ANNALES DE L'I. H. P.

PAUL LÉVY

Processus markoviens et stationnaires. Cas dénombrable

Annales de l'I. H. P., tome 16, n° 1 (1958), p. 7-25
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1958__16_1_7_0>

Processus markoviens et stationnaires. Cas dénombrable (1)

par

M. Paul LÉVY

---

1. **Introduction.** — Il ne s'agira pas d'une théorie d'ensemble du sujet indiqué, mais de compléments à mon précédent Mémoire [8]. D'une part j'exposerai quelques remarques générales sur les processus stochastiques et les appliquerai au cas des processus markoviens; il s'agit de questions déjà traitées par J. L. Doob, [3] à [5], et par K. L. Chung [1]. Il m'a paru commode pour la suite de leur donner ici une forme un peu différente.

D'autre part, je reviendrai sur deux points précis sur lesquels mon Mémoire de 1951 contenait des erreurs de raisonnement qui, toutes les deux, m'ont d'abord été signalées par K. L. Chung. Sur le premier point, le résultat même était incorrect, et l'on connaît aujourd'hui plusieurs exemples de processus réalisant une circonstance qui m'avait d'abord semblé impossible. Sur le second, le résultat était exact; j'en donnerai ci-dessous la démonstration.

Pour simplifier, je ne considérerai que des fonctions aléatoires $X(t)$ à valeurs réelles. L'extension au cas d'un espace à un nombre fini de dimensions ne présente aucune difficulté. La variable t sera en tout cas une variable réelle, que nous supposerons être le temps.

---

(1) Texte d'une conférence faite à l'Institut Henri Poincaré le 19 décembre 1957, reproduit avec d'assez nombreuses modifications, dont les plus importantes seront signalées par des notes. Les principales idées avaient déjà été exposées à Oxford, le 5 novembre 1957. La note (7) a été rajoutée à la suite d'une Communication de K. L. Chung au Congrès international d'Edimbourg (août 1958). La note finale a été rajoutée à la correction des épreuves (décembre 1958).

2. **Définitions générales.** — DÉFINITION 1. — Un ensemble Ω de fonctions $f(t)$ est dit *séparable* s'il existe une suite $\{\theta_n\}$ telle que $f(.)\in\Omega$, $g(.)\in\Omega$ et $f(\theta_n)=g(\theta_n)$ pour tous les θ_n implique $f(t)=g(t)$ pour toutes les valeurs de t (exemple : l'ensemble des fonctions d'une variable réelle qui sont continues à gauche). Si, comme dans cet exemple, on peut prendre pour $\{\theta_n\}$ n'importe quel ensemble dénombrable et partout dense, Ω sera dit *absolument séparable*.

DÉFINITION 2. Une fonction aléatoire (f. a.) $X(t)$ est dite *séparable* (ou *absolument séparable*) s'il existe un ensemble séparable Ω (ou absolument séparable) Ω tel que

$$\Pr\{X(.)\in\Omega\}=1$$

Ces définitions ne coïncident pas avec celles de Doob. Ainsi une f. a. ne peut être séparable que si l'ensemble Ω des fonctions possibles (après suppression éventuelle d'un ensemble de probabilité nulle) a au plus la puissance du continu. Par suite les processus du sixième type (d'après ma classification de 1951) ne sont pas séparables avec la présente définition. Ils le sont avec celle de Doob.

DÉFINITION 3. — Une *définition faible* d'une f. a. $X(t)$ est une définition qui, quels que soient l'entier n et les n valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de t, donne la loi jointe des n v. a. $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$. La loi jointe de toute suite infinie $\{X(t_n)\}$ s'en déduit.

Précisons bien que, si notre définition 2 est souvent commode, celle de Doob reste essentielle pour la théorie générale des processus stochastiques.

DÉFINITION 4. — Deux f. a. qui ont la même définition faible seront dites *équivalentes*. Toutes les f. a. équivalentes à une même f. a. sont équivalentes entre elles; elles forment *une classe de f. a. équivalentes*.

EXEMPLE 1. — Soit $N(t)$ la fonction de Poisson. Les fonctions

$$N(t-0),\quad N(t+0),\quad 2N(t+0)-N(t-0),\quad N(t\pm 0)$$

(les signes $\pm$ dépendant de tirages au sort) sont équivalentes. Les trois premières sont séparables, mais non la dernière. Au contrairet avec la définition de Doob, les deux premières et la dernière son, séparables, mais non la troisième. Dans la dernière définition, les signes peuvent être indépendants, ou être liés d'une manière quelconque; les résultats énoncés sont vrais en tout cas.

DÉFINITION 5. — La définition d'une f. a. $X(t)$ sera dite *complète* si $X(t)$ est, pour chaque t, une fonction mesurable [c'est-à-dire que $\Pr\{X(t) < x\}$ est toujours bien défini] d'un ensemble (pouvant être infini non dénombrable) de variables aléatoires bien définies.

Dans de nombreux cas, cet ensemble comprendra d'une part les valeurs de $X(t)$ pour un ensemble dénombrable de valeurs t_n de t, d'autre part un ensemble, pouvant n'être pas dénombrable, de variables aléatoires U_ν indépendantes les unes des autres. La loi jointe des $X(t_n)$ se déduit de la définition faible de la f. a. X. Ensuite chaque $X(t)(t \neq t_n)$ sera une fonction certaine des $X(t_n)$ et d'un seul des U_ν. Pour un processus séparable, la définition complète résulte évidemment de la définition faible, complétée par la donnée de Ω, et la deuxième opération devient inutile, si l'on a pris pour $\{t_n\}$ un des $\{\theta_n\}$ possibles.

Une même f. a. peut avoir plusieurs définitions différentes. Pour reconnaître si deux définitions correspondent à la même f. a., il n'y a qu'à utiliser l'axiomatique de A. Kolmogorov et J. L. Doob. Elles doivent conduire à la même famille borélienne d'événements ayant des probabilités bien définies, et aux mêmes valeurs de ces probabilités. En d'autres termes, dans l'espace Ω des déterminations possibles de $X(t)$, les deux définitions doivent conduire, pour n'importe quel ensemble, a la même mesure extérieure (²).

DÉFINITION 6. — Une f. a. $X(t)$ est *dite stationnaire* si la définition de $Y(t) = X(t+c)$ est indépendante de c. Elle est *faiblement stationnaire* (f. S.) ou *strictement stationnaire* (s. S.) suivant qu'il s'agit de la définition faible ou de la définition complète de $Y(t)$.

Dans l'exemple 1, la fonction $N(t \pm 0)$ a ses accroissements faiblement stationnaires. Ils ne sont strictement stationnaires que si les lois dont dépendent les signes $\pm$ ne varient pas avec t.

3. **Processus markoviens** (³). — DÉFINITION 7. — La f. a. $X(t)$ est

(²) La définition 5 et les remarques qui suivent ne figuraient pas dans la rédaction initiale. Il nous a depuis paru nécessaire de préciser ce que nous appelions une définition complète.

(³) La rédaction de ce nº 3 est nouvelle. Dans la rédaction initiale, trouvant trop dite *markovienne* (ou faiblement markovienne) (M.) si, pour n'importe quelle suite de nombres croissants t_n, la suite des $X(t_n)$ est une chaîne simple de Markov.

La définition faible d'un *processus de Markov* [dont on peut déduire une f. a. M. en se donnant, pour un instant initial t_0, la loi de probabilité de $X(t_0)$; cette v. a. peut d'ailleurs se réduire à un nombre certain x_0] se réduit à la donnée de la *probabilité de transition*

$$F(t, t', x, x'-0) = \Pr\{X(t') < x' \mid X(t) = x\} \qquad (t_0 \leq t < t').$$

Cette fonction doit vérifier des conditions bien connues, que nous rappellerons plus loin dans le cas à la fois stationnaire et dénombrable. Précisons seulement tout de suite que nous ne considérerons pas comme distinctes deux déterminations de la fonction F qui ne diffèrent, pour chaque t, que si x appartient à un ensemble e_t tel que

$$\Pr\{X(t) \in e_t\} = 0.$$

Elles conduisent évidemment à la même définition faible de $X(t)$.

Définition 8. — La f. a. $X(t)$ est dite *presque strictement markovienne* (pr. s. M.) s'il existe une f. a. $Y(\tau) = Y(\tau \mid t, x)$ de la variable positive τ, dépendant en outre des deux paramètres t et x, et telle que, pour tout $t > t_0$, la formule

$$X^*(t') = \begin{cases} X(t') & (t' \leq t), \\ Y[t'-t \mid t, X(t)] & (t' > t) \end{cases}$$

définisse une f. a. $X^*(t')$ qui n'est autre que $X(t)$. En d'autres termes il doit s'agir d'une nouvelle définition de la même f. a.

La loi de $Y(\tau)$ apparaît ainsi comme la loi conditionnelle de $X(t+\tau)$ dans l'hypothèse $X(t) = x$, et cette loi apparaît comme indépendante du passé. Mais, dans le cas où cette hypothèse est possible, mais a une probabilité nulle, la probabilité conditionnelle n'est pas bien définie. C'est ce qui nous a fait préférer la forme précédente de la définition 8.

Définition 9. — Nous appellerons *instant initial variable* (d'après l'expression *optional starting time* employée par K. L. Chung) une

---

compliquée la définition habituelle du caractère strictement markovien, j'avais proposé une définition différente, et qui semblait plus simple. Mais elle présentait des difficultés qui seront discutées dans un autre travail [11]. Je me demande d'ailleurs encore si elle ne reste pas utile pour certains problèmes relatifs au cas dénombrable.

v. a. T, bien définie pour chaque réalisation possible de la f. a. $X(.)$, et telle que, pour savoir si $T = t$, il suffise de connaître $X(u)$ pour $u \leq t$. La donnée de T ne donne donc aucune information nouvelle sur les valeurs futures de la fonction X.

Définition 10 (d'après E. B. Dynkin et A. A. Jouchkevitch [6]. — La f. a. $X(t)$ est dite *strictement markovienne* (s. M.) si la propriété caractéristique des f. a. pr. s. M. (définition 8) subsiste quand, dans la définition de $X^*(t')$, on remplace t par n'importe quel instant initial variable T.

Exemple 2 (suggéré par un exemple analogue indiqué par W. Feller). — C'est un exemple de processus qui est pr. s. M., mais non s. M. Il s'agit du mouvement brownien sur une courbe rectifiable fermée, ayant un point double a (et un seul). Précisons que le point mobile ne peut pas profiter de son passage en a pour passer d'une branche à l'autre, mais qu'à l'instant où il est en a la donnée de sa position actuelle ne renseigne pas sur son chemin d'arrivée. On ne peut donc définir la loi de probabilité de son mouvement futur qu'en complétant cette donnée par un renseignement déduit du passé immédiat.

Comme, pour tout t donné, le point mobile n'est presque sûrement pas en a, l'existence de ce point où le caractère markovien disparaît n'empêche pas le processus d'être pr. s. M. Mais il suffit de prendre pour T l'instant du premier passage en a pour voir qu'il n'est pas s. M.

On peut dire, intuitivement : si un processus est pr. s. M. sans être s. M., c'est qu'il existe au moins un état singulier où le caractère markovien disparaît. Mais, si l'hypothèse $X(t) = x$ est infiniment peu probable, la notion de probabilité conditionnelle relative à cette hypothèse n'est pas par elle-même bien définie, et cela n'a guère de sens de dire qu'à l'instanl t et au point x, le caractère markovien disparaisse. C'est seulement dans certains cas particuliers, par exemple celui d'un processus à la fois additif et stationnaire, que la loi de probabilité conditionnelle relative à l'avenir se ramène à une loi inconditionnelle, de sorte que la difficulté signalée disparaît.

Nous n'utiliserons pas ici la définition 10, mais, dans un ordre d'idées voisin, nous utiliserons au n° 7 le théorème suivant :

Théorème. — *Dans le cas dénombrable, une f. a. M.* S. *étant* *définie par des probabilités de transition* $P_{h,k}(t)$ *qui, en plus des conditions* (3) *et* (4) *ci-dessous vérifient la condition* $P_{h,h}(+0) = 1$ (c'est-à-dire qu'il s'agit d'un des types 1 à 5 de la classification proposée dans [8]), *s'il est possible que le système passe directement ou indirectement d'un état* x_h *à un autre état* x_k, *la durée* U *du voyage de* x_h *à* x_k *est une variable aléatoire indépendante aussi bien de l'instant* t *où le système quitte l'état* x_h *que du temps* t' *passé dans cet état avant l'instant* t. *Cet énoncé subsiste si l'on ne considère que les trajets de* x_h *à* x_k *ne passant par aucun état d'un ensemble donné d'états possibles.*

Pour le démontrer, on remarque d'abord que, quel que soit $\tau > 0$, la loi de U est indépendante de la partie entière de $\frac{t'}{\tau}$; elle est donc indépendante de t', et de tout ce qui s'est passé avant l'instant où $\Phi_h(t) = t'$, et en particulier de t.

4. Le cas dénombrable. États essentiels et états fictifs. — 1° *Le cas dénombrable* est celui où il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{E}$ de valeurs x_h de $X(t)$ (ou *états* du système étudié) tel que, à tout instant t, on ait

$$\Pr\{X(t) \in \mathcal{E}\} = 1. \tag{1}$$

Dans ce cas, pour un processus markovien et stationnaire (M. S.), les probabilités de transition ont la forme

$$P_{h,k}(t) = \Pr\{X(t_2) = x_k \mid X(t_1) = x_h\} \qquad (t = t_2 - t_1 \geqq 0;\, h,\, k = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

et les conditions qui leur sont imposées sont

$$P_{h,k}(0) = \delta_{h,k}, \qquad P_{h,k}(t) \geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_{h,k}(t) = 1, \tag{3}$$

$$P_{h,k}(t + t') = \sum_{l=1}^{\infty} P_{h,l}(t)\, P_{l,k}(t') \qquad (t,\, t' \geqq 0). \tag{4}$$

On peut sans restriction supposer qu'à chaque k correspond au moins un $h \neq k$ tel que $P_{h,k}(t)$ ne soit pas identiquement nul. Un état ne vérifiant pas cette condition n'aurait aucune chance d'être réalisé, s'il n'est pas pris comme état initial; il peut être supprimé.

Définition II. — Les états $x_h \in \mathcal{E}$ sont appelés *états essentiels* du système [ou *valeurs essentielles* de $X(t)$].

2° Soit e_h l'ensemble des t pour lesquels $X(t) = x_h$. Il peut arriver que $e = \bigcup e_h$ ne constitue pas tout l'axe des t, et qu'il y ait un ensemble complémentaire $e^\star$. Il résulte évidemment de la formule (1) que

$$\Pr\{t \in e^\star\} = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire qu'aucune valeur de t donnée d'avance n'a une probabilité positive d'appartenir à $e^\star$; cet ensemble est donc de mesure presque sûrement nulle.

Définition 12. — Les valeurs pouvant être prises par $X(t)$ quand $t \in e^\star$ sont appelées *valeurs fictives* de cette fonction (ou *états fictifs* du système). Modifiant la définition donnée dans [8], nous appellerons *état possible* tout état qui est, soit essentiel, soit fictif.

Ainsi, dans le cas de la fonction de Poisson dont, si l'on suppose sa valeur initiale nulle, les valeurs essentielles sont les nombres entiers non négatifs n, et, si on la définit à l'instant des sauts par la formule

$$N(t) = \frac{1}{2}[N(t-0) + N(t+0)],$$

tous les nombres $n + \frac{1}{2} (n \geqq 0)$ sont des valeurs fictives. Si l'on prend pour $N(t)$ un nombre choisi au hasard entre $N(t-0)$ et $N(t+0)$, il y a même une infinité non dénombrable de valeurs fictives. Cet exemple nous montre aussi qu'il faut distinguer l'ensemble $\mathcal{E}^\star$ de toutes les valeurs fictives possibles, et l'ensemble $E^\star$ de celles qui sont réalisées dans une épreuve déterminée.

Définition 13. — Nous dirons qu'une valeur fictive est *éliminable* s'il existe une fonction équivalente à celle étudiée pour laquelle cette valeur ne soit plus une valeur possible.

C'est le cas dans les deux exemples précédents, où $N(t)$ est équivalent à $N(t-0)$. Mais il arrive qu'il y ait des valeurs fictives non éliminables (nous les aurions appelées essentielles si ce mot n'avait pas déjà une autre signification); on ne peut donc pas éviter de les introduire dans une étude générale du cas dénombrable.

Nous avons donné dans notre conférence d'Oxford différents exemples simples de cette circonstance, qui montrent notamment que, si l'ensemble des états fictifs non éliminables n'est pas dénombrable, il peut arriver, soit que les ensembles E^* possibles soient tout de même tous dénombrables, soit qu'au contraire ils ne le soient pas et coïncident même avec $\mathcal{E}^*$.

5. **États stables et états instantanés; processus du type 5.** — Supposons qu'à un instant initial t_0 on ait $X(t_0) = x_h$. Pour un processus M. S., T_h désignant le plus grand nombre tel que le système reste dans l'état x_h pendant tout l'intervalle $(t_0, t_0 + T_h)$, on a toujours

$$\Pr\{T_h > t\} = e^{-\lambda_h t} \quad (t > 0, \ 0 \leqq \lambda_h \leqq \infty), \tag{6}$$

$$E\{T_h\} = \mu_h = \frac{1}{\lambda_h}. \tag{6'}$$

DÉFINITION 14. — L'état x_h est dit *stable* si $\mu_h > 0$, et *instantané*, si $\mu_h = 0$ (c'est-à-dire si $\lambda_h = \infty$).

Un état fictif est toujours instantané; mais la réciproque n'est pas vraie. Le premier exemple de systèmes à états instantanés non fictifs semble avoir été indiqué par W. Doeblin. Il s'agissait d'une fonction $X(t)$ dont toutes les valeurs sont indépendantes les unes des autres; s'il y a au plus une infinité dénombrable de valeurs possibles, et que leurs probabilités soient indépendantes de t, il s'agit bien d'un processus M. S. et dénombrable.

Dans cet exemple, les ensembles e_h ne sont presque sûrement pas mesurables. Dans mon Mémoire [8], j'ai montré qu'il pouvait exister aussi des états instantanés, non fictifs, et réalisés sur des ensembles mesurables. Les processus pour lesquels il en est ainsi se rattachent à ce que j'ai appelé le type 5. Il se distingue des types 1 à 4 par l'existence d'états instantanés non fictifs, et des types 6 et 7 parce que les e_h sont tous mesurables. Le type 6 est celui de Doeblin, où certains des e_h n'étant pas mesurables, les $P_{h,k}(t)$ sont mesurables; le type 7, dont l'existence a été prouvée par Doob, est celui où au moins certains des $P_{h,k}(t)$ ne sont pas mesurables.

Doob a démontré, dans [3], que si les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont mesurables, elles sont continues pour $t > 0$, et, t tendant vers zéro, ont une limite $P_{h,k}(+0)$; on en déduit aisément que les types 1 à 5 sont caractérisés par $P_{h,k}(+0) = \delta_{h,k}$, pour tous les systèmes d'indices h

et k, tandis que, pour le type **6**, au moins deux des $P_{h,h}(+0)$ sont < 1; mais tous sont positifs. $P_{h,h}(+0) = 0$ indiquerait que x_h est un état fictif ou impossible qu'on aurait oublié de supprimer dans la liste des x_h.

Il peut arriver qu'un processus du type 5 n'ait que des états instantanés. Tel est le cas de la fonction $H(t)$, liée à la fonction $X(t)$ du mouvement brownien, égale à 1 ou 0 suivant que $X(t)$ a ou non, au point t, un maximum relatif. Elle n'a que deux valeurs, l'une essentielle, l'autre fictive, et toutes les deux instantanées. Mais la valeur fictive est éliminable; son élimination donne une fonction identiquement nulle. La valeur zéro, devenue seule valeur possible, n'est plus instantanée.

Cet exemple montre que, en prenant notre définition **14** à la lettre, un même état peut être instantané pour un processus et stable pour un autre processus de la même classe. Il est alors assez naturel de dire qu'il n'était qu'*apparemment instantané*, et de remplacer la définition **14** par la suivante :

Définition **14'**. — Un état est dit *instantané* s'il est instantané, au sens de la définition **14**, et le reste après suppression des états fictifs éliminables.

Dans la suite, nous supposerons ces derniers états supprimés, de sorte que les deux définitions deviennent équivalentes. On peut alors reconnaître, d'après la fonction $P_{h,h}(t)$, si un état est stable ou instantané. En effet, d'après un théorème de Doob, si les fonctions $P_{h,k}(t)$ sont mesurables (types **1** à **6**), elles sont continues et dérivables pour tout t positif. A l'origine, il faut distinguer les deux dérivées

$$(10)\qquad P'_{h,h}(0) = -\lim_{t \searrow 0} \frac{1 - P_{h,h}(t)}{t},$$

$$(11)\qquad P'_{h,h}(+0) = \lim_{t \searrow 0} P'_{h,h}(t) = -\lim_{t \searrow 0} \frac{P_{h,h}(+0) - P_{h,h}(t)}{t},$$

qui sont égales pour les types **1** à **5**; mais pour le type **6**, si $P_{h,h}(+0) < 1$, la première est infinie négative, et la seconde est finie. La première est dans les deux cas égale à $-\lambda_h$; un état est donc stable ou instantané suivant que $-P'_{h,h}(0)$ est fini ou infini.

Pour le type **7**, il peut y avoir des états stables pour lesquels $P'_{h,h}(0) > -\infty$ et des états instantanés pour lesquels $P'_{h,h}(0) = -\infty$. Mais ce type est caractérisé par l'existence d'un autre type d'états instantanés pour lesquels $P_{h,h}(t)$ n'est pas mesurable; alors cette dérivée $P'_{h,h}(0)$ n'existe pas.

6. Processus n'ayant que des états instantanés. L'exemple de Blackwell. — Il peut exister des processus n'ayant que des états instantanés. Il en existe plusieurs types de caractère trivial. L'un est le processus de Doeblin, qui est le cas le plus simple de processus du type **6**; il peut n'avoir que deux états possibles. Un autre se rattache au type 5, mais suppose que les états fictifs éliminables n'aient pas été éliminés. Tel est le cas de la fonction de t égale à 1 ou 0 suivant qu'au point t la fonction du mouvement brownien a ou non un maximum relatif. D'autres exemples se rattachent au type 7.

Mais cela ne résout pas le problème suivant : est-il possible qu'après suppression des états fictifs un processus du type 5 n'ait que des états instantanés? En rédigeant en 1951 mon Mémoire [8], j'avais cru la réponse négative ([4]). Deux exemples, découverts en 1956, prouvent qu'au contraire cette circonstance est possible. Le premier, dû à W. Feller et H. P. McKean Jr. [7], est lié à la théorie de la diffusion. J'ai montré récemment [10] qu'on peut l'obtenir aussi par une transformation effectuée sur la fonction du mouvement brownien. L'autre exemple est dû à R. L. Dobrusin [2]. Dans un travail récent, non encore publié, D. Blackwell l'a retrouvé sous une forme bien plus simple, que nous allons indiquer, en présentant quelques remarques nouvelles.

Soit $\{X_n(t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de fonctions M. S., indépendantes, chacune n'ayant que deux valeurs possibles, $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, de sorte qu'elle est bien définie par les deux coefficients

$$\lambda_n = -P'_{0,0}(0), \qquad \lambda'_n = -P'_{1,1}(0), \tag{12}$$

qu'on suppose tous les deux positifs et finis. En posant

$$\lambda_n + \lambda'_n = s_n, \qquad \lambda_n = k_n s_n,$$

on a alors

$$\left\{\begin{aligned} 1 - P^{(n)}_{0,0}(t) &= P^{(n)}_{0,1}(t) = k_n(1 - e^{-s_n t}) < k_n, \\ 1 - P^{(n)}_{1,1}(t) &= P^{(n)}_{1,0}(t) = (1 - k_n)(1 - e^{-s_n t}) < 1 - k_n, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

([4]) Convenablement précisé, le raisonnement fait à l'endroit cité (p. 375) prouve seulement que : si un système du type 5 n'a que des états instantanés, il existe des états fictifs, réalisés (dans leur ensemble) sur un ensemble presque sûrement partout dense sur l'axe des t.

En effet, ces expressions des $P_{k,k}^{(n)}(t)$, vérifient bien les conditions (3), (4) et (12).

La fonction $X(t)$ de Blackwell s'obtient en considérant dans un espace à une infinité de dimensions le point de coordonnées $X_1(t)$, $X_2(t)$, ... Nous poserons

$$(14)\qquad S(t)=\sum_1^\infty \frac{X_n(t)}{3^n},\qquad N(t)=\sum_1^\infty X_n(t),$$

de manière à obtenir une fonction scalaire $S(t)$ dont les valeurs correspondent d'une manière biunivoque à celles de $X(t)$; nous dirons que les $X_n(t)$ sont ses composantes; $N(t)$ est, à chaque instant, le nombre, fini ou infini, de celles qui ne sont pas nulles.

Blackwell suppose que

$$(15)\qquad \sum k_n=\sum \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda'_n}<\infty,$$

$$(16)\qquad \sum \lambda_n=\sum k_n s_n=\infty,$$

de sorte que, pour n infini, $k_n\to 0$ et s_n ne reste pas borné.

On déduit de (15) que, si initialement $S(0)=0$, on a

$$(17)\qquad E\{N(t)\}=\sum P_{0,1}^{(n)}(t)<\sum k_n<\infty,$$

de sorte que, pour chaque valeur donnée de t, $N(t)$ est presque sûrement fini. La conclusion subsiste sous la condition initiale moins restrictive $N(0)<\infty$: un nombre fini de fonctions $X_n(t)$ sont seulement changées, et la convergence subsiste. L'ensemble des valeurs essentielles de $S(t)$ est donc l'ensemble des sommes finies

$$S_n=\frac{x_1}{3}+\ldots+\frac{x_n}{3^n}\qquad (n=0,1,\ldots),$$

chaque x_ν étant 0 ou 1 : on est bien dans le cas dénombrable. Les sommes infinies $\sum_1^\infty x_n 3^{-n}$, dont l'ensemble n'est pas dénombrable, ne peuvent être que des valeurs fictives.

Remarquons qu'avec des données initiales certaines, le caractère stationnaire du processus disparaît. Mais on peut supposer chaque $X_n(0)$ défini par

$$\Pr\{X_n(0)=0\}=1-k_n,\qquad \Pr\{X_n(0)=1\}=k_n,$$

et l'on a alors une fonction aléatoire markovienne et stationnaire; comme $E\{N(t)\} = \sum k_n < \infty$, on est toujours dans le cas dénombrable.

Supposons maintenant que l'on ait, en même temps que (15), la condition nouvelle

$$\sum e^{-s_n t} < \infty \qquad (\text{pour tout } t > 0). \tag{18}$$

Dans ce cas, même si initialement $N(0) = \infty$, $N(t)$ est presque sûrement fini pour tout $t > 0$. On a, en effet

$$E\{N(t)\} = \sum \Pr\{X_n(t) = 1\} \leq \sum \operatorname{Max}[P_{0,1}^{(n)}(t),\ P_{1,1}^{(n)}(t)]$$
$$\leq \sum [k_n + (1 - k_n)e^{-s_n t}] < \sum (k_n + e^{-s_n t}) < \infty.$$

Ne tenant compte de nouveau que des conditions (15) et (16), démontrons avec Blackwell que tous les états sont instantanés, et cela que le nombre des composantes non nulles soit fini ou infini. La probabilité α_n que la fonction X_n, supposée initialement égale à x_n, change au moins une fois de valeur pendant un intervalle de temps de durée t est $1 - e^{-\rho_n t}$, ρ_n désignant λ_n ou λ'_n suivant la valeur de x_n. En prenant pour ρ_n le plus petit des nombres λ_n et λ'_n, on a une borne inférieure de α_n. Or, il résulte de (15) que $\lambda_n = o(\lambda'_n)$ (pour n infini), d'où, compte tenu de (16),

$$\sum \rho_n = \infty, \qquad \text{et par suite} \quad \sum (1 - e^{-\rho_n t}) = \infty \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_n = \infty.$$

Il résulte alors du lemme de Borel que, quelle que soit la suite des x_n, l'état correspondant du système est instantané.

Il serait maintenant intéressant de compléter les résultats de Blackwell en définissant l'ensemble $\mathcal{E}^*$ des états fictifs possibles. D'une manière générale, c'est un problème plus difficile de chercher les conditions pour que $X(t)$ appartienne presque sûrement *partout* à un certain ensemble $\mathcal{E}$ que de chercher les conditions pour qu'elle lui appartienne presque sûrement pour chaque t donné, donc aussi *presque partout*. Aussi nous contenterons-nous d'indiquer une condition nécessaire pour qu'un état appartienne à $\mathcal{E}^*$.

Soit un état $x = \{x_n\}$, non essentiel, c'est-à-dire qu'une infinité de composantes x_n ont la valeur 1. Si, en le prenant comme état initial,

$N(t)$ peut (avec une probabilité positive) rester infini pendant un intervalle de temps fini, il ne peut pas être un état possible (ni essentiel ni fictif) pour un processus de Blackwell. Si en effet il y avait une probabilité positive pour qu'il soit réalisé, il y aurait une probabilité positive qu'il existe quelque part sur l'axe des t un intervalle où $N(t)$ est partout infini, ce qui est impossible.

Or, il en est ainsi s'il existe une suite $\mathcal{S}$ d'indices n_p pour lesquels $x_{n_p} = 1$ et $\lambda_{n_p} \to 0 \, (p \to \infty)$. On peut en effet dans ce cas trouver une suite partielle $\mathcal{S}' = \{ n'_q \}$ telle que $\sum \lambda_{n'_q} < \infty$. En partant de la valeur $x_n = 1$, la probabilité d'un saut de $X_n(t)$ pendant un intervalle de temps de durée τ est $1 - \exp(\lambda'_n \tau)$. La convergence de $\sum \lambda'_{n'_q}$, entraînant celle de $\sum [1 - \exp(\lambda'_{n'_q} \tau)]$, il résulte du lemme de Borel, qu'il n'y a presque sûrement qu'un nombre fini de fonctions $X_{n'_q}(t)$ qui changent de valeurs pendant l'intervalle de temps considéré. Il y en a donc une infinité qui conservent la valeur 1, et $N(t)$ reste infini. Donc : *si la suite $\mathcal{S}$ existe, l'état $\{ x_n \}$ n'est pas un état possible pour le processus de Blackwell.*

7. Un théorème sur les probabilités de transition. — Théorème. — *Si les fonctions* $P_{h,k}(t)$ $(h, k = 1, 2, \ldots)$ *sont mesurables et vérifient les conditions* (3) *et* (4), *chacune d'elles, si elle n'est pas identiquement nulle, est constamment positive dans* $(0, \infty)$ (mais non à l'origine, si $h \neq k$).

Quoiqu'il s'agisse d'un théorème purement analytique, rien ne nous empêche d'utiliser le fait que les fonctions $P_{h,k}(t)$ peuvent être considérées comme les probabilités de transition d'un processus M. S.; comme elles sont mesurables, ce processus est d'un des types I à 6. Le théorème est alors presque évident pour les types I à 4, comme je l'ai montré dans [8]. J'ai aussi montré que, s'il est vrai pour le type 5, il s'étend aussi au type 6; cela résulte de ce que, pour ce dernier type, chaque $P_{h,k}(t)$ est, à un seul facteur constant près, une probabilité de transition d'un processus d'un des types I à 5. Mais la démonstration du théorème pour le type 5 est moins simple que je ne le pensais. Elle va être indiquée sous une forme qui s'applique aux cinq premiers types, pour lesquels $P_{h,h}(+0) = 1$. Nous pourrons donc appliquer le théorème énoncé à la fin du n° 3.

De $P_{h,h}(+0)=1$, on déduit que, quel que soit $t \geqq 0$, $P_{h,h}\left(\frac{t}{n}\right)$ est positif pour n assez grand. On déduit alors de (3) que

$$P_{h,h}(t) \geqq \left[P_{h,h}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n > 0, \tag{19}$$

Donc :

Lemme 1. — *Les fonctions $P_{h,h}(t)$ étant toujours positives, le théorème énoncé est vrai pour ces fonctions.*

Supposons maintenant $h \neq k$. Tenant encore compte de (3), on a

$$P_{h,k}(t) \geqq P_{h,k}(\theta)P_{k,k}(t-\theta) \qquad (0<\theta<t). \tag{20}$$

Le second facteur étant positif, il suffit, pour démontrer le théorème énoncé, de démontrer que :

Lemme 2. — *Les hypothèses étant les mêmes que pour le théorème, si de plus les $P_{h,h}(+0)$ ont la valeur 1, et si une fonction $P_{h,k}(t)$ est positive au moins pour une valeur τ de t, elle l'est aussi pour des valeurs θ arbitrairement petites.*

Les $P_{h,k}(t)$ sont les probabilités de transition d'un processus s. M. S. d'un des types 1 à 5. Soit $X(t)$ la f. a. particulière, dépendant de ce processus, définie par la condition initiale $X(0)=x_h$. L'ensemble e_l, défini par $X(t)=x_l$, étant mesurable, désignons par $\Phi_l(t)$ la mesure de $(0, t)\cap e_l$, et par T la borne inférieure de t dans $e_k\cap(0,\infty)$. Elle appartient à la fermeture $\bar{e}_k$ de e_k. Si A désigne l'éventualité « e_k n'est pas vide et $T\leqq\tau$ », on a

$$\alpha = \Pr(A) \geqq P_{h,k}(\tau) > 0,$$

et

$$\sum_1^\infty E\{\Phi_l(T)\mid A\} = E(T\mid A) \leqq \tau. \tag{21}$$

Cette série étant convergente, on peut, quel que soit $t>0$, définir un entier $n=n(t)>k$ tel que

$$E\left\{\sum_{n+1}^\infty \Phi_l(T)\mid A\right\} = \sum_{n+1}^\infty E\{\Phi_l(T)\mid A\} < \frac{t}{2}. \tag{22}$$

Soit e' la réunion des ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Prenons comme nouveau paramètre, sur e', la somme

$$t' = \sum_{1}^{n} \Phi_l(t) = \text{mes}\,\{ e' \cap (0, t) \}.$$

Sur cet ensemble e', $X(t)$ devient une fonction de t', soit $H(t')$, qui dépend d'un processus s. M. S. En effet, à chaque instant t_0, si $X(t_0)$ est connu, le passé n'a plus d'influence sur l'avenir; il n'en a donc pas sur l'accroissement de t', ni sur $X(t)$, ni sur la relation entre ces deux fonctions aléatoires de $t - t_0$, ce qui démontre le résultat énoncé.

La fonction $H(t')$, n'ayant que les n valeurs essentielles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appartient au type fini. Si donc les états fictifs éliminables ont été supprimés, chacun des n ensembles $e'_h \cap (0, \tau')$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ qui correspondent sur l'axe des t' aux ensembles $e_h \cap (0, \tau)$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles. Il n'y a donc, avant la valeur T' de t' qui correspond à la valeur T de t, qu'un nombre fini de sauts de $H(t')$. Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de successions des états $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui puissent précéder la première réalisation de l'état x_k. Désignons ces successions par B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, et par β_ν la probabilité de B_ν dans l'hypothèse A. Le premier membre de l'inégalité (22) étant une moyenne pondérée, avec les poids β_ν, des quantités

$$E\left\{ \sum_{n+1}^{\infty} \Phi_l(T) \mid A \cap B_\nu \right\},$$

il existe au moins une valeur p de ν pour laquelle

$$\beta_p > 0, \qquad E\left\{ \sum_{n+1}^{\infty} \Phi_l(T) \mid A \cap B_p \right\} = E\,\{ T - T' \mid A \cap B_\nu \} < \frac{t}{2},$$

et par suite

$$\Pr\{ A \cap B_p \} = \alpha\beta_p > 0, \tag{23}$$

$$\Pr\left\{ T - T' < \frac{t}{2} \,\middle|\, A \cap B_p \right\} > 0. \tag{24}$$

D'autre part, la durée de la succession B_p est la somme d'un nombre fini de termes indépendants $U_{l,\rho}$ [$U_{l,1}$, $U_{l,2}$, ..., étant les longueurs des différents intervalles successifs pendant lesquels $H(t') = x_l$] ([5]).

([5]) On peut même supposer que la succession B_p ne comprend chacun des états x_l ($l \leq n$ et $\neq k$) qu'une fois au plus. Si en effet, dans une succession B_p, un même

Chacun de ces termes pouvant, avec une probabilité positive, être arbitrairement petit, il en est de même de leur somme. Donc

$$\mathrm{Pr}\left\{ \mathrm{T}' < \frac{t}{2} \,\middle|\, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p \right\} > 0. \tag{25}$$

La conclusion $\mathrm{Pr}\{\mathrm{T} < t\} > 0$ serait maintenant évidente si T' et $\mathrm{T} - \mathrm{T}'$ étaient indépendants. Pour montrer qu'elle est bien exacte, nous allons montrer que, dans l'hypothèse $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p$, il y a entre ces deux variables une corrélation positive, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pr}\left\{ \mathrm{T}' < \frac{t}{2},\ \mathrm{T} - \mathrm{T}' < \frac{t}{2} \,\middle|\, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p \right\} \\ &\geqq \mathrm{Pr}\left\{ \mathrm{T}' < \frac{t}{2} \,\middle|\, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p \right\} \mathrm{Pr}\left\{ \mathrm{T} - \mathrm{T}' < \frac{t}{2} \,\middle|\, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p \right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Nous poserons à cet effet

$$t - t' = \sum_1^n \sum_1^n v_{l,l'} = \sum_1^n v_l + w = v + w \qquad (v_l = v_{l,l}), \tag{27}$$

$v_{l,l'}$ étant la longueur totale des intervalles intérieurs à $(0, t)$, dans chacun desquels $\sum_1^n \Phi_l(u)$ a une valeur constante u', et pour lesquels

$$\mathrm{H}(u' - 0) = l, \qquad \mathrm{H}(u' + 0) = l'.$$

Les majuscules V et W remplaceront v et w dans le cas où $t = \mathrm{T}$, donc $t' = \mathrm{T}'$.

On sait que chaque terme v_l, considéré comme fonction de $t_l = \Phi_l(t)$, est une f. a. à accroissements indépendants, stationnaires, et non négatifs. Il en résulte que, en posant $\mathrm{T}_l = \Phi_l(\mathrm{T})$, on a, pour tout $\tau_l > 0$,

$$\mathrm{Pr}\{ \mathrm{V}_l < v \mid \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p \cap (\mathrm{T}_l < \tau_l) \} \geqq \mathrm{Pr}\{ \mathrm{V}_l < v \mid \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_p \}, \tag{28}$$

c'est-à-dire que, V'_l et V''_l dépendant des deux lois conditionnelles considérées par les deux membres, on peut définir la loi de V'_l par une formule de la forme

$$\mathrm{V}'_l \sim \mathrm{V}''_l - \mathrm{V}^*_l \qquad (\mathrm{V}^*_l \geqq 0), \tag{29}$$

état x_l était réalisé plusieurs fois, en supprimant tout ce qui sépare ces deux réalisations, on obtient une nouvelle succession à probabilité positive, et $\mathrm{T}' - \mathrm{T}$ ne peut qu'être diminué. Cette remarque, qui peut être utile dans des calculs pratiques, est inutile pour le théorème général.

où le signe $\sim$ indique l'équivalence en loi. D'autre part, d'après le théorème final du n° 3, pour chaque succession B_p, les $V_{l,l'}$ pour lesquels $l \neq l'$ sont indépendants du temps passé dans les états $x_l (l \leqq n)$, et il n'y a finalement aucune autre dépendance des $V_{l,l'}$ entre eux ou par rapport aux $T_l (l \leqq n)$, donc à leur somme T', que celle qui existe, pour chaque $l \leqq n$, entre T_l et V_l.

Introduisons maintenant la condition $T' < \frac{t}{2}$, qui peut être remplacée par les n conditions successives

$$T_1 < \frac{t}{2}, \qquad T_2 < \frac{t}{2} - T_1, \qquad \ldots, \qquad T_n < \frac{t}{2} - \sum_1^{n-1} T_l,$$

qui sont de la forme $T_l < \tau_l$. Les nombres τ_l sont ici aléatoires, mais chacun est indépendant de T_l. La formule (28) subsiste donc, puisque son premier membre est une moyenne des probabilités relatives aux différentes valeurs possibles de τ_l, et la formule (29) subsiste aussi. L'effet de la condition $T' < \frac{t}{2}$ est donc finalement de diminuer $T - T'_n$ de la quantité

$$\sum_1^n V_l^\star \geqq 0,$$

de sorte que

$$\Pr\left\{ T - T' < \frac{t}{2} \;\middle|\; A \cap B_p \cap \left(T' < \frac{t}{2} \right) \right\} \geqq \Pr\left\{ T - T' < \frac{t}{2} \;\middle|\; B \cap B_p \right\},$$

ce qui équivaut à la formule (26), qu'il s'agissait de démontrer.

Il en résulte évidemment que

$$\Pr\{ T < t \} \geqq \alpha\beta_p \Pr\{ T < t \mid A \cap B_p \} > 0. \tag{30}$$

L'étape suivante du raisonnement va consister à montrer que, presque sûrement, la fonction $\Phi_k(t)$ est constamment croissante dans e_k, de sorte que $T < t$ entraîne, avec la même probabilité, $\Phi_k(t) > 0$, et que la formule (30) entraîne

$$\Pr\{ \Phi_k(t) > 0 \} > 0. \tag{31}$$

Cela résulte d'une application, déjà indiquée dans [8], (n° III, 2, 1°), d'un théorème connu de Lebesgue : sauf sur un ensemble de mesure nulle, $\Phi_k(t)$ admet une dérivée [donc une dérivée à droite $\varphi_k(t)$] égale à 1 dans e_k et nulle en dehors de cet ensemble. D'ailleurs, si à un instant t on sait que $X(t) = x_k$, le processus étant s. M. S., quels que soient les renseignements obtenus au sujet du passé, la probabilité $\Pr\{\varphi_k(t) = 1\}$ a une valeur α bien déterminée, indépendante de t, et manifestement égale à 1 [puisqu'il faut que des expériences, dont chacune est indépendante des précédentes, aboutissent à ce que $\varphi_k(t) = 1$ presque partout sur e_k]. En partant d'un point de e_k, il faut donc une infinité non dénombrable d'expériences, au cours desquelles $\Phi_k(t)$ croît constamment, pour qu'il puisse arriver que cette fonction cesse de croître, et en particulier pour qu'on sorte de e_k pendant un temps fini. La formule (31) est ainsi établie ([6]).

Appliquons enfin le théorème de Fubini, d'après lequel la probabilité qu'un point u choisi au hasard dans $(0, t)$ appartienne à e_k a les deux expressions égales

$$E\{\Phi_k(t)\} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t}\int_0^t P_{h,k}(u)\,du.$$

La première étant positive, d'après la formule (28), il en est de même de la seconde. Il existe donc des $u \in (0, t)$ où $P_{h,k}(u) > 0$.

C. Q. F. D. ([7]).

([6]) Il résulte de ce raisonnement que e_k n'a pas de points isolés. Comme nous sommes dans le cas dénombrable, il est presque sûr qu'aucun des e_k n'a pas de points isolés. Au contraire, dans le cas du mouvement brownien, quoique le même résultat s'applique, pour chaque valeur donnée de x, à l'ensemble e_x défini par $X(t) = x$, il y a presque sûrement des valeurs de x pour lesquelles cet ensemble a des points isolés (notamment les valeurs des maxima et minima relatifs).

Une autre méthode pour montrer que $\Phi_k(t)$ est croissant sur e_k repose sur le fait, facile à démontrer, que T dépend d'une loi continue. En modifiant la définition de $X(t)$ de manière que T, et plus généralement tout point d'entrée dans $\overline{e}_k$, appartienne à e_k, on obtient donc une fonction équivalente, ayant les mêmes probabilités de transition. Alors $\alpha = 1$ donne $\Pr\{\Phi_k(T) = 1\} = 1$.

Il suffit, dans ce raisonnement, de considérer une fonction $X_k(t)$ équivalente à $X(t)$, et qui peut dépendre de k. Mais on montre aisément qu'aucun point n'est à la fois un point d'entrée dans deux ensembles différents $\overline{e}_k$ et $\overline{e}_{k'}$. On peut donc, sans que ce soit une restriction pour les $P_{h,k}(t)$, supposer que, quel que soit k, les points d'entrée dans $\overline{e}_k$ (ou bien les points de sortie, mais pas les deux à la fois) appartiennent à e_k.

([7]) Le 18 août 1958, donc depuis que ce travail a été rédigé, K. L. Chung a exposé au Congrès international d'Édimbourg une démonstration remarquablement simple du même théorème, qu'il a obtenue en simplifiant une démonstration d'Austin. Elle repose sur l'introduction du plus grand nombre $u_{h,k}$ tel que $P_{h,k}(t) = 0$ pour tout $t \in (0, u_{h,k})$. Il s'agit de montrer qu'il ne peut pas être à la fois > 0 et $< \infty$. Mais, au lieu de partir de $u_{h,k} < \infty$ pour montrer que $u_{h,k} = 0$, Chung part de $0 < u_{h,k} < \infty$ pour montrer que

BIBLIOGRAPHIE.

[1] K. L. Chung, *On a basic property of Markov chains* (sous presse).

[2] R. L. Dobrusin, *An exemple of a countable Markov process all states of which are instantaneous* (*Teoriya Veroyatnostev. i ee Primeneniya*, t. 1, 1956, p. 481-485).

[3] J. L. Doob, *Topics in the theory of Markov chains* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1942, p. 37-64).

[4] J. L. Doob, *Markoff chains. Denumerable case* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 58, 1945, p. 455-473).

[5] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley and Sons, 1953, 654 pages.

[6] E. B. Dynkin et A. A. Iouchkevitch, *Teoriya veroyatnostei* (*Théorie des probabilités*), t. 1, 1956, p. 149.

[7] W. Feller et H. P. Mc Kean Jr, *A diffusion equivalent to a countable Markov chain* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, Washington, t. 42, 1956, p. 351-354).

[8] P. Lévy, *Systèmes markoviens et stationnaires; cas dénombrable*, (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 327-381).

[9] P. Lévy, *Complément à l'étude des processus de Markoff* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 69, 1952, p. 203-212).

[10] P. Lévy, *Remarques sur le processus de W. Feller el H. P. Mac Kean* (*C. R., Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1772-1774).

[11] P. Lévy, *Processus strictement markoviens* (doit paraître dans *Compositio mathematica*).

---

dans ce cas, si $X(o) = x_h$, $X(t)$ ne peut jamais prendre la valeur x_k, c'est-à-dire qu'on aboutit à une contradiction.

Soit $Z_k(t)$ la valeur de $u_{h,k}$ pour $h = X(t)$. A tout instant t, la somme $t + Z_k(t)$ borne inférieurement les racines possibles de $X(\tau) = x_k$ dans (t, ∞). Elle ne peut pas décroître, quand t croît. Il en résulte que $Z_k(t)$ a presque partout une dérivée à droite $Z'_k(t)$ bien définie et $\geqq -1$. Or, d'après une propriété que nous avons nous-même utilisée, sur chaque e_l, les points t qui sont isolés à droite forment presque sûrement un ensemble de mesure nulle. Comme cela est vrai quel que soit l, pour presque tous les t, il existe des $\Delta t > o$ et arbitrairement petits tels que $X(t + \Delta t) = X(t)$; donc $Z_k(t + \Delta t) = Z_k(t)$. Donc $Z'_k(t)$ est presque partout nul et, si $X(o) = x_h$, $Z_k(t)$ a une valeur constante $c = u_{h,k}$. Si $c > o$, aucun intervalle $(t, t + c)$ ne peut donc contenir de racines de $X(t) = x_k$, c'est-à-dire que $c > o$ entraîne $c = \infty$, C. Q. F. D.

Note finale. — Il est entendu que les quatre dernières lignes du n° 3 (p. 12) ne constituent qu'une esquisse de démonstration. En outre le théorème qu'il s'agit de démontrer à cet endroit ne suffit pas à justifier le raisonnement fait, p. 21, lignes 3 à 7. Je reste convaincu qu'un théorème préliminaire voisin de celui de la p. 12 doit permettre de donner une base solide aux raisonnements du n° 7. Mais, la démonstration due à Austin et Chung étant en tout cas bien plus simple, je ne pense pas revenir sur cette question.