LOUIS BEL

Inductions électromagnétique et gravitationnelle

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 1 (1961), p. 37-57
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1961__17_1_37_0>

Inductions électromagnétique et gravitationnelle

par

Louis BEL.
(Institut Henri Poincaré.)

Introduction. — Dans la première partie de ce travail, nous reprenons des résultats bien connus de la théorie de l'électromagnétisme que nous présentons toutefois sous un point de vue légèrement différent au point de vue habituel.

Il est fréquent en Relativité restreinte, de substituer aux coordonnées $x^{i'}(i' = 1, 2, 3)$, coordonnées d'espace, et t', temps, les nouvelles coordonnées $x^i = x^{i'}$, $x^0 = ct$, où c est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. Au point de vue physique ce changement de coordonnées est susceptible d'avoir au moins deux interprétations différentes. La première est immédiate. On peut supposer, par exemple, qu'il correspond à un choix particulier des unités de longueur et de temps de telle sorte que $c = 1$. La deuxième interprétation, par contre, est plus délicate, car elle est liée à un mode de description. D'après celui-ci, on utilise le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ rapporté au nouveau système de coordonnées, $g_{00} = -1$, $g_{ii} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$) et l'on pose

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\partial t \cdot$$

A priori on ne suppose donc pas $c = 1$. On pourrait croire que ceci revient tout simplement à considérer x^0 comme fonction du temps, sans plus. Pourtant, ce mode de description a des incidences qui ne sont pas dépourvues d'intérêt. On constate, en effet, que quand on explicite les équations de Maxwell en absence d'induction du formalisme quadridimensionel pour avoir les équations correspondantes du formalisme tridimensionel, celles-ci se trouvent automatiquement rapportées à un système d'unités, non cohérent tel que $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, ε_0 et μ_0 étant respectivement la constante diélectrique et la perméabilité magnétique du vide (*voir*, par exemple, [1] et [2]). On pourrait certainement réintroduire ces constantes avec des valeurs différentes, mais en aucun cas on ne peut lever l'incohérence dimensionnelle.

Nous poserons toujours $x^0 = t$ sans que nous supposions pour autant $c = 1$. Ceci conduit à un mode de description un tout petit peu plus compliqué mais qui, par contre, a l'avantage de ne comporter aucune hypothèse relative au système d'unités utilisé.

Dans la deuxième partie de ce travail nous réexposons, tout d'abord, quelques-uns des résultats que nous avons obtenus, relatifs au champ gravitationnel en les adaptant au mode de description indiqué ci-dessus. On voit apparaître alors trois constantes fondamentales caractéristiques du vide ε'_0, μ'_0 et γ'_0. Aucune condition de cohérence ou d'homogénéité dimensionnelle ne permet d'identifier physiquement ces trois constantes. Nous sommes donc obligés de fixer arbitrairement cette identification pour une d'elles. Des considérations élémentaires nous ont suggéré le choix $\varepsilon'_0 = \frac{1}{k}$, k étant la constante de la gravitation universelle. Les deux autres sont alors complètement déterminées. Elles ont pour valeurs

$$\gamma'_0 = \frac{c^4}{k}, \qquad \mu'_0 = \frac{k}{c^2}.$$

Nous terminons avec un essai de définition de ce qu'on peut appeler une induction gravitationnelle. Il nous a semblé que le meilleur moyen de caractériser une telle induction était de postuler que les ondes gravitationnelles se propagent dans un milieu matériel avec une vitesse inférieure à c, mais en fait c'est une hypothèse équivalente que nous avons pris comme point de départ. Ceci permet alors de développer un formalisme dont l'analogie avec le phénomène de l'induction électromagnétique est frappante. Les trois constantes ε', μ' et γ' qui remplacent ε'_0, μ'_0 et γ'_0, peuvent prendre alors des valeurs arbitraires caractéristiques du milieu envisagé, seulement astreintes à satisfaire la condition $\mu'^2 \varepsilon' \gamma' = 1$.

Sous cette optique la constante k doit être considérée comme une constante caractéristique du vide, et dans un milieu susceptible d'être le siège d'un phénomène d'induction gravitationnelle, elle doit être remplacée par ε', μ' ou γ' suivant l'aspect du phénomène envisagé.

Cette deuxième partie comporte une large part d'arbitraire. Nous n'avons pas prétendu de le dissimuler. Bien au contraire. Pourtant, aussi forcées que puissent paraître à certains nos hypothèses, il était peut-être intéressant de développer les conséquences qu'elles entraînent.

Je remercie M. Lichnerowicz et M[me] Tonnelat des conseils qu'ils ont bien voulu me donner pendant la rédaction de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE.

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

1. Généralités. — *a.* L'espace-temps de Minkowski E_4 est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. La forme quadratique

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{1}$$

associée au tenseur fondamental est de type hyperbolique normal à un carré négatif et trois carrés positifs.

Un repère galiléen associé à $\vec{e}_{0|}$, que nous désignerons par $R(\vec{e}_{0|})$, de E_4 est un ensemble de quatre vecteurs $\vec{e}_{\alpha|}$ (α, $\beta = 0, 1, 2, 3$) tels que

$$\vec{e}_{0|}^{\,2} = -c^2, \qquad \vec{e}_{i|}^{\,2} = +1, \qquad \vec{e}_{\alpha|}.\vec{e}_{\beta|} = 0, \qquad \text{si } \alpha \neq \beta \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. E_4 étant rapporté à un tel repère, (1) s'écrit

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + \sum_i (dx^i)^2, \tag{2}$$

où $t \equiv x^0$ est le temps et où x^i sont les coordonnées d'espace.

$\vec{e}_{0|}$ étant fixé, nous appellerons décomposition du tenseur fondamental suivant la direction de temps définie par $\vec{e}_{0|}$ le deuxième membre de

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\vec{u}) + (1 - c^2)\, u_\alpha u_\beta, \tag{3}$$

où, par définition, $u_\alpha = \frac{1}{c^2} g_{\alpha\beta} e^\beta_{0|}$. Pour $R(\vec{e}_{0|})$ les composantes covariantes de $\vec{u}$ sont donc

$$u_0 = -1, \qquad u_i = 0,$$

d'où il vient

$$a_{00} = -1, \qquad a_{ii} = +1, \qquad a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta,$$

$a_{\alpha\beta}$ est un tenseur associé à la direction de temps définie par $\vec{u}$.

Soit $\vec{w}$ un deuxième vecteur tel que $w_\alpha = \frac{1}{c^2} g_{\alpha\beta} e^\beta_{0'|}$, $\vec{e}_{0'|}$ étant encore un vecteur orienté dans le temps de carré $-c^2$. Nous aurons, de même,

$$g_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(\vec{w}) + (1 - c^2) w_\alpha w_\beta. \tag{4}$$

De (3) et (4), il vient

$$b_{\alpha\beta}(\vec{w}) = a_{\alpha\beta}(\vec{u}) + (1 - c^2)(u_\alpha u_\beta - w_\alpha w_\beta). \tag{5}$$

b. $\vec{e}_{0|}$ étant fixé, il en est de même de $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ défini par (3). Introduisons les deux tenseurs contravariants $h^{\alpha\beta}$ et $a^{\alpha\beta}$ définis par les relations

$$h^{\alpha\rho} g_{\beta\rho} = \delta^\alpha_\beta, \qquad a^{\alpha\rho} a_{\beta\rho} = \delta^\alpha_\beta; \tag{6}$$

E^*_4 étant l'espace vectoriel dual de E_4, les deux paires de tenseurs $(g_{\alpha\beta}, h^{\alpha\beta})$ et $(a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta})$ permettent de définir deux isomorphismes entre

$$E_4^{(p)} \otimes E_4^{*(q)} \quad \text{et} \quad E_4^{(r)} \otimes E_4^{*(s)} \qquad (p + q = r + s);$$
$$n^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \in E_4^{(p)} \otimes E_4^{*(q)} \quad \text{et} \quad m_{\rho_1 \ldots \rho_p}{}^{\sigma_1 \ldots \sigma_q} \in E_4^{(q)} \otimes E_4^{*(p)},$$

par exemple, sont conjugués par rapport à $(g_{\alpha\beta}, h^{\alpha\beta})$ si

$$n^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = h^{\alpha_1\rho_1} \ldots h^{\alpha_p\rho_p} g_{\beta_1\sigma_1} \ldots g_{\beta_q\sigma_q} m_{\rho_1 \ldots \rho_p}{}^{\sigma_1 \ldots \sigma_q}.$$

De même, m et n sont conjugués par rapport à $(a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta})$ si

$$n^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = a^{\alpha_1\rho_1} \ldots a^{\alpha_p\rho_p} a_{\beta_1\sigma_1} \ldots a_{\beta_q\sigma_q} m_{\rho_1 \ldots \rho_p}{}^{\sigma_1 \ldots \sigma_q}, \tag{7}$$

Nous énoncerons le principe d'interprétation suivant :

P. I. — On convient que, $\vec{e}_{0|}$ étant fixé, deux éléments

$$n \in E_4^{(p)} \otimes E_4^{*(q)} \quad \text{et} \quad m \in E_4^{(r)} \otimes E_4^{*(s)} \qquad (p + q = r + s)$$

définissent un même objet géométrique et ont même interprétation physique si, et seulement si, les composantes de n se déduisent de celles de m par des formules du type (7).

Nous utiliserons la même lettre support uniquement pour des tenseurs définissant le même objet géométrique au sens du principe précédent.

Remarque. — Évidemment, si $c^2 = 1$, cette distinction entre $g_{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ est superflue, car d'après (3) $g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ et ceci quel que soit $\vec{u}$.

Pour le repère galiléen $R(\vec{e}_{0|})$ les composantes de $\vec{e}_{0|}$ et $\vec{u}$ sont respectivement

$$e^0_{0|} = 1 \qquad e^i_{0|} = 0, \qquad u_0 = -1, \qquad u_i = 0.$$

Donc

$$u_\alpha = a_{\alpha\beta}\, e^\beta_{0|}.$$

D'accord avec le principe P. I., $\vec{u}$ et $\vec{e}_{0|}$ définissent le même vecteur. Désormais, nous ne retiendrons que la notation $\vec{u}$.

Le tenseur $h^{\alpha\beta}$ défini par (6) est donné, d'après (3), par

$$h^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + \frac{c^2 - 1}{c^2}\, u^\alpha u^\beta. \tag{8}$$

Une direction de temps $\vec{u}$ étant fixée, considérons dans E_4 une ligne d'Univers Γ orientée dans le temps ou tangente au cône élémentaire $ds^2 = 0$ au point x. Soit $\vec{V}$ le vecteur tangent à Γ en ce point. Nous énoncerons un deuxième principe d'interprétation.

P. II. — Le vecteur vitesse d'espace relatif à $\vec{u}$ associé à Γ est le vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ de composantes

$$v^\alpha = -\frac{(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta)V^\beta}{u_\beta V^\beta}. \tag{9}$$

Le carré du module d'espace v^2 de ce vecteur est, par définition, le carré de $\vec{v}$ relatif à la métrique d'espace

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta.$$

Autrement dit,

$$v^2 = (a_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)\, v^\alpha v^\beta.$$

Après un calcul simple, il vient

$$(10) \qquad v^2 = \frac{(a_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) V^\alpha V^\beta}{(u_\alpha V^\alpha)^2}.$$

Il est évident, d'après leur définition même, que $\vec{v}$ et v^2 ne dépendent pas du module du vecteur $\vec{V}$. Ils ne dépendent donc pas de la représentation paramétrique de Γ. Supposons $\vec{V}$ de carré $-c^2$. D'après (3), nous aurons

$$a_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = (c^2 - 1)(u_\alpha V^\alpha)^2 - c^2$$

et, compte tenu de (10),

$$(11) \qquad u_\alpha V^\alpha = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c},\ \varepsilon = \pm 1\right).$$

Pour un repère galiléen $R(\vec{u})$, (9) donne alors

$$(12) \qquad v^0 = 0, \qquad v^i = V^i\sqrt{1-\beta^2},$$

où nous avons posé $\varepsilon = -1$. Nous le ferons d'ailleurs ainsi par la suite $\Big($ceci revient à supposer $\vec{u}$ et $\vec{V}$ intérieurs à la même nappe du cône $ds^2 = 0\Big)$.

Supposons maintenant que $\vec{V}$ soit un vecteur isotrope. De (3), il vient

$$a_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = (c^2 - 1)(u_\alpha V^\alpha)^2$$

et (10) donne

$$v^2 = c^2.$$

Il est évident que ce résultat ne dépend ni de $\vec{V}$, pourvu qu'il soit isotrope (isotropie de l'espace) ni du vecteur $\vec{u}$, pourvu que $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ soit en chaque cas le tenseur associé à $\vec{u}$ défini par la décomposition (3) du tenseur fondamental (invariance de la vitesse de la lumière dans le vide).

2. Le champ électromagnétique sans induction en Relativité restreinte. — Le champ électromagnétique sans induction est décrit par la donnée sur E_4 de :

1° La forme quadratique fondamentale (1) de E_4.

2° Un champ de vecteurs φ_α ou encore et plutôt le rotationnel $F_{\alpha\beta}$ de $\vec{\varphi}$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha. \tag{13}$$

Le potentiel vecteur $\vec{\varphi}$ n'est déterminé qu'à la transformation de Jauge près

$$\varphi_\alpha \to \varphi_\alpha + \partial_\alpha S, \tag{14}$$

$F_{\alpha\beta}$ est la grandeur primitive de la théorie et, étant un rotationnel, satisfait identiquement au premier groupe d'équations de Maxwell

$$\underset{\alpha,\beta,\gamma}{S}\, \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \tag{15}$$

3° Un deuxième champ de tenseurs antisymétriques $G^{\alpha\beta}$ défini par

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} F_{\rho\sigma}, \tag{16}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et où $h^{\alpha\beta}$ est défini par (8). Le tenseur $G^{\alpha\beta}$ doit satisfaire au deuxième groupe d'équations de Maxwell

$$\partial_\alpha G^{\beta\alpha} = J^\beta, \tag{17}$$

où $\vec{J}$ est le vecteur courant électrique.

L'indétermination (14) qui pèse sur le potentiel vecteur peut être réduite partiellement en astreignant celui-ci à satisfaire la condition de Lorentz :

$$h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_\beta = 0. \tag{18}$$

Dans ce cas, de (13), (16) et (17) il vient

$$\Box \varphi_\alpha = g_{\alpha\beta} J^\beta. \tag{19}$$

Remarque. — Réciproquement, de (13), (16) et (19) on déduit (17).

Un vecteur $\vec{u}$ de carré $-c^2$ quelconque mais fixé étant choisi, le tenseur fondamental admet la décomposition (3). En utilisant les formules (8) relatives à cette décomposition, (16) peut s'écrire sous la forme

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} F_{\alpha\beta} + \frac{c^2 - 1}{\mu_0 c^2} (F_{\alpha\sigma} u_\beta + F_{\sigma\beta} u_\alpha) u^\sigma. \tag{20}$$

Relativement à tout $R(\vec{u})$, l'interprétation physique de $F_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ se fait à l'aide des vecteurs d'espace

$$(21)\qquad \begin{cases} E_\alpha = \quad F_{\alpha\beta}u^\beta, & D_\alpha = \quad G_{\alpha\beta}u^\beta, \\ B_\alpha = -\overset{*}{F}_{\alpha\beta}u^\beta, & H_\alpha = -\overset{*}{G}_{\alpha\beta}u^\beta, \end{cases}$$

où

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \qquad \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}G^{\rho\sigma},$$

$$\left[\eta^{\alpha\beta\rho\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}}\delta^{\alpha\beta\rho\sigma},\ \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} = \sqrt{|a|}\,\delta_{\alpha\beta\rho\sigma},\ a = \text{dét}(a_{\alpha\beta})\right].$$

$\vec{E}$ est le champ électrique, $\vec{B}$ l'induction magnétique, $\vec{D}$ l'induction électrique et $\vec{H}$ le champ magnétique.

De (20) et (21) il vient

$$(22)\qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \qquad \mu_0\vec{H} = \vec{B},$$

où nous avons posé $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0}$; ε_0 est la constante diélectrique du vide. Trivialement,

$$(23)\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

En composantes explicites, les définitions (21) deviennent

$$(24)\qquad \begin{cases} E_i = \quad F_{i0}, & D_i = \quad G_{i0} = -G^{i0} \\ B_i = -\overset{*}{F}_{i0} = F_{jk}, & H_i = -\overset{*}{G}_{i0} = \quad G^{jk} \end{cases} \qquad (\delta_{ijk}^{123} = +1).$$

De même, les équations de Maxwell (15) et (17) s'explicitent en termes de $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sous la forme

$$(25)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0, & \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{j}, & \operatorname{div}\vec{D} = J^0 \end{cases} \qquad [\vec{j} \equiv (J^i)].$$

Supposons maintenant que le vecteur $\vec{J}$ soit de la forme

$$J^\alpha = \rho_0 V^\alpha,$$

où ρ_0 est la densité de charge propre et $\vec{V}$ un vecteur de carré $-c^2$. La densité de force de Lorentz est, par définition, le vecteur

$$(26)\qquad K_\beta = F_{\beta\alpha}J^\alpha = \rho_0 F_{\beta\alpha}V^\alpha.$$

Soit $\vec{k}$ le vecteur projection d'espace de $\vec{K}$. De (11), (12) et (24), il vient

$$\vec{k} = \rho\,\vec{E} + \rho\,\vec{v} \wedge \vec{B}, \qquad \text{où} \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{27}$$

La densité d'énergie associée à la direction de temps définie par $\vec{u}$ est

$$W = \tau^{\alpha}_{\beta}\, u_{\alpha} u^{\beta}, \tag{28}$$

τ^{α}_{β} étant le tenseur de Maxwell,

$$\tau^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}\left(F_{\beta\rho}\, G^{\alpha\rho} + \check{F}^{\alpha\rho}\, \check{G}_{\beta\rho}\right). \tag{29}$$

Ainsi, pour le repère galiléen envisagé,

$$W = -\,\tau^{0}_{0} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}.\vec{D} + \vec{H}.\vec{B}\right). \tag{30}$$

On remarquera que les formules (25), (27) et (30) ne se rapportent à aucun système d'unités déterminé. Il n'en est pas de même des formules correspondantes déduites d'après le mode de description habituel (*voir*, par exemple, [1] et [2]).

On peut atteindre la notion de rayons électromagnétiques, soit en les identifiant aux bicaractéristiques des équations de Maxwell, soit par recours à la définition d'un champ électromagnétique singulier. Dans les deux cas, on démontre que ces rayons sont les trajectoires spatio-temporelles d'un champ de vecteurs isotropes relativement au tenseur fondamental de E_4. D'après le deuxième principe d'interprétation que nous avons énoncé (*voir* les résultats du paragraphe 1), il en résulte que la vitesse de propagation des ondes et radiations électromagnétiques est c quel que soit le repère galiléen envisagé.

D'ailleurs, si l'on passe d'un repère galiléen défini par $\vec{u}$ à un repère galiléen défini par $\vec{w}$, on doit remplacer partout $\vec{u}$ par $\vec{w}$ et $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ par $b_{\alpha\beta}(\vec{w})$, ce qui fait que la forme des relations (22), (25) (27) et (30) demeure invariante pour un tel changement de repère.

3. Le champ électromagnétique avec induction en Relativité restreinte (¹). — Considérons un milieu matériel au repos par rapport à

(¹) Nous réexposons sous un point de vue différent des résultats de [3].

un repère galiléen $R(\vec{u})$ bien déterminé. Un champ électromagnétique avec induction est défini dans ce milieu par la donnée de :

1° Un tenseur symétrique $\bar{g}_{\alpha\beta}$ dont la forme quadratique associée

$$\overline{ds^2} = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{31}$$

s'écrit, pour $R(\vec{u})$, sous la forme

$$\overline{ds^2} = -v^2\, dt^2 + \sum_i (dx^i)^2 \qquad (v^2 < c^2).$$

Les variables x^i sont les coordonnées d'espace et t est encore le temps. Le tenseur $\bar{g}_{\alpha\beta}$ admet la décomposition suivante relative à $\vec{u}$:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\vec{u}) + (1 - v^2)\, u_\alpha u_\beta, \tag{32}$$

où $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ est le même tenseur associé à $\vec{u}$ qui intervient dans la décomposition (3).

2° Un champ de vecteurs $\vec{\varphi}$ ou encore le rotationnel $F_{\alpha\beta}$ de ce champ de vecteurs. $F_{\alpha\beta}$ étant un rotationnel satisfait identiquement aux équations (15).

3° Un deuxième champ de tenseurs antisymétriques $G^{\alpha\beta}$ lié au précédent par les relations

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu}\, \bar{h}^{\alpha\rho}\, \bar{h}^{\beta\sigma}\, F_{\rho\sigma}, \tag{33}$$

où μ est la perméabilité magnétique du milieu considéré et où le tenseur $\bar{h}^{\alpha\beta}$ est défini par les relations

$$\bar{h}^{\alpha\rho}\, \bar{g}_{\beta\rho} = \delta^\alpha_\beta. \tag{34}$$

Nous avons ici, d'après (32),

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + \frac{v^2 - 1}{v^2}\, u^\alpha u^\beta,$$

$G^{\alpha\beta}$ doit satisfaire aux équations (17).

En concervant les mêmes définitions (21), les formules (22), (23), (25), (27) et (30) restent valables pour $R(\vec{u})$, c'est-à-dire quand le milieu est au repos; il n'y a qu'à remplacer ε_0, μ_0 et c par ε, μ et v respectivement. $\varepsilon = \frac{1}{v^2 \mu}$ est la constante diélectrique du milieu.

Ici, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques isotropes de la métrique $\bar{g}_{\alpha\beta}$. Il en résulte que pour $R(\vec{u})$ les ondes et radiations électromagnétiques se propagent à la vitesse v liée aux constantes caractéristiques du milieu ε et μ par la formule $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

La différence essentielle entre le cas avec induction et le cas sans induction tient non pas aux valeurs numériques des constantes ε et μ (d'après le mode de description habituel, les valeurs $\varepsilon = \mu = 1$ sont des valeurs « critiques »), mais au comportement du champ sous un changement de repère galiléen. Supposons, en effet, que le milieu n'est plus au repos et soit $\vec{w}$ le vecteur orienté dans le temps du nouveau repère galiléen. Le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ de E_4 admet alors relativement à $\vec{w}$ la décomposition (4) où $b_{\alpha\beta}(\vec{w})$ est lié à $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ par (5). En remplaçant dans (32) nous obtenons

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(\vec{w}) + (1 - c^2)\, w_\alpha w_\beta + (c^2 - v^2)\, u_\alpha u_\beta$$

et, par conséquent,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \neq b^{\alpha\beta} + \frac{v^2 - 1}{v^2}\, w^\alpha w^\beta.$$

Ainsi, comme on le voit immédiatement, tout en conservant les définitions (21) (où l'on remplace le vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{w}$) les relations (22) ne sont plus valables (anisotropie induite par le mouvement du milieu).

De même, le module du vecteur vitesse d'espace correspondant à un vecteur $\vec{V}$ isotrope ($\bar{g}_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 0$) calculé par (10) n'est plus indépendant de la direction de $\vec{V}$ (il s'agit ici encore de l'anisotropie induite dont un aspect particulier est le phénomène dit d'entraînement).

Les rappels d'électromagnétisme faits ci-dessus sont, d'une part incomplets, d'autre part, ils ont été présentés, si l'on peut dire, sous une forme peu naturelle, car nous avons échangé le rôle habituellement dévolu aux hypothèses et aux résultats. Nous croyons toutefois que ceci se justifie, car sous cette forme, on voit mieux dans quelle direction orienter les recherches dans le cas gravitationnel.

DEUXIÈME PARTIE.

LE CHAMP GRAVITATIONNEL.

4. Le champ gravitationnel sans induction en Relativité générale. — Soit V_4 la variété différentiable espace-temps de la Relativité générale. Un champ de gravitation sans induction est défini par la donnée sur V_4 de :

1° Un champ de tenseurs symétriques $g_{\alpha\beta}$ dont la forme quadratique associée

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{35}$$

est régulière $[\text{dét}\,(g_{\alpha\beta} \neq 0)]$ de type hyperbolique normal à un carré négatif et trois carrés positifs. Le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ induit en chaque point $x \in V_4$ une structure d'espace-temps de Minkowski dans l'espace vectoriel T_x tangent en x. Un repère galiléen en ce point est, par définition, un repère galiléen de T_x. Par rapport à un repère galiléen en x, (35) s'écrit en ce point

$$ds^2 = -c^2\, dt + \sum (dx^i)^2,$$

t est le temps et x^i sont les variables spatiales. Pour tout $\vec{u}$ de carré $-c^2$, le tenseur fondamental admet la décomposition

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\vec{u}) + (1 - c^2)\, u_\alpha u_\beta \tag{36}$$

qui définit le tenseur associé à $\vec{u}$ $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$.

Nous supposons qu'en chaque point $x \in V_4$ l'interprétation physique se fait conformément aux principes énoncés dans le paragraphe 1.

Les potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ sont supposés satisfaire aux équations d'Einstein :

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, T h^{\alpha\beta}\right) \equiv \frac{8\pi k}{c^4}\, U^{\alpha\beta} \qquad (T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}), \tag{37}$$

où $Q^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, k la constante de la gravitation universelle, $T^{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie du milieu considéré et où le tenseur $h^{\alpha\beta}$ est défini par les relations suivantes :

$$h^{\alpha\beta} g_{\beta\rho} = \delta^\alpha_\rho. \tag{38}$$

Relativement à une direction du temps $\vec{u}$ le tenseur $h^{\alpha\beta}$ admet, d'après (36), la décomposition

$$h^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}(\vec{u}) + \frac{c^2 - 1}{c^2} u^\alpha u^\beta. \tag{39}$$

2° Le champ de tenseurs $F_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, tenseur de courbure de la métrique

$$F_{\alpha\beta,\lambda\mu} = g_{\rho\alpha}(\partial_\lambda \Gamma^\rho_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\beta\lambda} + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\lambda}),$$

où les $\Gamma^\beta_{\rho\mu}$ sont les symboles de Christoffel. C'est ce tenseur qui est l'élément fondamental de la théorie au point de vue physique. Le tenseur métrique joue un double rôle. Il est, d'une part l'élément primitif de la théorie en tant que c'est lui qui définit la géométrie de V_4, mais il est, d'autre part, pourrions-nous dire, le « potentiel tenseur » de $F_{\alpha\beta,\lambda\mu}$. Ce dernier satisfait identiquement aux équations

$$\underset{\alpha,\beta,\gamma}{S} \nabla_\gamma F_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \tag{40}$$

dites identités de Bianchi. ∇_γ est l'opérateur de dérivation partielle covariante relatif à la connexion riemannienne de V_4 définie par (35).

3° Le champ de tenseurs $G^{\alpha\beta,\lambda\mu}$ défini par

$$G^{\alpha\beta,\lambda\mu} = \gamma'_0 h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} h^{\lambda\gamma} h^{\mu\delta} F_{\rho\sigma,\gamma\delta}, \tag{41}$$

où γ'_0 est une constante relative au vide et sur laquelle nous reviendrons dans un instant.

Le tenseur $G^{\alpha\beta,\lambda\mu}$ satisfait, compte tenu de (40) et (37), aux équations

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta,\lambda\mu} = J^{\beta,\lambda\mu}, \tag{42}$$

où

$$J^{\beta,\lambda\mu} = \gamma'_0 (\nabla^\lambda U^{\mu\beta} - \nabla^\mu U^{\lambda\beta}) \qquad (\nabla^\lambda \equiv h^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha) \tag{43}$$

décrit aussi les sources du champ. Sous certaines réserves, d'après un résultat de Lichnerowicz, les équations (40) et (42), dites équations du champ d'ordre supérieur, sont équivalentes aux équations d'Einstein (37).

En développant (41), compte tenu de (39) nous obtenons

$$\begin{aligned}(44)\quad G_{\alpha\beta,\lambda\mu} = {} & \gamma'_0 F_{\alpha\beta,\lambda\mu} \\ & + \gamma'_0 \frac{c^2-1}{c^2}(F_{\rho\beta,\lambda\mu} u_\alpha + F_{\alpha\rho,\lambda\mu} u_\beta + F_{\alpha\beta,\rho\mu} u_\lambda + F_{\alpha\beta,\lambda\rho} u_\mu) u^\rho \\ & + \gamma'_0 \left(\frac{c^2-1}{c^2}\right)^2 (F_{\rho\beta,\sigma\mu} u_\alpha u_\lambda + F_{\alpha\rho,\lambda\sigma} u_\beta u_\mu \\ & + F_{\rho\beta,\lambda\sigma} u_\alpha u_\mu + F_{\alpha\rho,\sigma\mu} u_\beta u_\lambda) u^\rho u^\sigma),\end{aligned}$$

où

$$G_{\alpha\beta,\lambda\mu} = a_{\alpha\rho}\, a_{\beta\sigma}\, a_{\lambda\gamma}\, a_{\mu\delta}\, G^{\rho\sigma,\gamma\delta}.$$

Pour tout repère $R(\vec{u})$, l'interprétation physique des tenseurs F et G se fait à l'aide des tenseurs d'espace définis par les relations suivantes :

$$(45)\qquad \begin{cases} E_{\alpha\lambda} = \quad F_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, & D_{\alpha\lambda} = \quad G_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, \\ B_{\alpha\lambda} = -\bigstar F_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u_\mu, & H_{\alpha\lambda} = -\bigstar G_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, \\ B'_{\alpha\lambda} = -\quad F\bigstar_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, & H'_{\alpha\lambda} = -\quad G\bigstar_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, \\ M_{\alpha\lambda} = \bigstar F\bigstar_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, & N_{\alpha\lambda} = \bigstar G\bigstar_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu, \end{cases}$$

où

$$\bigstar F^{\alpha\beta,}{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\rho\sigma} F_{\rho\sigma,\lambda\mu}, \qquad F\bigstar_{\alpha\beta,}{}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu\rho\sigma} F_{\alpha\beta,\rho\sigma},$$

$$\bigstar F\bigstar^{\alpha\beta,\rho\sigma} = \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta\rho\sigma}\eta^{\lambda\mu\gamma\delta} F_{\rho\sigma,\gamma\delta}$$

et de même pour les tenseurs déduits de G.

De (44) et (45), il vient

$$(46)\qquad \begin{cases} D_{\alpha\lambda} = \varepsilon'_0 E_{\alpha\lambda}, & N_{\alpha\lambda} = \gamma'_0 M_{\alpha\lambda}, \\ \mu'_0 H_{\alpha\lambda} = B_{\alpha\lambda}, & \mu'_0 H'_{\alpha\lambda} = B'_{\alpha\lambda}, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(47)\qquad \varepsilon'_0 = \frac{\gamma'_0}{c^4}, \qquad \mu'_0 = \frac{c^2}{\gamma'_0},$$

γ'_0, ε'_0 et μ'_0 sont liées par les deux relations :

$$(48)\qquad \mu'^2_0\, \varepsilon'_0\, \gamma'_0 = 1;$$

$$(49)\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_0 \mu'_0}}.$$

Considérons deux géodésiques orientées dans le temps infiniment voisines Γ et $\delta\Gamma$ et donnons-nous sur Γ un champ continûment différentiable de vecteurs $\vec{u}$ de carré $-c^2$. Soit $\vec{\delta x}$ le vecteur orthogonal à $\vec{u}$ qui a pour origine un point x de Γ et pour extrémité un point de $\delta\Gamma$. L'évolution du vecteur $\vec{\delta x}$ le long de Γ est donnée par la formule de l'écart géodésique

$$(50)\qquad K^\alpha \equiv \frac{\nabla^2 \delta x^\alpha}{ds^2} = -h^{\rho\alpha} F_{\rho\beta,\lambda\mu} V^\beta V^\mu \delta x^\lambda,$$

où s est la longueur de l'arc de Γ mesuré avec une origine arbitraire et $\vec{V}$ est le vecteur tangent à Γ.

Choisissons au point x de Γ un repère galiléen $R(\vec{u})$. Pour ce repère nous aurons, en composantes explicites,

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{ll} E_{ij} = F_{io,jo}, & D^{ij} = G^{io,jo}, \\ B_{ij} = F_{mn,jo}, & H^{ij} = -G^{mn,jo}, \\ B'_{ij} = F_{io,rs}, & H'^{ij} = -G^{io,rs}, \\ M_{ij} = F_{mn,rs}, & N^{ij} = G^{mn,rs}, \\ \multicolumn{2}{c}{(\delta^{123}_{lmn} = +1,\ \delta^{123}_{jrs} = +1).} \end{array}\right.$$

La formule (50) s'explicite à son tour, compte tenu du fait que $\delta x^0 = 0$ et de (11) et (12), sous la forme

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{l} K^i = -\dfrac{1}{1-\beta^2}(E^i{}_m\,\delta x^m + B'^i{}_n\,\delta^n_{mk}\,v^k\,\delta x^m \\ \qquad\qquad + B^n{}_m\,\delta^i_{jn}\,v^j\,\delta x^m + M^n{}_p\,\delta^i_{jn}\,\delta^p_{mk}\,v^j\,v^k\,\delta x^m) \\ \qquad\qquad\qquad \left(\delta^n_{mk} = \delta^{123}_{nkm}\right). \end{array}\right.$$

La formule précédente peut s'écrire sous la forme condensée

$$(53)\quad \vec{k} = -\frac{1}{1-\beta^2}\left(E\,\delta\vec{x} + B'(\delta\vec{x}\wedge\vec{v}) - (B\,\delta\vec{x})\wedge\vec{v} - [M(\delta\vec{x}\wedge\vec{v})]\wedge\vec{v}\right),$$

où, par exemple, $E\,\delta\vec{x}$ désigne le produit intérieur $E^i{}_m\,\delta x^m$.

Le scalaire $W(\vec{u})$ défini par

$$(54)\qquad W = T_\alpha{}^\beta{}_{,\lambda}{}^\mu\, u^\alpha\, u_\beta\, u^\lambda\, u_\mu,$$

où T est le tenseur ([4] et [5])

$$(55)\quad T_\alpha{}^\beta{}_{,\lambda}{}^\mu = \frac{1}{4}\big(F_{\alpha\rho,\lambda\sigma}\,G^{\beta\rho,\mu\sigma} + \star G\star_{\alpha\rho,\lambda\sigma}\star F\star^{\beta\rho,\mu\sigma} \\ + g_{\alpha\gamma}\,h^{\beta\nu}\star F^{\gamma\delta}{}_{,\lambda\sigma}\star G_{\nu\delta,}{}^{\mu\sigma} + g_{\lambda\gamma}\,h^{\mu\nu}\,F\star_{\alpha\rho,}{}^{\gamma\delta}\,G\star^{\beta\rho}{}_{,\nu\delta}\big)$$

devient, en termes explicites,

$$(56)\qquad W = T_0{}^0{}_{,0}{}^0 = \frac{1}{4}(E_{ij}D^{ij} + M_{ij}N^{ij} + H_{ij}B^{ij} + H'_{ij}B'^{ij}).$$

On peut atteindre la notion des rayons gravitationnels, soit en les identifiant aux bicaractéristiques des équations d'Einstein (37), soit par recours à la définition d'un champ gravitationnel singulier, au sens restreint (Lichnerowicz) ou au sens large (Bel). Dans tous les cas on démontre que ces rayons sont les trajectoires d'un champ de vecteurs isotropes ($g_{\alpha\beta}\,l^\alpha l^\beta = 0$). Il en résulte, d'après les principes d'interprétation énoncés dans le paragraphe 1 et de leur extension à la relativité générale, que la vitesse d'espace de propagation des ondes et radiations gravitationnelles est égale à $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_0 \mu'_0}}$ et ceci quel que soit $\vec{u}$.

D'autre part, par changement de repère galiléen, les relations (46), (53) et (56) restent valables.

5. Interprétation physique des constantes γ'_0, ε'_0 et μ'_0. — Supposons que le tenseur d'impulsion-énergie du milieu envisagé soit du type matière pure

$$P_{\alpha\beta} = c^2 \rho_0 n_\alpha n_\beta \qquad (P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} T^{\alpha\beta}),$$

où ρ_0 est ici la densité de matière propre et où $\vec{u}$ est un vecteur de carré-1. Dans ce cas, les équations d'Einstein (37) s'écrivent

$$(57) \qquad R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k \rho_0}{c^2}\left(n_\alpha n_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) \qquad (R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} Q^{\rho\sigma}).$$

Nous supposerons, en outre :

1° Le champ de gravitation faible. Les potentiels de gravitation admettent alors des développements de la forme

$$\begin{aligned} g_{00} &= -c^2 + \psi_{00} \\ g_{0i} &= \psi_{0i} \qquad\qquad [\bmod\ o(\epsilon^2)], \\ g_{ij} &= 1 + \psi_{ij} \end{aligned}$$

où

$$|\psi_{\alpha\beta}| \leq \epsilon \qquad \text{et} \qquad |\partial_\gamma \psi_{\alpha\beta}| \leq \epsilon.$$

Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est donc, dans un domaine de V_4, de la forme

$$(58) \qquad g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + (1 - c^2)\, u_\alpha u_\beta + \psi_{\alpha\beta} \qquad \bmod\ o(\epsilon^2),$$

où dans tout ce domaine :

$$\begin{aligned} &a_{00} = -1, \qquad a_{ii} = 1, \qquad a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta, \\ &u_0 = -1, \qquad u_i = 0. \end{aligned}$$

Quant au tenseur $h^{\alpha\beta}$ défini par (39) nous aurons, d'après (58),

$$(59) \qquad h^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + \frac{c^2 - 1}{c^2}\, u^\alpha u^\beta \qquad [\bmod\ o(\epsilon)].$$

On sait que les $\psi_{\alpha\beta}$ ne sont définis qu'à la transformation près

$$(60) \qquad \psi_{\alpha\beta} \to \psi_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \Phi_\beta + \partial_\beta \Phi_\alpha,$$

ce qui permet de les astreindre à satisfaire les quatre conditions

$$(61)\qquad \left(a^{\alpha\beta}+\frac{c^2-1}{c^2}u^\alpha u^\beta\right)(\partial_\alpha\psi_{\beta\gamma}+\partial_\beta\psi_{\alpha\gamma}-\partial_\gamma\psi_{\alpha\beta})=0$$

qui ne sont autres que la partie principale des conditions d'isotermie.

2° L'espace-temps envisagé est stationnaire et les développements (58) se rapportent à un système de coordonnées adapté. Nous aurons donc, d'après cette hypothèse,

$$\partial_{0\alpha\beta}\ldots\psi_{\rho\sigma}=0.$$

3° Le milieu considéré est presque au repos pour ce système de coordonnées. Par conséquent, le vecteur $\vec{n}$ admet des développements de la forme

$$n_0=-c,\qquad n_i=0\qquad [\text{mod } o(\epsilon)].$$

Ainsi

$$n_\alpha=cu_\alpha\qquad [\text{mod } o(\epsilon)].$$

Ceci posé, par des calculs bien connus on voit que le système d'équations (57) devient, à l'approximation envisagée,

$$(62)\qquad -\frac{1}{2}\Delta\psi_{00}=4\pi k\rho_0$$

$$(63)\qquad \Delta\psi_{\alpha i}=0\qquad [\text{mod } o(\epsilon^2)]$$

D'autre part,

$$(64)\qquad E_{ij}=F_{i0,j0}=-\frac{1}{2}\partial_{ij}\psi_{00}\qquad [\text{mod } o(\epsilon^2)],$$

E_{ij} étant le tenseur associé à $\vec{u}$ défini par (45). De (62) et (64), il vient

$$(65)\qquad \sum_i\partial_i E_{ij}=4\pi k\partial_j\rho_0.$$

Considérons maintenant, comme cas particulier des équations (42), l'équation

$$\partial_i G^{i0,j0}=\gamma'_0\partial^j Q^{00}\qquad [\text{mod } o(\epsilon^2)]\quad (\partial^j=\partial_j).$$

Sous nos hypothèses, cette équation devient

$$(66)\qquad \sum_i\partial_i D_{ij}=\frac{4\pi k\gamma'_0}{c^4}\partial_j\rho_0,$$

où $D_{ij}=G_{i0,j0}$. Or, puisque d'après (46),

$$D_{ij}=\varepsilon'_0 E_{ij},$$

on constate que (65) et (66) sont parfaitement compatibles avec (47). Cette compatibilité d'ailleurs entraîne qu'on ne peut pas identifier les constantes γ'_0 et ε'_0. Toutefois, des considérations élémentaires peuvent justifier un choix.

a. La comparaison entre (66) et la formule analogue de l'électromagnétisme :

(67) $$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_0 \quad (\rho_0 \text{ est ici la densité de charge})$$

conduit à penser que le deuxième membre de (66) ne doit dépendre d'aucune constante caractéristique du milieu.

b. L'analogie formelle entre les lois de Coulomb et de Newton,

$$F = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}, \qquad F = k\frac{mm'}{r^2}$$

suggère que k doit jouer dans toute théorie de la gravitation le même rôle que $\frac{1}{\varepsilon_0}$ en électromagnétisme.

Quelle que soit la valeur accordée à ces anologies, nous nous sommes décidé à poser :

(68) $$\varepsilon'_0 = \frac{1}{k}, \qquad \gamma'_0 = \frac{c^4}{k},$$

ce qui donne pour μ'_0, d'après (48) ou (49),

(69) $$\mu'_0 = \frac{k}{c^2}.$$

Il doit être clairement entendu que ce choix constitue une hypothèse.

6. Les équations du champ d'ordre supérieur dans le vide en première approximation. Analyse dimensionnelle générale. — Nous supposons ici, pour simplifier, que $R_{\alpha\beta} = 0$ et, en outre, que les potentiels de gravitation admettent des développements de la forme (58). Mais nous ne supposons pas que l'espace-temps soit stationnaire. Sous ces hypothèses, le système d'équations (40) et (42) s'explicite à l'approximation envisagée sous la forme

(70) $$\begin{cases} \partial_k B'_{pj} - \partial_p B'_{kj} + \partial_t M_{ij} = 0, \\ \partial_k E_{pj} - \partial_p E_{kj} + \partial_t B_{ij} = 0, \\ \sum_i \partial_i M_{ij} = 0, \\ \sum_i \partial_i B_{ij} = 0 \end{cases}$$

$(t \equiv x^0$, variable temporelle$)$ $\quad (\delta^{1\,2\,3}_{kpi} = +1)$;

$$
(71) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\partial_k H_{pj} - \partial_p H_{kj} - \partial_l D_{ij} = 0,\\
&\partial_k N_{pj} - \partial_p N_{kj} - \partial_l H'_{i\,j} = 0,\\
&\sum \partial_i D_{ij} = 0,\\
&\sum \partial_i H_{ij} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a tenu compte de (51).

L'ensemble d'équations (46), (53), (56), (62), (64), (65), (68), (69), (70) et (71) nous fournit un système d'équations surabondant au point de vue de l'analyse dimensionnelle. On vérifie sans peine qu'il est tout à fait cohérent. Voici le résultat de cette analyse pour un système d'unités dont les grandeurs fondamentales sont : M (masse), L (longueur) et T (temps)

$$
\begin{array}{lll}
[\varepsilon'_0] = ML^{-3}T^{-2}, & [\mu'_0] = M^{-1}L, & [\gamma'_0] = MLT^{-2},\\
[E] = T^{-2}, & [M] = L^{-2}, & [B] = [B'] = L^{-1}T^{-1},\\
[D] = ML^{-3}, & [N] = ML^{-1}T^{-2}, & [H] = [H'] = ML^{-2}T^{-1}
\end{array}
$$

$$([E] = [E_{ij}], \ldots).$$

Les dimensions de W sont alors

$$[W] = ML^{-3}T^{-2}.$$

Les dimensions de W sont donc, si l'on peut dire, celles d'une énergie par unité de volume ET par unité de surface. Le fait que l'énergie du champ gravitationnel apparaisse sous cette forme est d'ailleurs lié intimement au fait que le champ de gravitation est essentiellement un champ d'accélérations relatives plutôt qu'un champ d'accélérations tout court.

7. Le champ de gravitation avec induction. — Un champ gravitationnel avec induction dans un milieu isotrope est défini par la donnée sur V_4 de :

1° Un champ de tenseurs symétriques $g_{\alpha\beta}$ dont la forme quadratique associée

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{72}$$

est régulière de type hyperbolique normal. (72) définit la géométrie de V_4.

2° Un deuxième champ de tenseurs symétriques $\bar{g}_{\alpha\beta}$ dont la forme quadratique associée est régulière et de même type que (72). $\bar{g}_{\alpha\beta}$ est le

« potentiel tenseur » du champ. Soit $\vec{u}$ un vecteur de carré-c^2 colinéaire au vecteur vitesse d'univers du milieu considéré. Si $a_{\alpha\beta}(\vec{u})$ est le tenseur associé à $\vec{u}$ défini par la décomposition

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\vec{u}) + (1 - c^2)\, u_\alpha u_\beta$$

le tenseur $\bar{g}_{\alpha\beta}$ admet la décomposition

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\vec{u}) + (1 - v^2)\, u_\alpha u_\beta \qquad (v^2 < c^2).$$

Les équations du champ portent sur les $\bar{g}_{\alpha\beta}$. Elles s'écrivent, si le milieu envisagé est du type matière pure,

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \frac{8\pi\rho_0 c^2}{\gamma'}\left(n_\alpha n_\beta + \frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\right),$$

où γ' est une constante caractéristique du milieu $\left(\text{égale à } \frac{c^4}{k} \text{ en absence d'induction}\right)$ et n_α est un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ tel que

$$\bar{h}^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = -1,$$

$\bar{h}^{\alpha\beta}$ étant défini par

$$\bar{h}^{\alpha\rho}\bar{g}_{\beta\rho} = \delta^\alpha_\beta;$$

$\bar{R}_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci construit avec les $\bar{g}_{\alpha\beta}$.

3° Un champ de tenseurs $F_{\alpha\beta.\lambda\mu}$, tenseurs de courbure associés à la forme quadratique défini par $\bar{g}_{\alpha\beta}$.

$$F_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \bar{g}_{\alpha\rho}\bar{R}^\rho{}_{\beta,\lambda\mu}.$$

4° Un deuxième champ de tenseurs du quatrième ordre lié au précédent par les formules

$$G^{\alpha\beta,\lambda\mu} = \gamma'\bar{h}^{\alpha\rho}\bar{h}^{\beta\sigma}\bar{h}^{\lambda\gamma}\bar{h}^{\mu\delta}F_{\rho\sigma,\gamma\delta}.$$

Ceci posé pour un repère galiléen associé à $\vec{u}$, toutes les formules que nous avons établies en absence d'induction restent valables ici : il suffit de remplacer ε'_0, μ'_0, γ'_0 et c par ε', μ', γ' et v. En particulier, nous aurons

$$(73) \qquad \mu'^2\varepsilon'\gamma' = 1,$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}},$$

v étant le module de la vitesse d'espace des ondes et radiations gravitationnelles quelle que soit la direction de propagation. ε' et μ', tout comme γ', sont des constantes caractéristiques du milieu envisagé.

Signalons enfin que, en complète analogie avec le cas électromagnétique, une anisotropie induite apparaît dès qu'on rapporte T_x à un repère galiléen non associé à $\vec{u}$.

APPENDICE.

Nous donnons ci-après entre crochets quelques paires de formules qui peuvent être considérées comme analogues. Ceci précisera dans quel sens nous parlons d'analogie entre le champ gravitationnel et le champ électromagnétique.

Formalisme quadridimensionnel : [(15) ; (40)], [(17) ; (42)], [(26) ; (50)], [(19) ; (37)], [(29) ; (55)].

Formalisme tridimensionnel : [(21) ; (45)], [(27) ; (53)], [(30) ; (56)].

Approximation linéaire : [(14) ; (60)], [(18) ; (61)], [(25) ; (70) et (71)].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, A. Colin, Paris, 1955.

[2] M.-A. Tonnelat, *Les principes de la théorie électromagnétique et de la Relativité*, Masson, Paris, 1959.

[3] M.-Q. Pham, *J. Rat. Mech. Anal.*, t. 5, 1956.

[4] et [5] L. Bel, *C. R. Acad. Sc. t.* 247, 1958, p. 1095 et 2097 ; *Ibid.*, t. 248, 1959, p. 1297 et 2561.

[6] L. Bel, *Thèse*, Paris, 1960. La lecture de ce travail aidera à mieux comprendre la deuxième partie de ce Mémoire.