ANNALES DE L'I. H. P.

PIERRE HILLION
JEAN-PIERRE VIGIER

Fonctions propres des opérateurs quantiques de rotation associés aux angles d'Euler dans l'espace-temps

Annales de l'I. H. P., tome 16, nº 3 (1959), p. 161-216
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1959__16_3_161_0>

Fonctions propres des opérateurs quantiques de rotation associés aux angles d'Euler dans l'espace-temps

par

Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER,
Institut Henri Poincaré (Paris).

INTRODUCTION.

Dans une étude antérieure [1], nous avons montré comment il était possible de généraliser à l'espace-temps de la relativité restreinte la notion classique des angles d'Euler de l'espace euclidien à trois dimensions. Cette généralisation implique l'introduction de trois « angles » complexes et de leurs conjugués, les rotations correspondantes s'effectuant autour de bivecteurs self-duaux.

Or, comme on le sait, la théorie des fonctions propres des opérateurs quantiques de rotation correspondant aux angles d'Euler dans l'espace tridimensionnel habituel à métrique euclidienne permet de construire un espace vectoriel de Hilbert dans lequel il est possible de définir une norme, en attribuant à cette norme le sens d'une probabilité, comme il est habituel de le faire en mécanique quantique.

Il est donc tentant d'essayer de pousser plus loin l'analogie établie dans l'étude précédente et d'étendre la théorie mentionnée ci-dessus au groupe de Lorentz en utilisant les opérateurs de rotation correspondant aux rotations complexes effectuées autour de bivecteurs self-duaux. C'est un problème rendu délicat à cause, d'une part, de la non-compacité du groupe de Lorentz et, d'autre part, du fait qu'il faut s'attendre à trouver une métrique indéfinie dans l'espace vectoriel des

---

[1] F. HALBWACHS, P. HILLION, J.-P. VIGIER, *voir* ce numéro des *Annales de l'Institut Henri Poincaré.*

fonctions propres des opérateurs quantiques de rotation. Nous avons déjà essayé de résoudre ce problème ([2]) dans un cas où la nature du mouvement impose une borne naturelle aux variations de la partie imaginaire des angles complexes, puis dans le cas général ([3]), mais s'il avait été possible de définir une valeur moyenne covariante des opérateurs, il avait été impossible de trouver une norme covariante. C'est pourquoi nous voudrions reprendre cette question sous un angle un peu différent.

Rappelons d'abord brièvement la théorie des opérateurs de rotation à trois dimensions.

Partons de deux systèmes d'axes orthogonaux et unitaires, l'un fixe, défini par les trois vecteurs $a^r_k (k=1, 2, 3;\ r=1, 2, 3)$ et l'autre, mobile, caractérisé par les trois vecteurs $b^s_j (j=1, 2, 3;\ s=1, 2, 3)$:

r, s repèrent les numéros des vecteurs;

j, k leurs composantes.

On a les relations :

$$a^r_k a^s_k = \delta^{rs}, \qquad b^r_k b^s_k = \delta^{rs},$$
$$a^r_j a^r_k = \delta_{jk}, \qquad b^r_j b^r_k = \delta_{jk}.$$

Si l'on désigne par $\omega_i (\omega_i = 1, 2, 3)$ les trois angles d'Euler θ, φ, ψ, qui permettent de passer des a^r_k aux b^s_j et si l'on désigne par J_k et J'_k les projections des opérateurs de rotation (exprimés en fonction des angles d'Euler) respectivement sur le système des a^r_k et sur celui des b^s_j on trouve pour expressions explicites de ces opérateurs ([4]) $(j^2 = -1)$:

$$\text{sur } a^r_k \begin{cases} J_1 = -j\hbar\left(-\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\mathrm{g}\,\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\right), \\ J_2 = -j\hbar\left(\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\mathrm{g}\,\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\right), \\ J_3 = -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}; \end{cases}$$

$$\text{sur } b^r_k \begin{cases} J'_1 = -j\hbar\left(\sin\psi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi\cot\mathrm{g}\,\theta\dfrac{\partial}{\partial\psi} - \dfrac{\cos\psi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ J'_2 = -j\hbar\left(\cos\psi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cos\psi\cot\mathrm{g}\,\theta\dfrac{\partial}{\partial\psi} + \dfrac{\sin\psi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ J'_3 = -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial\psi}. \end{cases}$$

([2]) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Cahiers de Physique*, n^os 107-108, p. 283.

([3]) P. HILLION et J.-P. VIGIER, non publié.

([4]) C. VAN WINTER, *Thèse*, Gröningen, 1957.

On peut alors chercher les fonctions propres simultanées des opérateurs J_3, J'_3, $J^2 = (J')^2$ dont il est facile de voir qu'ils commutent. Considérons l'espace vectoriel de ces fonctions propres $f(\omega_i)$, on montre aisément que ces fonctions sont quadratiquement intégables, c'est-à-dire telles que :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\pi} f^*(\omega_i)f(\omega_i)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi,$$

soit bien définie, $f^*(\omega_i)$ désignant le complexe conjugué de $f(\omega_i)$.

Ce sont des vecteurs d'un espace de Hilbert dans lequel le produit scalaire est défini par

$$(f, g) = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f^*(\omega_i)g(\omega_i)\sin\theta\, d\theta.$$

La valeur moyenne d'un opérateur A tel que J_3, par exemple, sera alors donnée par $\frac{(f, Af)}{(f, f)}$. Si A est hermitien, cette valeur moyenne est réelle. J_3, J'_3, J^2 sont hermitiens.

Explicitement, les fonctions propres de ces trois opérateurs à un coefficient de normalisation près sont

$$\begin{aligned} Y_l^{m,m'}(\omega_i) = {} & \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-m+m'}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-m-m'} \\ & \frac{d^{l-m}}{d\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{l-m}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2l-2m'}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2l+2m'} e^{j(m\varphi+m'\psi)}, \end{aligned}$$

où :

$$l = 0,\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad \frac{3}{2},\quad \dots,$$

$$m, m' = -l,\quad -l+1,\quad \dots,\quad l-1,\quad l$$

et l'on a la relation :

$$(Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi), Y_k^{n,n'}(\theta, \varphi, \psi)) = \delta_{lk},\ \delta_{mn}\,\delta_{m'n'}.$$

C. Van Winter (4) a, en outre, montré que si l'on considère le sous-espace vectoriel de ces fonctions pour lequel non seulement l est maintenu fixe, mais m' également, les valeurs $Y_l^{m,m'}(\omega_i)$ de ce sous-espace se transforment suivant la représentation irréductible $\mathcal{D}(l)$ du groupe des rotations à trois dimensions.

Ce sont les résultats précédents qu'il faut généraliser pour les fonctions propres des opérateurs quantiques relativistes; avec les difficultés inhérentes au groupe de Lorentz et à la métrique de l'espace-temps qu'on a signalées plus haut. Il y aura donc lieu de prendre certaines précautions pour définir un produit scalaire dans l'espace vectoriel des fonctions propres des opérateurs de rotation.

Nous allons montrer qu'il est possible de définir deux types de produit scalaire, conduisant à des métriques différentes, que nous appellerons métrique forte et métrique faible. La justification de cette terminologie apparaîtra au cours de l'étude. Nous traiterons dans une première partie de la métrique faible et dans une seconde partie de la métrique forte. Auparavant, nous rappellerons les définitions et les propriétés des opérateurs quantiques de rotation dans l'espace-temps.

Les opérateurs de rotation relativistes quantifiés. — Dans l'étude antérieure déjà mentionnée [1], nous avons montré qu'étant donné trois angles réels ψ_1, θ_1, φ_1, et trois pseudo-angles imaginaires purs $i\psi_2$, $i\theta_2$, $i\varphi_2$, permettant de décrire le mouvement d'un tétrapode a^{ξ}_{μ} (ensemble de quatre quadrivecteurs orthonormés, un du genre temps et trois du genre espace) sous une transformation du groupe orthochrome propre de Lorentz, les rotations d'angles, $\frac{1}{2}\psi^{\pm}$, $\frac{1}{2}\theta^{\pm}$, $\frac{1}{2}\varphi^{\pm}$, où

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi^{\pm}=\psi_1\pm i\psi_2 \\ \theta^{\pm}=\theta_1\pm i\theta_2, \\ \varphi^{\pm}=\varphi_1\pm i\varphi_2, \end{array}\right.$$

s'effectuent autour de bivecteurs self-duaux dont la direction est laissée invariante sous cette transformation de Lorentz.

On peut alors définir deux espaces euclidiens tridimensionnels complexes conjugués E^{+}_{a} et E^{-}_{a} associés au tétrapode a^{ξ}_{μ} et de la même façon deux espaces tridimensionnels euclidiens complexes conjugués E^{+}_{b} et E^{-}_{b} associés au tétrapode b^{ξ}_{μ}.

D'une façon explicite, les valeurs $A^{r\pm}_{k}$ (k, $r=1, 2, 3$) qui définissent les deux trièdres $E^{\pm}_{a}$ sont données par les relations :

$$(2)\qquad A^{r\pm}_{k}=a^{r}_{k}a^{4}_{4}-a^{r}_{4}a^{4}_{k}\pm\varepsilon_{ijk}a^{r}_{i}a^{4}_{j}.$$

Ils sont complexes parce que a^{4}_{j} est imaginaire pur. Les vecteurs sont orthonormés.

D'une façon identique les deux trièdres $E^{\pm}_{b}$ sont définis par les vecteurs complexes orthonormés :

$$(3)\qquad B^{r\pm}_{k}=b^{r}_{k}b^{4}_{4}-b^{r}_{4}b^{4}_{k}\pm\varepsilon_{ijk}b^{r}_{i}b^{4}_{j}.$$

On a montré que les angles $\omega^+ = \{\theta^+, \varphi^+, \psi^+\}$ repéraient le trièdre E_b^+ par rapport au trièdre E_a^+ et les angles $\omega^- = \{\theta^-, \varphi^-, \psi^-\}$, le trièdre E_b^- par rapport au trièdre E_a^-. Ces relations matérialisent l'isomorphisme indiqué par Cartan (5) entre le groupe de Lorentz et le groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées.

On est donc ramené pour étudier le mouvement du tétrapode b_μ^ξ par rapport au tétrapode a_μ^ξ à l'étude du mouvement simultané du trièdre E_b^+ par rapport au trièdre et de E_b^- par rapport à E_a^-. On en déduit immédiatement les projections des opérateurs différentiels de rotation sur les axes $A_k'^{\pm}$ et $B_k'^{\pm}$,soit :

$$(4) \qquad \text{sur } A_k'^{\pm} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1^{\pm}} = -\sin\varphi^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - \cos\varphi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}} + \dfrac{\cos\varphi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\dfrac{\partial}{\partial\psi^{\pm}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2^{\pm}} = \cos\varphi^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - \sin\varphi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}} + \dfrac{\sin\varphi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\dfrac{\partial}{\partial\psi^{\pm}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3^{\pm}} = \dfrac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}} \end{cases}$$

et

$$(5) \qquad \text{sur } B_k'^{\pm} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1'^{\pm}} = \sin\psi^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} + \cos\psi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\psi^{\pm}} - \dfrac{\cos\psi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\dfrac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2'^{\pm}} = \cos\psi^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - \sin\psi^{\pm}\operatorname{cotg}\theta^{\pm}\dfrac{\partial}{\partial\psi^{\pm}} + \dfrac{\sin\psi^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}}\dfrac{\partial}{\partial\varphi^{\pm}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3'^{\pm}} = \dfrac{\partial}{\partial\psi^{\pm}}. \end{cases}$$

On sait que la mécanique quantique déduit les opérateurs précédents des opérateurs de rotation quantifiés en les multipliant par $\sqrt{-1}\,\hbar$, où $\hbar$ est la constante de Planck. Nous justifierons cette quantification dans une autre étude (6) et ici nous nous contenterons de multiplier les formules précédentes brutalement par $\sqrt{-1}\,\hbar$ en considérant que ceci fournit les moments cinétiques relativistes quantifiés. Nous admettrons, en outre, que ceux de ces opérateurs que nous utiliserons dans la suite sont des constantes du mouvement.

Le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ introduit ici une difficulté parce qu'il n'a pas la même signification physique que le nombre i introduit dans la définition (1) des angles complexes. Ce dernier provient de la nature indéfinie de la métrique de l'espace-temps. Dans la suite, en

(5) É. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris.
(6) D. Bohm, P. Hillion et J.-P. Vigier (sous presse).

suivant une suggestion de Synge ([7]) et de Möller ([8]) nous écrirons $\sqrt{-1}$ différemment en le désignant par i quand il est une conséquence de la métrique et par j quand il provient de la quantification du mouvement.

Nous allons revenir sur cette question un peu plus loin.

On aura, en outre, les relations :

$$i^2 = j^2 = ij = -1. \tag{6}$$

On définira alors les opérateurs de rotation quantifiés en termes d'angles d'Euler par les relations :

$$J_k^{\pm} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x_k^{\pm}}, \qquad J_k'^{\pm} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x_k'^{\pm}} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Ces opérateurs ont été étudiés en détails par C. Van Winter ([4]) dans sa thèse. Ils satisfont, en particulier, aux relations de commutation :

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} [J_k^+, J_k^-] = 0, \qquad [J_k^+, J_j'^{\pm}] = 0, \qquad [J_k'^+, J_j'^-] = 0, \\ [J_3^+, (J^+)^2] = 0, \qquad [J_3^-, (J^-)^2] = 0, \qquad [J_3'^+, (J'^+)^2] = 0, \qquad [J_3'^-, (J'^-)^2 = 0, \\ \text{avec} \quad (J^+)^2 = (J'^+)^2, \qquad (J^-)^2 = (J'^-)^2 \end{array} \right.$$

et aux relations habituelles des opérateurs de rotation tridimensionnels :

$$[J_k^{\pm}, J_j^{\pm}] = -jJ_i^{\pm}, \qquad [J_k'^{\pm}, J_j'^{\pm}] = -jJ_i'^{\pm}, \tag{9}$$

i, j, k, permutation circulaire de 1, 2, 3.

Nous appellerons par analogie à ce qui a été fait à trois dimensions, $Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)$ les fonctions propres simultanées des trois opérateurs

$$J_3^+ = -j\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi^+}, \qquad J_3'^+ = -j\hbar \frac{\partial}{\partial \psi^+}, \qquad (J^+)^2 = (J'^+)^2 = J_k^+ J_k^+, \tag{10}$$

qui existent à cause des relations de commutation précédentes. De la même façon $Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^-)$ seront les fonctions propres simultanées des opérateurs J_3^-, $J_3'^-$, $(J^-)^2 = (J'^-)^2$.

Pour l'instant nous ne pouvons rien dire de l^+, l^-, m^+, m^-, m'^+, m'^- sinon qu'il s'agit de scalaires réels ou complexes. Nous donnons ci-dessous l'expression explicite ([9]) de $(J^{\pm})^2$:

$$(J^{\pm})^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^{\pm 2}} + \frac{\cos\theta^{\pm}}{\sin\theta^{\pm}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\pm}} \frac{1}{\sin^2\theta^{\pm}} \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^{\pm 2}} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^{\pm 2}} - 2\cos\theta^{\pm} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^{\pm} \partial \psi^{\pm}} \right) \right]. \tag{11}$$

([7]) J. L. SYNGE, *Relativity, the special theory*, North Holland Publ.

([8]) C. MÖLLER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 11-12, 1949, p. 251.

([9]) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Cahiers de Physique*, nos 107-108, p. 283.

Dans toute la suite de ce travail, pour simplifier les formules on posera $\hbar = 1$, et l'on désignera par ω^+ l'ensemble des angles θ^+, φ^+, ψ^+, et ω^- l'ensemble θ^-, φ^-, ψ^- soit :

$$\omega^+ = \{ \theta^+, \varphi^+, \psi^+ \}, \qquad \omega^- = \{ \theta^-, \varphi^-, \psi^- \} \qquad (\omega^+ = \overline{\omega^-}). \tag{12}$$

La métrique forte et la métrique faible. — Considérons les fonctions propres $Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)$ et $Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-)$, on peut se placer à deux points différents :

a. Appelons $\mathcal{E}^+$ l'espace vectoriel des fonctions $Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)$ et $\mathcal{E}^-$ l'espace vectoriel des fonctions $Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-)$. Considérons ces deux espaces comme différents, ce qui revient à faire la différence entre les nombres imaginaires i et j. Soit alors $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel produit cartésien de $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-. \tag{13}$$

$\mathcal{E}$ se compose des couples de fonctions :

$$\left\{ Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+),\ Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-) \right\}.$$

Nous appellerons $U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)$ les éléments de $\mathcal{E}$; on a alors

$$U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-) = \left\{ Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+),\ Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-) \right\}. \tag{14}$$

Supposons qu'on ait réussi à définir un produit scalaire dans $\mathcal{E}^+$ et dans $\mathcal{E}^-$ de façon que ces espaces soient hilbertiens, alors $\mathcal{E}$ sera aussi un espace de Hilbert et si $f^+ \in \mathcal{E}^+$ et $f^- \in \mathcal{E}^-$ on aura les relations suivantes :

$$c\{f^+, f^-\} = \{cf^+, cf^-\}, \tag{15}$$

où c est un scalaire, avec :

$$\{f_1^+, f_1^-\} + \{f_2^+, f_2^-\} = \{f_1^+ + f_2^+, f_1^- + f_2^-\}, \tag{16}$$

$$(\{f_1^+, f_1^-\}, \{f_2^+, f_2^-\}) = (f_1^+, f_2^+) + (f_1^-, f_2^-). \tag{17}$$

On déduira donc la norme d'un vecteur $f \in \mathcal{E}$ de composantes $f^+ \in \mathcal{E}^+$ et $f^- \in \mathcal{E}^-$ par la relation

$$\|f\| = \sqrt{(f^+, f^+) + (f^-, f^-)} \tag{18}$$

ou le module de la quantité sous le radical si la métrique est indéfinie.

Si T est une transformation opérant sur les vecteurs de $\mathcal{E}$ sa valeur moyenne sera définie par la relation

$$(19)\quad \langle \mathrm{T} \rangle = \frac{(f, \mathrm{T}f)}{(f, f)} = \frac{(\{f^+, f^-\}, \mathrm{T}\{f^+, f^-\})}{(\{f^+, f^-\}, \{f^+, f^-\})} = \frac{(f^+, \mathrm{T}f^+) + (f^-, \mathrm{T}f^-)}{(f^+, f^+) + (f^-, f^-)}.$$

Si l'on adopte ce point de vue on dira qu'on est dans le cas de la métrique forte, on en verra la raison plus loin. Il apparaît que le seul problème à résoudre est celui de la définition d'un produit scalaire dans $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$.

Le fait qu'on considère comme différents les deux espaces $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ est la justification de la distinction que nous avons imposée entre les grandeurs complexes provenant de la métrique et celles provenant de la quantification. Ceci nous conduira éventuellement à envisager deux types de transformations complexes conjuguées

$$(20)\qquad [f(j, \omega^+, \omega^-)]^* = f(-j, \omega^+, \omega^-)$$

ne portant que sur les grandeurs définies avec j, et

$$(21)\qquad \overline{f(j, \omega^+, \omega^-)} = f(j, \omega^-, \omega^+)$$

ne portant que sur les grandeurs définies avec i.

b. Plaçons-nous maintenant à un second point de vue dans lequel on considère comme identiques les deux espaces $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$. Dans ces conditions on sera amené à définir les fonctions propres $\mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)$ simultanées des opérateurs $\mathrm{J}_3^{\pm}$, $\mathrm{J}_3'^{\pm}$, $(\mathrm{J}^+)^2$, $(\mathrm{J}^-)^2$ par la relation :

$$(22)\qquad \mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-) = \mathrm{Y}_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)\,\mathrm{Y}_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-).$$

Dans cette relation il s'agit d'un produit ordinaire.

Dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)$ il faudra définir un produit scalaire :

$$(23)\qquad \left(\mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-),\ \mathrm{U}_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(\omega^+, \omega^-)\right)$$

d'où l'on déduira la norme d'un vecteur $\mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)$ par la relation :

$$(24)\qquad \left\| \mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'}(\omega^+, \omega^-) \right\| = \sqrt{\left(\mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-),\ \mathrm{U}_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right)}$$

ou le module de la quantité sous le radical si la métrique est indéfinie.

Soit T une transformation opérant sur l'espace des vecteurs

$U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)$, sa valeur moyenne sera :

$$(25) \qquad \langle T \rangle = \frac{\left(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-),\ TU_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right)}{\left(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-),\ U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right)}.$$

Si l'on adopte ce point de vue on dira qu'on est dans le cas de la métrique faible. Pour bien marquer qu'on considère les fonctions $Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)$ et $Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-)$ comme appartenant au même espace vectoriel, on les écrira

$$Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega_1, i\omega_2), \quad Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega_1, i\omega_2).$$

Ce sont des fonctions opérant sur le même espace vectoriel et correspondant à des valeurs différentes des paramètres $l_\pm$, $m_\pm$, $m'_\pm$. Il n'y a pas lieu alors de distinguer entre les deux types de grandeurs complexes et l'on considérera qu'elles sont toutes formées avec l'imaginaire i.

Il n'y aura donc qu'une opération de conjugaison complexe :

$$(26) \qquad \overline{f(i, \omega_1, \omega_2)} = f(-i, \omega_1, \omega_2).$$

Nous commencerons par traiter le cas de la métrique faible.

PREMIÈRE PARTIE.

LA MÉTRIQUE FAIBLE.

1. Espace des fonctions propres simultanées des opérateurs J_3^+ et J_3. — 1.I. Définition du produit scalaire. — Suivant les remarques que nous avons exposées à la fin du paragraphe précédent, dans toute cette partie :

a. nous n'aurons affaire qu'à un seul type de grandeurs complexes utilisant l'imaginaire i;

b. nous ne considérerons que des fonctions de ω_1 et ω_2 et non pas de ω^+ et ω^-.

Le premier travail est donc de calculer J_3^+, J_3^- et leurs fonctions propres en fonction de φ_1 et φ_2.

On a

$$J_3^\pm = -i\frac{\partial}{\partial\varphi^\pm}$$

comme $\varphi^+ = \varphi_1 + i\varphi_2$,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^+} = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi^+} + \frac{\partial}{\partial(i\varphi_2)}\frac{\partial(i\varphi_2)}{\partial\varphi^+} = \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial(i\varphi_2)},$$

d'où

$$J_3^+(i, \varphi_1, \varphi_2) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\partial}{\partial\varphi_2}, \tag{27}$$

$$J_3^-(i, \varphi_1, \varphi_2) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2}. \tag{28}$$

Les fonctions propres simultanées de J_3^+ et J_3^- sont les fonctions

$$F^{m^+,m^-}(\varphi^+, \varphi^-) = e^{i(m^+\varphi^+ + m^-\varphi^-)},$$

où, pour l'instant, les valeurs propres m^+ et m^- sont simplement des scalaires réels ou complexes quelconques.

Comme

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-), \qquad i\varphi_2 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2},$$

on aura

$$F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) = e^{\frac{i}{2}(m^+\varphi^+ + m^-\varphi^-)},$$

soit

$$F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) = e^{\frac{i}{2}(m^+ + m^-)\varphi_1} e^{\frac{m^- - m^+}{2}\varphi_2}. \tag{29}$$

Il faut donc définir dans l'espace des fonctions $F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$ un produit scalaire de telle sorte que cet espace vectoriel soit hilbertien. Or, on a affaire à des fonctions de deux variables φ_1 et φ_2 qui ne sont pas des fonctions bornées en φ_2. Donc dans les intégrations qu'on aura à effectuer, il faudra toujours préciser dans quel ordre elles sont faites. Nous postulons que l'intégration est toujours effectuée en premier par rapport aux angles réels ω_1.

Dans ces conditions, dans l'espace vectoriel des fonctions $F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$ on définit la fonctionnelle bilinéaire

$$\begin{aligned}(F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{n^+,n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)) \\ = \lim_{\Phi\to\infty}\frac{1}{2\Phi}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\int_0^{4\pi}(F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star F^{n^+,n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\,d\varphi_1\right]d\varphi_2,\end{aligned} \tag{30}$$

où :

a. Φ est un nombre réel positif arbitraire;

b. le crochet indique que l'intégrale sur φ_1 est effectuée en premier;

c. $(F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star$ est la fonction hermitienne conjuguée de $F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$.

Par définition,

$$(31)\quad (F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))^* = \overline{F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,-\varphi_2)} = F^{\overline{m^+},\overline{m^-}}(-i,\varphi_1,-\varphi_2),$$

où $\overline{m^+}$ et $\overline{m^-}$ sont les quantités complexes conjuguées de m^+ et m^-.

Nous montrerons que cette forme bilinéaire est symétrique hermitienne, c'est-à-dire qu'on a :

$$(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ F^{n^+,n^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)) = (F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ F^{n^+,n^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))^*,$$

soit d'après (30) :

$$(32)\quad \lim_{\Phi\to\infty}\frac{1}{2\Phi}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\int_0^{4\pi}\{(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))^* F^{n^+,n^-}(i,\varphi_1,\varphi_2) - F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)(F^{n^+,n^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))^*\}\,d\varphi_1\right]d\varphi_2 = 0.$$

Auparavant, il faut prouver que J_3^+ et J_3^- sont des opérateurs hermitiens, c'est-à-dire qu'on a :

$$(33)\quad \begin{aligned}&(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))\\ &\quad = (J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1\,\varphi_2));\end{aligned}$$

or au premier membre de cette expression

$$\begin{aligned}&J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)\\ &= \left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)e^{\frac{i}{2}(m^++m^-)\varphi_1}\,e^{\frac{m^--m^+}{2}\varphi_2}\\ &= \frac{1}{2}(m^++m^-)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)-\frac{1}{2}(m^--m^+)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)\\ &= m^+F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que m^+ est fonction propre de $J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2)$ et montre la cohérence de nos définitions antérieures.

Donc au premier membre de (33), il vient :

$$(34)\quad \begin{aligned}&(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))\\ &\quad = m^+(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)).\end{aligned}$$

De la même façon qu'on a défini la fonction hermitienne conjuguée par la relation (31) on aura pour l'opérateur hermitien conjugué

$$(35)\quad (J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2))^* = \overline{J_3^+(i,\varphi_1,-\varphi_2)} = J_3^+(-i,\varphi_1,-\varphi_2)$$

et au second membre de (33) on aura a calculer

$$(J_3^+(i,\varphi_1,\varphi_2)F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))^* = J_3^+(-i,\varphi_1,-\varphi_2)F^{\overline{m^+},\overline{m^-}}(-i,\varphi_1,-\varphi_2),$$

soit, d'après (27) et (29) :

$$\begin{aligned}
&(J_3^+(i, \varphi_1, \varphi_2)\, F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star \\
&\quad = \left(i\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) e^{-\frac{i}{2}(\overline{m^+} - \overline{m^-})\varphi_1}\, e^{-\frac{1}{2}(\overline{m^-} - \overline{m^+})\varphi_2} \\
&\quad = \frac{1}{2}(\overline{m^+ + m^-})\, F^{\overline{m^+}, \overline{m^-}}(-i, \varphi_1, -\varphi_2) - \frac{1}{2}(\overline{m^- - m^+})\, F^{\overline{m^+}, \overline{m^-}}(-i, \varphi_1, -\varphi_2) \\
&\quad = \overline{m^+}\, F^{\overline{m^+}, \overline{m^-}}(-i, \varphi_1, -\varphi_2),
\end{aligned}$$

de sorte que le second membre de l'équation (33) s'écrit :

$$\begin{aligned}
(36) \qquad &(J_3^+(i, \varphi_1, \varphi_2)\, F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2),\ F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)) \\
&\quad = \overline{m^+}(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2),\ F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Si l'on porte (34) et (36) dans (33), il vient :

$$(m^+ - \overline{m^+})\,(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2),\ F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)) = 0,$$

c'est-à-dire

$$m^+ = \overline{m^+},$$

les valeurs propres de J_3^+ sont réelles, cet opérateur est hermitien; il en est de même pour J_3^-.

On voit, dans ces conditions, que l'expression (31) devient

$$(37) \qquad (F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star = F^{m^+, m^-}(-i, \varphi_1, -\varphi_2).$$

Revenons alors à l'hermiticité de la forme bilinéaire (30).

D'après (29) et (37),

$$(38) \qquad (F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star = e^{-\frac{i}{2}(m^+ + m^-)\varphi_1}\, e^{-\frac{1}{2}(m^- - m^+)\varphi_2},$$

où m^+ et m^- sont des scalaires réels.

On a :

$$\begin{aligned}
&(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star\, F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) \\
&\quad = e^{\frac{i}{2}[n^+ + n^- - m^+ - m^-]\varphi_1}\, e^{[n^- - n^+ - (m^- - m^+)]\frac{\varphi_2}{2}}.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
p &= n^+ + n^- - m^+ - m^-, \\
q &= n^- - n^+ - (m^- - m^+),
\end{aligned}$$

$$(39) \qquad (F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star\, F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) = e^{ip\frac{\varphi_1}{2}}\, e^{q\frac{\varphi_2}{2}},$$

où p et q sont de scalaires réels.

On aura de la même façon

$$(40)\qquad (F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))(F^{n^+,n^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))^* = e^{-ip\frac{\varphi_1}{2}}e^{-q\frac{\varphi_2}{2}}.$$

Donc la relation (32) d'hermiticité à vérifier s'écrit :

$$(41)\qquad \lim_{\Phi\to\infty}\frac{1}{2\Phi}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\int_0^{4\pi}\left\{e^{ip\frac{\varphi_1}{2}}e^{q\frac{\varphi_2}{2}} - e^{-ip\frac{\varphi_1}{2}}e^{-q\frac{\varphi_2}{2}}\right\}d\varphi_1\right]d\varphi_2 = 0.$$

Or, nous allons montrer ci-dessous que m^+, m^-, n^+, n^- ne peuvent prendre que des valeurs entières ou demi-entières. Nous admettrons, de plus, la raison en deviendra évidente dans les paragraphes suivants, que m^+ et n^+ prennent des valeurs entières ou demi-entières simultanément et, de même, m^- et n^-. Dans ces conditions, p et q sont des entiers.

Si p est différent de zéro, les intégrales sur φ_1 sont nulles et la relation (41) est automatiquement satisfaite.

Si $p = 0$, l'expression au premier membre de (41) devient

$$\lim_{\Phi\to\infty}\frac{1}{2\Phi}\int_{-\Phi}^{+\Phi} 8\pi\,\mathrm{sh}\,q\varphi_2\,d\varphi_2,$$

la fonction $\mathrm{sh}\,q\varphi_2$ étant impaire, l'intégrale prise entre deux valeurs symétriques est nulle.

Donc la forme bilinéaire (30) est bien symétrique hermitienne.

1.2. Valeurs propres et valeurs moyennes des opérateurs J_3^+ et J_3^-. — On peut tout de suite définir la valeur moyenne des opérateurs J_3^+ et J_3^-.

On aura, en effet :

$$(42)\qquad \langle J_3^\pm\rangle = \frac{(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ J_3^\pm(i,\varphi_1,\varphi_2)\,F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))}{(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))}.$$

Or, d'après la relation (34) :

$$\begin{aligned}&(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ J_3^\pm(i,\varphi_1,\varphi_2)\,F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2))\\ &\quad = m^\pm(F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2),\ F^{m^+,m^-}(i,\varphi_1,\varphi_2)),\end{aligned}$$

d'où

$$(43)\qquad \langle J_3^\pm\rangle = m^\pm;$$

La valeur moyenne est donc bien réelle.

Appliquons l'opérateur $-i\frac{\partial}{\partial\varphi_1}$ aux fonctions $F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$, il vient :

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi_1}F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(m^+ + m^-)F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2).$$

Cette relation entraîne que la valeur propre de l'opérateur $-i\frac{\partial}{\partial\varphi_1}$ est

$$\frac{m^+ + m^-}{2} = \frac{m}{2}.$$

Or, dans le cas de l'approximation non relativiste, on retrouve le résultat habituel

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi_1}f\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) = \frac{m}{2}f\left(\frac{\varphi_1}{2}\right).$$

Comme dans l'expression précédente il faut prendre des demi-angles φ_1, de sorte que c'est l'opérateur $\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}$ qu'il faut en réalité considérer.

Si l'on pose :

$$\varphi'_1 = \frac{1}{2}\varphi_1,$$

on a :

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi'_1}F^{m^+,m^-}(i, \varphi'_1, \varphi_2) = (m^+ + m^-)F^{m^+,m^-}(i, \varphi'_1, \varphi_2),$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi'_1}f(\varphi'_1) = mf(\varphi'_1).$$

Les valeurs permises pour m ont été discutées par de nombreux auteurs. Comme le montre Schiff ([10]), m peut prendre, soit des valeurs entières, soit des valeurs demi-entières.

Donc $m^+ + m^- = \frac{n}{2}$, où n est un entier.

Donc m^+ et m^- sont, soit des entiers, soit des demi-entiers et ceci indépendamment l'un de l'autre.

Donc, finalement, les fonctions propres simultanées des opérateurs J_3^+ et J_3^- sont les fonctions

$$F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) = e^{i(m^+ + m^-)\frac{\varphi_1}{2}}e^{(m^- - m^+)\frac{\varphi_2}{2}}, \tag{44}$$

où m^+ et m^- sont entiers ou demi-entiers indépendamment l'un de l'autre.

([10]) L. Schiff, *Quantum Mechanic*, *see* 24, Mac Graw Hill.

1.3. La métrique dans l'espace vectoriel des fonctions $F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$. — Considérons l'espace vectoriel des fonctions $F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$ donné par la relation (44) et la forme bilinéaire (30). Si l'on fait le produit scalaire d'un vecteur $F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$ par lui-même, on obtiendra le carré de sa longueur, ce qui définira la métrique de l'espace vectoriel $F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$.

On a :

$$(45)\quad (F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))$$
$$= \lim_{\Phi \to \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} \left[\int_0^{4\pi} (F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 \right] d\varphi_2.$$

Nous allons montrer que la métrique est définie positive.

En effet, d'après (37),

$$(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star = e^{-i(m^+ + m^-)\frac{\varphi_1}{2}} e^{-(m^- - m^+)\frac{\varphi_2}{2}},$$

d'où :

$$(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) = 1.$$

L'expression (45) se réduit donc à

$$(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)) = \lim_{\Phi \to \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{+\Phi} \left[\int_0^{4\pi} d\varphi_1 \right] d\varphi_2$$
$$= 4\pi \lim_{\Phi \to \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{+\Phi} 1\, d\varphi_2.$$

Cette forme permet de comprendre pourquoi nous avons adopté cette définition de la forme bilinéaire (30). En effet, on peut considérer la quantité 1 à intégrer sur $d\varphi_2$, comme une fonction presque périodique, ce qui conduit comme le font Riesz et Nagy ([11]) à définir le produit scalaire comme une moyenne intégrale.

Si l'on revient alors à l'expression précédente, comme

$$\frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{+\Phi} 1\, d\varphi_2 = 1,$$
$$(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)) = 4\pi,$$

ce qui justifie bien notre assertion que la métrique est définie positive, on définira alors la norme des fonctions $F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$ par la relation :

$$(46)\quad \| F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2) \| = \sqrt{(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))}.$$

([11]) F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris.

Il est possible d'attribuer à cette norme la même interprétation physique qu'en mécanique ondulatoire, c'est-à-dire celle d'une probabilité. Nous n'insisterons pas ici sur cet aspect de la question.

On pourrait remplacer la forme bilinéaire (30) par la suivante où les deux bornes de l'intégrale sur φ_2 ne sont pas supposées identiques :

$$(47)\quad (F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{n^+,n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))$$
$$= \lim_{\Phi, \Phi' \to \infty} \frac{1}{\Phi + \Phi'}$$
$$\times \int_{-\Phi'}^{+\Phi} \left[\int_0^{4\pi} (F^{m^+,m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))^\star F^{n^+,n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 \right] d\varphi_2,$$

où Φ et Φ' sont des nombres positifs réels arbitraires.

Si l'on ne prend aucune précaution sur la façon dont on fait tendre Φ et Φ' vers l'infini on retrouvera tous les résultats précédents, sauf en ce qui concerne l'hermiticité de la forme bilinéaire. En effet, dans le cas où $p = n^+ + n^- - m^+ - m^- = 0$, on aboutirait à l'intégrale

$$\lim_{\Phi, \Phi' \to \infty} \frac{4\pi}{\Phi + \Phi'} \int_{-\Phi'}^{\Phi} (e^{q\varphi_2} - e^{-q\varphi_2})\, d\varphi_2 = \lim_{\Phi, \Phi' \to \infty} \frac{8\pi}{\Phi + \Phi'} \int_{-\Phi'}^{\Phi} \operatorname{sh} q\varphi_2\, d\varphi_2.$$

L'intégrale n'est nulle que si l'on fait d'abord tendre le plus petit des Φ, Φ' vers les plus grands.

Si donc dans la définition (47) on convient de prendre comme définition de la limite

$$(48)\qquad \lim_{\Phi, \Phi' \to \infty} = \lim_{\max\{\Phi, \Phi'\} \to \infty}\ \lim_{\min\{\Phi, \Phi'\} \to \max\{\Phi, \Phi'\}},$$

où l'on fait tendre d'abord la plus petite des bornes vers l'autre (en se rappelant que Φ et Φ' sont deux nombres positifs) on retrouve tous les résultats antérieurs.

Gardant en vue la possibilité d'utiliser les définitions (47) et (48) nous nous limiterons dans la suite au cas où les bornes des intégrales sont les mêmes.

On remarquera, en outre, qu'il n'est pas étonnant de trouver comme bornes d'intégration sur l'angle $\varphi_1 (0, 4\pi)$, soit dans (30), soit dans (47). Ceci est classique même dans l'espace euclidien habituel dès qu'on admet la possibilité d'existence des nombres demi-entiers [12].

---

[12] G. Lochak, *Thèse*, Paris, 1959; *Cahiers de Physique*, n° 102, 1959.

Il reste un point à examiner, c'est le produit scalaire de deux fonctions $F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$ et $F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)$. Ceci conduit à une difficulté qui ne pourra être évitée que par l'emploi de la métrique forte.

En effet, comme

$$(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)^\star F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1\ \varphi_2)) = e^{i(n^+ + n^- - m^+ - m^-)\varphi_1}\, e^{-[n^+ - n^- - (m^+ - m^-)]\varphi_2},$$

on a immédiatement les résultats suivants

$$(49)\quad (F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m^+ + m^- \neq n^+ + n^-, \\ 4\pi & \text{si } m^+ = n^+,\ m^- = n^-, \\ \lim\limits_{\Phi \to \infty} \dfrac{\operatorname{sh}[n^+ - n^- - (m^+ - m^-)]\Phi}{[n^+ - n^- - (m^+ - m^-)]\Phi} & \text{si } \begin{cases} m^+ + m^- = n^+ + n^-, \\ m^+ - m^- \neq n^+ - n^-. \end{cases} \end{cases}$$

Or, cette limite n'existe pas. Mathématiquement, ceci signifie que le pseudo-angle complexe entre les deux vecteurs tend vers l'infini. En effet, on pourra définir l'angle entre deux vecteurs par la relation

$$\cos\alpha^+ = \frac{(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))}{\| F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\| . \| F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\|},$$

où

$$\alpha^+ = \alpha_1 + i\alpha_2.$$

Le troisième cas de la relation (49) correspond donc à

$$\operatorname{ch}\alpha_2 = \frac{(F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2), F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2))}{\| F^{m^+, m^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\| . \| F^{n^+, n^-}(i, \varphi_1, \varphi_2)\|} \to \infty.$$

Pour les grandeurs physiques où intervient le produit scalaire (transitions) on considérera comme impossibles des transitions entre les vecteurs états pour lesquels $\operatorname{ch}\alpha_2 \to \infty$.

En réalité, comme nous le montrerons dans le paragraphe suivant, m^+, m^-, n^+, n^- ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur; nous avons commencé par un cas particulier simple de fonctions pour montrer comment arriver à la solution générale. m^+ et n^+ prennent des valeurs allant de $-l^+$ à $+l^+$ et m^- des valeurs allant de $-l^-$ à $+l^-$, où l^+ et l^- sont des entiers ou demi-entiers indépendants. Il est alors des cas où il est impossible de satisfaire simultanément à l'équation :

$$m^+ + m^- = n^+ + n^-;$$

et à l'équation :

$$m^+ - m^- \neq n^+ - n^-.$$

C'est, par exemple, le cas où l'un des deux l^+ ou l^- est nul. Supposons que $l^- = 0$, ceci entraîne $m^- = n^- = 0$, l'intégration sur φ_1 conduit alors à la condition $m^+ = n^+$.

Dans ces conditions, tous les vecteurs sont orthogonaux. Dans ces espaces, la métrique faible convient parfaitement. Nous verrons plus tard tout l'intérêt qu'on peut tirer de cette remarque.

2. **Espace des fonctions propres simultanées des six opérateurs $J_3^{\pm}$, $J_3'^{\pm}$, $(J^+)^2$, $(J^-)^2$.** — 2.1. Fonctions propres et valeurs propres des quatre opérateurs $J_3^{\pm}$, $J_3'^{\pm}$. — Considérons d'abord le cas des quatre opérateurs $J_3^{\pm}$ et $J_3'^{\pm}$. De la comparaison de la forme des opérateurs $J_3^{\pm}$ et $J_3'^{\pm}$, il ressort que tout ce qui a été dit des uns reste vrai pour les autres, en particulier en ce qui concerne les fonctions propres et les valeurs propres.

Dans l'espace des fonctions propres simultanées des opérateurs $J_3'^{\pm}$,

$$F^{m'^+, m'^-}(i, \psi_1, \psi_2) = e^{i(m'^+ + m'^-)\frac{\psi_1}{2}} e^{(m'^- - m'^+)\frac{\psi_2}{2}},$$

on définit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned}(F^{m'^+, m'^-}&(i, \psi_1, \psi_2),\ F^{n'^+, n'^-}(i, \psi_1, \psi_2))\\ &= \lim_{\Psi \to \infty} \frac{1}{2\Psi} \int_{-\Psi}^{+\Psi} \left[\int_0^{2\pi} (F^{m'^+, m'^-}(i, \psi_1, \psi_2))^\star F^{n'^+, n'^-}(i, \psi_1, \psi_2)\, d\psi_1 \right] d\psi_2,\end{aligned}$$

où Ψ est un nombre réel positif arbitraire. On montrerait que cette forme est hermitienne, que les opérateurs $J_3'^{\pm}$ sont hermitiens, que leurs valeurs propres m'^+, m'^- peuvent prendre des valeurs entières ou demi-entières, indépendamment l'une de l'autre, que la métrique est définie positive avec la même restriction sur le produit scalaire et la possibilité de prendre des bornes Ψ et Ψ' différents.

Il est inutile d'insister; considérons tout de suite l'espace vectoriel des fonctions propres simultanées des quatre opérateurs $J_3^{\pm}$, $J_3'^{\pm}$

$$(50)\qquad \begin{aligned}F^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}&(i, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)\\ &= e^{i(m^+ + m^-)\frac{\varphi_1}{2}} e^{(m^- - m^+)\frac{\varphi_2}{2}} e^{i(m'^+ + m'^-)\frac{\psi_1}{2}} e^{(m'^- - m'^+)\frac{\psi_2}{2}}.\end{aligned}$$

Dans cet espace vectoriel on définira d'une façon évidente la forme bilinéaire :

$$(51)\quad (F^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2),\ F^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2))$$
$$= \lim_{\Phi,\Psi\to\infty}\frac{1}{4\Phi\Psi}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\int_{-\Psi}^{+\Psi}$$
$$\times\left[\int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi}(F^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2))^\star\right.$$
$$\left.\times F^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)\,d\varphi_1\,d\psi_1\right]d\varphi_2\,d\psi_2,$$

où :

— Φ et Ψ sont des nombres réels positifs arbitraires;

— l'intégration est effectuée en premier sur φ_1 et Ψ_1, et où :

$$(F^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2))^\star = F^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(-i,\varphi_1,\psi_1,-\varphi_2,-\psi_2).$$

Comme précédemment, on obtiendrait les résultats suivants :

1° la forme (51) est symétrique hermitienne;

2° les quatre opérateurs sont hermitiens;

3° leurs valeurs propres sont une suite de nombres entiers ou demi-entiers;

4° les valeurs moyennes des opérateurs sont respectivement m^+, m^-, m'^+, m'^-;

5° la métrique est définie positive;

6° les produits scalaires donnent

$$(52)\quad (F^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2),\ F^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2))$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{si } m^+ + m^- \neq n^+ + n^-;\\ 0 & \text{si } m'^+ + m'^- \neq n'^+ + n'^-;\\ 8\pi^2 & \text{si } m^+ = n^+,\quad m^- = n^-,\quad m'^+ = n'^+,\quad m'^- = n'^-;\\ \to\infty & \begin{cases}\text{si } m^+ + m^- = n^+ + n^- \text{ et } m^+ - m^- \neq n^+ - n^-;\\ \text{ou}\\ \text{si } m'^+ + m'^- = n'^+ + n'^- \text{ et } m'^+ - m'^- \neq n'^+ - n'^-.\end{cases}\end{cases}$$

2.2. Fonctions propres simultanées des six opérateurs. — Le problème est un peu plus délicat quand on considère les opérateurs $(J^+)^2$ et $(J^-)^2$.

Soit $U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2)$ les fonctions propres simultanées des six opérateurs $J_3^\pm$, $J_3'^\pm$, $(J^\pm)^2$.

La forme des opérateurs permet de voir immédiatement que

$$(53)\quad \begin{aligned} &U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2)\\ &\quad = F^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+m'^-}(i,\theta_1,\theta_2).\end{aligned}$$

Les relations de commutation conduisent d'une façon évidente aux résultats suivants :

$$(54)\quad U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2) = Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\omega_1,\omega_2)Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2),$$

où :

$$(55)\quad \begin{cases} Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\omega_1,\omega_2) = \Phi^{m^+,m'^+}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)\Theta_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\theta_1,\theta_2),\\ Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2) = \Phi^{m^-,m'^-}(i,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)\Theta_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\theta_1,\theta_2).\end{cases}$$

$Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\omega_1,\omega_2)$ est fonction propre simultanée des trois opérateurs J_3^+, $J_3'^+$, $(J^+)^2$ et $Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2)$ fonction propre simultanément des trois opérateurs J_3^-, $J_3'^-$, $(J^-)^2$.

A la lumière des paragraphes précédents, il est clair qu'on pourra définir une fonctionnelle bilinéaire telle que $J_3^\pm$, $J_3'^\pm$ soient hermitiens; m^+, m^-, m'^+, m'^- prennent des valeurs entières ou demi-entières. Nous démontrerons dans un prochain paragraphe que l^+ et l^- prennent indépendamment l'un de l'autre des valeurs entières ou demi-entières et qu'on a les relations :

$$(56)\quad \begin{cases} l^+,\ l^- = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \ldots;\\ m^\pm = -l^\pm,\ -l^\pm+1,\ \ldots,\ l^\pm-1,\ l^\pm;\\ m'^\pm = -l^\pm,\ -l^\pm+1,\ \ldots,\ l^\pm-1,\ l^\pm;\end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$(57)\quad \begin{cases} (J^+)^2 Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\omega_1,\omega_2) = l^+(l^++1)Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\omega_1,\omega_2),\\ (J^-)^2 Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2) = l^-(l^-+1)Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\omega_1,\omega_2).\end{cases}$$

Il est clair qu'il ne reste plus qu'à définir dans l'espace des fonctions

$$\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m'^+,m^-,m'^-}(i,\theta_1,\theta_2) = \Theta_{l^+}^{m^+,m'^+}(i,\theta_1,\theta_2)\,\Theta_{l^-}^{m^-,m'^-}(i,\theta_1,\theta_2)$$

une forme bilinéaire hermitienne telle que $(J^+)^2$ et $(J^-)^2$ soient hermitiens.

2.3 Espace vectoriel des fonctions $\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\theta_1,\theta_2)$. — Nous considérons l'espace vectoriel des fonctions $\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\theta_1,\theta_2)$ pour lesquelles l^+ et l^- ont des valeurs fixées (nous reviendrons sur cette condition plus loin).

Il est facile d'observer les résultats suivants :

a. Les fonctions $\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\ \theta_1,\ \theta_2)$ sont hermitiennes, c'est-à-dire :

$$\left(\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\ \theta_1,\ \theta_2)\right)^\star = \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\ \theta_1,\ \theta_2),$$

car :

$$\begin{aligned}\left(\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\ \theta_1,\ \theta_2)\right)^\star &= \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(-i,\ \theta_1,\ -\theta_2)\\ &= \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i,\ \theta_1,\ \theta_2).\end{aligned}$$

b. Les opérateurs $(J^+)^2$ et $(J^-)^2$ sont hermitiens, car

$$[(J^\pm(i,\ \theta_1,\ \theta_2))^2]^\star = [(J^\pm(-i,\ \theta_1,\ -\theta_2))^2] = (J^\pm(i,\ \theta_1,\ \theta_2))^2.$$

En outre, l^+, l^-, m^+, m^-, m'^+, m'^- prennent les valeurs (56) et $\Theta_{l^+}^{m^+,m'^+}(\theta^+)$ est un polynome en $\cos\theta^+$ et $\Theta_{l^-}^{m^-m'^-}(\theta^-)$ en $\cos\theta^-$ avec

$$\cos\theta^\pm = \cos\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2 \pm i \operatorname{sh}\theta_2 \sin\theta_1.$$

Contrairement à la convention que nous avons faite dans cette partie, nous n'expliciterons pas, pour l'instant, les polynomes précédents en fonction de θ_1 et θ_2 pour ne pas compliquer l'écriture.

Pour θ réel, on a ([4]) :

$$(58)\qquad \Theta_l^{m,m'}(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^d \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^s F\left(-p,\ d+s+p+1,\ d+1,\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

où

$$(59)\qquad d = |\,m-m'\,|,\qquad s = |\,m+m'\,|,\qquad p = l - \frac{d}{2} - \frac{s}{2}$$

et $F\left(-p,\ d+s+p+1,\ d+1,\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ est un polynome de Jacobi de degré p en $\cos\theta$.

Donc $\Theta_l^{m,m'}(\theta)$ est un polynome de degré l en $\cos\theta$. On en conclut que $\Theta_{l^+}^{m^+,m'^+}(\theta^+)$ et $\Theta_{l^-}^{m^-,m'^-}(\theta^-)$ sont des polynomes en $\cos\theta^+$ et $\cos\theta^-$ de degré l^+ et l^-.

Dans ces conditions, si l'on veut définir une fonctionnelle linéaire analogue à celles que nous avons utilisées dans les paragraphes précédents, on peut observer comme remarque préliminaire que l'expression

$$\begin{aligned}&\left(\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^+,\ \theta^-)\right)^\star \Theta_{l^+,l^-}^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(\theta^+,\ \theta^-)\\ &\quad= \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^+,\ \theta^-)\,\Theta_{l^+,l^-}^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(\theta^+,\ \theta^-)\end{aligned}$$

est un polynome en $\cos\theta^+$ de degré $2l^+$ et en $\cos\theta^-$ de degré $2l^-$.

Comme seconde remarque préliminaire, il importe de signaler que dans l'espace des fonctions $U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2)$ on aura à intégrer sur l'élément de volume dV construit sur $d\theta_1$, $d\varphi_1$, $d\psi_1$, $d\varphi_2$, $d\theta_2$, $d\psi_2$.

En Appendice, il est montré que

$$dV = 8 \,|\, 1 - \cos^2\theta_1 \operatorname{ch}^2\theta_2 \,|\, d\varphi_1\, d\theta_1\, d\psi_1\, d\varphi_2\, d\theta_2\, d\psi_2. \tag{60}$$

On aura donc à intégrer sur θ_1 et θ_2 l'expression

$$\Theta_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\theta^+, \theta^-)\, \Theta_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(\theta^+, \theta^-) \,|\, 1 - \cos^2\theta_1 \operatorname{ch}^2\theta_2 \,|. \tag{61}$$

On définit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned}
&\left(\Theta_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \theta_1, \theta_2),\ \Theta_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(i, \theta_1, \theta_2)\right) \\
&\quad = \lim_{\Theta \to \infty} \frac{1}{e^{2(l^+ + l^- + 1)\Theta}} \\
&\quad \times \int_{-\Theta}^{\Theta} \left[\int_0^{\pi} \Theta_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\theta^+, \theta^-) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \times\, \Theta_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(\theta^+, \theta^-) \,|\, 1 - \cos^2\theta_1 \operatorname{ch}^2\theta_2 \,|\, d\theta_1 \right] d\theta_2,
\end{aligned} \tag{62}$$

où Θ est un nombre réel positif arbitraire et où l'intégration est effectuée en premier sur θ_1.

Cette définition diffère sensiblement de ce qu'il est habituel de trouver par la présence du facteur $e^{-2(l^+ + l^- + 1)\Theta}$, mais ce facteur est indispensable, si l'on veut trouver une norme bornée. De toutes façons, la fonctionnelle linéaire (62) satisfait à toutes les conditions imposées à un produit scalaire. Comme nous l'avons déjà dit, nous laissons de côté, pour l'instant, la question de l'interprétation physique de la norme.

D'après ce qu'on a dit précédemment, cette fonction bilinéaire (62) est symétrique hermitienne et $(J^{\pm})^2$ sont hermitiens. Il suffit de montrer que le produit scalaire (62) a une borne et qu'il est réel.

En effet, si l'on remplace dans les expressions de $\Theta_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\theta^+, \theta^-)$ et de $\Theta_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(\theta^+, \theta^-)$, $\cos\theta^+$ et $\cos\theta^-$ par :

$$\begin{aligned}
\cos\theta^+ &= \cos\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2 + i \sin\theta_1 \operatorname{sh}\theta_2, \\
\cos\theta^- &= \cos\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2 - i \sin\theta_1 \operatorname{sh}\theta_2,
\end{aligned}$$

il vient :

$$\Theta_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\theta^+, \theta^-)\, \Theta_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(\theta^+, \theta^-) = f(\theta_1, \theta_2) + i\, g(\theta_1, \theta_2), \tag{63}$$

où $f(\theta_1, \theta_2)$ et $g(\theta_1, \theta_2)$ sont des polynomes en $\cos\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2$ et $\sin\theta_1 \operatorname{sh}\theta_2$.

Or si l'on prend le complexe conjugué de cette expression, il vient :

$$(64)\quad \overline{\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^+\theta^-)\,\Theta_{l^+,l^-}^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(\theta^+,\theta^-)} = f(\theta_1,\theta_2) - i\,g(\theta_1,\theta_2),$$

or

$$\overline{\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^+,\theta^-)\,\Theta_{l^+l^-}^{n^+,n^-,n'^+n'^-}\theta^+,\theta^-)}$$
$$= \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^-,\theta^+)\,\Theta_{l^+,l^-}^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(\theta^-,\theta^+),$$

donc l'expression (64) devient :

$$(65)\quad \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+m'^-}(\theta^-,\theta^+)\,\Theta_{l^+,l^-}^{n^+,n^-,n'^+n'^-}(\theta^-,\theta^+) = f(\theta_1,\theta_2) - i\,g(\theta_1,\theta_2).$$

Mais si l'on change θ_2 en $-\theta_2$, θ^+ se change en θ^-, donc la relation (63) s'écrit :

$$(66)\quad \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^-,\theta^+)\Theta_{l^+l^-}^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(\theta^-,\theta^+) = f(\theta_1,-\theta_2) + i\,g(\theta_1,-\theta_2).$$

La comparaison de (65) et (66) entraîne :

$$f(\theta_1\ \theta_2) = f(\theta_1,-\theta_2),$$
$$g(\theta_1\ \theta_2) = -g(\theta_1,-\theta_2).$$

Donc $f(\theta_1,\theta_2)$ est une fonction paire de θ_2 et $g(\theta_1,\theta_2)$ une fonction impaire de θ_2.

D'une façon plus précise on peut écrire

$$f(\theta_1,\theta_2) = \varphi(\cos\theta_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2),$$
$$g(\theta_1,\theta_2) = \psi(\sin\theta_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2),$$

où $\varphi(x)$ est un polynome de degré $2(l^+ + l^-)$ et $\psi(x)$ un polynome de degré au plus égal à $2(l^+ + l^-)$ si $l^+ + l^-$ est demi-entier et au plus égal $2(l^+ + l^-) - 1$ si $(l^+ + l^-)$ est entier. Ce polynome ne contient que des termes d'exposants impairs, soit p l'exposant le plus élevé.

Si l'on transforme $\cos^n\theta_1$, $\mathrm{ch}^n\theta_2$, $\sin^n\theta_1$, $\mathrm{sh}^n\theta_2$ en fonction de $\cos n\theta_1$, $\mathrm{ch}\,n\theta_2$, $\sin n\theta_1$, $\mathrm{sh}\,n\theta_2$ les deux polynomes précédents peuvent s'écrire

$$(67)\qquad \varphi(\cos\theta_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2) = \sum_{k=0}^{2(l^+ + l^-)} \sum_{n=0}^{2(l^+ + l^-)} a_n b_k \cos n\theta_1\,\mathrm{ch}\,k\theta_2,$$

$$(68)\qquad \psi(\sin\theta_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{n=0}^{p} \alpha_n\beta_k \sin n\theta_1\,\mathrm{sh}\,k\theta_2,$$

où a_n, b_k, α_n, β_k sont des coefficients métriques, de sorte que

$$\Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\theta^+,\theta^-)\Theta_{l^+,l^-}^{n^+,n^-,n'^+,n'^-}(\theta^+,\theta^-)$$
$$= \sum_{k=0}^{2(l^+ + l^-)} \sum_{n=0}^{2(l^+ + l^-)} a_n b_k \cos n\theta_1\,\mathrm{ch}\,k\theta_2 + i\sum_{k=0}^{p}\sum_{n=0}^{p} \alpha_n\beta_k \sin n\theta_1\,\mathrm{sh}\,k\theta_2$$

d'où

$$(69)\qquad \Theta_{l+,\,l-}^{m+,\,m-,\,m'+,\,m'-}(\theta+,\ \theta-)\,\Theta_{l+,\,l-}^{n+,\,n-,\,n'+,\,n'-}(\theta+,\ \theta-)\,|\,1-\cos^2\theta_1\,\mathrm{ch}^2\theta_2\,|$$
$$= \sum_{k=0}^{2(l^++l^-+1)}\ \sum_{n=0}^{2(l^++l^-+1)} a'_n\,b'_k\cos n\theta_1\,\mathrm{ch}\,k\theta_2 + i$$
$$+\, i\sum_{k=0}^{p+2}\sum_{n=0}^{p+2}\alpha'_n\,\beta'_k\sin n\theta_1\,\mathrm{sh}\,k\theta_2.$$

Ici les limites des sommes sont $2(l^++l^-+1)$ et $p+2$ à cause du facteur $|\,1-\cos^2\theta_1\,\mathrm{ch}_2\theta_2\,|$.

Si l'on pose

$$(70)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(\cos\theta_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2(l^++l^-+1)}\ \sum_{n=0}^{2(l^++l^-+1)} a'_n\,b'_k\cos n\theta_1\,\mathrm{ch}\,k\theta_2,\\[2ex] \mathrm{G}(\sin\theta_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+2}\sum_{n=0}^{p+2}\alpha'_n\,\beta'_k\sin n\theta_1\,\mathrm{sh}\,k\theta_2, \end{cases}$$

l'expression (61) devient :

$$\left(\Theta_{l+,\,l-}^{m+,\,m-,\,m'+,\,m'-}(\theta+,\ \theta-),\ \Theta_{l+,\,l-}^{n+,\,n-,\,n'+,\,n'-}(\theta+,\ \theta-)\right)$$
$$= \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{e^{2(l^++l^-+1)\Theta}}\int_{-\Theta}^{\Theta}\left[\int_0^{\pi}(\mathrm{F}(\cos\theta_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2)+i\,\mathrm{G}(\sin\theta_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2))\,d\theta_1\right]d\theta_2,$$

soit, après avoir effectué l'intégration sur θ_1,

$$\left(\Theta_{l+,\,l-}^{m+,\,m-,\,m'+,\,m'-}(\theta+,\ \theta-),\ \Theta_{l+,\,l-}^{n+,\,n-,\,n'+,\,n'-}(\theta+,\ \theta-)\right)$$
$$= \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{e^{2(l^++l^-+1)\Theta}}\int_{-\Theta}^{\Theta}[\mathrm{F}(c\,\mathrm{ch}\,\theta_2)+i\,\mathrm{G}(c'\,\mathrm{sh}\,\theta_2)]\,d\theta_2,$$

où c et c' sont deux ensembles de constantes.

La fonction $\mathrm{G}(c'\,\mathrm{sh}\,\theta_2)$ étant impaire, son intégrale est nulle et il reste :

$$\left(\Theta_{l+,\,l-}^{m+,\,m-,\,m'+,\,m'-}(\theta+,\ \theta-),\ \Theta_{l+,\,l-}^{n+,\,n-,\,n'+,\,n'-}(\theta+,\ \theta-)\right)$$
$$= \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{e^{2(l^++l^-+1)\Theta}}\int_{-\Theta}^{\Theta}\mathrm{F}(c\,\mathrm{ch}\,\theta_2)\,d\theta_2,$$

soit encore :

$$\left(\Theta_{l+,\,l-}^{m+,\,m-,\,m'+,\,m'-}(\theta+,\ \theta-),\ \Theta_{l+,\,l-}^{n+,\,n-,\,n'+,\,n'-}(\theta+,\ \theta-)\right)$$
$$= \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{e^{2(l^++l^-+1)\Theta}}\int_{-\Theta}^{\Theta}\sum_{k=0}^{2(l^++l^-+1)}\gamma_k\,\mathrm{ch}\,k\theta_2\,d\theta_2$$
$$= \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{e^{2(l^++l^-+1)\Theta}}\sum_{k=0}^{2(l^++l^-+1)}\frac{2\gamma_k}{k}\,\mathrm{sh}\,k\theta = \frac{2\gamma_{l^++l^-+1}}{l^++l^-+1}.$$

Donc la forme bilinéaire (62) est réelle et indépendante de Θ. On en déduit, dans l'espace des fonctions $\Theta_{l^+ l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-)$ (pour l^+ et l^- fixés) une métrique par la relation :

$$(71) \qquad \left(\Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-), \Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-)\right).$$

Mais cette expression n'est pas nécessairement positive, la métrique est indéfinie.

On définira alors la norme des vecteurs par la relation :

$$(72) \qquad \left\| \Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-) \right\| = \sqrt{\left| \left(\Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-), \Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-)\right) \right|}$$

et l'on conviendra d'appeler vecteurs du genre espace ceux pour lesquels l'expression (71) est positive et du genre temps ceux pour lesquels elle a le signe opposé.

Comme précédemment on définira la valeur moyenne d'un opérateur $O(\theta^+, \theta^-)$ par la relation

$$(73) \quad \langle O(\theta^+, \theta^-) \rangle = \frac{\left(\Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-), O(\theta^+, \theta^-)\, \Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-)\right)}{\left(\Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-), \Theta_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\theta^+, \theta^-)\right)}$$

et l'on ne considérera comme ayant une signification physique que les opérateurs pour lesquels l'expression précédente a un sens.

2.4. Espace vectoriel des fonctions $U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-)$. — Revenons maintenant à l'espace vectoriel des fonctions $U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-)$ pour des valeurs fixées de l^+ et l^-.

Dans cet espace vectoriel, on définit la forme bilinéaire :

$$(74) \qquad \left(U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(i, \omega_1, \omega_2), U_{l^+, l^-}^{n^+, n^-, n'^+, n'^-}(i, \omega_1, \omega_2)\right)$$
$$= \lim_{\left.\begin{matrix}\Phi\\ \Psi\\ \Theta\end{matrix}\right\}\to\infty} \frac{e^{-2(l^+ + l^- + 1)\Theta}}{4\Phi\Psi} \int_{-\Phi}^{+\Phi} \int_{-\Psi}^{+\Psi} \int_{-\Theta}^{+\Theta}$$
$$\times \left[\int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)\right)^* \times U_{l^+, l^-}^{n^+, n^-, n'^+, n'^-}(i, \omega_1, \omega_2)\, dV \right],$$

où

— Φ, Ψ, Θ, sont des nombres réels abitraires positifs ;
— $dV = |1 - \cos^2\theta_1 \operatorname{ch}^2\theta_2|\, d\theta_1\, d\varphi_1\, d\psi_1\, d\theta_2\, d\varphi_2\, d\psi_2$ (*voir* Appendice),

— l'intégration est effectuée en premier sur les angles θ_1, φ_1, ψ_1;

— $(U_{l+,l-}^{m+,m-,m+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2))^* = U_{l+,l-}^{m+,m-,m+,m'-}(-i, \omega_1, -\omega_2)$.

D'après les études effectuées dans les deux paragraphes précédents, on sait que cette forme possède les propriétés suivantes :

a. elle est symétrique hermitienne;

b. elle est réelle;

c. elle est indépendante de Φ, Ψ, Θ;

d. elle est définie quels que soient m^+, m^-, m'^+, m'^-; n^+, n^- n'^+, n'^-; pour des valeurs fixes de l^+ et l^-.

Cette forme bilinéaire définit la métrique :

$$(75)\qquad (U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2), U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2)).$$

On sait que cette métrique est :

a. indéfinie;

b. indépendante de Φ, Ψ, Θ.

On définira alors la norme des vecteurs $U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1\, \omega_2)$ par la relation :

$$(76)\qquad \| U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1\, \omega_2) \| = \sqrt{|(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2), U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+\,m'-}(i, \omega_1, \omega_2))|}.$$

On conviendra d'appeler vecteurs du genre espace ceux pour lesquels l'expression (75) est positive, du genre temps ceux pour lesquels elle a le signe opposé.

Si $O(i, \omega_1. \omega_2)$ est un opérateur quelconque dépendant des angles ω_1 et ω_2 sa valeur moyenne sera donnée par la relation

$$(77)\qquad \langle O(\omega_1, \omega_2) \rangle = \frac{(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1\, \omega_2), O(i, \omega_1, \omega_2)\, U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2))}{(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'-,m'+}(i, \omega_1, \omega_2,), U_{l+,l-}^{m+,m-,m+,m-}(i, \omega_1, \omega_2)}.$$

Les six opérateurs $J_3^{\pm}$, $J_3'^{\pm}$, $(J^{\pm})^2$ sont hermitiens et ont pour valeur moyenne respectivement : $m^{\pm}$, $m'^{\pm}$, $l^{\pm}(l^{\pm}+1)$.

On sait déjà que $m^{\pm}$ et $m'^{\pm}$ sont des entiers ou demi-entiers, on avait admis qu'il en était de même pour l^+ et l^-. On peut maintenant le démontrer. Considérons, en effet, les opérateurs :

$$(J_1^+ \pm iJ_2^+) \quad \text{et} \quad (J_1^- \pm iJ_2^-).$$

Les deux relations ci-dessous sont obtenues immédiatement ([1]) :

$$(J_1^+ \pm i J_2^+) Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+) = [(l^+ \mp m^+)(l^+ \pm m^+ + 1)]^{\frac{1}{2}} Y_{l^+}^{m^+ \pm 1, m'^+}(\omega^+),$$

$$(J_1^- \pm i J_2^-) Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^-) = [(l^- \mp m^-)(l^- \pm m^- + 1)]^{\frac{1}{2}} Y_{l^-}^{m^- \pm 1, m'^-}(\omega^-).$$

Ce qui prouve que l^+ et l^- sont positifs et entiers ou demi-entiers en même temps que m^+ et m^- ; et que m^+ et m^- peuvent prendre toutes les valeurs

$$m^+ = -l^+, \quad -l^+ + 1, \quad \ldots, \quad l^+ - 1, \quad l^+,$$
$$m^- = -l^-, \quad -l^- + 1, \quad \ldots, \quad l^- - 1, \quad l^-.$$

On déduirait un résultat identique pour les valeurs de m'^+ et m'^-.

Ceci justifie les relations (56).

On rappelle en outre qu'on a :

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+) &= \left(\sin \frac{\theta^+}{2}\right)^{-m^+ + m'^+} \left(\cos \frac{\theta^+}{2}\right)^{-m^+ - m'^+} \\ &\quad \times \frac{d^{l^+ - m^+}}{d\left(\sin^2 \frac{\theta^+}{2}\right)^{l^+ - m^+}} \left(\sin^2 \frac{\theta^+}{2}\right)^{l^+ - m'^+} \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{\theta^+}{2}\right)^{l^+ + m'^+} e^{j(m^+ \varphi^+ + m'^+ \psi^+)}, \\ Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^-) &= \left(\sin \frac{\theta^-}{2}\right)^{-m^- + m'^-} \left(\cos \frac{\theta^-}{2}\right)^{-m^- - m'^-} \\ &\quad \times \frac{d^{l^- - m^-}}{d\left(\sin^2 \frac{\theta^-}{2}\right)^{l^- - m^-}} \left(\sin^2 \frac{\theta^-}{2}\right)^{l^- - m'^-} \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{\theta^-}{2}\right)^{l^- + m'^-} e^{j(m^- \varphi^- + m'^- \psi^-)}. \end{aligned} \right.$$

C. Van Winter ([4]) a cherché quel sous-espace vectoriel des fonctions $U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)$ avait la propriété que ses éléments se transforment sous le groupe propre de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$. Si l'on convient d'appeler spineur tout vecteur d'un espace vectoriel qui se transforme sous le groupe propre de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ l'espace des spineurs a

$$(2l^+ + 1)(2l^- + 1) \quad \text{dimensions si} \quad l^+ \neq l^-,$$
$$(2l + 1)^2 \quad \text{dimensions si} \quad l^+ = l^- = l.$$

On sait, en outre ([13]), que les seules représentations finies de ce

([13]) E. H. Corson, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wawe equations*, Blacke and Son.

groupe sont celles pour lesquelles l^+ et l^- sont des multiples de nombres demi-entiers.

La condition que l^+ et l^- soient des multiples de nombres demi-entiers est bien satisfaite pour l'espace vectoriel des fonctions $U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)$ mais, par contre, cet espace vectoriel (l^+ et l^- fixés) a

$$[(2\,l^+ + 1)(2\,l^- + 1)]^2 \quad \text{dimensions.}$$

Pour voir ceci, on peut se placer dans le cas simple des rotations tridimensionnelles où les fonctions propres des opérateurs de rotation sont

$$Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi).$$

Dans le cas des harmoniques sphériques qui satisfont à une représentation $\mathcal{D}(l)$ du groupe des rotations tridimensionnelles on a $(2\,l+1)$ composantes (l entier) et ici les harmoniques sphériques sont données par les fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$.

Comme m' prend $(2\,l+1)$ valeurs, il y a donc $(2\,l+1)^2$ composantes pour les fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$.

Donc $[(2\,l^+ + 1)(2\,l^- + 1)]^2$ composantes pour le produit

$$Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(i, \omega_1, \omega_2)\, Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)$$

Dans le cas $l^+ = \frac{1}{2}$, $l^- = 0$, par exemple, on trouve les quatre composantes :

$$U_{\frac{1}{2},0}^{m^+,m'^+,0,0}(i, \omega_1, \omega_2) = Y_{\frac{1}{2}}^{m^+,m'^+}(i, \omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta^+}{2} \exp \frac{i}{2}(\varphi^+ + \psi^+) \\ \sin\frac{\theta^+}{2} \exp \frac{i}{2}(\varphi^+ - \psi^+) \\ \cos\frac{\theta^+}{2} \exp - \frac{i}{2}(\varphi^+ + \psi^+) \\ \sin\frac{\theta^+}{2} \exp - \frac{i}{2}(\varphi^+ - \psi^+) \end{pmatrix}.$$

C. Van Winter montre alors que si l'on considère l'espace vectoriel des fonctions $U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)$ pour lesquelles non seulement l^+ et l^- sont fixés, mais aussi m'^+ et m'^-, les fonctions de cet espace se comportent comme des spineurs, c'est-à-dire se transforment sous le groupe de Lorentz, suivant la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$.

Pour terminer ce paragraphe, nous voudrions faire deux remarques, l'une concernant une extension de la définition de la forme bilinéaire (74), l'autre le produit scalaire de deux fonctions quelconques

$$U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2) \quad \text{et} \quad U_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2).$$

Une première extension découle des relations (47) et (48) et conduirait à remplacer (74) par

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2),\,U_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2)\right)\\ &\quad=\lim_{\substack{\Phi,\Phi'\\ \Psi,\Psi'\\ \Theta}\Big\}\to\infty}\frac{e^{-2(l^++l^-+1)\Theta}}{(\Phi+\Phi')(\Psi+\Psi')}\int_{-\Phi'}^{\Phi}\int_{-\Psi'}^{\Psi}\int_{-\Theta'}^{\Theta}\\ &\qquad\times\left[\int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2)\right)^*\right.\\ &\qquad\qquad\left.\times\,U_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2)\,dV\right], \end{aligned}\right.$$

où Φ, Φ' Ψ, Ψ', sont des nombres réels arbitraires positifs et où il est entendu que la limite s'effectue en deux temps, d'abord en faisant tendre la borne inférieure vers la borne supérieure, puis la borne supérieure vers l'infini.

On peut obtenir une seconde extension en faisant l'analogue dans l'intégration sur θ_2 en remplaçant les bornes $[-\Theta,\,\Theta]$ par $[-\Theta',\,\Theta]$; le facteur $e^{2(l^++l^-+1)\Theta}$ par $e^{(l^++l^-+1)(\Theta+\Theta')}$, et enfin la $\lim\limits_{\Theta\to\infty}$ par :

$$\lim_{\max\{\Theta,\Theta'\}\to\infty}\times\lim_{\min\{\Theta,\Theta'\}\to\max\{\Theta,\Theta'\}}.$$

Examinons maintenant le produit scalaire de deux fonctions :

$$U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2) \quad \text{et} \quad U_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2)$$

pour l^+ et l^- fixés. On aura des relations analogues aux expressions (52) :

$$(80)\quad \left(U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2),\,U_{l+,l-}^{n+,n-,n'+,n'-}(i,\,\omega_1,\,\omega_2)\right)$$
$$=\left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & m^++m^-\neq n^++n^-,\\ 0 & \text{si} & m'^++m'^-\neq n'^++n'^-,\\ c & \text{si} & m^+=n^+,\quad m^-=n^-,\quad m'^+=n'^+,\quad m'^-=n'^-,\\ \to\infty & \left\{\begin{array}{l}\text{si}\\ \text{si}\end{array}\right. & \begin{array}{l} m^++m^-=n^++n^-\quad\text{et}\quad m^+-m^-\neq n^+-n^-,\\ m'^++m'^-=n'^++n'^-\quad\text{et}\quad m'^+-m'^-\neq n'^+-n'^-,\end{array} \end{array}\right.$$

où C est une constante réelle positive ou négative.

Comme à la fin du paragraphe 1 il faut faire certaines réserves sur le fait que le produit scalaire tend vers l'infini pour certaines fonctions.

On sait que ce cas ne se produira pas si l'un des deux nombres l^+ ou l^- est nul. Cette remarque nous sera utile dans le paragraphe suivant.

3. **Espace vectoriel des fonctions se transformant sous le groupe complet de Lorentz.** — Il est intéressant de trouver des fonctions des angles complexes ω^+ et ω^- qui se transforment sous le groupe complet de Lorentz suivant la représentation :

$$\mathcal{D}(l^+, l^-) \oplus \mathcal{D}(l^-, l^+).$$

Or, il est facile de voir ([4]) que si P est l'opération parité on a :

$$\mathrm{P}\mathrm{U}_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+ m'^-}(\omega^+, \omega^-) = \mathrm{U}_{l^-, l^+}^{m^-, m^+, m'^-, m'^+}(\omega^+, \omega^-);$$

c'est-à-dire que l'opération parité transforme ω^+ et ω^-; soit encore l^+ en l^-, m^+ en m^-, m'^+ en m'^-. Donc les éléments du sous-espace vectoriel caractérisé par des valeurs fixées de l^+, l^-, m'^+, m'^- n'est pas invariant sous cette opération P.

Pour arriver au résultat désiré, il suffit de définir, comme l'a montré C. Van Winter ([4]) les opérateurs

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}'_k = \mathrm{J}'^+_k + \mathrm{J}'^-_k \\ &(\mathrm{S}')^2 = \mathrm{S}'_k \mathrm{S}'_k \qquad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}\right. \tag{81}$$

et de chercher les fonctions propres simultanées des opérateurs

$$\mathrm{J}_3^+, \quad \mathrm{J}_3^-, \quad (\mathrm{J}^+)^2, \quad (\mathrm{J}^-)^2, \quad \mathrm{S}'_3, \quad (\mathrm{S}')^2. \tag{82}$$

On trouve facilement que les fonctions propres de ces opérateurs sont

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) = \sum_{m'^+, m'^-} &(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ &\times \mathrm{U}_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-), \end{aligned} \tag{83}$$

où s' prend les valeurs

$$(l^+ + l^-), \quad (l^+ + l^- - 1), \quad \ldots, \quad |l^+ - l^-|$$

et

$$m' = -s', \quad -s' + 1, \quad \ldots, \quad s' - 1, \quad s',$$

$(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m')$ étant les coefficients de Clebsch-Gordan.

Pour l^+ et l^- fixés, les fonctions $Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(i, \omega_1, \omega_2)$ sont des vecteurs d'un espace à

$$\begin{aligned} 2n(2n+1)(2l^+ +1)(2l^- +1) \quad &\text{dimensions si} \quad l^+ \neq l^-, \\ n(2n+1)(2l+1)^2 \quad &\text{dimensions si} \quad l^+ = l^- = l, \end{aligned}$$

où n est le nombre des valeurs prises par s' et $(2n+1)$ le nombre des valeurs possibles de m'.

Si l'on considère le sous-espace vectoriel du précédent dans lequel on maintient fixes non seulement l^+ et l^-, mais aussi s' et m', les dimensions de ce sous-espace seront :

$$\begin{aligned} 2(2l^+ +1)(2l^- +1) \quad &\text{si} \quad l^+ \neq l^-, \\ (2l+1)^2 \quad &\text{si} \quad l^+ = l^- = l \end{aligned}$$

et, comme l'a montre C. Van Winter, les éléments de ce sous-espace vectoriel se transforment sous le groupe complet de Lorentz suivant la représentation :

$$\mathcal{D}(l^+, l^-) \oplus \mathcal{D}(l^-, l^+) \qquad (\oplus, \text{ somme directe}).$$

On sait, par exemple ([13]), que pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ce sous-espace vectoriel est isomorphe à l'espace des spineurs à quatre composantes de Dirac pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ à l'espace des quadrivecteurs, pour $\mathcal{D}(1, 0) \otimes \mathcal{D}(0, 1)$ à l'espace des tenseurs antisymétriques self-duaux de rang 2, etc.

Reprenons maintenant l'espace vectoriel des fonctions $Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(i, \omega_1, \omega_2)$ pour des valeurs données de l^+ et l^-. D'une façon formelle on définira comme dans le paragraphe précédent le produit scalaire, la somme et la valeur moyenne d'un opérateur $O(i, \omega_1, \omega_2)$ par les relations,

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(i, \omega_1, \omega_2), Z_{l^+,l^-,t'}^{n^+,n^-,n'}(i, \omega_1, \omega_2)\right) \\ &\quad = \lim_{\substack{\Psi \\ \Theta \\ \Phi} \Big\} \to \infty} \frac{e^{-2(l^+ + l^- + 1)\Theta}}{4\Theta\Psi} \int_{-\Phi}^{+\Phi} \int_{-\Psi}^{+\Psi} \int_{-\Theta}^{+\Theta} \\ &\quad \times \left[\int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(i, \omega_1, \omega_2)\right)^* \right. \\ &\qquad\qquad \left. \times Z_{l^+,l^-,t'}^{n^+,n^-,n'}(i, \omega_1, \omega_2)\, dV \right], \end{aligned} \right.$$

où les éléments qui rentrent dans cette définition ont la même signification que dans la forme bilinéaire (74).

$$(85)\quad \| Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2) \| = \sqrt{\left| \left(Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2), Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2) \right) \right|},$$

$$(86)\quad \langle O(i, \omega_1, \omega_2) \rangle = \frac{\left(Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2), O(i, \omega_1, \omega_2) \right) Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2))}{\left(Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}\, i, \omega_1, \omega_2), Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2) \right)}.$$

Ces définitions sont formelles parce que la relation (85) n'est pas toujours définie : en effet, dans le produit scalaire sous le radical de (85) intervient la somme des produits de deux fonctions :

$$U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(i, \omega_1, \omega_2) \quad \text{et} \quad U_{l+,l-}^{m+m,-,m''+,m''-}(i, \omega_1, \omega_2)$$

pour lesquelles m^+ et m^- sont bien les mêmes, mais m'^+ et m'^- sont différents de m''^+ et m''^-. Or, à cause de la propriété des paramètres de Clebsch-Gordan d'être nuls ([14]), sauf si $m'^+ + m'^- = m'$ il s'ensuit que dans (85) on aura toujours les relations suivantes satisfaites :

$$\begin{gathered} m^+ = n^+, \qquad m^- = n^-, \\ m'^+ + m'^- = m''^+ + m''^-, \\ m'^+ - m'^- \neq m''^+ - m''^-. \end{gathered}$$

Or, si l'on se reporte aux expressions (80) on observe qu'on est dans l'un des cas où le produit scalaire de deux fonctions

$$U_{l+,l-}^{m+,m-,m+,m-}(i, \omega_1, \omega_2) \quad \text{et} \quad U_{l+,l-}^{n+,n-,'n+,n'-}(i, \omega_1, \omega_2)$$

tend vers l'infini.

Donc, en général, les expressions (84), (85), (86) n'ont pas de sens. Comme on l'a déjà remarqué elles en ont un cependant si

$$l^+ l^- = 0.$$

Nous nous plaçons donc dans le cas où cette relation est satisfaite ; dans ces conditions, les relations (84) et (85) définissent une métrique indéfinie et les fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(i, \omega_1, \omega_2)$ constituent un ensemble de vecteurs orthogonaux.

On remarquera que le produit scalaire est nul, sauf si

$$(87)\quad \begin{cases} m^+ + m^- = n^+ + n^-, \\ m' = n' \end{cases}$$

([14]) J. H. Blatt et V. F. Weisskopff, *Theoretical nuclear physics*, Appendice A.

Or, nous montrerons dans une prochaine étude ([6]) que les relations (87) sont les règles de sélection dans les interactions faibles entre particules.

Ceci justifie le nom donné à la métrique de cet espace.

4. **Remarques finales.** — La quantité de travail nécessaire pour arriver au si maigre résultat d'avoir pu définir une métrique dans certains espaces où l^+ et l^- fixés sont tels que (85) ait un sens ne se justifierait pas si elle n'ouvrait la voie à la seconde partie de cette étude, bien que le fait de trouver les règles de sélection des interactions faibles soit intéressant en lui-même.

Il faut noter deux points importants, l'un apparaissant comme naturel et l'autre comme nécessitant une étude plus poussée des définitions données dans cette première partie.

a. Il semble tout à fait naturel, quand l'expression (85) a un sens, de trouver une métrique indéfinie. Pour le comprendre, plaçons-nous dans le cas de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et adoptons dans l'espace des fonctions $U_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)$ la métrique donnée par la relation (76), métrique qui est indéfinie comme on l'a montré. Or, si l'on fixe les valeurs de m'^+ et m'^- par exemple $m'^+ = m'^- = \frac{1}{2}$, on sait que les fonctions $U_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{m^+, m^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(i, \omega_1\ \omega_2)$ se transforment sous le groupe de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et que les êtres géométriques qui se transforment suivant cette représentation sont les quadrivecteurs de l'espace temps. Il y a donc un isomorphisme entre ces quadrivecteurs et les vecteurs fonctionnels $U_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{m^+, m^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(i, \omega_1\ \omega_2)$; il devra donc exister dans cet espace fonctionnel comme dans l'espace temps des vecteurs du genre espace et des vecteurs du genre temps. Donc la métrique de l'espace $U_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{m^+, m^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(i, \omega_1, \omega_2)$ doit être indéfinie.

b. Un second point sur lequel il faut insister, c'est que dans tous ce qui précède, on a supposé les valeurs de l^+ et l^- fixées. De l'isomorphisme déjà indiqué entre certains espaces $U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(i, \omega_1, \omega_2)$ et les spineurs d'ordre l^+, l^- en appelant spineur d'ordre l^+, l^- tout être géométrique qui se transforme sous le groupe propre de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ conduit à penser qu'on devrait avoir les relations :

$$(88) \qquad (U_{l^+,l^-}(i, \omega_1, \omega_2), U_{l'^+,l'^-}(i, \omega_1, \omega_2)) = \delta_{l^+l'^+}\delta_{l^-l'^-},$$

car si $\Phi_{l^+l^-}$ et $\Phi_{l'^+l'^-}$ sont des spineurs respectivement d'ordre l^+, l^- et l'^+, l'^- on sait qu'on a :

$$(\Phi_{l^+,l^-}, \Phi_{l'^+,l'^-}) = \delta_{l^+l'^+}\delta_{l^-l'^-}.$$

Or, la condititon nécessaire et suffisante pour que l'expression (88) soit vérifiée est que :

$$(89) \qquad \int_0^\pi \Theta_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i, \theta_1, \theta_2)\,\Theta_{l'^+,l'^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i, \theta_1, \theta_2) \times |1 - \mathrm{ch}^2\theta_2\cos^2\theta_1|\,d\theta_1 = \delta_{l^+l'^+}\delta_{l^-l'^-}.$$

Or, il est facile de voir par des exemples simples, que cette relations (89) n'est pas vraie en général.

En résumé, la métrique faible ne peut être valable que pour certains sous-espaces vectoriels correspondant à des valeurs données de l^+, l^-, s', m', ou de l^+, l^-, m'^+, m'^-, mais physiquement ceci signifie que dans les sous-espaces où elle est valable, il pourra y avoir des transitions entre les différents états de ce sous-espace si chaque état de ce sous-espace est caractérisé par une fonction

$$Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(i, \omega_1, \omega_2) \quad \text{ou} \quad U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(i, \omega_1, \omega_2).$$

Néanmoins, il est nécessaire de définir une métrique qui puisse être utilisée dans des cas les plus généraux et ceci fera l'objet de la seconde partie de cette étude.

DEUXIÈME PARTIE.

LA MÉTRIQUE FORTE.

1. Généralités. — Comme on l'a indiqué dans l'introduction, dans cette partie on considère les deux espaces $\mathcal{E}^+$ des fonctions $Y_{l^+}^{m^+,m^-}(\omega^+)$ fonctions propres simultanées des opérateurs J_3^+, $J_3'^+$, $(J^+)^2$ et $\mathcal{E}^-$ des fonctions propres simultanées des opérateurs J_3^-, $J_3'^-$, $(J^-)^2$, soit $Y_{l^-}^{m^+,m^-}(\omega^-)$.

Nous ne recommencerons pas tout ce qui a été fait dans la partie précédente et nous considérons dès le départ que $l^{\pm}$, $m^{\pm}$, $m'^{\pm}$ prennent les valeurs données par les relations (56).

Si l'on fait le produit cartésien de $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ on obtiendra les fonctions $U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\omega^+, \omega^-)$ de l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$.

$$U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\omega^+, \omega^-) = \{ Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(\omega^+), Y_{l^-}^{m^-,m'^+}(\omega^-) \}.$$

On a donné dans l'introduction les règles de calcul du produit scalaire dans l'espace $\mathcal{E}$, en faisant remarquer qu'il y avait lieu de bien distinguer entre les deux types de grandeurs imaginaires qui rentrent dans la théorie celles qui dépendent de la métrique de l'espace-temps caractérisées par l'imaginaire i et celles qui dépendent de la quantification (caractérisée par l'imaginaire j).

Si $f(j, \omega^+, \omega^-)$ est une fonction des angles complexes ω^+ et ω^- la fonction hermitienne conjuguée est définie par la relation :

$$(f(j, \omega^+, \omega^-))^\star = f(-j, \omega^+, \omega^-).$$

Dans tout ce qui suit et contrairement à l'usage établi dans la partie précédente où les fonctions étaient considérées comme des variables de ω_1 et ω_2, les fonctions utilisées dépendront de ω^+ et ω^-.

Il apparaît alors que le seul problème à résoudre est de trouver une forme bilinéaire dans l'espace $\mathcal{E}^+$, car tout ce qui est vrai de cet espace l'est de $\mathcal{E}^-$, *mutatis mutandis.*

Comme dans ce qui précède, pour simplifier le problème, on commencera par traiter le sous-espace $\mathcal{E}_1^+$ de $\mathcal{E}^+$ des fonctions propres simultanées des opérateurs J_3^+ et $J_3'^+$.

2. Étude de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_1^+$. — Considérons les opérateurs

$$J_3^+ = -j\frac{\partial}{\partial\varphi^+}, \qquad J_3'^+ = -j\frac{\partial}{\partial\psi^+}$$

et leurs fonctions propres

$$F^{m^+,m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+) = e^{j(m^+\varphi^+ + m'^+\psi^+)}.$$

D'après la définition des grandeurs hermitiennes conjuguées, on a

$$(J_3^+)^\star = j\frac{\partial}{\partial\varphi^+}, \qquad (J_3'^+)^\star = j\frac{\partial}{\partial\psi^+}, \qquad (F^{m^+,m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+))^\star = e^{-j(m^+\varphi^+ + m'^+\psi^+)}.$$

Dans l'espace $\mathcal{E}_1^+$, on définit la forme bilinéaire :

$$(90)\quad \begin{aligned}&(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ F^{n^+,n'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))\\ &= \lim_{\Phi,\Psi\to\infty}\frac{1}{4\Phi\Psi}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\int_{-\Psi}^{+\Psi}\\ &\times\left[\int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi}(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))^\star F^{n^+,n'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)\,d\varphi_1\,d\psi_1\right]d\varphi_2\,d\psi_2,\end{aligned}$$

où Φ et Ψ sont des nombres arbitraires réels positifs et où l'intégration est effectuée d'abord sur φ_1 et ψ_1.

Nous allons établir la relation :

$$(91)\quad (F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ F^{n^+,n'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)) = 8\pi^2\,\delta_{m^+m'^+}\,\delta_{n^+n'^+},$$

c'est-à-dire les fonctions $F^{m'^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)$ forment une base orthonormée de l'espace $\mathcal{E}_1^+$.

En effet :

$$(92)\quad \begin{aligned}&(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))^\star F^{n^+,n'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)\\ &= e^{j(n^+-m^+)\varphi^+}\,e^{j(n'^+-m'^+)\psi^+}\\ &= e^{j(n^+-m^+)\varphi_1}\,e^{j(n'^+-m'^+)\psi_1}\,e^{-(n^+-m^+)\varphi_2}\,e^{-(n'^+-m'^+)\psi_2}\end{aligned}$$

à cause de la relation $ij = -1$.

Si l'on porte la relation (92) dans (90), les intégrales sur φ_1 et ψ_1 sont nulles, sauf si $m^+ = n^+$ et $m'^+ = n'^+$.

Dans ce dernier cas, il vient :

$$\begin{aligned}&(F^{m^+,m'^+}(j,\psi^+,\varphi^+),\ F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))\\ &= 8\pi^2\lim_{\Phi,\Psi\to\infty}\frac{1}{4\Phi\Psi}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\int_{-\Psi}^{+\Psi}d\varphi_2\,d\psi_2 = 8\pi^2,\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (91).

L'expression $(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))$ fournit donc une métrique définie positive dans $\mathcal{E}_1^+$ et la norme d'un vecteur de cet espace sera donnée par :

$$(93)\quad \| F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)\| = \sqrt{(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))}.$$

Si $O^+(\varphi^+,\psi^+)$ est un opérateur tel que l'expression

$$(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ O(\varphi^+,\psi^+)\,F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)$$

ait un sens, la valeur moyenne de cet opérateur sera :

$$\langle O^+(\varphi^+,\psi^+)\rangle = \frac{(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ O^+(\varphi^+,\psi^+)\,F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+))}{(F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+),\ F^{m^+,m'^+}(j,\varphi^+,\psi^+)},$$

en particulier

(94) $$\langle J_3^{+} \rangle = m^{+}, \qquad \langle J_3'^{+} \rangle = m'^{+}.$$

On pourrait remplacer les bornes $(-\Phi, \Phi)$ et $(-\Psi, \Psi)$ par $(-\Phi', \Phi)$ et $(-\Psi', \Psi)$ en prenant la limite comme il a été indiqué dans la première partie. Naturellement, on obtient des résultats analogues dans l'espace $\mathcal{E}_1^-$. Considérons alors l'espace $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^+ \times \mathcal{E}_1^-$; soient $F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)$ les éléments de cet espace. On a

(95) $$\begin{aligned} &F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-) \\ &\quad = \{ F^{m^+, m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+),\ F^{m^-, m'^-}(j, \varphi^-, \psi^-) \}. \end{aligned}$$

Dans $\mathcal{E}_1$ on aura la forme bilinéaire

(96) $$\begin{aligned} &(F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-),\ F^{n^+, n'^+, n^-, n'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)) \\ &\quad = (F^{m^+, m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+),\ F^{n^+, n'^+}(j, \varphi^+, \psi^+)) \\ &\quad\quad + (F^{m^-, m'^-}(j, \varphi^-, \psi^-),\ F^{n^-, n'^-}(j, \varphi^-, \psi^-)), \end{aligned}$$

où le premier terme du second membre est donné par la relation (90) et le second terme par une forme analogue. On en déduit

(97) $$\begin{aligned} &(F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-),\ F^{n^+, n'^+, n^-, n'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)) \\ &\quad = 8\pi^2(\delta_{m^+, m'^+}\,\delta_{n^+, n'^+} + \delta_{m^-, m'^-}\,\delta_{n^-, n'^-}). \end{aligned}$$

Ceci définit encore une métrique positive

$$(F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-),\ F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)) = 16\pi^2,$$

d'où

(98) $$\begin{aligned} &\| F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-) \| \\ &= \sqrt{(F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-),\ F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-))}. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur moyenne d'un opérateur $O(\varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)$

(99) $$\begin{aligned} &\langle O(\varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-) \rangle \\ &= \frac{\left\{ \begin{pmatrix} F^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-), \\ O(\varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)\, F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-) \end{pmatrix} \right\}}{\{ (F^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-),\ F^{m^+, m'^+, m^-, m'^-}(j, \varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-) \}} \\ &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} (F^{m^+, m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+),\ O(\varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)\, F^{m^+, m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+)) \\ + (F^{m^-, m'^-}(j, \varphi^-, \psi^-),\ O(\varphi^+, \psi^+, \varphi^-, \psi^-)\, F^{m^-, m'^-}(j, \varphi^-, \psi^-)) \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} (F^{m^+, m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+),\ F^{m^+, m'^+}(j, \varphi^+, \psi^+)) \\ + (F^{m^-, m'^-}(j, \varphi^-, \psi^-),\ F^{m^-, m'}(j, \varphi^-, \psi^-)) \end{array} \right\}}, \end{aligned}$$

en particulier,

(100) $$\langle J_3^{\pm} \rangle = \frac{m^{\pm}}{2}, \qquad \langle J_3'^{\pm} \rangle = \frac{m'^{\pm}}{2}.$$

Il n'est pas étonnant de trouver dans (100) la moitié du résultat (94), puisque dans $\mathcal{E}_1$ l'unité de longueur est $\sqrt{2}$ fois celle des espaces $\mathcal{E}_1^+$ et $\mathcal{E}_1^-$.

Nous reviendrons plus loin sur cette question.

3. **Étude des espaces vectoriels** $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$. — 3.1. ESPACE VECTORIEL $\mathcal{E}_2^+$. — Comme dans la première partie de cette étude, il est nécessaire de commencer par l'étude de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_2$ des fonctions

$$\Theta_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\theta+,\theta-) = \left\{ \Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ \Theta_{l-}^{m-,m'-}(\theta-) \right\}, \tag{101}$$

avec :

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2^+ \times \mathcal{E}_2^-.$$

Il faut donc définir une forme bilinéaire dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}_2^+$ des fonctions $\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)$. Remarquons d'abord que comme $\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)$ est indépendant de j

$$\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right)^* = \Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+). \tag{102}$$

Il faut ensuite déterminer l'élément de volume d'intégration dans l'espace $\mathcal{E}^+$. Il est montré en Appendice qu'on a :

$$dV = 16\sqrt{2}\left| 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\theta_1 + \operatorname{ch} 2\theta_2) \right| d\varphi_1\, d\psi_1\, d\theta_1\, d\varphi_2,\ d\psi_2,\ d\theta_2. \tag{103}$$

On définira alors dans l'espace des fonctions $\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)$ la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} &\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ \Theta_{l+}^{n+,n'+}(\theta+)\right) \\ &\quad = \lim_{\Theta \to \infty} e^{-2(l++1)\Theta} \int_{-\Theta}^{+\Theta} \left[\int_0^{\pi} \Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\, \Theta_{l+}^{n+,n'+}(\theta+) \right. \\ &\qquad\qquad \left. \times \left| 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\theta_1) + \operatorname{ch} 2\theta_2 \right| d\theta_1 \right] d\theta_2, \end{aligned} \tag{104}$$

où Θ est un nombre arbitraire réel positif et où l'intégration sur θ_1 est effectuée en premier.

Comme on l'a remarqué dans la première partie $\Theta_{l+}^{m+,m+'}(\theta+)$ est un polynome en $\cos\theta+$ de degré $l+$; $\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\ \Theta_{l+}^{n+,n'+}(\theta+)$ un polynome de degré $2l^+$. Comme $\left| 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\theta_1 + \operatorname{ch} 2\theta_2) \right|$ est un polynome de degré 2 aussi en $\cos\theta^+$, on a finalement un polynome de degré $2(l^+ + 1)$ en $\cos\theta^+$.

De la même façon que précédemment on montrerait que

$$\begin{aligned}\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\,\Theta_{l+}^{n+,n'+}(\theta+)\left|1-\frac{1}{2}(\cos 2\theta_1+\operatorname{ch} 2\theta)_2\right|\\ =f(\operatorname{ch}\theta_2\cos\theta_1)+i\,g(\operatorname{sh}\theta_2\sin\theta_1),\end{aligned}$$

g étant un polynome impair qui s'annule dans l'intégration sur θ_2 et f un polynome de degré $2(l^+ + 1)$ pair. Comme précédemment, ce polynome f peut être ordonné en $\operatorname{ch} k\theta_2$, puis intégré par rapport à θ_1. Ceci prouve que l'expression (104) est réelle et bornée. On en déduit la métrique qui n'est pas définie positive

$$\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ \Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right).$$

Si cette quantité est positive, nous conviendrons de dire que $\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)$ est du genre temps; si elle est négative, qu'il est du genre espace. Avec cette convention, on peut définir la norme d'une fonction $\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)$ par la relation :

$$\left\|\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right\|=\sqrt{\left|\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ \Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right)\right|}. \tag{105}$$

Si $O(\theta+)$ est un opérateur tel que l'expression

$$\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ O(\theta+)\,\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right)$$

ait un sens, alors la valeur moyenne de cet opérateur sera

$$\langle O(\theta+)\rangle=\frac{\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ O(\theta+)\,\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right)}{\left(\Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+),\ \Theta_{l+}^{m+,m'+}(\theta+)\right)}. \tag{106}$$

Nous ferons les remarques suivantes :

1° Nous nous sommes limité au cas où l^+ est fixé, nous reviendrons sur cette condition un peu plus loin.

2° Comme précédemment, il est possible de remplacer les bornes $(-\Theta, \Theta)$ par $(-\Theta', \Theta)$ à condition de remplacer l'exponentielle $e^{-2(l+1)\Theta}$ par $e^{-(l^+ +1)(\Theta+\Theta')}$ et de faire tendre Θ et Θ' vers l'infini de la façon déjà indiquée.

3° Enfin, en remplaçant partout dans les expressions précédentes θ^+ par θ^- et l^+, m^+, m'^+, n^+, n'^+ par l^-, m^-, m'^-, n^-, n'^-, on obtiendrait des relations analogues valables dans l'espace $\mathcal{E}_2^-$.

3.2. — **Espace vectoriel $\mathcal{E}^+$.** — Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{E}^+$ des fonctions $Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)$ pour des valeurs fixées de l^+,

$$Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+) = F^{m^+, m'^+}(\varphi^+, \psi^+)\, \Theta_{l^+}^{m^+, m'^+}(\theta^+). \tag{107}$$

Toutes les formules ci-dessous découlent des paragraphes précédents :

1° Forme bilinéaire :

$$\begin{aligned}\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, Y_{l^+}^{n^+, n'^+}(\omega^+)\right) &= \lim_{\substack{\Phi \\ \Psi \\ \Theta}\Big\} \to \infty} \frac{e^{-2(l^+ +1)\Theta}}{4\Phi\Psi} \int_{-\Phi}^{+\Phi} \int_{-\Phi}^{+\Psi} \int_{-\Theta}^{+\Theta} \\ &\times \left[\int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right)^* Y_{l^+}^{n^+, n'^+}(\omega^+)\, dV \right],\end{aligned} \tag{108}$$

où dV est donnée, par l'expression (103) et où l'intégration est effectuée en premier sur θ_1, φ_1, ψ_1, avec :

$$\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, Y_{l^+}^{n^+, n'^+}(\omega^+)\right) = 8\pi^2 A\, \delta_{m^+ n^+}\, \delta_{m'^+ n'^+}, \tag{109}$$

où A est un scalaire réel, positif ou négatif.

2° La métrique est indéfinie :

Si $\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right) > 0$, $Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)$ est dit du genre espace;

Si $\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right) < 0$, $Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)$ est dit du genre temps.

3° D'où la norme d'un vecteur $Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)$:

$$\left\| Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+) \right\| = \sqrt{\left|\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right)\right|}. \tag{110}$$

4° Si l'expression : $\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, O(\omega^+)\, Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right)$ a un sens, la valeur moyenne de l'opérateur $O(\omega^+)$ est :

$$\langle O(\omega^+) \rangle = \frac{\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, O(\omega^+)\, Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right)}{\left(Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+),\, Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+)\right)}. \tag{111}$$

En particulier,

$$\langle J_3^+ \rangle = m^+, \qquad \langle J_3'^+ \rangle = m'^+, \qquad (J^+)^2 = l^+(l^+ + 1). \tag{112}$$

5° Enfin, en changeant simultanément ω^+ en ω^-; l^+, m^+, m'^+, n^+, n'^+

en l^-, m^-, m'^-, n^-, n'^- ; J_3^+, $J_3'^+$, $(J^+)^2$ en J_3^-, $J_3'^-$, $(J^-)^2$, on obtient des résultats analogues valables dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}^-$.

3.3. **Espace vectoriel** $\mathcal{E}^-$. — Considérons maintenant l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions $U_{l+,l-}^{m+,m-,m'+,m'-}(\omega^+, \omega^-)$ pour des valeurs fixées de l^+ et l^-,

$$U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-) = \left\{ Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+), Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-) \right\}.$$

Tout ce qui suit est une simple juxtaposition des résultats précédents.

1° Forme bilinéaire :

$$(113) \quad \begin{aligned} &\left(U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-), U_{l+,l-}^{n+,n'+,n-,n'-}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ &\quad = \left(Y_{l-}^{m+,m'+}(\omega^+), Y_{l+}^{n+,n'+}(\omega^+)\right) + \left(Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-), Y_{l-}^{n-,n'-}(\omega^-)\right) \\ &\quad = 8\pi^2[A^+ \delta_{m+n+} \delta_{m'+n'+} + A^- \delta_{m-,n-} \delta_{m'-,n'-}], \end{aligned}$$

où A^+ et A^- sont des scalaires réels positifs ou négatifs.

2° La métrique est indéfinie. Nous adoptons encore la convention : si

$$\left(U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-), U_{l+,l+}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right) > 0,$$

le vecteur est du genre espace.

Si l'expression précédente est négative, il est du genre temps.

3° D'où la norme d'un vecteur $U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-)$:

$$(114) \quad \begin{aligned} &\left\| U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-) \right\| \\ &\quad = \sqrt{\left| U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'+}(\omega^+, \omega^-), U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-)) \right|} \end{aligned}$$

et si l'expression

$$\left(U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-), O(\omega^+, \omega^-) U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right)$$

a un sens, la valeur moyenne de l'opérateur $O(\omega^+, \omega^-)$

$$(115) \quad \begin{aligned} &\langle O(\omega^+, \omega^-) \rangle \\ &\quad = \frac{\left(U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-), O(\omega^+, \omega^-) U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right)}{\left(U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-), U_{l+,l-}^{m+,m'+,m-,m'-}(\omega^+, \omega^-)\right)} \\ &\quad = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left(Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+), O(\omega', \omega) Y_{l-}^{m+ m'+}(\omega^+)\right) \\ + \left(Y_{l+}^{m-,m'+}(\omega^-), O(\omega^+, \omega^-) Y_{l+}^{m-,m'-}(\omega^-)\right) \end{array} \right\}}{\left(Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+), Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)\right) + \left(Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-), Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-)\right)}. \end{aligned}$$

Ceci n'est vrai que si l'opérateur $O(\omega^+, \omega^-)$ effectue un mélange des composantes $+$ et $-$ de l'espace $\mathcal{E}$, autrement dit s'il y a interférence entre $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$.

Considérées comme éléments de ε les fonctions $Y_{l+}^{m+, m'+}(\omega^+)$ ont pour composantes

$$U_{l+,0}^{m+, m'+, 0, 0}(\omega^+, \omega^-) = \{ Y_{l+}^{m+, m'+}(\omega^+), 0 \}$$

et, de la même façon,

$$U_{0, l-}^{0, 0, m-, m'-}(\omega^+, \omega^-) = \{ 0, Y_{l-}^{m-, m'-}(\omega^-) \}.$$

Si donc un opérateur n'opère que sur l'un des deux sous-espaces. on retrouve sa valeur moyenne donnée par l'expression (111), en particulier :

$$\langle J_3^{\pm} \rangle = m^{\pm}, \qquad \langle J_3'^{\pm} \rangle = m'^{\pm}, \qquad (J^{\pm})^2 = l^+(l^+ + 1).$$

Si l'on considérait, par exemple, l'opérateur $-j\dfrac{\partial}{\partial \varphi_1}$, l'application de le formule (115) donne

$$\left\langle -j\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right\rangle = \frac{1}{2}(m^+ + m^-),$$

mais on peut aussi écrire

$$-j\frac{\partial}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2}\left[-j\frac{\partial}{\partial \varphi^+} + \left(-j\frac{\partial}{\partial \varphi^-} \right) \right]$$

et en utilisant ici deux fois la relation (111), il vient

$$\left\langle -j\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right\rangle = \frac{m^+ + m^-}{2},$$

ce qui est bien le résultat déjà trouvé. On remarquerait que c'est aussi ce qu'on trouve dans le cas de la métrique faible.

Il reste maintenant à étendre ces résultats au cas de l'espace vectoriel E des fonctions $Z_{l+, l-s'}^{m+, m-, m'}(\omega^+, \omega^-)$.

4. Étude de l'espace vectoriel E. — Comme on l'a vu dans la première partie des nécessités d'invariance de la théorie sous le groupe complet de Lorentz au lieu que ce soit sous le groupe propre seulement conduit à envisager au lieu des opérateurs $J_3^{\pm}$, $J_3'^{\pm}$, $(J^{\pm})^2$, l'ensemble des opérateurs

(116) $\quad J_3^{\pm}, \quad (J^{\pm})^2, \quad S'_3 = J_3^+ + J_3^-, \quad S'^2 = S'_k S'_k \quad (k = 1, 2, 3).$

Le problème est donc de passer de

(117) $\left\{ Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+), o \right\}$ fonctions propres simultanées de J_3^+, $J_3'^+$, $(J^+)^2$,

et

(118) $\left\{ o, Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-) \right\}$ fonctions propres simultanées de J_3^-, $J_3'^-$, $(J^-)^2$,

à l'espace des fonctions propres des six opérateurs définies dans (116) or, $\mathcal{E}$ étant le produit cartésien de $\mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$$

et l'opération parité transformant $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ et *vice versa*, on a

$$P\mathcal{E} = \mathcal{E}^- \times \mathcal{E}^+.$$

Donc, pour avoir un espace invariant sous l'opération parité, il suffira de faire la somme directe de ces deux espaces.

D'où

$$E = \mathcal{E} \oplus P\mathcal{E}.$$

On en déduit immédiatement les fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ de cet espace à partir des expressions (117) et (118)

$$(119) \quad Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{-m'+,-m'-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ \qquad \times Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)\, Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-), \\ \displaystyle\sum_{-m'+,-m'-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ \qquad \times Y_{l+}^{m+,m'+}(\omega^+)\, Y_{l-}^{m-,m'-}(\omega^-) \end{array} \right\},$$

où $(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m')$ sont les paramètres de Clebsch-Gordan.

On observera que les deux composantes sont identiques, ce à quoi il fallait s'attendre étant donné l'invariance de l'espace E sous l'opération parité.

On peut donc se contenter d'utiliser une seule composante, ce qui manifestement ne changera rien au résultat que nous obtiendrons; géométriquement ceci reviendrait à diviser par $\sqrt{2}$ l'unité de longueur dans le métrique de E.

Dans la suite, on écrira donc :

$$(120)\qquad \begin{aligned} &Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-) \\ &= \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^-, -m'^-, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ &\qquad \times Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-). \end{aligned}$$

Il peut sembler à première vue qu'on retombe sur les résultats de la première partie. Il n'en est rien, car ici ω^+ et ω^- sont considérés comme des variables indépendantes, chacune fonction de ω_1 et ω_2, il est vrai, mais dont les variations doivent être prises indépendamment l'une de l'autre.

On définira donc dans l'espace E une fonctionnelle linéaire par une intégrale double de Stieltjes

$$(121)\qquad \begin{aligned} &\left(Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-),\ Z^{n^+, n^-, n'}_{l^+, l^-, t'}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ &= \sum_{-m'^+, -m'^-}\ \sum_{-n'^+, -n'^-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ &\qquad \times (l^+, l^-, -n'^+, -n'^- \mid l^-, l^-, t', -n') \\ &\quad \times \iint \left(Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-)\right)^\star \\ &\qquad \times Y^{n^+, n'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{n^-, n'^-}_{l^-}(\omega^-)\, d\omega^+\, d\omega^-, \end{aligned}$$

où $\left(Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-)\right)^\star$ est la fonction hermitienne conjuguée de $Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-)$.

Or, l'intégrale (121) est séparable et il vient :

$$(122)\qquad \begin{aligned} &\left(Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-),\ Z^{n^+, n^-, n'}_{l^+, l^-, t}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ &= \sum_{-m'^+, -m'^-}\ \sum_{-n'^+, -n'^-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ &\qquad \times (l^+, l^-, -n'^+, n'^- \mid l^+, l^-, t', -n') \\ &\quad \times \left(\int \left(Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\right)^\star Y^{n^+, n'^+}_{l^+}(\omega^+)\, d\omega^+\right) \\ &\quad \times \left(\int \left(Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-)\right)^\star Y^{n^-, n'^-}_{l^-}(\omega^-)\, d\omega^-\right). \end{aligned}$$

Or, les deux intégrales de Stieltjes qui figurent au second membre de (122) :

$$\int \left(Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(\omega^+)\right)^\star Y^{n^+, n'^+}_{l^+}(\omega^+)\, d\omega^+ \quad \text{et} \quad \int \left(Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(\omega^-)\right)^\star Y^{n^-, n'^-}_{l^-}(\omega^-)\, d\omega^-$$

ne sont autres que la forme bilinéaire (108) :

$$\begin{aligned}
&\int \left(\mathrm{Y}_{l+}^{m+,\,m'+}(\omega^+)\right)^\star \mathrm{Y}_{l+}^{n-,\,n'+}(\omega^+)\,d\omega^+ \\
&= \lim_{\left.\begin{matrix}\Phi\\ \Psi\\ \Theta\end{matrix}\right\}\to\infty} \frac{e^{-2(l^+ +1)\Theta}}{4\Phi\Psi} \int_{-\Phi}^{\Phi}\int_{-\Psi}^{\Psi}\int_{-\Theta}^{\Theta} \\
&\quad\times\left[\int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\mathrm{Y}_{l+}^{m+,\,m'+}(\omega^+)\right)^\star \mathrm{Y}_{l+}^{n+,\,n'+}(\omega^+)\,d\omega^+\right] \\
&= \left(\mathrm{Y}_{l+}^{m+,\,m'+}(\omega^+),\ \mathrm{Y}_{l+}^{n+,\,n'+}(\omega^+)\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(123)\quad &\left(\mathbf{Z}_{l+,\,l-,\,s'}^{m+,\,m-,\,m'}(\omega^+,\ \omega^-),\ \mathbf{Z}_{l+,\,l-,\,t'}^{n+,\,n-,\,n'}(\omega^+,\ \omega^-)\right) \\
&= \sum_{-m'+,\,-m'-}\ \sum_{-n'+,\,-n'}(l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m') \\
&\qquad\qquad\times(l^+,\ l^-,\ -n'^+,\ -n'^-\mid l^+,\ l^-,\ t',\ -n') \\
&\quad\times\left(\mathrm{Y}_{l+}^{m+,\,m'+}(\omega^+),\ \mathrm{Y}_{l-}^{n+,\,n'+}(\omega^+)\right)\left(\mathrm{Y}_{l-}^{m-,\,m'-}(\omega^-),\ \mathrm{Y}_{l-}^{n-,\,n'-}(\omega^-)\right).
\end{aligned}$$

Or, si les fonctions $\mathrm{Y}_{l+}^{m+,\,m'+}(\omega^+)$ et $\mathrm{Y}_{l-}^{m-,\,m'-}(\omega^-)$ sont convenablement normées on a, d'après l'expression (109) :

$$\left(\mathrm{Y}_{l+}^{m-,\,m'+}(\omega^+),\ \mathrm{Y}_{l+}^{n+,\,n'+}(\omega^+)\right) = \varepsilon_\pm\,\delta_{m+,\,m'+}\,\delta_{n+,\,n'+} \qquad (\varepsilon_\pm = \pm 1)$$

et, de la même façon :

$$\left(\mathrm{Y}_{l-}^{m-,\,m'-}(\omega^-),\ \mathrm{Y}_{l-}^{n-,\,n'-}(\omega^-)\right) = \varepsilon_\pm\,\delta_{m-,\,m'-}\,\delta_{n-,\,n'-}.$$

Si l'on porte ces relations dans l'expression (123), il vient :

$$\begin{aligned}
(124)\quad &\left(\mathbf{Z}_{l+,\,l-,\,s'}^{m+,\,m-,\,m'}(\omega^+,\ \omega^-),\ \mathbf{Z}_{l+,\,l-,\,t'}^{n+,\,n-,\,n'}(\omega^+,\ \omega^-)\right) \\
&= \sum_{-m'+,\,-m'-}\ \sum_{-n'+,\,-n'}(l^-,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m') \\
&\qquad\qquad\times(l^+,\ l^-,\ -n'^+,\ -n'^-\mid l^+,\ l^-,\ t',\ -n') \\
&\qquad\qquad\times\varepsilon_+\varepsilon_-\,\delta_{m+n+}\,\delta_{m'+n'+}\,\delta_{m-n-}\,\delta_{m'-n'-} \\
&= \delta_{m+n+}\,\delta_{m-n-}\sum_{-m'+,\,-m'-}\ \sum_{-n'+,\,-n'-}(l^-,l^-,-m'^+,-m'^-\mid l^-,l^-,s',-m') \\
&\qquad\qquad\times(l^-,l^-,-n'^+,-n'^-\mid l^+,l^-,t',-n') \\
&\qquad\qquad\times\varepsilon_+\varepsilon_-\,\delta^{m'+n'+}\,\delta^{m'-n'-}.
\end{aligned}$$

Les $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ proviennent du caractère indéfini de la métrique dans les espaces $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$.

A cause de la propriété des paramètres de Clebsch-Gordan d'être nuls, sauf si

$$m^+ + m^- = m' \quad \text{et} \quad n^+ + n^- = n',$$

la relation précédente s'écrit :

$$(125)\quad \left(Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-),\ Z_{l^+,l^-,t'}^{n^+,n^-,n'}(\omega^+,\ \omega^-)\right) = A\,\delta_{m^+n^+}\delta_{m^-n^-}\delta_{m'n'},$$

où

$$(126)\quad A = \sum_{-m'^+,-m'^-}\ \sum_{-n'^+,-n'^-} (l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^- \mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m') \times (l^+,\ l^-,\ -n'^+,\ -n'^- \mid l^+,\ l^-,\ t',\ -n') \times \varepsilon_{l^+m^+n^+}\varepsilon_{l^-m^-n^-},$$

où $\varepsilon_{l^+,m^+,n^+}$ et $\varepsilon_{l^-,m^-,n^-}$ sont égaux à 1 ou à -1. A est donc un nombre positif ou négatif.

La relation (125) indique que le produit scalaire est nul, sauf si

$$m^+ = n^+, \qquad m^- = n^-, \qquad m' = n'.$$

Or, comme nous le montrerons [6], ceci correspond aux règles de sélection des intéractions fortes dans la théorie des particules élémentaires. C'est ce qui justifie le nom de métrique forte que nous avons donné à l'étude effectuée dans cette partie.

La métrique est indéfinie, mais on a montré qu'il fallait s'y attendre.

On a :

$$\left(Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-),\ Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^-,\ \omega^-)\right) = A;$$

— si $A > 0$, $Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-)$ sera dit du genre espace;

— si $A < 0$, $Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-)$ sera dit du genre temps.

Si l'expression :

$$\left(Z_{l^+,l^-s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-),\ O(\omega^+,\ \omega^-)\,Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-)\right)$$

a un sens, la valeur moyenne de l'opérateur $O(\omega^+,\ \omega^-)$ sera

$$(127)\quad \langle O(\omega^+,\ \omega^-)\rangle = \frac{\left(Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+\omega^-),\ O(\omega^+,\ \omega^-)\,Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-)\right)}{\left(Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-),\ Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-)\right)}.$$

En particulier,

$$\langle J_3^{\pm}\rangle = m^{\pm}, \qquad \langle S'_3\rangle = m',$$
$$\langle (J^{\pm})^2\rangle = l^{\pm}(l^{\pm}+1), \qquad \langle S'^2\rangle = s'(s'+1)$$

et

$$\left\langle -j\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right\rangle = m^+ + m^-, \qquad \left\langle -j\frac{\partial}{\partial\psi_1}\right\rangle = m'.$$

On a donc réussi à définir un produit scalaire ayant toujours un sens dans l'espace vectoriel E des fonctions $Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s}(\omega^+, \omega^-)$ correspondant à des valeurs fixées de l^+ et l^-. On peut maintenant faire un certain nombre de remarques.

La condition $\delta_{m'^+ n'^+} = 1$ n'est possible que si l^+ et l'^+ sont simultanément, soit entiers, soit demi-entiers ; même remarque pour $\delta_{m'_- n'^-} = 1$, l^- et l'^- de sorte qu'on doit toujours avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} l^+ + l'^+ = n, \\ l^- + l'^- = p, \end{array} \right. \tag{128}$$

où n et p sont des entiers positifs.

Dans ces conditions, on peut étendre la relation (125) et écrire

$$\left(Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-), Z^{n^+, n^-, n'}_{l^+, l^-, t'}(\omega^+, \omega^-)\right) = A\,\delta_{l^+ + l'^+, n}\,\delta_{l^- + l'^-, p}\,\delta_{m^+ n^+}\,\delta_{m^- n^-}\,\delta_{m' n'}. \tag{129}$$

Les conditions (129) sont suffisantes pour qu'on puisse avoir $m' = n'$. Ceci montre que tous les produits scalaires entre les fonctions pour lesquelles $l^+ + l^-$ est un entier et celles pour lesquelles $l^+ + l^-$ est demi-entier, sont nuls.

Il est vain d'espérer d'aller plus loin dans cette voie ; toutefois, comme on l'a signalé, il serait intéressant d'obtenir une définition du produit scalaire qui redonne les résultats connus par les spineurs. Or, ceci est facile, il suffit de définir le produit scalaire de deux fonctions $\Theta^{m^+, m'^+}_{l^+}(\theta^+)$ et $\Theta^{m^+, m'^+}_{l'^+}(\Theta^+)$ par la relation qui remplacera l'expression (105) :

$$\begin{aligned} \left(\Theta^{m^+, m'^+}_{l^+}(\theta^+), \Theta^{n^+, n'^+}_{l'^+}(\theta^+)\right) = \lim_{\Theta \to \infty} e^{-2(L^+ + 1)\Theta} \int_{-\Theta}^{+\Theta} & \\ \times \left[\int_0^{\pi} \Theta^{m^+, m'^+}_{l^+}(\theta^+)\, \Theta^{n^+, n'^+}_{l'^+}(\theta^+) \right. & \\ \left. \times \left| 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\theta_1 + \operatorname{ch} 2\theta_2)\right| d\theta_1 \right] d\theta_2 & \end{aligned} \tag{130}$$

où

$$L^+ = \max\{l^+, l'^+\},$$

avec une définition analogue pour $\Theta^{m^-, m'^-}_{l^-}(\theta^-)$ et $\Theta^{n^-, n'^-}_{l'^-}(\theta^-)$.

Donc, si dans la définition de

$$\left(Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-), Z^{n'^+, n'^-, n'}_{l'^+, l'^-, t'}(\omega^+, \omega^-)\right)$$

on remplace la relation (115) par la relation (130), il vient :

$$(131)\quad \left(\mathrm{Z}_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\omega^-),\ \mathrm{Z}_{l'^+,l'^-,t'}^{n^+,n^-,n'}(\omega^+,\omega^-)\right)=\varepsilon\delta_{l^+,l'^+}\delta_{l^-,l'^-}\delta_{m^+n^+}\delta_{m^-n^-}\delta_{m'n'},$$

où $\varepsilon=\pm 1$.

Cette formule est la généralisation de l'expression à trois dimensions :

$$\left(\mathrm{Y}_l^{m,m'}(\theta,\varphi,\psi),\ \mathrm{Y}_k^{n,n'}(\theta,\varphi,\psi)\right)=\delta_{kl}\delta_{mm'}\delta_{nn'}.$$

On remarquera qu'il n'intervient aucune règle de sélection sur s'.

5. **Conclusion.** — Il est donc possible dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathrm{Z}_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\omega^-)$ dans lequel aucune restriction n'est faite sur les valeurs de l^+ et l^- de définir une fonctionnelle linéaire telle que les vecteurs $\mathrm{Z}_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\omega^-)$ constituent une base orthonormée de cet espace [formule (131)], en convenant de distinguer deux types de vecteurs, les uns du genre espace, les autres du genre temps. C'est-à-dire qu'on a pu définir un espace de Hilbert dans lequel la métrique est riemannienne au lieu d'être euclidienne. C'est une généralisation des espaces de Hilbert habituels.

On a obtenu ce résultat en utilisant des fonctionnelles linéaires différentes de celles employées par la définition du produit scalaire dans les espaces de Hilbert de la mécanique quantique usuelle. Il n'y a pas lieu de s'en étonner, les fonctions $\mathrm{Z}_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\omega^-)$ n'étant pas bornées. D'un point de vue mathématique, il n'y a aucune difficulté à utiliser une fonctionnelle linéaire différente. D'un point de vue physique il peut sembler étrange d'introduire le facteur $e^{-2(l^++1)\Theta}$ dans la définition du produit scalaire des fonctions $\Theta_{l^+}^{m^+,m'^+}(\omega^+)$ mais outre que ce facteur est imposé, par des nécessités mathématiques, on pourrait dire que physiquement il est justifié par les conséquences que l'on en tire, car la relation (131) est la généralisation naturelle du cas non relativiste, tellement naturelle que dans sa thèse, C. Van Winter n'a pas hésité à la postuler mais en supposant à tort la métrique euclidienne.

Il reste une question d'interprétation; comme on l'a indiqué, l'isomorphisme existant entre certains sous-espaces vectoriels de E et certains espaces d'êtres géométriques entraîne que la métrique doit être indéfinie. Et il semble bien qu'on doive admettre que dans tous les cas où les fonctions d'état sont invariantes sous le groupe complet de Lorentz, on ait affaire à une métrique indéfinie. C'est seulement quand elles sont invariantes sous le groupe des rotations tridimentionnelles (cas, par exemple, où l'on quantifie la partie spatiale des opérateurs moments cinétiques) que la métrique est euclidienne et qu'on puisse l'interpréter comme un probabilité. D'ailleurs, la métrique indéfinie a aussi été utilisée dans les théories quantiques usuelles ([15]). On pourrait comme le fait Heisenberg, décomposer notre espace de Hilbert en deux sous-espaces, l'un à métrique définie positive et l'autre qui serait le complémentaire du premier; et admettre que tous les états physiques appartiennent au premier sous-espace. Or, comme nous le montrerons ([6]), on peut attribuer à chaque particule élémentaire une fonction $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ telle qu'on retrouve une classification analogue à celle de Nishijima-Gell-Mann. Donc il est possible de calculer la norme de ces vecteurs pour voir si elle ne contredit pas ce postulat. Si elle ne le contredit pas, ce ne sera pas une preuve que le postulat est justifié, mais on pourrait affirmer que dans l'état actuel aucune des fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ représentant un état physique n'y contredit. Nous n'avons pas eu le temps d'entreprendre ce fastidieux travail. On pourra donc pour l'instant considérer comme ouverte la question de l'interprétation de la norme.

Pour conclure, nous précisons que dans les études ultérieures où seront employées les fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$, la norme utilisée sera celle qui conduit à l'expression (131), mais dans laquelle les limites d'intégration sur les variables ω_2 seront différentes puisqu'on a montré que ceci était possible. Nous voulons enfin remercier MM. les Professeurs L. de Broglie et L. Schwartz ainsi que MM. B. Stepanov, G. Rideau et A. Rot pour des conseils et suggestions qui ont facilité la mise au point de ce travail.

APPENDICE.

ÉLÉMENT DE VOLUME ET ANGLES D'EULER.

Dans la définition de la norme des fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$ l'élément de volume d'intégration a été pris égal à

$$dV = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi$$

([15]) W. Heisenberg, *Nucl. Phys.* t. 4, 1957, p. 532.

et, dans le cas de la norme des fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$, à

$$dV = F(\theta_1, \theta_2)d\theta_1\, d\varphi_1\, d\psi_1\, d\theta_2\, d\varphi_2\, d\psi_2,$$

où $F(\theta_1, \theta_2)$ est le déterminant dont les termes sont les composantes du tenseur métrique fondamental.

Nous allons maintenant justifier la première formule et expliciter la seconde.

1. **Rotations dans l'espace euclidien à trois dimensions.** — Considérons un système cartésien de coordonnées o, x, y, z. On a les relations

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1}$$

$$dV = dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

où ds^2 est l'élément de longueur et dV l'élément de volume. Supposons qu'on passe de ce système de coordonnées x, y, z à un système de coordonnées curvilignes $q_i (i = 1, 2, 3)$, on a dans ces conditions les relations bien connues :

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j, \tag{3}$$

$$dV = \sqrt{g}\, dq_1\, dq_2\, dq_3, \tag{4}$$

où

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} \tag{5}$$

et où g est le déterminant des g_{ij}.

Soit alors un système de trois vecteurs orthonormés b_k^r $(k, r = 1, 2, 3)$ repérés par rapport à o, x, y, z par les angles d'Euler habituels θ, φ, ψ, on aura

$$ds^2 = db_k^{(1)} db_k^{(1)} + db_k^{(2)} db_k^{(2)} + db_k^{(3)} db_k^{(3)}, \tag{6}$$

soit, en fonction des angles d'Euler,

$$\begin{cases} \omega_i = (\omega_1 = \theta,\ \omega_2 = \varphi,\ \omega_3 = \psi), \\ ds^2 = \gamma_{ij}\, d\omega_i\, d\omega_j, \end{cases} \tag{7}$$

où

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial b_k^{(1)}}{\partial \omega_i}\frac{\partial b_k^{(1)}}{\partial \omega_j} + \frac{\partial b_k^{(2)}}{\partial \omega_i}\frac{\partial b_k^{(2)}}{\partial \omega_j} + \frac{\partial b_k^{(3)}}{\partial \omega_i}\frac{\partial b_k^{(3)}}{\partial \omega_j}. \tag{8}$$

Cette formule montre que les γ_{ij} sont les g_{ij} de la transformation particulière

$$b_k^r = \Lambda_s^r q_k^s, \tag{9}$$

avec

$$a_k^{(1)} = (1, 0, 0) \equiv x, \qquad a_k^{(2)} = (0, 1, 0) \equiv y, \qquad a_k^{(3)} = (0, 0, 1) \equiv z$$

et Λ_s^r est la matrice constituée par les cosinus directeurs des axes b_i^r et a_j^s exprimés en fonction des angles d'Euler ω_i.

Explicitement, cette transformation s'écrit :

$$(10) \qquad \begin{cases} b^{(1)} = \begin{cases} b_1^{(1)} = \sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ b_2^{(1)} = -\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ b_3^{(1)} = \sin\psi\sin\theta; \end{cases} \\ b^{(2)} = \begin{cases} b_1^{(2)} = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ b_2^{(2)} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ b_3^{(2)} = -\cos\psi\sin\theta; \end{cases} \\ b^{(3)} = \begin{cases} b_1^{(3)} = \sin\varphi\sin\theta, \\ b_2^{(3)} = \cos\varphi\sin\theta, \\ b_3^{(3)} = \cos\theta, \end{cases} \end{cases}$$

Compte tenu des expressions (9) et (10), la relation (8) peut s'écrire

$$(11) \qquad g_{ij} \equiv \gamma_{ij} = \frac{\partial\Lambda^{1s}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\Lambda^{1s}}{\partial\omega_j} + \frac{\partial\Lambda^{2s}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\Lambda^{2s}}{\partial\omega_j} + \frac{\partial\Lambda^{3s}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\omega^{3s}}{\partial\omega_j}.$$

On en déduit si g est le déterminant des g_{ij}

$$(12) \qquad dV = \sqrt{g}\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3 = \sqrt{g}\, d\theta\, d\varphi\, d\psi.$$

Nous allons maintenant calculer g explicitement : les formules ci-dessus s'obtiennent par simple différentiation :

$$(13) \qquad \begin{cases} db^{(1)} = \begin{cases} db_1^{(1)} = b_2^{(1)}\,d\varphi - b_1^{(2)}\,d\psi + b_1^{(3)}\sin\psi\,d\theta, \\ db_2^{(1)} = -b_1^{(1)}\,d\varphi - b_2^{(2)}\,d\psi + b_2^{(3)}\sin\psi\,d\theta, \\ db_3^{(1)} = \ldots\ldots\ldots - b_3^{(2)}\,d\psi + b_3^{(3)}\sin\psi\,d\theta, \end{cases} \\ db^{(2)} = \begin{cases} db_1^{(2)} = -b_2^{(2)}\,d\varphi + b_1^{(1)}\,d\psi - b_1^{(3)}\cos\psi\,d\theta, \\ db_2^{(2)} = b_1^{(2)}\,d\varphi + b_2^{(1)}\,d\psi - b_2^{(3)}\cos\psi\,d\theta, \\ db_3^{(2)} = \ldots\ldots\ldots + b_3^{(1)}\,d\psi - b_3^{(3)}\cos\psi\,d\theta; \end{cases} \\ db^{(3)} = \begin{cases} db_1^{(3)} = b_2^{(3)}\,d\varphi + \ldots\ldots\ldots + b_3^{(3)}\sin\varphi\,d\theta, \\ db_2^{(3)} = -b_1^{(3)}\,d\varphi + \ldots\ldots\ldots + b_3^{(3)}\cos\varphi\,d\theta, \\ db_3^{(3)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \sin\theta\,d\theta, \end{cases} \end{cases}$$

avec les relations d'orthonormalité :

$$(14) \qquad b_k^r b_k^s = \delta^{rs}, \qquad b_k^r b_j^r = \delta_{kj}.$$

Pour l'application de la formule (8) et compte tenu de (14) les relations (13) fournissent immédiatement

$$\begin{aligned}
g_{\varphi\varphi} &= (b_2^{(1)})^2 + (b_1^{(1)})^2 + (b_2^{(2)})^2 = (b_1^{(2)})^2 + (b_2^{(3)})^2 + (b_1^{(3)})^2 = 2,\\
g_{\psi\psi} &= (b_1^{(2)})^2 + (b_2^{(2)})^2 + (b_3^{(2)})^2 + (b_1^{(1)})^2 + (b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2 = 2,\\
g_{\theta\theta} &= \sin^2\psi\,[(b_1^{(3)})^2 + b_2^{(3)})^2 + (b_3^{(3)})^2] + \cos^2\psi\,[(b_1^{(3)})^2 + (b_2^{(3)})^2 + (b_3^{(3)})^2]\\
&\qquad + [\cos^2\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \sin^2\theta] = 2,\\
g_{\psi\theta} &= -\sin\psi\,(b_1^{(3)}b_1^{(2)} + b_2^{(3)}b_2^{(2)} + b_3^{(3)}b_3^{(2)})\\
&\qquad - \cos\psi\,(b_1^{(1)}b_1^{(3)} + b_2^{(1)}b_2^{(3)} + b_3^{(1)}b_3^{(3)}) = 0,\\
g_{\varphi\theta} &= \sin\psi\,(b_2^{(1)}b_1^{(3)} - b_1^{(1)}b_2^{(3)}) - \cos\psi\,(b_2^{(2)}b_1^{\,3)} - b_1^{(2)}b_2^{(3)})\\
&\quad + \cos\theta\,(b_2^{(3)}\sin\varphi - b_1^{(3)}\cos\varphi)\\
&= \sin\psi\sin\theta\,(b_2^{(1)}\sin\varphi - b_1^{(1)}\cos\varphi) - \sin\theta\cos\psi\,(b_2^{(2)}\sin\varphi - b_2^{(2)}\cos\varphi)\\
&= -\sin\psi\cos\psi\sin\theta + \sin\psi\cos\psi\sin\theta = 0,\\
g_{\psi\varphi} &= -b_2^{(1)}b_1^{(2)} + b_1^{(1)}b_2^{(2)} + b_2^{(2)}b_1^{(1)} - b_1^{(2)}b_2^{(1)} = 2\,(b_1^{(1)}b_2^{(2)} - b_2^{(1)}b_1^{(2)}).
\end{aligned}$$

Un calcul simple mais un peu long donne :

$$g_{\varphi\psi} = 2\cos\theta,$$

d'où

$$g = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2\cos\theta \\ 0 & 2 & 0 \\ 2\cos\theta & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8(1 - \cos^2\theta) = 8\sin^2\theta,$$

soit

$$\sqrt{g} = 2\sqrt{2}\sin\theta.$$

En portant (12), il vient

$$dV = 2\sqrt{2}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\psi,$$

ce qui est bien la formule annoncée.

On remarquera que dans cet Appendice, on a utilisé pour les angles d'Euler tridimensionnels une convention légérement différente de celle des deux articles précédents, mais ceci ne change manifestement rien au résultat.

2. Cas des angles d'Euler dans l'espace-temps. — On peut généraliser immédiatement la relation (11). En effet, considérons le système suivant de quatre quadrivecteurs orthonormés :

$$a_\mu^{(1)} = (1, 0, 0, 0), \qquad a_\mu^{(2)} = (0, 1, 0, 0), \qquad a_\mu^{(3)} = (0, 0, 1, 0), \qquad ia_\mu^{(4)} = (0, 0, 0, i),$$

$ia_\mu^{(4)}$ est du genre temps, les trois vecteurs sont du genre espace. Soit le système des quatre quadrivecteurs orthonormés $b_\mu^\xi(\mu, \xi = 1, 2, 3, 4)$ satisfaisant aux relations

$$(15) \qquad b_\mu^\xi b_\mu^\eta = \delta^{\xi\eta}, \qquad b_\mu^\xi b_\nu^\xi = \delta_{\mu\nu}.$$

Introduisons les angles d'Euler ω_ρ :

$$\omega_1=\theta_1, \qquad \omega_2=\varphi_1, \qquad \omega_3=\psi_1, \qquad \omega_4=i\theta_2, \qquad \omega_5=i\varphi_2, \qquad \omega_6=i\psi_2.$$

et soit $\Lambda^{\xi\eta}$ la matrice des cosinus directeurs, exprimée en fonction des six angles d'Euler ω_ρ. On a alors la transformation

$$b^\xi_\mu=\Lambda^\xi_\eta\, a^\eta_\mu \tag{16}$$

qui est analogue à la transformation tridimensionnelle (9). La généralisation de la relation (11) est alors immédiate :

$$g_{\rho\sigma}=\frac{\partial\Lambda^{1\eta}}{\partial\omega_\rho}\frac{\partial\Lambda^{1\eta}}{\partial\omega_\sigma}+\frac{\partial\Lambda^{2\eta}}{\partial\omega_\rho}\frac{\partial\Lambda^{2\eta}}{\partial\omega_\sigma}+\frac{\partial\Lambda^{3\eta}}{\partial\omega_\rho}\frac{\partial \mathrm{V}^{3\eta}}{\partial\omega_\sigma}+\frac{\partial\Lambda^{4\eta}}{\partial\omega_\rho}\frac{\partial\Lambda^{4\eta}}{\partial\omega_\sigma}, \tag{17}$$

où ρ et σ prennent les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Si g est le déterminant 6×6 dont les coefficients sont $g_{\rho\sigma}$, on a alors

$$d\mathrm{V}=\sqrt{g}\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3\,d\omega_4\,d\omega_5\,d\omega_6=\sqrt{g}\,d\theta_1\,d\varphi_1\,d\psi_1\,d\theta^2\,d\varphi_2\,d\psi_2. \tag{18}$$

Nous allons conduire le calcul comme dans le cas à trois dimensions à partir de la matrice $\Lambda^{\xi\eta}$ donnée au paragraphe 3 de la première étude effectuée en collaboration avec F. Halbwachs.

On a immédiatement les résultats ci-dessous :

$$db^{(1)}=\begin{cases} db^{(1)}_1=-b^{(2)}_1 d\varphi_1+b^{(1)}_2 d\psi_1-\cos\varphi_1\cos\psi_1\sin\theta_1\,d\theta_1-\sin\varphi_1\sin\psi_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(1)}_2=-b^{(2)}_2 d\varphi_1-b^{(1)}_1 d\psi_1+\cos\varphi_1\sin\psi_1\sin\theta_1\,d\theta_1-\sin\varphi_1\cos\psi_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(1)}_3=-b^{(2)}_3 d\varphi_1-b^{(1)}_4 d\psi_2+\cos\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\psi_2\cos\theta_1\,d\theta_1-\sin\varphi_1\,\mathrm{sh}\,\psi_2\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(1)}_4=-b^{(2)}_4 d\varphi_1-b^{(1)}_3 d\psi_2-\cos\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\psi_2\cos\theta_1\,d\theta_1+\sin\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\psi_2\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2;\end{cases}$$

$$db^{(2)}=\begin{cases} db^{(2)}_1=b^{(1)}_1 d\varphi_1+b^{(2)}_2 d\psi_1-\sin\varphi_1\cos\psi_1\sin\theta_1\,d\theta_1+\cos\varphi_1\sin\psi_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(2)}_2=b^{(1)}_2 d\varphi_1-b^{(2)}_1 d\psi_1+\sin\varphi_1\sin\psi_1\sin\theta_1\,d\theta_1+\cos\varphi_1\cos\psi_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(2)}_3=b^{(1)}_3 d\varphi_1-b^{(2)}_4 d\psi_2+\sin\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\psi_2\cos\theta_1\,d\theta_1+\cos\varphi_1\,\mathrm{sh}\,\psi_2\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(2)}_4=b^{(1)}_4 d\varphi_1-b^{(2)}_3 d\psi_2-\sin\varphi_1\,\mathrm{sh}\,\psi_2\cos\theta_1\,d\theta_1-\cos\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\psi_2\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2;\end{cases}$$

$$db^{(3)}=\begin{cases} db^{(3)}_1=-b^{(4)}_1 d\varphi_2+b^{(3)}_2 d\psi_1-\mathrm{ch}\,\varphi_2\cos\psi_1\cos\theta_1\,d\theta_1+\mathrm{sh}\,\varphi_2\sin\psi_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(3)}_2=-b^{(4)}_2 d\varphi_2-b^{(3)}_1 d\psi_1+\mathrm{ch}\,\varphi_2\sin\psi_1\cos\theta_1\,d\theta_1+\mathrm{sh}\,\varphi_2\cos\psi_2\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(3)}_3=-b^{(4)}_3 d\varphi_2-b^{(3)}_4 d\psi_2-\mathrm{ch}\,\varphi_2\,\mathrm{ch}\,\psi_2\sin\theta_1\,d\theta_1+\mathrm{sh}\,\varphi_2\,\mathrm{sh}\,\psi_2\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(3)}_4=-b^{(4)}_4 d\varphi_2-b^{(3)}_3 d\psi_2+\mathrm{ch}\,\varphi_2\,\mathrm{sh}\,\psi_2\sin\theta_1\,d\theta_1-\mathrm{sh}\,\varphi_2\,\mathrm{ch}\,\psi_2\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2;\end{cases}$$

$$db^{(4)}=\begin{cases} db^{(4)}_1=-b^{(3)}_1 d\varphi_2+b^{(4)}_2 d\psi_1+\mathrm{sh}\,\varphi_2\cos\psi_1\cos\theta_1\,d\theta_1-\mathrm{ch}\,\varphi_2\sin\psi_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(4)}_2=-b^{(3)}_2 d\varphi_2-b^{(4)}_1 d\psi_1-\mathrm{sh}\,\varphi_2\sin\psi_1\cos\theta_1\,d\theta_1-\mathrm{ch}\,\varphi_2\cos\psi_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(4)}_3=-b^{(3)}_3 d\varphi_2-b^{(4)}_4 d\psi_2+\mathrm{sh}\,\varphi_2\,\mathrm{ch}\,\psi_2\sin\theta_1\,d\theta_1-\mathrm{ch}\,\varphi_2\,\mathrm{sh}\,\psi_2\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2,\\ db^{(4)}_4=-b^{(3)}_4 d\varphi_2-b^{(4)}_3 d\psi_2-\mathrm{sh}\,\varphi_2\,\mathrm{sh}\,\varphi_2\sin\theta_1\,d\theta_1+\mathrm{ch}\,\varphi_2\,\mathrm{ch}\,\varphi_2\,\mathrm{sh}\,\theta_2\,d\theta_2.\end{cases}$$

On en déduit immédiatement les résultats suivants :

a. On a

$$g_{\varphi_1\varphi_1} = g_{\psi_1\psi_1} = g_{\theta_1\theta_1} = g_{\varphi_2\varphi_2} = g_{\psi_2\psi_2} = g_{\theta_2\theta_2} = 2;$$

b. φ_1 et φ_2 d'une part, ψ_1 et ψ_2 d'autre part, ne figurant jamais simultanément dans le même terme :

$$g_{\varphi_1\varphi_2} = g_{\psi_1\psi_2} = 0;$$

c. A cause de la symétrie des termes :

$$g_{\varphi_1\theta_1} = g_{\varphi_2\theta_2} = g_{\varphi_1\theta_2} = g_{\varphi_2\theta_1} = g_{\psi_1\theta_1} = g_{\psi_2\theta_2} = g_{\psi_1\theta_2} = g_{\psi_2\theta_1} = g_{\theta_2\theta_1} = 0;$$

d. On a

$$\begin{aligned} g_{\varphi_1\psi_1} &= \quad b_3^{(2)}b_4^{(1)} + b_4^{(2)}b_3^{(1)} - b_3^{(1)}b_4^{(2)} - b_4^{(1)}b_3^{(2)} = 0, \\ g_{\varphi_2\psi_2} &= - b_1^{(4)}b_2^{(3)} + b_2^{(4)}b_1^{(3)} - b_1^{(3)}b_2^{(4)} + b_1^{(4)}b_2^{(3)} = 0, \end{aligned}$$

e. Il reste à calculer $g_{\varphi_1\psi_1}$ et $g_{\varphi_2\psi_2}$:

$$\begin{aligned} g_{\varphi_1\psi_1} &= 2(-b_1^{(2)}b_2^{(1)} + b_2^{(2)}b_1^{(1)}), \\ g_{\varphi_1\psi_1} &= 2(\quad b_3^{(4)}b_4^{(3)} + b_4^{(4)}b_3^{(3)}). \end{aligned}$$

Le calcul est simple, et l'on trouve :

$$g_{\varphi_1\psi_1} = 2 \operatorname{ch}\theta_2 \cos\theta_1.$$

Or, on remarquera qu'on passe de $g_{\varphi_1\psi_1}$ à $g_{\varphi_2\psi_2}$ en changeant φ_1 en $i\varphi_2$ et ψ_1 en $i\psi_2$ et en laissant θ_1 et θ_2 inchangés.

Il en résulte que :

$$g_{\varphi_2\psi_2} = g_{\varphi_1\psi_1} = 2 \operatorname{ch}\theta_2 \cos\theta_1.$$

Le déterminant g s'écrit dès lors à partir des résultats précédents :

$$(19) \qquad g = \left| \begin{array}{c|cccccc} & \varphi_1. & \psi_1. & \theta_1. & \varphi_2. & \psi_2. & \theta_2. \\ \hline \varphi_1 & 2 & 2\operatorname{ch}\theta_2\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & 2\operatorname{ch}\theta_2\cos\theta_1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2\operatorname{ch}\theta_2\cos\theta_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 2\operatorname{ch}\theta_2\cos\theta_1 & 2 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Son calcul est immédiat; il vient :

$$(20) \qquad g = 64(1 - \operatorname{ch}^2\theta_2 \cos^2\theta_1)^2,$$

soit :

$$dV = 8\sqrt{(1 - \operatorname{ch}^2\theta_2 \cos^2\theta_1)^2}\, d\varphi_1\, d\psi_1\, d\theta_1\, d\varphi_2\, d\psi_2\, d\theta_2,$$

soit encore :

$$dV = 8\,|\,1 - \operatorname{ch}^2\theta_2 \cos^2\theta_1\,|\, d\varphi_1\, d\psi_1\, d\theta_1\, d\varphi_2\, d\psi_2\, d\theta_2. \tag{21}$$

On a ainsi justifié l'élément de volume utilisé.

A l'approximation non relativiste ($\theta_2 = \varphi_2 = \psi_2 = 0$) le déterminant se réduit à ses trois premières lignes et colonnes et l'on retrouve bien pour l'élément de volume l'expression du paragraphe précédent.

3. **Élément de volume dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}^+$.** — Soit

$$B_k^{r+} = b_k^r b_4^{(4)} - b_4^r b_k^{(4)} + \varepsilon_{ijk} b_i^r b_j^{(4)}$$

les vecteurs du trièdre complexe dont les angles θ^+, φ^+, ψ^+ décrivent le mouvement. On sait ([16]) qu'on a entre les vecteurs B_k^{r+} et les angles θ^+, φ^+, ψ^+ les mêmes relations qu'entre les vecteurs b_k^r et les angles θ, φ, ψ; explicitement :

$$\left\{\begin{aligned}
B^{(1)+} &= \left\{\begin{aligned}
B_1^{(1)+} &= \cos\varphi^+ \cos\psi^+ - \sin\varphi^+ \sin\psi^+ \cos\theta^+,\\
B_2^{(1)+} &= -\sin\varphi^+ \sin\psi^+ - \cos\varphi^+ \sin\psi^+ \cos\theta^+,\\
B_3^{(1)+} &= \sin\psi^+ \sin\theta^+;
\end{aligned}\right.\\
B^{(2)+} &= \left\{\begin{aligned}
B_1^{(2)+} &= \cos\varphi^+ \sin\psi^+ + \sin\varphi^+ \cos\psi^+ \cos\theta^+,\\
B_2^{(2)+} &= -\sin\varphi^+ \sin\psi^+ + \cos\varphi^+ \cos\psi^+ \cos\theta^+,\\
B_3^{(2)+} &= -\cos\psi^+ \sin\theta^+;
\end{aligned}\right.\\
B^{(3)+} &= \left\{\begin{aligned}
B_1^{(3)+} &= \sin\varphi^+ \sin\theta^+,\\
B_2^{(3)+} &= \cos\varphi^+ \sin\theta^+,\\
B_3^{(3)+} &= \cos\theta^+.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Les B_k^{r+} étant des vecteurs complexes, le ds^2 est définitif par la relation :

$$ds^2 = dB_k^{(1)+}\,\overline{dB_k^{(1)+}} + dB_k^{(2)+}\,\overline{dB_k^{(2)+}} + dB_k^{(3)+}\,\overline{dB_k^{(3)+}}, \tag{23}$$

où $\overline{B_k^{r+}}$ est le complexe conjugué de B_k^{r+}.

De la même façon, dans l'espace des angles ω^+:

$$ds^2 = g_{\omega_i^+ \overline{\omega_j^+}}\, d\omega_i^+\, \overline{d\omega^+}, \tag{24}$$

d'où

$$g_{\omega_i^+ \overline{\omega_j^+}} = \frac{\partial B_k^{(1)+}}{\partial \omega_i^+}\left(\overline{\frac{\partial B_k^{(1)+}}{\partial \omega_j^+}}\right) + \frac{\partial B_k^{(2)+}}{\partial \omega_i^+}\left(\overline{\frac{\partial B_k^{(2)+}}{\partial \omega_j^+}}\right) + \frac{\partial B_k^{(3)+}}{\partial \omega_i^+}\left(\overline{\frac{\partial B_k^{(3)+}}{\partial \omega_j^+}}\right) \tag{25}$$

([16]) F. HALBWACHS, P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, *voir* ce fascicule.

Si l'on prend le complexe conjugué de cette expression, on trouve

$$(26)\qquad \overline{g_{\omega_i^+\overline{\omega_j^+}}} = g_{\overline{\omega_j^+}\,\omega_i^+}.$$

Il est facile de voir que

$$(27)\qquad g_{\omega_i^+\omega_j^+} = g_{\overline{\omega_i^+}\,\overline{\omega_j^+}} = 0.$$

Ces remarques conduisent directement au résultat, car les calculs sont formellement identiques à ceux du premier paragraphe de cette étude, car il suffit de remplacer partout ω_i par ω_i^+ pour les grandeurs complexes et par $\overline{\omega_i^+}$ pour les grandeurs complexes conjuguées.

On en déduit immédiatement le déterminant g :

$$(28)\qquad g = \left\{\begin{array}{c|cccccc}
 & \omega_1^+. & \omega_2^+. & \omega_3^+. & \overline{\omega_1^+}. & \overline{\omega_2^+}. & \overline{\omega_3^+}. \\
\hline
\omega_1^+ & 0 & 0 & 0 & 2 & \overline{2\cos\theta^+} & 0 \\
\omega_2^+ & 0 & 0 & 0 & \overline{2\cos\theta^+} & 2 & 0 \\
\omega_3^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\overline{\omega_1^+} & 2 & 2\cos\theta^+ & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\overline{\omega_2^+} & 2\cos\theta^+ & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\overline{\omega_3^+} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

dont le calcul est immédiat

$$g\ 64(1 - \cos\theta^+\,\overline{\cos\theta^+})^2,$$

soit :

$$(29)\qquad dV = 8\,|\,1 - \cos\theta^+\,\overline{\cos\theta^+}\,|\, d\theta^+\,\overline{d\theta^+}\,d\varphi^+\,\overline{d\varphi^+}\,d\psi^+\,\overline{d\psi^+};$$

or :

$$1 - \cos\theta^+\,\overline{\cos\theta^+} = 1 - \frac{1}{2}\,[\cos(\theta^+ + \theta^-) + \cos(\theta^+ - \theta^-)] = 1 - \frac{1}{2}\,(\cos^2\theta_1 + \mathrm{ch}^2\,\theta_2),$$

donc :

$$(30)\qquad dV = 8\left|\,1 - \frac{1}{2}\,(\cos 2\theta_1 + \mathrm{ch}\,2\theta_2)\right| d\theta^+\,\overline{d\theta^+}\,d\varphi^+\,\overline{d\varphi^+}\,d\psi^+\,\overline{d\psi^+}.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variables.

$$(31)\qquad \omega^+ = \omega_1 + i\,\omega_2$$

pour arriver au résultat désiré.

Or il est facile de voir que le jacobien de cette transformation est égal à 8, d'où :

$$(32)\qquad dV = 16\sqrt{2}\left|\,1 - \frac{1}{2}\,(\cos 2\theta_1 + \mathrm{ch}\,2\theta_2)\right| d\varphi_1\,d\psi_1\,d\theta_1\,d\varphi_2\,d\psi_2\,d\theta_2.$$

C'est l'élément de volume qu'on a utilisé dans cette étude.