

ANNALES DE L'I. H. P.

FRANCIS HALBWACHS

PIERRE HILLION

JEAN-PIERRE VIGIER

Théorie mathématique des angles d'Euler dans l'espace-temps

Annales de l'I. H. P., tome 16, n° 3 (1959), p. 115-143

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1959__16_3_115_0

© Gauthier-Villars, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Théorie mathématique des angles d'Euler dans l'espace-temps

par

Francis HALBWACHS, Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER,
Institut Henri Poincaré (Paris).

1. Introduction. — On se propose d'étudier la généralisation à l'espace-temps de la notion d'angles d'Euler, utilisés dans l'espace euclidien tridimensionnel pour repérer deux trièdres en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Dans l'univers de la relativité restreinte les trièdres précédents sont remplacés par des tétrapodes ⁽¹⁾ $a_{\mu}^{\xi}(\mu, \xi = 1, 2, 3, 4)$, où μ repère les composantes et ξ distingue les quatre vecteurs dont l'un est du genre temps et trois du genre espace. On écrira les conditions d'orthonormalité :

$$(1) \quad \begin{cases} a_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\eta} = \delta^{\xi\eta} \\ a_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\xi} = \delta_{\mu\nu} \end{cases} \quad (\xi, \eta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

en convenant que le quadrivecteur du genre temps est $i\alpha_{\mu}^{(4)}$. Dans toute la suite de ce texte, les lettres grecques varient de 1 à 4 et les lettres latines de 1 à 3, la signature de l'espace est (+, +, +, +), donc

$$x_4 = ix_0 = ict.$$

Un tel tétrapode a_{μ}^{ξ} est défini par exemple comme le tétrapode de Frenet attaché à la ligne d'univers d'un point mobile ⁽²⁾. Sous une

⁽¹⁾ Traduction de l'allemand : Beingrößen.

⁽²⁾ L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press; É. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris; F. GURSEY, *Nuovo-Cimento*, t. 5, n° 4, 1957, p. 792.

transformation du groupe orthochrone propre de Lorentz, ce tétrapode a_{μ}^{ξ} devient un nouveau tétrapode b_{μ}^{ξ} ($ib_{\mu}^{(4)}$ du genre temps) et l'on se propose de décrire leur mouvement relatif d'une façon analogue à celle employée dans un espace euclidien tridimensionnel : étant donné deux trièdres orthonormés $oxyz$ et $OXYZ$ supposés initialement confondus, on passe de l'un à l'autre par une rotation ψ autour de oz suivi d'une rotation θ autour de la ligne nodale OU et d'une rotation φ du trièdre $OXYZ$ autour de OZ .

Dans l'espace-temps, il y a six mouvements à effectuer : trois rotation d'angles réels et trois pseudo-rotations d'angles imaginaires purs. Dans les deux cas, il s'agit de mouvements ayant lieu dans des hyperplans et orthogonaux à un hyperplan fixe et non plus à un axe comme en géométrie euclidienne tridimensionnelle.

Il y a plusieurs façons d'effectuer ces mouvements :

a. Faire en premier les trois pseudo-rotations (un axe du genre espace vers un axe du genre temps), puis les trois rotations (entre axes d'espace) en utilisant ⁽³⁾ ou non ⁽⁴⁾ pour ces rotations spatiales les angles d'Euler habituels ;

b. Alternier les rotations et pseudo-rotations en les effectuant successivement dans des hyperplans orthogonaux ⁽⁵⁾ ;

c. Enfin, récemment C. Van Winter ⁽⁶⁾ a utilisé cette dernière méthode, mais en choisissant la première et la troisième rotation dans le même hyperplan, la première et la troisième pseudo-rotation dans un même hyperplan orthogonal au précédent.

Nous allons montrer qu'on obtient ainsi la véritable généralisation relativiste des angles d'Euler habituels.

2. Les représentations du groupe orthochrone propre de Lorentz. — Étant donné le tétrapode a_{μ}^{ξ} , la transformation de Lorentz qui l'amène en b_{μ}^{ξ} sera représentée par une matrice unitaire 4×4 telle que

$$(2) \quad b_{\mu}^{\xi} = L^{\xi\eta} a_{\mu}^{\eta} \quad (\xi, \eta = 1, 2, 3, 4).$$

⁽³⁾ D. BOHM, G. LOCHAK et J.-P. VIGIER, *Séminaire Louis de Broglie*, 1956.

⁽⁴⁾ F. D. MURNAGHAN, *The Theory of group representations*, John Hopkins Press.

⁽⁵⁾ J. L. SYNGE, *Relativity. The Special Theory*, North Holland Publ.

⁽⁶⁾ C. VAN WINTER, *Thèse*, Gröningen, 1957.

Comme il est bien connu, $L^{\xi\eta}$ peut se décomposer en un produit soit de six matrices, soit de trois, et si l'on utilise par exemple les mêmes angles θ, φ, ψ et les mêmes pseudo-angles $i\alpha, i\beta, i\gamma$ (α, β, γ réels) que Synge (³), cette matrice s'écrit :

$$(3) \quad L^{\xi\eta} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma & 0 & 0 & i \text{sh } \gamma \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -i \text{sh } \gamma & 0 & 0 & \text{ch } \gamma \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \text{ch } \beta & 0 & i \text{sh } \beta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & -i \text{sh } \beta & 0 & \text{ch } \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } \alpha & i \text{sh } \alpha \\ 0 & 0 & -i \text{sh } \alpha & \text{ch } \alpha \end{vmatrix}.$$

Si l'on considère la transformation de Lorentz particulière représentée par la première matrice (à partir de la droite) de l'expression (3), on aura les relations

$$(4) \quad \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } \alpha & i \text{sh } \alpha \\ 0 & 0 & -i \text{sh } \alpha & \text{ch } \alpha \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mu}^{(1)} \\ a_{\mu}^{(2)} \\ \bar{a}_{\mu}^{(3)} \\ a_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \begin{cases} b_{\mu}^{(1)} = \cos \psi a_{\mu}^{(1)} + \sin \psi a_{\mu}^{(2)}, \\ b_{\mu}^{(2)} = -\sin \psi a_{\mu}^{(1)} + \cos \psi a_{\mu}^{(2)}, \\ b_{\mu}^{(3)} = \text{ch } \alpha a_{\mu}^{(3)} + i \text{sh } \alpha a_{\mu}^{(4)}, \\ b_{\mu}^{(4)} = -i \text{sh } \alpha a_{\mu}^{(3)} + \text{ch } \alpha a_{\mu}^{(4)}. \end{cases}$$

On sait qu'on peut aussi utiliser des matrices entièrement réelles en considérant à la place des b_{μ}^{ξ} et a_{μ}^{ξ} les vecteurs

$$b_{\mu}^{\xi} = (b_{\mu}^k, i b_{\mu}^{(4)}), \quad a_{\mu}^{\xi} = (a_{\mu}^r, i a_{\mu}^{(4)})$$

dont toutes les composantes (d'espace) sont réelles, mais qui, en revanche, n'obéissent pas aux formules simples (1), puisque

$$b_{\mu}^{(k)} b_{\mu}^{(4)} = -1.$$

On peut aussi, comme l'a montré Gursev (²), définir à l'aide du tétrapode a_{μ}^{ξ} les matrices 2×2 U^{ξ} par la relation

$$U^{\xi} = a_{\mu}^{\xi} \sigma^{\mu},$$

où $\sigma^{(4)}$ est la matrice unité $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\sigma^k (k=1, 2, 3)$ les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ces matrices U^ξ déterminent une, et une seule, matrice unimodulaire 2×2 , Φ telle que

$$\begin{aligned} U^\xi &= \Phi \sigma^\xi \Phi^+ & (\Phi^+ &= \Phi \text{ hermitien}), \\ \det \Phi &= \Phi \bar{\Phi} = 1 & (\bar{\Phi} &= \Phi \text{ adjoint}) \end{aligned}$$

où σ^ξ sont encore les matrices de Pauli et la matrice unité.

Dans ces conditions, la transformation de Lorentz pourra être représentée toujours avec les angles θ, φ, ψ et les pseudo-angles $i\alpha, i\beta, i\gamma$, par une matrice unimodulaire 2×2 , Λ (décomposable en un produit de six matrices unimodulaires 2×2) telle que sous cette transformation de Lorentz,

$$\Phi \rightarrow \Phi', \quad \text{avec} \quad \Phi' = \Lambda \Phi.$$

Dans ces conditions, les matrices U^ξ deviennent des matrices U'^ξ et

$$U'^\xi = \Lambda U^\xi \Lambda^+.$$

On déduira alors b_μ^ξ des expressions

$$U'^\xi = b_\mu^\xi \sigma^\mu.$$

Par exemple, la transformation de Lorentz représentée par la matrice (3) aura pour représentation unimodulaire 2×2

$$(6) \quad \Lambda = e^{i\sigma_1 \frac{\varphi}{2}} e^{\alpha_1 \frac{\gamma}{2}} e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} e^{\alpha_2 \frac{\beta}{2}} e^{i\sigma_3 \frac{\psi}{2}} e^{\alpha_3 \frac{\alpha}{2}},$$

où σ_i sont les matrices de Pauli et

$$\alpha_i = \bar{\sigma}_i \quad (\bar{\sigma}_k = -\sigma_k, \bar{\sigma}_0 = \sigma_0).$$

La représentation (6) a l'avantage d'être immédiatement applicable à un spineur, car Gursev (2) a montré qu'on pouvait associer à Φ le spineur de Dirac à quatre composantes complexes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_3 & -\varphi_2^* + \varphi_4^* \\ \varphi_2 + \varphi_4 & \varphi_1^* - \varphi_3^* \end{pmatrix} \\ &(\varphi^* = \varphi \text{ complexe conjugué}). \end{aligned}$$

Elle est donc indiquée dans un formalisme utilisant des spineurs. Par

contre, elle ne permet pas de suivre les positions intermédiaires d'un tétrapode au cours d'une transformation de Lorentz et la représentation (3) s'impose dans les formalismes où interviennent les paramètres d'Einstein-Kramer, lesquelles définissent en chaque point de l'univers un tétrapode.

3. Les angles d'Euler de C. Van Winter ⁽⁶⁾. — Nous conviendrons désormais, pour simplifier, d'écrire angle et rotation, qu'il s'agisse de quantités réelles ou complexes. Les angles de rotation sont θ_1 , φ_1 , ψ_1 et $i\theta_2$, $i\varphi_2$, $i\psi_2$.

C. Van Winter (6) utilisant la représentation unimodulaire 2×2 définit la transformation de Lorentz

$$(7) \quad \Lambda = e^{-i\varphi_1 P_{03}} e^{-i\varphi_1 P_{12}} e^{-i\theta_1 P_{02}} e^{-i\theta_1 P_{31}} e^{-i\psi_1 P_{03}} e^{-i\psi_1 P_{12}} \quad (7)$$

où $P_{\mu\nu}$ sont les matrices correspondant aux transformations infinitésimales du groupe de Lorentz; ce sont donc des matrices de trace nulle. Elles sont liées aux matrices de Pauli par les relations :

$$(8) \quad \begin{aligned} P_{12} &= \frac{\sigma_3}{2i}, & P_{13} &= \frac{\sigma_2}{2i}, & P_{23} &= \frac{\sigma_1}{2i}, \\ P_{10} &= iP_{23}, & P_{20} &= iP_{13}, & P_{30} &= iP_{12}. \end{aligned}$$

Que cette représentation (7) soit une généralisation de la transformation du groupe des rotations à trois dimensions à l'aide des angles d'Euler, est suggéré par les trois faits suivants :

a. A la limite non relativiste $\theta_2 = \varphi_2 = \psi_2 = 0$:

$$\Lambda \rightarrow \Lambda_{NR} = e^{-i\varphi_1 P_{12}} e^{-i\theta_1 P_{31}} e^{-i\psi_1 P_{12}}$$

qui est bien le résultat correct pour les rotations dans un espace euclidien tridimensionnel. Si la représentation (6) ne conduit pas à cela, Bohm, Lochak et Vigier ⁽³⁾ en écrivant

$$\Lambda = e^{-i\varphi_1 P_{12}} e^{-i\theta_1 P_{31}} e^{-i\psi_1 P_{12}} e^{\alpha_1 \frac{\gamma}{2}} e^{\alpha_2 \frac{\beta}{2}} e^{\alpha_3 \frac{\alpha}{2}}$$

avaient une représentation qui possédait aussi cette propriété.

(7) Les intervalles de variation des angles sont les suivants :

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_1 < 2\pi, & & 0 \leq \theta_1 < \pi, & & 0 \leq \psi_1 < 2\pi \\ -\infty < \varphi_2 < +\infty, & & -\infty < \operatorname{Re} \theta_2 < +\infty, & & -\infty < \psi_2 < +\infty \\ & & (m\theta_2 = 0 \text{ ou } \pi) & & \end{aligned}$$

b. Le tableau des cosinus directeurs présente une symétrie remarquable. Pour avoir des cosinus tous réels, on utilisera les vecteurs à composantes d'espace réelles

$$b_{\mu}^{\xi} = \{ b_{\mu}^r, ib_{\mu}^{(k)} \}, \quad a_{\mu}^{\xi} = \{ a_{\mu}^r, ia_{\mu}^{(k)} \}.$$

Si l'on pose alors $b_{\mu}^{\xi} = L^{\xi\eta} a_{\mu}^{\xi}$ le tableau des cosinus directeurs $L^{\xi\eta}$ est le suivant ⁽⁶⁾ :

$\xi.$	$\eta \dots$	$L^{\xi\eta}$
		1
1	$\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \sin \psi_1$
2	$\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \psi_1 + \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \cos \psi_1$
3	$-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 + \sin \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2$
4	$-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 + \sin \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2$
		2
1	$-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 - \cos \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \sin \psi_1$
2	$-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \psi_1 + \cos \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \cos \psi_1$
3	$\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 + \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2$
4	$\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 + \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2$
		3
1	$\operatorname{ch} \varphi_2 \sin \theta_1 \cos \psi_1 - \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \sin \psi_1$
2	$\operatorname{ch} \varphi_2 \sin \theta_1 \sin \psi_1 + \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \cos \psi_1$
3	$\operatorname{ch} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 + \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2$
4	$\operatorname{ch} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 + \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2$
		4
1	$\operatorname{sh} \varphi_2 \sin \theta_1 \cos \psi_1 - \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \sin \psi_1$
2	$\operatorname{sh} \varphi_2 \sin \theta_1 \sin \psi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \cos \psi_1$
3	$\operatorname{sh} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 + \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2$
4	$\operatorname{sh} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 + \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2$

Cette symétrie n'existe pas quand on fait un choix différent des angles d'Euler; on pourra, par exemple, comparer ce tableau avec ceux de Synge ⁽⁵⁾ et de Unal et Vigier ⁽⁸⁾.

⁽⁸⁾ BURHAN CAHIT UNAL et J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1785-1788.

c. Si l'on pose

$$(9) \quad P_j^\pm = \frac{I}{2} (P_{kl} \pm i P_{j0}),$$

$$(10) \quad \varphi^\pm = \varphi_1 \pm i \varphi_2, \quad \theta^\pm = \theta_1 \pm i \theta_2, \quad \psi^\pm = \psi_1 \pm i \psi_2.$$

C. Van Winter ⁽⁶⁾ démontre que l'expression (7) peut s'écrire

$$(11) \quad \Lambda = \Lambda^+ \Lambda^-,$$

avec

$$(12) \quad \Lambda^\pm = e^{-i\varphi^\pm P_3^\pm} e^{-i\theta^\pm P_2^\pm} e^{-i\psi^\pm P_1^\pm}.$$

En effet, considérons par exemple les deux premiers termes (à partir de la droite) de (7)

$$e^{-i\psi_2 P_{03}} e^{-i\psi_1 P_{12}} = e^{-i(\psi_2 P_{03} + \psi_1 P_{12})}.$$

Les relations (9) et (10) entraînent immédiatement que

$$i(\psi_2 P_{03} + \psi_1 P_{12}) = i(\psi^+ P_3^+ + \psi^- P_3^-),$$

d'où

$$\Lambda = e^{-i\varphi^+ P_3^+} e^{-i\varphi^- P_3^-} e^{-i\theta^+ P_2^+} e^{-i\theta^- P_2^-} e^{-i\psi^+ P_1^+} e^{-i\psi^- P_1^-}.$$

Or, il est bien connu ⁽⁶⁾, ⁽⁹⁾ que les opérateurs P_j^+ et P_k^- commutent, donc en commutant $e^{-i\varphi^- P_3^-}$ avec $e^{-i\theta^+ P_2^+}$ d'une part, et $e^{-i\theta^- P_2^-}$ avec $e^{-i\psi^+ P_1^+}$, d'autre part, il vient

$$\Lambda = e^{-i\varphi^+ P_3^+} e^{-i\theta^+ P_2^+} e^{-i\varphi^- P_3^-} e^{-i\psi^+ P_1^+} e^{-i\theta^- P_2^-} e^{-i\psi^- P_1^-}.$$

Une dernière commutation de $e^{-i\varphi^- P_3^-}$ et $e^{i\psi^+ P_1^+}$ conduit à la relation (11).

Ce résultat n'est d'ailleurs pas surprenant, puisque Cartan ⁽¹⁰⁾ a montré qu'il existait un isomorphisme entre le groupe de Lorentz et le groupe des rotations tri-dimensionnelles dans un espace euclidien complexe. Mais on est conduit à se demander quelle est la signification des rotations d'angles complexes ψ^\pm , θ^\pm , φ^\pm et comment se comporte le tétrapode $\alpha_{\bar{t}}^{\bar{x}}$ au cours de ces rotations.

4. Étude de la représentation du groupe de Lorentz par une matrice unitaire 4×4 . — En utilisant les mêmes angles d'Euler que dans la

⁽⁹⁾ E. M. CORSON, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations*, Blackie and Sons.

⁽¹⁰⁾ É. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris.

transformation (7) la représentation 4×4 , $L^{\xi\eta}$ telle que

$$b_{\mu}^{\xi} = L^{\xi\eta} a_{\mu}^{\eta}$$

peut être décomposée en un produit de trois matrices unitaires 4×4 .
Il vient

$$(13) \quad \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } \varphi_2 & i \text{ sh } \varphi_2 \\ 0 & 0 & -i \text{ sh } \varphi_2 & \text{ch } \varphi_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \text{ch } \theta_2 & 0 & -i \text{ sh } \theta_2 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & i \text{ sh } \theta_2 & 0 & \text{ch } \theta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } \psi_2 & i \text{ sh } \psi_2 \\ 0 & 0 & -i \text{ sh } \psi_2 & \text{ch } \psi_2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mu}^{(1)} \\ a_{\mu}^{(2)} \\ a_{\mu}^{(3)} \\ a_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix}$$

On obtient la transformation analogue $b_{\mu}^{\xi} = L^{\xi\eta} a_{\mu}^{\eta}$ sur les composantes réelles en supprimant les facteurs i et $-i$ devant les sinus hyperboliques.

Si l'on effectue le produit de ces trois matrices, on obtiendra une matrice 4×4 dont les 16 éléments sont les cosinus directeurs du tableau donné précédemment. La multiplication des deux matrices de droite donne

$$\begin{vmatrix} \cos \theta_1 \cos \psi_1 & \cos \theta_1 \sin \psi_1 & -\sin \theta_1 \text{ch } \psi_2 & -\sin \theta_1 \text{sh } \psi_2 \\ -\text{ch } \theta_2 \sin \psi_1 & \text{ch } \theta_2 \cos \psi_1 & \text{sh } \theta_2 \text{sh } \psi_2 & \text{sh } \theta_2 \text{ch } \psi_2 \\ \sin \theta_1 \cos \psi_1 & \sin \theta_1 \sin \psi_1 & \cos \theta_1 \text{ch } \psi_2 & \cos \theta_1 \text{sh } \psi_2 \\ -\text{sh } \theta_2 \sin \psi_1 & \text{sh } \theta_2 \cos \psi_1 & \text{ch } \theta_2 \text{sh } \psi_2 & \text{ch } \theta_2 \text{ch } \psi_2 \end{vmatrix}$$

Si l'on multiplie par la première matrice de gauche, on retrouve immédiatement le tableau des cosinus directeurs.

Dans l'expression (13), on voit que chaque matrice représente une rotation dans deux hyperplans orthogonaux. On a alors le schéma ci-dessous :

Rotation.	Hyperplan fixe.	Hyperplan mobile.
ψ_1	$a_{\mu}^{(3)} a_{\mu}^{(4)}$	$a_{\mu}^{(1)} a_{\mu}^{(2)} \rightarrow a_{\mu}^{(1')} a_{\mu}^{(2')}$
ψ_2	$a_{\mu}^{(1)} a_{\mu}^{(2)}$	$a_{\mu}^{(3)} a_{\mu}^{(4)} \rightarrow a_{\mu}^{(3')} a_{\mu}^{(4')}$
θ_1	$a_{\mu}^{(2)} a_{\mu}^{(4)}$	$a_{\mu}^{(1)} a_{\mu}^{(3)} \rightarrow a_{\mu}^{(1')} a_{\mu}^{(3')}$
θ_2	$a_{\mu}^{(1)} a_{\mu}^{(3)}$	$a_{\mu}^{(2)} a_{\mu}^{(4)} \rightarrow a_{\mu}^{(2')} a_{\mu}^{(4')}$
φ_1	$a_{\mu}^{(3)} a_{\mu}^{(4)}$	$a_{\mu}^{(1)} a_{\mu}^{(2)} \rightarrow b_{\mu}^{(1)} b_{\mu}^{(2)}$
φ_2	$b_{\mu}^{(1)} b_{\mu}^{(2)}$	$a_{\mu}^{(3)} a_{\mu}^{(4)} \rightarrow b_{\mu}^{(3)} b_{\mu}^{(4)}$

Si l'on considère la transformation de Lorentz particulière représentée

par la première matrice à droite de (13) :

$$(14) \quad \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \psi_2 & i \operatorname{sh} \psi_2 \\ 0 & 0 & -i \operatorname{sh} \psi_2 & \operatorname{ch} \psi_2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mu}^{(1)} \\ a_{\mu}^{(2)} \\ a_{\mu}^{(3)} \\ a_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix}$$

Il vient explicitement

$$\begin{aligned} b_{\mu}^{(1)} &= a_{\mu}^{(1)} \cos \psi_1 + a_{\mu}^{(2)} \sin \psi_1, \\ b_{\mu}^{(2)} &= -a_{\mu}^{(1)} \sin \psi_1 + a_{\mu}^{(2)} \cos \psi_1, \\ b_{\mu}^{(3)} &= a_{\mu}^{(3)} \operatorname{ch} \psi_2 + i a_{\mu}^{(4)} \operatorname{sh} \psi_2, \\ b_{\mu}^{(4)} &= -i a_{\mu}^{(3)} \operatorname{sh} \psi_2 + a_{\mu}^{(4)} \operatorname{ch} \psi_2, \end{aligned}$$

Considérons alors les deux vecteurs isotropes

$$(15) \quad z_{\mu}^{\pm} = i a_{\mu}^{(4)} \pm a_{\mu}^{(3)}.$$

Ces deux vecteurs isotropes sont orthogonaux à l'hyperplan $a_{\mu}^{(1)} a_{\mu}^{(2)}$.
Sous la transformation (14),

$$z_{\mu}^{\pm} \rightarrow Z_{\mu}^{\pm} = i b_{\mu}^{(4)} \pm b_{\mu}^{(3)},$$

d'où

$$Z_{\mu}^{\pm} = i a_{\mu}^{(4)} (\operatorname{ch} \psi_2 \pm \operatorname{sh} \psi_2) + a_{\mu}^{(3)} (\operatorname{ch} \psi_2 \pm \operatorname{sh} \psi_2),$$

d'où

$$(16) \quad Z_{\mu}^{\pm} = z_{\mu}^{\pm} = e^{\pm \psi_2} z_{\mu}^{\pm}.$$

Donc, sous la transformation précédente, les vecteurs isotropes Z_{μ}^{\pm} restent sur des axes isotropes fixes; ceci est un résultat déjà signalé par Synge (5).

Si l'on considère maintenant la matrice

$$\begin{vmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \theta_2 & 0 & -i \operatorname{sh} \theta_2 \\ +\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & +i \operatorname{sh} \theta_2 & 0 & \operatorname{ch} \theta_2 \end{vmatrix}$$

elle représente une transformation particulière de Lorentz qui conserve la direction des vecteurs isotropes

$$(17) \quad u_{\mu}^{\pm} = i a_{\mu}^{(4)} \pm a_{\mu}^{(3)}.$$

Donc, tout ce qui a été dit de $\psi_1, \psi_2, z_{\mu}^{\pm}$ est intégralement valable pour $\theta_1, \theta_2, u_{\mu}^{\pm}$.

Ceci montre l'intérêt des vecteurs isotropes. Or, Synge (5) a montré

qu'un ensemble de trois vecteurs isotropes était équivalent à un tétra-pode, par exemple ε_{μ}^+ , ε_{μ}^- , u_{μ}^- déterminent univoquement les a_{μ}^{\pm} et *vice versa* si l'on fait la convention que les trois quadrivecteurs du genre temps forment un système direct et que

$$a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}^{\ddagger} > 0.$$

Synge (³) a, en outre, démontré le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une transformation du groupe orthochrone propre de Lorentz peut être engendrée par une transformation d'un ensemble de trois vecteurs isotropes. A chaque transformation arbitraire d'un ensemble de trois vecteurs isotropes il correspond une transformation orthochrone propre de Lorentz unique.*

En somme, ce théorème établit un isomorphisme entre le groupe orthochrone propre de Lorentz et les rotations d'un ensemble de trois vecteurs isotropes. Or, si l'on compare ce résultat, d'une part, à l'isomorphisme du groupe de Lorentz avec le groupe des rotations tridimensionnelles complexes et, d'autre part, avec la transformation (11) : $\Lambda = \Lambda^+ \Lambda^-$, on est amené tout naturellement à penser que les rotations d'angles complexes ψ^{\pm} , θ^{\pm} , φ^{\pm} , s'effectuent autour de bivecteurs formés à l'aide de ces vecteurs isotropes. Pour le prouver, nous allons introduire ces angles complexes dans la représentation (13).

A l'aide des définitions (10), il est facile de montrer que

$$(14 \text{ bis}) \quad \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \psi_2 & i \operatorname{sh} \psi_2 \\ 0 & 0 & -i \operatorname{sh} \psi_2 & \operatorname{ch} \psi_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \cos \frac{\psi^+}{2} & \sin \frac{\psi^+}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\psi^+}{2} & \cos \frac{\psi^+}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\psi^+}{2} & \sin \frac{\psi^+}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\psi^+}{2} & \cos \frac{\psi^+}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \frac{\psi^-}{2} & \sin \frac{\psi^-}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\psi^-}{2} & \cos \frac{\psi^-}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\psi^-}{2} & -\sin \frac{\psi^-}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\psi^-}{2} & \cos \frac{\psi^-}{2} \end{vmatrix}.$$

Un calcul élémentaire de trigonométrie justifie la relation précédente. On s'aperçoit que les angles qui interviennent dans les fonctions trigonométriques complexes sont $\frac{\psi^+}{2}$ et $\frac{\psi^-}{2}$.

En effectuant des transformations similaires sur les deux autres

matrices de la représentation (13), il vient :

$$(18) \quad \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \frac{\varphi^+}{2} & \sin \frac{\varphi^+}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\varphi^+}{2} & \cos \frac{\varphi^+}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\varphi^+}{2} & \sin \frac{\varphi^+}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\varphi^+}{2} & \cos \frac{\varphi^+}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \frac{\varphi^-}{2} & \sin \frac{\varphi^-}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\varphi^-}{2} & \cos \frac{\varphi^-}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\varphi^-}{2} & -\sin \frac{\varphi^-}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\varphi^-}{2} & \cos \frac{\varphi^-}{2} \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} \cos \frac{\theta^+}{2} & 0 & -\sin \frac{\theta^+}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta^+}{2} & 0 & -\sin \frac{\theta^+}{2} \\ \sin \frac{\theta^+}{2} & 0 & \cos \frac{\theta^+}{2} & 0 \\ 0 & \sin \frac{\theta^+}{2} & 0 & \cos \frac{\theta^+}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \frac{\theta^-}{2} & 0 & -\sin \frac{\theta^-}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta^-}{2} & 0 & \sin \frac{\theta^-}{2} \\ \sin \frac{\theta^-}{2} & 0 & \cos \frac{\theta^-}{2} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{\theta^-}{2} & 0 & \cos \frac{\theta^-}{2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \cos \frac{\psi^+}{2} & \sin \frac{\psi^+}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\psi^+}{2} & \cos \frac{\psi^+}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\psi^+}{2} & \sin \frac{\psi^+}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\psi^+}{2} & \cos \frac{\psi^+}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \frac{\psi^-}{2} & \sin \frac{\psi^-}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\psi^-}{2} & \cos \frac{\psi^-}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\psi^-}{2} & -\sin \frac{\psi^-}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\psi^-}{2} & \cos \frac{\psi^-}{2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mu}^{(1)} \\ a_{\mu}^{(2)} \\ a_{\mu}^{(3)} \\ a_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Dans cette expression, et contrairement à ce qui se passe dans la représentation par des matrices unimodulaires 2×2 , la matrice fonction de $\frac{\psi^+}{2}$ ne commute pas avec celle qui est fonction de $\frac{\theta^-}{2}$ pas plus que la seconde et la troisième matrices (à partir du haut à gauche). On ne peut donc effectuer les rotations $\frac{\psi^+}{2}$, $\frac{\theta^+}{2}$, $\frac{\varphi^+}{2}$ en premier et les trois autres ensuite (ou *vice versa*). Par contre, évidemment, on peut commuter les rotations $\frac{\psi^+}{2}$ et $\frac{\psi^-}{2}$, $\frac{\theta^+}{2}$ et $\frac{\theta^-}{2}$, $\frac{\varphi^+}{2}$ et $\frac{\varphi^-}{2}$.

Considérons alors la transformation particulière représentée par la matrice ci-dessous :

$$(19) \quad \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \frac{\psi^+}{2} & \sin \frac{\psi^+}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\psi^+}{2} & \cos \frac{\psi^+}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\psi^+}{2} & \sin \frac{\psi^+}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\psi^+}{2} & \cos \frac{\psi^+}{2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mu}^{(1)} \\ a_{\mu}^{(2)} \\ a_{\mu}^{(3)} \\ a_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Elle s'écrit, explicitement,

$$(20) \quad \begin{cases} b_{\mu}^{(1)} = \cos \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(1)} + \sin \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(2)}, \\ b_{\mu}^{(2)} = -\sin \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(1)} + \cos \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(2)}, \\ b_{\mu}^{(3)} = \cos \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(3)} + \sin \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(4)}, \\ b_{\mu}^{(4)} = -\sin \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(3)} + \cos \frac{\psi^+}{2} a_{\mu}^{(4)}. \end{cases}$$

Ceci montre que $a_{\mu}^{(3)}$ et $a_{\mu}^{(4)}$ subissent dans leur hyperplan la même rotation que $a_{\mu}^{(1)}$ et $a_{\mu}^{(2)}$ dans le leur.

Les vecteurs isotropes $z_{\mu}^{\pm} = ia_{\mu}^{(4)} \pm a_{\mu}^{(3)}$ orthogonaux à $a_{\mu}^{(1)}$ et $a_{\mu}^{(2)}$ peuvent encore être considérés comme des axes possibles de la rotation $\frac{\psi^+}{2}$ pour les quadrivecteurs $a_{\mu}^{(1)}$ et $a_{\mu}^{(2)}$.

En outre, sous cette transformation particulière

$$z_{\mu}^{\pm} \rightarrow Z_{\mu}^{\pm} = ib_{\mu}^{(4)} \pm b_{\mu}^{(3)}$$

et il est facile de voir que

$$(21) \quad Z_{\mu}^{\pm} = z_{\mu}^{\pm} e^{\mp i \frac{\psi^+}{2}}.$$

La relation (21) s'interprète comme une rotation des axes $a_{\mu}^{(3)}$ et $a_{\mu}^{(4)}$ d'un angle égal à $\frac{\psi^+}{2}$ dans l'hyperplan défini par z_{μ}^+ et z_{μ}^- . (C'est la représentation de Fresnel des champs de vecteurs tournants.)

Rotations.	Hyperplans fixes.	Mouvements des a_{μ}^{ξ} .
$\frac{\psi^+}{2}$	$z_{\mu}^{\pm} = ia_{\mu}^{(4)} \pm a_{\mu}^{(3)}$	$a_{\mu}^{\xi} \rightarrow (a_{\mu}^{\xi})^{(1)}$
$\frac{\psi^-}{2}$	$z_{\mu}^{\pm} = ia_{\mu}^{(4)} \pm a_{\mu}^{(3)}$	$(a_{\mu}^{\xi})^{(1)} \rightarrow (a_{\mu}^{\xi})^{(2)}$
$\frac{\theta^+}{2}$	$(u_{\mu}^{\pm})^{(2)} = i(a_{\mu}^{(4)})^{(2)} \pm (a_{\mu}^{(2)})^{(2)}$	$(a_{\mu}^{\xi})^{(2)} \rightarrow (a_{\mu}^{\xi})^{(3)}$
$\frac{\theta^-}{2}$	$(u_{\mu}^{\pm})^{(2)} = i(a_{\mu}^{(4)})^{(2)} \pm (a_{\mu}^{(2)})^{(2)}$	$(a_{\mu}^{\xi})^{(3)} \rightarrow (a_{\mu}^{\xi})^{(4)}$
$\frac{\varphi^+}{2}$	$Z_{\mu}^{\pm} = ib_{\mu}^{(4)} \pm b_{\mu}^{(3)}$	$(a_{\mu}^{\xi})^{(4)} \rightarrow (a_{\mu}^{\xi})^{(5)}$
$\frac{\varphi^-}{2}$	$Z_{\mu}^{\pm} = ib_{\mu}^{(4)} \pm b_{\mu}^{(3)}$	$(a_{\mu}^{\xi})^{(5)} \rightarrow b_{\mu}^{\xi}$

Les exposants (η) de $(a_{\mu}^{\xi})^{(\eta)}$ indiquent les positions intermédiaires du tétrapode a_{μ}^{ξ} (14).

(11) On remarquera que les rotations d'angles complexes conjugués ont lieu autour d'axes déduits l'un de l'autre par l'opération parité ($a_{\mu}^{\pm} \rightarrow -a_{\mu}^{\pm}$, $ia_{\mu}^{(4)}$ inchangé) de telle sorte que la succession des six opérations s'effectue en alternant les rotations qu'on peut appeler droite et gauche.

Sous cette forme, il apparaît clairement qu'on a généralisé les angles d'Euler de la géométrie ordinaire tridimensionnelle. La transformation de Lorentz apparaît ainsi comme une succession de six rotations complexes autour de bivecteurs formés de vecteurs isotropes. Il est bien entendu que chacune des transformations considérées n'est pas une transformation de Lorentz, mais une rotation complexe quadridimensionnelle. C'est seulement le produit des deux rotations conjuguées qui forme une transformation de Lorentz. Nous appellerons ces six transformations « rotations complexes élémentaires ».

On sait qu'en relativité la notion d'axe de rotation doit être remplacée par celle d'hyperplan invariant pour une rotation et nous avons mis en évidence deux vecteurs isotropes qui définissent un tel hyperplan invariant pour les transformations (ψ^+) et (ψ^-) . Mais on peut trouver de façon plus précise un *bivecteur* invariant pour l'une de ces transformations. Considérons, en effet, les deux tenseurs self-duaux qu'on peut former sur Z_{μ}^+ et Z_{μ}^- , soit

$$P_{\mu\nu}^{\pm} = \frac{1}{4i} [(Z_{\mu}^+ Z_{\nu}^- - Z_{\nu}^+ Z_{\mu}^-) \pm \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Z_{\alpha}^+ Z_{\beta}^-]$$

qui, en remplaçant les Z_{μ}^{\pm} par leurs expressions, devient

$$P_{\mu\nu}^{\pm} = \frac{1}{2} [b_{\mu}^{(3)} b_{\nu}^{(4)} - b_{\nu}^{(3)} b_{\mu}^{(4)} \pm \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b_{\alpha}^{(3)} b_{\beta}^{(4)}]$$

(le facteur $\frac{1}{4i}$ est un facteur de jauge).

On voit facilement que les deux tenseurs sont unitaires et orthogonaux l'un à l'autre.

Si l'on fait agir la transformation (ψ^-) de la formule (18) sur les $P_{\mu\nu}^{\pm}$, on voit en effectuant, que $P_{\mu\nu}^+$ et $P_{\mu\nu}^-$ se conservent; et il en est de même sous la transformation (ψ^+) . Contrairement donc aux vecteurs isotropes Z_{μ}^{\pm} qui subissent une contraction et une dilatation sous les transformations (ψ^+) et (ψ^-) , les deux bivecteurs self-duaux orthogonaux et unitaires $P_{\mu\nu}^+$ et $P_{\mu\nu}^-$ sont invariants et jouent proprement le rôle d'axes pour ces deux rotations complexes conjuguées.

§. Transformations orthochrones de Lorentz et rotations dans l'espace tridimensionnel complexe. — Nous nous proposons maintenant d'étudier les rotations élémentaires complexes conjuguées en lesquelles nous avons

décomposé la transformation de Lorentz générale. Pour cela, il convient de négliger provisoirement les transformations en $\frac{\varphi^+}{2}, \frac{\varphi^-}{2}$ qui sont formellement identiques à celles en $\frac{\psi^+}{2}, \frac{\psi^-}{2}$, mais de considérer en outre la troisième transformation qui ne figure pas dans le dispositif d'Euler et qui correspondrait à une rotation α_1 dans l'hyperplan $a_\mu^{(2)} a_\mu^{(3)}$ autour de l'hyperplan $a_\mu^{(1)} a_\mu^{(4)}$, suivie d'une rotation $i\alpha_2$ dans l'hyperplan $a_\mu^{(1)} a_\mu^{(4)}$ autour de l'hyperplan $a_\mu^{(2)} a_\mu^{(3)}$, transformation qui s'obtient aisément à partir de l'une ou de l'autre des matrices (18) par une permutation circulaire des trois premières lignes et colonnes : soit, en posant $\alpha^\pm = \alpha_1 \pm i\alpha_2$,

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha^+}{2} & 0 & 0 & -\sin \frac{\alpha^+}{2} \\ 0 & \cos \frac{\alpha^+}{2} & -\sin \frac{\alpha^+}{2} & 0 \\ 0 & \sin \frac{\alpha^+}{2} & \cos \frac{\alpha^+}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha^+}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{\alpha^+}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha^-}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\alpha^-}{2} \\ 0 & \cos \frac{\alpha^-}{2} & -\sin \frac{\alpha^-}{2} & 0 \\ 0 & \sin \frac{\alpha^-}{2} & \cos \frac{\alpha^-}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\alpha^-}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{\alpha^-}{2} \end{pmatrix}.$$

Si nous désignons en abrégé chacune de ces six transformations par (ψ^+) , (ψ^-) , (θ^+) , (θ^-) , (α^+) , (α^-) , on voit immédiatement qu'elles peuvent se mettre sous la forme

$$(22) \quad \begin{cases} (\psi^\pm) = \cos \frac{\psi^\pm}{2} (\mathbf{I}) + \sin \frac{\psi^\pm}{2} \Gamma^{3\pm}, \\ (\theta^\pm) = \cos \frac{\theta^\pm}{2} (\mathbf{I}) + \sin \frac{\theta^\pm}{2} \Gamma^{2\pm}, \\ (\alpha^\pm) = \cos \frac{\alpha^\pm}{2} (\mathbf{I}) + \sin \frac{\alpha^\pm}{2} \Gamma^{1\pm}. \end{cases}$$

En désignant par (\mathbf{I}) la matrice unité de rang 4, et par $\Gamma^{r\pm}$ respectivement les six matrices suivantes [les symboles que nous leur affectons se comprennent d'eux-mêmes quand on considère que chaque rotation d'espace, partie réelle commune des deux rotations complexes $(+)$ et $(-)$ correspondantes, se fait autour de l'hyperplan $a_\mu^r a_\mu^s$ ($r = 1, 2, 3$)].

$$\Gamma^{1+} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^{1-} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^{2+} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^{2-} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^{3+} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^{3-} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît ici six opérateurs introduits par la théorie des quaternions et qui possèdent les propriétés suivantes, faciles à vérifier sous la forme matricielle explicite :

1° Ils sont anti-hermitiens et de carré -1 :

$$(\Gamma)^+ = (\tilde{\Gamma}) = (\Gamma)^{-1} = -\Gamma \text{ [} (\Gamma)^+ = \text{adjoint de } \Gamma \text{]};$$

2° Chaque Γ^+ commute avec les trois Γ^- et réciproquement;

3° Entre les trois Γ^+ on a les relations de commutation :

$$\begin{aligned} \Gamma^{1+}\Gamma^{2+} &= -\Gamma^{2+}\Gamma^{1+} = \Gamma^{3+}, \\ \Gamma^{2+}\Gamma^{3+} &= -\Gamma^{3+}\Gamma^{2+} = \Gamma^{1+}, \\ \Gamma^{3+}\Gamma^{1+} &= -\Gamma^{1+}\Gamma^{3+} = \Gamma^{2+} \end{aligned}$$

et les mêmes relations sur les trois Γ^- .

On remarquera que, par rapport à la théorie des quaternions, on a ici deux groupes d'opérateurs qui commutent et que les six opérateurs (φ^+) , (φ^-) , (θ^+) , (θ^-) , (ψ^+) , (ψ^-) , ont, comme coefficients des opérateurs Γ^{\pm} , des quantités complexes; ce qui n'est pas le cas des quaternions où, dans la forme $a + bI + cJ + dK$, les coefficients a , b , c , d , sont essentiellement réels. Si les coefficients sont complexes, le groupe perd une propriété essentielle des quaternions, car contenant des diviseurs non nuls de zéro, il ne constitue plus un corps. En réalité, on a donc affaire à deux groupes d'opérateurs respectivement commutant et complexes conjugués dont chacun constitue un prolongement complexe du groupe des quaternions.

De même que le groupe des quaternions constitue un revêtement du groupe des rotations (réelles) d'espace, le prolongement complexe des quaternions constitue un revêtement du groupe des rotations complexes à trois dimensions. Le produit direct de deux groupes de quaternions constitue un revêtement du groupe des rotations réelles à quatre dimen-

sions et le produit direct des prolongements complexes de deux groupes de quaternions constitue un revêtement du groupe des rotations complexes à quatre dimensions. Si l'on astreint les deux groupes quaternioniques à être complexes conjugués, alors on constitue un revêtement d'un sous-groupe des rotations complexes qui est précisément le groupe de Lorentz.

Nous pouvons tirer immédiatement les conséquences de ces propriétés sur les transformations (18) explicitées par (22). Considérons, par exemple, les transformations

$$(\psi^\pm) = \cos \frac{\psi^\pm}{2} (1) + \sin \frac{\psi^\pm}{2} \Gamma^{3\pm}$$

et appliquons-les aux opérateurs Γ en prenant

$$(23) \quad (\psi^+)^{-1} \Gamma (\psi^+).$$

Nous remarquerons que

$$(\psi^\pm)^{-1} \equiv \left[\cos \frac{\psi^\pm}{2} (1) + \sin \frac{\psi^\pm}{2} \Gamma^\pm \right]^{-1} = \cos \frac{\psi^\pm}{2} (1) - \sin \frac{\psi^\pm}{2} \Gamma^{3\pm}$$

comme on peut s'en assurer en multipliant par (ψ^\pm) et en tenant compte de

$$\Gamma^{3\pm} \Gamma^{3\pm} = -1.$$

1° Appliquons la transformation (ψ^+) à l'un quelconque des Γ^-

$$\begin{aligned} (\psi^+)^{-1} \Gamma^- (\psi^+) &\equiv \left[\cos \frac{\psi^+}{2} (1) - \sin \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \right] \Gamma^- \left[\cos \frac{\psi^+}{2} (1) + \sin \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \right] \\ &= \cos^2 \frac{\psi^+}{2} (1) \Gamma^- - \sin^2 \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \Gamma^- \Gamma^{3+} \\ &\quad + \cos \frac{\psi^+}{2} \sin \frac{\psi^+}{2} (\Gamma^- \Gamma^{3+} - \Gamma^{3+} \Gamma^-), \end{aligned}$$

soit, comme les Γ^- commutent avec Γ^{3+} et que $\Gamma^{3+} \Gamma^{3+} = -1$,

$$\begin{aligned} (\psi^+)^{-1} \Gamma^- (\psi^+) &= \left[\cos^2 \frac{\psi^+}{2} (1) - \sin^2 \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \Gamma^{3+} \right] \Gamma^- \\ &= \Gamma^-. \end{aligned}$$

Ainsi sous la transformation (23), tous les angles $(+)$ laissent invariants les trois opérateurs Γ^- et, de même, tous les angles $(-)$ laissent invariants les trois opérateurs Γ^+ .

2° Appliquons la transformation (ψ^+) à l'opérateur Γ^{3+} qui est associé

à (ψ^+)

$$\begin{aligned} (\psi^+)^{-1} \Gamma^{3+} (\psi^+) &\equiv \left[\cos \frac{\psi^+}{2} (1) - \sin \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \right] \Gamma^{3+} \left[\cos \frac{\psi^+}{2} (1) + \sin \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \right] \\ &= \cos^2 \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} - \sin^2 \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \Gamma^{3+} \Gamma^{3+} \\ &= \Gamma^{3+}. \end{aligned}$$

Sous la transformation (23), chaque angle $(+)$ laisse invariant un des opérateurs Γ^+ , soit Γ^{1+} pour (α^+) , Γ^{2+} pour (θ^+) , Γ^{3+} pour (ψ^+) , et il en est de même pour les angles $(-)$.

3° Enfin, considérons une transformation telle que

$$\begin{aligned} (\psi^+)^{-1} \Gamma^{1+} (\psi^+) &\equiv \left[\cos \frac{\psi^+}{2} (1) - \sin \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \right] \Gamma^{1+} \left[\cos \frac{\psi^+}{2} (1) + \sin \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \right] \\ &= \cos^2 \frac{\psi^+}{2} (1) \Gamma^{1+} - \sin^2 \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{3+} \Gamma^{1+} \Gamma^{3+} \\ &\quad + \sin \frac{\psi^+}{2} \cos \frac{\psi^+}{2} [\Gamma^{1+} \Gamma^{3+} - \Gamma^{3+} \Gamma^{1+}] \end{aligned}$$

soit, comme Γ^{1+} et Γ^{3+} anticommulent,

$$(\psi^+)^{-1} \Gamma^{1+} (\psi^+) = \left(\cos^2 \frac{\psi^+}{2} - \sin^2 \frac{\psi^+}{2} \right) \Gamma^{1+} + 2 \sin \frac{\psi^+}{2} \cos \frac{\psi^+}{2} \Gamma^{1+} \Gamma^{3+}$$

ou enfin, en raison des relations de commutation,

$$(\psi^+)^{-1} \Gamma^{1+} (\psi^+) = \cos \psi^+ \Gamma^{1+} - \sin \psi^+ \Gamma^{2+}.$$

On aurait, de même,

$$(\psi^+)^{-1} \Gamma^{2+} (\psi^+) = \sin \psi^+ \Gamma^{1+} + \cos \psi^+ \Gamma^{2+}.$$

Si l'on se souvient que $(\psi^+)^{-1} \Gamma^{3+} (\psi^+) = \Gamma^{3+}$, on voit que les trois opérateurs Γ^{1+} , Γ^{2+} , Γ^{3+} , qui sont invariants pour les transformations (ψ^-) , (θ^-) et (α^-) sont transformés sous la rotation (ψ^+) comme trois vecteurs d'espace orthogonaux et de même module qui subiraient une rotation complexe tridimensionnelle d'un angle ψ^+ autour de Γ^{3+} , l'angle étant compté positivement dans le sens $\Gamma^{1+} \rightarrow \Gamma^{2+}$.

On montre de même, que les mêmes opérateurs, soumis à la transformation (θ^+) qui conserve Γ^{2+} , se comportent comme les mêmes trois vecteurs dans une rotation autour de Γ^{2+} , d'un angle θ^+ compté positivement dans le sens $\Gamma^{3+} \rightarrow \Gamma^{1+}$; et les résultats correspondants pour la transformation (α^+) .

Quant aux trois opérateurs Γ^{1-} , Γ^{2-} , Γ^{3-} , ils donneront des résultats analogues : ils sont insensibles aux rotations (α^+) , (θ^+) , (ψ^+) , et subissent sous l'action des matrices (ψ^-) , (θ^-) , (φ^-) , les mêmes transformations qu'un système de trois vecteurs orthogonaux et de même module, qu'on ferait tourner d'un angle ψ^- autour de Γ^{3-} , d'un angle θ^- autour de Γ^{2-} , ou d'un angle α^- autour de Γ^{1-} ; toujours dans le sens correspondant à l'orientation $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

Ces propriétés des six opérateurs étudiés justifient évidemment les signes et les indices que nous leur avons affectés. On a donc mis en évidence un isomorphisme remarquable entre les six transformations élémentaires, respectivement complexes conjugués, et les rotations d'espace de deux trièdres trirectangles qu'on peut représenter dans deux espaces vectoriels complexes euclidiens abstraits : l'un E^+ relatif seulement aux transformations (ψ^+) , (θ^+) , (α^+) , est insensible aux transformations (ψ^-) , (θ^-) , (α^-) ; l'autre E^- relatif seulement aux transformations (ψ^-) , (θ^-) , (α^-) , est insensible aux transformations (ψ^+) , (θ^+) , (α^+) .

Si nous revenons maintenant à la transformation générale de Lorentz et aux angles d'Euler complexes de la formule (18) qui permettent de l'exprimer, de ce fait il lui correspondra dans chacun des espaces E^+ et E^- une succession de trois rotations tridimensionnelles complexes qui s'exprimeront par les formules usuelles en fonction des angles d'Euler tridimensionnels complexes, soit respectivement : ψ^+ , θ^+ , φ^+ , pour E^+ et ψ^- , θ^- , φ^- , pour E^- .

Il est essentiel de remarquer que, comme il est bien connu, le groupe de Lorentz ne peut pas se réduire à un produit direct de deux rotations tridimensionnelles complexes. Dans notre formulation, ceci se traduit par le fait que les rotations complexes dans E^+ et E^- correspondant à une même transformation de Lorentz, ne sont pas indépendantes mais complexes conjuguées. On sait que le groupe infinitésimal plus général des rotations O_4 complexes à quatre dimensions est un produit direct de deux groupes de rotations complexes à trois dimensions O_3 . Le groupe de Lorentz infinitésimal est un sous-groupe de O_4 , correspondant à des rotations réelles dans l'espace, et imaginaires pures dans le temps, autrement dit, dans notre formulation, il impose que tous les angles d'Euler utilisés ψ_1 , ψ_2 , θ_1 , θ_2 , φ_1 , φ_2 , soient réels, c'est-à-dire que les angles complexes soient respectivement conjugués. Dans ces conditions, la réduction $O_4 = O_3 \otimes O_3$ n'a pas son équivalent sur le sous-groupe infi-

tésimal L_4 : le produit de deux rotations complexes quelconques (non conjuguées) O_3, O'_3 donne en général une rotation O_4 à quatre dimensions qui n'est pas une transformation de Lorentz infinitésimale.

Du reste, le résultat n'est pas nouveau dans la littérature. Einstein et Meyer ⁽¹²⁾ avaient déjà établi qu'on pouvait représenter le groupe de Lorentz par les rotations tridimensionnelles des parties d'espace de deux ensembles de trois vecteurs self-duaux complexes conjugués. En un sens, la théorie que nous développons ici est une illustration concrète du résultat général d'Einstein à l'aide des angles d'Euler complexes.

Les propriétés des opérateurs vont maintenant nous permettre de former des combinaisons tensorielles complexes des vecteurs du tétrapode de base qui subiront — dans l'univers de Minkowski complexe cette fois — des transformations parallèles sous les rotations (18). Nous représenterons ces vecteurs de base sous forme matricielle comme dans les formules (18) et (19). Nous aurons besoin de la forme transposée

$$(\tilde{b}_{\mu}^{\xi}) = (b_{\mu}^{(1)}, b_{\mu}^{(2)}, b_{\mu}^{(3)}, b_{\mu}^{(4)})$$

correspondant au tétrapode

$$(b_{\mu}^{\xi}) = \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Chaque opérateur Γ agissant sur le tétrapode (b_{μ}^{ξ}) [ou sur le tétrapode (a_{μ}^{ξ})], pris sous forme matricielle, permet de former un tenseur

$$(23 \text{ bis}) \quad \Gamma_{\mu\nu} = (\tilde{b}_{\mu}^{\xi}) \Gamma (b_{\nu}^{\xi}).$$

Considérons une des transformations élémentaires de (18), par exemple (19)

$$(b_{\mu}^{\xi}) = (\psi^+) (a_{\mu}^{\xi})$$

et son adjointe

$$(\tilde{b}_{\mu}^{\xi}) = (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) (\tilde{\psi}^+).$$

On peut porter ces expressions dans la définition (23 bis) et l'on trouve

$$\Gamma_{\mu\nu} = (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) (\tilde{\psi}^+) \Gamma (\psi^+) (a_{\nu}^{\xi}).$$

(12) SITZBER, Berlin, 1932.

Il résulte immédiatement de la propriété $\tilde{\Gamma} = (\Gamma)^{-1}$ que $(\tilde{\Psi}^+) = (\Psi^+)^{-1}$ et l'on a aussi

$$\Gamma_{\mu\nu} = (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) (\Psi^+)^{-1} \Gamma (\Psi^+) (a_{\nu}^{\xi}).$$

Ainsi nous pouvons appliquer les relations que nous venons d'établir et nous voyons, en désignant les tenseurs $\Gamma_{\mu\nu}$ par les mêmes indices que les opérateurs Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{1-} &= (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{1-} (a_{\nu}^{\xi}), \\ \Gamma_{\mu\nu}^{2-} &= (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{2-} (a_{\nu}^{\xi}), \\ \Gamma_{\mu\nu}^{3-} &= (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{3-} (a_{\nu}^{\xi}), \\ \Gamma_{\mu\nu}^{1+} &= -(\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{2+} (a_{\nu}^{\xi}) \sin \psi^+ + (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{1+} (a_{\nu}^{\xi}) \cos \psi^+, \\ \Gamma_{\mu\nu}^{2+} &= (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{1+} (a_{\nu}^{\xi}) \sin \psi^+ + (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{2+} (a_{\nu}^{\xi}) \cos \psi^+, \\ \Gamma_{\mu\nu}^{3+} &= (\tilde{a}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{3+} (a_{\nu}^{\xi}). \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on désigne par $\Lambda_{\mu\nu}$ le tenseur homologue de chaque $\Gamma_{\mu\nu}$ mais construit sur le tétrapode fixe, on met en évidence un isomorphisme analogue à celui que nous avons signalé sur les opérateurs Γ , mais se rapportant cette fois à des tenseurs complexes de l'univers de Minkowski. On aura évidemment la même correspondance pour tous les autres angles.

Étudions les tenseurs ainsi définis. Prenons, par exemple, $\Gamma_{\mu\nu}^{3+}$. En utilisant la matrice que nous avons donnée et en effectuant, on trouve facilement, compte tenu des relations (1),

$$(24) \quad \Gamma_{\mu\nu}^{3+} = (\tilde{b}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{3+} (b_{\nu}^{\xi}) = b_{\mu}^{(1)} b_{\nu}^{(2)} - b_{\mu}^{(2)} b_{\nu}^{(1)} + b_{\mu}^{(3)} b_{\nu}^{(4)} - b_{\mu}^{(4)} b_{\nu}^{(3)}.$$

De même avec la matrice Γ^{3-} on obtient

$$(25) \quad \Gamma_{\mu\nu}^{3-} = (\tilde{b}_{\mu}^{\xi}) \Gamma^{3-} (b_{\nu}^{\xi}) = b_{\mu}^{(1)} b_{\nu}^{(2)} - b_{\mu}^{(2)} b_{\nu}^{(1)} - b_{\mu}^{(3)} b_{\nu}^{(4)} + b_{\mu}^{(4)} b_{\nu}^{(3)}.$$

On reconnaît immédiatement deux tenseurs self-duaux construits sur les b_{μ}^{ξ} et relatifs aux indices supérieurs, c'est-à-dire que, si dans chaque produit constituant $\Gamma_{\mu\nu}^{3+}$, on remplace les deux indices supérieurs (soit ξ, η) par les indices qui n'y figurent pas (soit ζ, χ) pris dans un ordre tel que la permutation ξ, η, ζ, χ soit paire, on obtient à nouveau le tenseur $\Gamma_{\mu\nu}^{3+}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta\pm} = b_{\mu}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta} - b_{\nu}^{\alpha} b_{\mu}^{\beta} \pm \frac{1}{i} (\overline{b_{\mu}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta} - b_{\nu}^{\alpha} b_{\mu}^{\beta}}) = b_{\mu}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta} - b_{\nu}^{\alpha} b_{\mu}^{\beta} \pm \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} b_{\mu}^{\gamma} b_{\nu}^{\lambda}.$$

On tire

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ijkl\pm} = b_{\mu}^i b_{\nu}^j - b_{\nu}^i b_{\mu}^j \pm \varepsilon^{ijkl} (b_{\mu}^k b_{\nu}^l - b_{\nu}^k b_{\mu}^l) = b_{\mu}^i b_{\nu}^j - b_{\nu}^i b_{\mu}^j \pm \varepsilon^{ijkl} (b_{\mu}^k b_{\nu}^l - b_{\nu}^k b_{\mu}^l),$$

ou, enfin, en prenant le dual à trois dimensions relativement à i et j , ce qui nous ramène à un seul indice supérieur,

$$(26) \quad \Gamma_{\mu\nu}^{r\pm} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijr} \Gamma_{\mu\nu}^{ij\pm} = \varepsilon^{ijr} b_{\mu}^i b_{\nu}^j \pm (b_{\mu}^r b_{\nu}^{(4)} - b_{\nu}^r b_{\mu}^{(4)}).$$

C'est l'expression générale de nos six tenseurs ainsi qu'on peut s'en rendre compte en les calculant à partir des matrices Γ comme nous l'avons fait en (24) et (25) et en faisant, d'autre part, $r = 1, 2, 3$ dans la formule (26).

Il est facile de constater sur les tenseurs de même type (+) ou (—), que ces tenseurs sont orthogonaux et unitaires.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{r+} \Gamma_{\mu\nu}^{r+} &= 1 && \text{(sans sommation sur } r) \\ \Gamma_{\mu\nu}^{r+} \Gamma_{\mu\nu}^{s+} &= 0 && \text{si } r \neq s. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\Gamma_{\mu\nu}^{r+} \Gamma_{\mu\nu}^{s+} = \delta^{rs}.$$

Jusqu'ici nous n'avons fait que préciser un isomorphisme dont l'existence avait d'ailleurs été démontrée théoriquement, notamment par Cartan, à partir de l'étude structurale du groupe de Lorentz. Il nous reste une dernière étape à franchir pour établir une correspondance géométrique précise où les angles d'Euler complexes s'interpréteront comme les angles de deux vecteurs de l'espace euclidien complexe. Nous allons construire à partir des $\Gamma_{\mu\nu}^{r\pm}$ des tenseurs self-duaux par rapport aux indices inférieurs, soit

$$B_{\mu\nu}^{r\pm} = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}^{r\pm} + \frac{1}{2i} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{r\pm} = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}^{r\pm} + \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{r\pm}.$$

$B_{\mu\nu}^{r\pm}$ contient exactement les mêmes composantes que le $\Gamma_{\mu\nu}^{r\pm}$ correspondant, mais répétées deux fois dans un certain ordre et l'on sait que

$$\tilde{B}_{\mu\nu}^{r\pm} = i B_{\mu\nu}^{r\pm}.$$

Prenons maintenant pour référentiel un système d'axes particulier, par exemple les axes fixes α_{μ}^{ξ} et projetons les tenseurs : $B_{\mu\nu}^{r\pm}$.

On aura les composantes d'espace

$$(27) \quad B_{ij}^{r\pm} = \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{r\pm} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk\ell} (\Gamma_{k\ell}^{r\pm} - \Gamma_{\ell k}^{r\pm}) = \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{r\pm} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{k\ell}^{r\pm}$$

qui forment un tenseur d'espace antisymétrique, et les composantes de temps

$$(28) \quad B_{k\ell}^{k\pm} = \frac{1}{2} \Gamma_{k\ell}^{k\pm} + \frac{1}{4} \varepsilon_{k\ell ij} \Gamma_{ij}^{k\pm} = \frac{1}{2} \Gamma_{k\ell}^{k\pm} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{ij}^{k\pm}$$

qui forment un vecteur d'espace. Enfin, on peut prendre le dual d'espace du tenseur (27)

$$(29) \quad B_k^{\prime\pm} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_{ij}^{\prime\pm} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{ij}^{\prime\pm} + \frac{1}{2} \Gamma_{k4}^{\prime\pm}.$$

Ainsi le dual du tenseur (27) est égal au vecteur (28). Nous arrivons ainsi à former à partir du tétrapode b_{μ}^{ξ} à quatre dimensions un système de trois vecteurs complexes à trois dimensions

$$B_k^{\prime+} = \frac{1}{2} \Gamma_{k4}^{\prime+} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{ij}^{\prime+}$$

et un autre système de trois vecteurs complexes à trois dimensions

$$B_k^{\prime-} = \frac{1}{2} \Gamma_{k4}^{\prime-} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{ij}^{\prime-}.$$

Comme il est bien connu, l'orthonormalité quadridimensionnelle des trois tenseurs $\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\pm}$ entraîne l'orthonormalité tridimensionnelle des trois vecteurs $B_k^{\prime+}$, qui constituent ainsi un trièdre trirectangle unitaire, et des trois vecteurs $B_k^{\prime-}$ qui en constituent un autre.

Enfin, les rotations élémentaires quadridimensionnelles complexes de la formule (18) opèrent évidemment sur chaque vecteur $B_k^{\prime+}$ comme sur le tenseur $\Gamma_{\mu\nu}^{\prime+}$ correspondant, si bien que chacune des transformations telle que (ψ^+) fera tourner le trièdre $B_k^{\prime+}$ d'un angle ψ^+ dans l'espace euclidien tridimensionnel complexe, laissant immobile le trièdre $B_k^{\prime-}$ et inversement.

Nous pouvons donner la forme explicite des vecteurs $B_k^{\prime\pm}$ en portant dans la formule (29) les expressions de la formule (26). On obtient facilement

$$(30) \quad B_k^{\prime\pm} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\rho qr} b_i^{\rho} b_j^q \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} b_i^{\rho} b_j^{\rho} \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho qr} b_k^{\rho} b_4^q + \frac{1}{2} (b_k^{\rho} b_4^{\rho} - b_4^{\rho} b_k^{\rho}).$$

Cette expression se simplifie en tenant compte des relations d'orthonormalité des b_{μ}^{ξ} (1) qu'on peut aussi écrire ⁽¹³⁾

$$b_{\mu}^{\xi} b_{\nu}^{\eta} - b_{\nu}^{\xi} b_{\mu}^{\eta} = \varepsilon^{\xi\eta\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b_{\alpha}^{\xi} b_{\beta}^{\eta}.$$

On en tire immédiatement

$$b_i^{\rho} b_j^{\rho} - b_j^{\rho} b_i^{\rho} = 2 \varepsilon^{\rho qr} \varepsilon_{ijl} b_l^{\rho} b_l^q$$

et

$$b_i^{\rho} b_j^{\rho} - b_j^{\rho} b_i^{\rho} = 2 \varepsilon^{\rho qm} \varepsilon_{ijl} (b_l^{\rho} b_4^{\rho} - b_4^{\rho} b_l^{\rho}),$$

(¹³) F. HALBWACHS, *Théorie relativiste des fluides à spin*, Gauthier-Villars, Paris.

d'où, respectivement,

$$\varepsilon_{ijk} b_i^r b_j^s = \varepsilon^{pqr} b_k^p b_i^q, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} b_i^p b_j^q = b_k^r b_i^s - b_i^r b_k^s.$$

Ainsi, dans l'expression (30), les termes extrêmes et les termes moyens sont respectivement égaux et se doublent, d'où l'expression définitive

$$(31) \quad B_k^{r\pm} = b_k^r b_i^s - b_i^r b_k^s \pm \varepsilon_{ijk} b_i^r b_j^s.$$

Sous cette forme, on peut vérifier immédiatement que les angles des vecteurs $B_k^{r\pm}$ avec les vecteurs analogues $A_k^{r\pm}$ construits sur les axes fixes α_{μ}^{\pm} sont précisément les angles d'Euler complexes respectivement (+) et (-) de la transformation qui fait passer des α_{μ}^{\pm} aux b_{μ}^{\pm} conformément à chacune des matrices de la formule (18).

D'ailleurs si l'on considère l'expression de ces $A_k^{r\pm}$,

$$A_k^{r\pm} = a_k^r a_i^{(k)} - a_k^{(k)} a_i^r \pm \varepsilon_{ijk} a_i^r a_j^{(k)}$$

et qu'on suppose, comme nous l'avons dit, que la décomposition des tenseurs self-duaux en pseudo-vecteurs d'espace se fait dans le référentiel fixe construit sur les α_{μ}^{\pm} , on doit poser $a_{\mu}^{\pm} = \delta_{\mu}^{\pm}$, soit

$$a_k^{(k)} = 0, \quad a_k^r = 0, \quad a_i^{(k)} = 1;$$

on a ainsi

$$A_k^{r\pm} = a_k^r.$$

Les deux trièdres fixes $A_k^{r\pm}$ sont confondus. Ils sont réels et coïncident simplement avec les vecteurs d'espace du tétrapode α_{μ}^{\pm} . Ainsi on voit, grâce à cette convention, que les vecteurs complexes $B_k^{r\pm}$ ne sont plus construits dans des espaces abstraits, mais précisément localisés dans l'espace propre du tétrapode fixe α_{μ}^{\pm} par rapport auquel ils sont repérés par les angles d'Euler complexes φ^{\pm} , θ^{\pm} , ψ^{\pm} .

De deux rotations telles que (ψ^+) et (ψ^-) , l'une fait tourner seulement le système B_k^{r+} , l'autre seulement le système B_k^{r-} , c'est pourquoi elles commutent, car l'ordre dans lequel on considère les deux trièdres n'importe pas. Par contre, des transformations telles que (ψ^+) et (θ^+) ne commutent pas, de même que dans l'espace deux rotations d'Euler ne commutent pas.

Une transformation de Lorentz générale sur les b_{μ}^{\pm} fera passer de deux trièdres fixes $A_k^{r\pm}$ à deux trièdres $B_k^{r\pm}$ dont les angles avec les $A_k^{r\pm}$ sont donnés par le tableau classique des cosinus directeurs à trois dimensions.

Soit : $B_i^{r\pm} = \Lambda_j^{r\pm} A_i^{j\pm}$ avec, pour les $\Lambda_j^{r\pm}$:

$\begin{matrix} j \\ r \end{matrix}$	$\begin{array}{l} \cos \varphi^\pm \cos \theta^\pm \cos \psi^\pm \\ - \sin \varphi^\pm \sin \psi^\pm \end{array}$	$\begin{array}{l} \cos \varphi^\pm \cos \theta^\pm \sin \psi^\pm \\ + \sin \varphi^\pm \cos \psi^\pm \end{array}$	$- \cos \varphi^\pm \sin \theta^\pm$
	$\begin{array}{l} - \sin \varphi^\pm \cos \theta^\pm \cos \psi^\pm \\ - \cos \varphi^\pm \sin \psi^\pm \end{array}$	$\begin{array}{l} - \sin \varphi^\pm \cos \theta^\pm \sin \psi^\pm \\ + \cos \varphi^\pm \cos \psi^\pm \end{array}$	$- \sin \varphi^\pm \sin \theta^\pm$
	$\sin \theta^\pm \cos \psi^\pm$	$\sin \theta^\pm \sin \psi^\pm$	$\cos \theta^\pm$

Tout ceci à la condition expresse, rappelons-le, qu'on effectue les six rotations réelles du tétrapode dans l'ordre indiqué au paragraphe 4.

Il est évident que si l'on s'en tient à des rotations d'espace qui laissent invariant l'axe $b_\mu^{(4)}$, les angles complexes conjugués seront réels et donc égaux deux à deux, les deux trièdres $B_k^{r\pm}$ deviennent identiques et leur rotation commune se réduira simplement à la rotation d'Euler classique. Une simple inspection de la formule (31) montre en effet que si l'on fait $b_k^r = 0$, $b_k^k = 1$, le terme dual qui différencie les deux trièdres est réel, et $B_k^{r\pm}$ se réduit simplement au trièdre spatial b_k^r .

6. Transformations infinitésimales du groupe orthochrone propre de Lorentz. — Considérons les transformations infinitésimales du groupe orthochrone de Lorentz qui amène le tétrapode a_μ^ξ en b_μ^ξ . Avec les angles d'Euler utilisés par C. Van Winter, on a

$$(32) \quad \begin{bmatrix} b_\mu^{(1)} \\ b_\mu^{(2)} \\ b_\mu^{(3)} \\ b_\mu^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i\delta\varphi_1 & 0 & 0 \\ -i\delta\varphi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta\varphi_2 \\ 0 & 0 & -\delta\varphi_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i\delta\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\delta\theta_2 \\ i\delta\theta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta\theta_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} 1 & i\delta\psi_1 & 0 & 0 \\ -i\delta\psi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta\psi_2 \\ 0 & 0 & -\delta\psi_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_\mu^{(1)} \\ a_\mu^{(2)} \\ a_\mu^{(3)} \\ a_\mu^{(4)} \end{bmatrix}$$

Soit encore :

$$(33) \quad \begin{bmatrix} b_{\mu}^{(1)} \\ b_{\mu}^{(2)} \\ b_{\mu}^{(3)} \\ b_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{i}{2}\delta\psi^+ & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\delta\psi^+ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i}{2}\delta\psi^+ \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2}\delta\psi^+ & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{i}{2}\delta\psi^- & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\delta\psi^- & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{2}\delta\psi^- \\ 0 & 0 & \frac{i}{2}\delta\psi^- & 1 \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{2}\delta\theta^+ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{i}{2}\delta\theta^+ \\ \frac{i}{2}\delta\theta^+ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta\theta^+ & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{2}\delta\theta^- & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{i}{2}\delta\theta^- \\ \frac{i}{2}\delta\theta^- & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}\delta\theta^- & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} 1 & \frac{i}{2}\delta\psi^+ & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\delta\psi^+ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i}{2}\delta\psi^- \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2}\delta\psi^+ & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{i}{2}\delta\psi^- & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\delta\psi^- & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{2}\delta\psi^- \\ 0 & 0 & \frac{i}{2}\delta\psi^- & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mu}^{(1)} \\ a_{\mu}^{(2)} \\ a_{\mu}^{(3)} \\ a_{\mu}^{(4)} \end{bmatrix}$$

Dans cette dernière expression (33) toutes les matrices commutent. On peut donc écrire :

$$(34) \quad b_{\mu}^{\xi} = L_{\xi}^{\xi}(\delta\theta^+, \delta\varphi^+, \delta\psi^+) L_{\eta}^{\eta}(\delta\theta^-, \delta\varphi^-, \delta\psi^-) a_{\mu}^{\eta}$$

où $L_{\xi}^{\xi}(\delta\theta^+, \delta\varphi^+, \delta\psi^+)$ représente une transformation infinitésimale consistant en une rotation d'angle $\delta\psi^+$ autour de Γ^{3+} suivie des rotations $\delta\theta^+$ et $\delta\varphi^+$ respectivement autour de Γ^{2+} et Γ^{1+} , et $L_{\eta}^{\eta}(\delta\theta^-, \delta\varphi^-, \delta\psi^-)$ une transformation infinitésimale analogue; de sorte que la transformation infinitésimale la plus générale du groupe orthochrone propre de Lorentz est le produit de ces deux transformations particulières.

On peut donc chercher comme l'a fait C. Van Winter (6) à déterminer les transformations différentielles associées aux rotations

$$\omega^+ = \{ \theta^+, \varphi^+, \psi^+ \} \quad \text{et} \quad \omega^- = \{ \theta^-, \varphi^-, \psi^- \}.$$

Ces transformations différentielles constituent des opérateurs J_k^+ et J_k^- si on les exprime dans le tétrapode a_{μ}^{ξ} (plus exactement dans les trièdres

de bivecteurs self-duaux $A_k^{\prime\pm}$ associés à a_{ij}^{\pm}); et J_k^+, J_k^- si on les exprime dans le tétrapode b_{ij}^{\pm} . On a la définition

$$J_k^- f(\omega^+) = \frac{\partial f(\omega^+)}{\partial \omega^+} J_k^+ \omega^+ \quad (k = 1, 2, 3)$$

et des définitions analogues pour $J_k^-, J_k^{\prime+}, J_k^{\prime-}$. Or, si $J_{\xi\eta}$ sont des opérateurs correspondants aux rotations dans l'hyperplan $a_{ij}^{\pm} a_{kl}^{\pm}$ on a

$$J_{\mu\nu} f(\omega) = \frac{\partial f}{\partial \omega} J_{\mu\nu}(\omega); \quad \text{où } \omega = \{ \theta_1, \varphi_1, \psi_1, i\theta_2, i\varphi_2, i\psi_2 \}.$$

$J_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un six-vecteur ⁽⁹⁾ sur le tétrapode a_{ij}^{\pm} . Comme les $J_{\mu\nu}$ et les J_k^{\pm} sont liés par les relations

$$(35) \quad \begin{cases} J_i^+ = \frac{1}{2} (J_{ij} + iJ_{k0}), \\ J_i^- = \frac{1}{2} (J_{ij} - iJ_{k0}), \end{cases}$$

il apparaît immédiatement que J_k^+ et J_k^- sont les composantes de ce six vecteur sur les vecteurs $A_l^{\prime+}$ et $A_l^{\prime-}$ définis au paragraphe précédent à partir des bivecteurs self-duaux construits sur le tétrapode a_{ij}^{\pm} .

D'une façon précise : J_1^+ est la projection sur $A_l^{\prime+}$, J_2^+ sur $A_l^{\prime+}$, J_3^+ sur $A_l^{\prime+}$. Les J_k^- sont associés de façon analogue aux $A_l^{\prime-}$.

De la même façon, on peut définir les projections J_k^+, J_k^- de ces opérateurs sur les vecteurs $B_l^{\prime+}$ et $B_l^{\prime-}$ définis à partir des bivecteurs self-duaux construits sur le tétrapode b_{ij}^{\pm} .

$$J_1^+ \text{ sur } B_l^{\prime+}, \quad J_2^+ \text{ sur } B_l^{\prime+}, \quad J_3^+ \text{ sur } B_l^{\prime+}.$$

Il est clair que tous les problèmes concernant les transformations infinitésimales exprimées en termes d'angles d'Euler complexes peuvent être traités d'après l'étude précédente à l'aide des rotations tridimensionnelles complexes en appliquant les résultats aux systèmes de vecteurs $A_k^{\prime\pm}$ et $B_k^{\prime\pm}$.

Nous renvoyons à la thèse de C. Van Winther ⁽⁶⁾ pour le calcul des opérateurs J_k^{\pm} et $J_k^{\prime\pm}$. Le résultat qui est donné ci-dessous apparaît évident à la lumière de l'isomorphisme précédent. Il vient

$$(36) \quad \text{sur } A_k^{\prime+} \begin{cases} J_1^+ = -\sin \varphi^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} - \cos \varphi^+ \cot g \theta^+ \frac{\partial}{\partial \varphi^+} + \frac{\cos \varphi^+}{\sin \varphi^+} \frac{\partial}{\partial \psi^+}, \\ J_2^+ = \cos \varphi^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} - \sin \varphi^+ \cot g \theta^+ \frac{\partial}{\partial \varphi^+} + \frac{\sin \varphi^+}{\sin \theta^+} \frac{\partial}{\partial \psi^+}, \\ J_3^+ = \frac{\partial}{\partial \varphi^+} \end{cases}$$

(avec des expressions analogues pour J_k^-) et

$$(37) \quad \text{sur } B_k'^- \left\{ \begin{array}{l} J_1'^+ = \sin \psi^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} + \cos \psi^+ \cotg \theta^+ \frac{\partial}{\partial \psi^+} - \frac{\cos \psi^+}{\sin \theta^+} \frac{\partial}{\partial \varphi^+}, \\ J_2'^+ = \cos \psi^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} - \sin \psi^+ \cotg \theta^+ \frac{\partial}{\partial \psi^+} + \frac{\sin \psi^+}{\sin \theta^+} \frac{\partial}{\partial \varphi^+}, \\ J_3'^+ = \frac{\partial}{\partial \psi^+} \end{array} \right.$$

(avec les expressions analogues pour J_k^-).

On peut de la même façon calculer les projections des moments cinétiques sur les systèmes d'axes $A_k'^{\pm}, B_k'^{\pm}$. Si l'on appelle $p_{\omega^{\pm}}$ les moments cinétiques correspondant aux rotations $\omega^{\pm} = \{ \theta^{\pm}, \varphi^{\pm}, \psi^{\pm} \}$ on pourra obtenir les projections du moment cinétique p_k^+, p_k^- sur $A_k'^+$ et $A_k'^-$ respectivement, et les projections $p_k'^+, p_k'^-$ sur les vecteurs $B_k'^+$ et $B_k'^-$. Il suffit donc de résoudre ce problème dans le cas des rotations tridimensionnelles complexes.

Considérons les deux trièdres cartésiens $oxyz$ et $OXYZ$, soient :

- OU la ligne nodale;
- OV la perpendiculaire à OU dans xoy ;
- OV' la perpendiculaire à OU dans XOY.

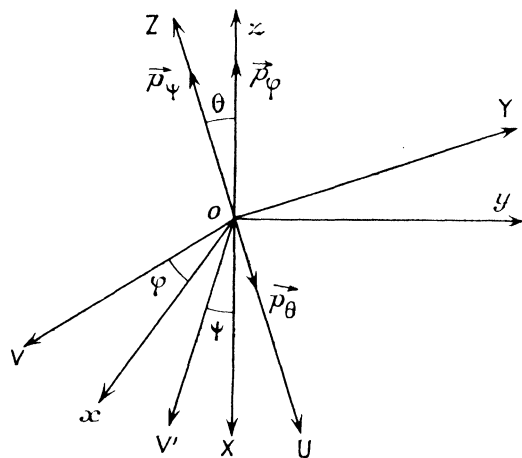


Fig. 1.

Les angles θ, φ, ψ sont définis par les relations

$$\theta = \{ \vec{oz}, \vec{OZ} \}, \quad \varphi = \{ \vec{ox}, \vec{OV} \}, \quad \psi = \{ \vec{OX}, \vec{OV} \},$$

Les axes de rotation sont $\vec{o\bar{z}}$, \vec{OU} , \vec{OZ} , et les moments \vec{p}_φ , \vec{p}_θ , \vec{p}_ψ , sont respectivement portés par ces trois axes.

Les composantes des moments cinétiques sur les axes OU , OV , OV' sont donc

$$\vec{p}_U = -\vec{p}_\theta, \quad \vec{p}_V = \frac{\vec{p}_\psi}{\sin \theta}, \quad \vec{p}_{V'} = -\frac{\vec{p}_\varphi}{\sin \theta},$$

d'où les projections sur les axes $oxyz$ et $OXYZ$:

$$(38) \quad \text{sur } oxyz \left\{ \begin{array}{l} p_x = -\sin \varphi p_\theta - \cotg \theta \cos \varphi p_\varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} p_\psi, \\ p_y = \cos \varphi p_\theta - \cotg \theta \sin \varphi p_\varphi + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} p_\psi, \\ p_z = p_\varphi; \end{array} \right.$$

$$(39) \quad \text{sur } OXYZ \left\{ \begin{array}{l} p_X = \sin \psi p_\theta + \cotg \theta \cos \psi p_\psi + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} p_\varphi, \\ p_Y = \cos \psi p_\theta - \cotg \theta \sin \psi p_\psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} p_\varphi, \\ p_Z = p_\psi. \end{array} \right.$$

On en déduit donc immédiatement

$$(40) \quad \text{sur } A_h^{r+} \left\{ \begin{array}{l} p_1^+ = -\sin \varphi^+ p_{0+} - \cotg \theta^+ \cos \varphi^+ p_{\varphi^+} + \frac{\cos \varphi^+}{\sin \theta^+} p_{\psi^+}, \\ p_2^+ = \cos \varphi^+ p_{0+} - \cotg \theta^+ \sin \varphi^+ p_{\varphi^+} + \frac{\sin \varphi^+}{\sin \theta^+} p_{\psi^+}, \\ p_3^+ = p_{\varphi^+} \end{array} \right.$$

et des expressions analogues pour p_1^- , p_2^- , p_3^- .

Et de la même façon,

$$(41) \quad \text{sur } B_h^{r+} \left\{ \begin{array}{l} p'_1 = \sin \psi^+ p_{0+} + \cotg \theta^+ \cos \psi^+ p_{\psi^+} - \frac{\cos \psi^+}{\sin \theta^+} p_{\varphi^+}, \\ p'_2 = \cos \psi^+ p_{0+} - \cotg \theta^+ \sin \psi^+ p_{\psi^+} + \frac{\sin \psi^+}{\sin \theta^+} p_{\varphi^+}, \\ p'_3 = p_{\psi^+} \end{array} \right.$$

et des expressions analogues pour p'_1^- , p'_2^- , p'_3^- .

Si l'on compare (30) et (31) à (26) et (27), on voit comme il est naturel qu'on aurait pu les déduire les unes des autres.

7. Conclusion. — Dans ce travail, on a donc pu, d'une part généraliser la méthode des angles d'Euler tridimensionnels à l'espace-temps

en remplaçant les rotations planes réelles et imaginaires pures par des rotations complexes autour de bivecteurs self-duaux et, d'autre part, dans le cas des transformations infinitésimales du groupe orthochrone propre de Lorentz, établir très rapidement des résultats concernant les transformations différentielles.

Il ne faut pas s'étonner que, contrairement à ce qui se passe à trois dimensions, la théorie relativiste des angles d'Euler s'appuie sur des rotations autour de bivecteurs de nature particulière (self-duaux). En effet, la transformation de Lorentz laisse invariant le cône de lumière, ce qui limite évidemment le choix des axes de rotation possibles.

Pour terminer, nous tenons à remercier MM. les Professeurs L. de Broglie, D. Bohm, M. Riesz, A. Lichnerowicz, J. L. Synge et J.-M. Souriau pour l'intérêt qu'ils ont montré pour ce travail et les nombreux conseils qu'ils nous ont donnés en cours d'élaboration.
