

ANNALES DE L'I. H. P.

A. PAPAPETROU

**Le problème du mouvement dans la Relativité générale
et dans la théorie du champ unifié d'Einstein**

Annales de l'I. H. P., tome 15, n° 3 (1957), p. 173-203

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1957__15_3_173_0

© Gauthier-Villars, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le problème du mouvement dans la Relativité générale et dans la théorie du champ unifié d'Einstein

par

A. PAPAPETROU,

Forschungsinstitut für Mathematik der deutschen Akademie
der Wissenschaften zu Berlin.

Einstein a introduit la loi du mouvement géodésique, dans la Relativité générale d'abord comme un postulat indépendant. Or évidemment cette loi ne peut être utilisée que pour le mouvement des particules d'épreuve. La discussion du problème du mouvement plus général a conduit à une découverte fondamentale : En relativité générale la loi du mouvement est une conséquence immédiate des équations du champ et, par conséquent, elle doit être déduite de ces équations ⁽¹⁾.

Nous ne possédons pas la solution de ce problème dans sa forme générale. Seulement deux cas particuliers ont été discutés jusqu'à présent. C'est en premier lieu le problème astronomique — corps à petites vitesses produisant un champ gravifique faible — qui a été traité par une méthode d'approximation et résolu en seconde approximation. Comme second problème on a considéré le mouvement des particules d'épreuve et confirmé par ce calcul la loi géodésique. On a aussi récemment essayé d'utiliser les méthodes de calcul développées pour ces deux problèmes dans la théorie du champ unifié à $g_{\mu\nu}$ non symétrique.

Dans ce qui suit on trouve d'abord la discussion de la condition générale pour que dans une théorie du champ la loi du mouvement se

(1) EINSTEIN-GROMMER, *Sitz. Ber. Berlin. Akad.*, t. 2, 1927.

déduit des équations du champ. Les chapitres suivants contiennent une représentation critique des méthodes développées pour la discussion du problème du mouvement, ainsi que des résultats obtenus.

I.

CONDITION GÉNÉRALE POUR QUE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT SE DÉDUISE DES ÉQUATIONS DU CHAMP.

D'abord quelques considérations élémentaires. Dans la Mécanique classique du point matériel, l'équation fondamentale de la dynamique ou, comme nous dirons brièvement dans la suite, *l'équation du mouvement* s'écrit

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

\vec{P} étant l'impulsion et \vec{F} la force exercée sur le corps par les autres corps. L'interprétation plus profonde de cette équation est qu'elle exprime *la conservation de l'impulsion* : \vec{F} est la quantité d'impulsion transférée au corps considéré par unité de temps. On le voit plus directement en considérant un système de corps isolé : de la relation $\Sigma \vec{F} = 0$, qui est valable dans ce cas, il s'ensuit

$$\frac{d}{dt} \Sigma \vec{P} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \vec{P} = \text{const.}$$

En Relativité restreinte nous décrivons chaque espèce de forces par la théorie du champ de forces correspondant. Exemple type : Théorie de Maxwell pour le champ électromagnétique. Dans la théorie du champ on introduit le tenseur des tensions à quatre dimensions. C'est un tenseur symétrique, $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$, qui réunit : les tensions ordinaires (à trois dimensions), la densité d'impulsion et la densité d'énergie du champ. Dans le vide, c'est-à-dire dans une région de l'espace, où il n'y a pas de sources du champ, nous avons la relation (sans distinction entre indices covariants et contravariants, qui n'est pas essentielle en Relativité restreinte)

$$t_{\mu\nu, \nu} = 0.$$

Cette relation exprime, sous une forme différentielle, la conservation

de l'impulsion et de l'énergie du champ : il n'y a pas d'autre impulsion ou énergie dans cette région. Dans les régions de l'espace contenant des sources du champ nous aurons au contraire, en général

$$t_{\mu\nu,\nu} \equiv f_{\mu} \neq 0.$$

A cause des équations du champ le vecteur f_{μ} se décompose en produit de deux facteurs tensoriels, l'un étant l'intensité du champ et l'autre la densité des sources. Par exemple, dans la théorie de Maxwell,

$$f_{\mu} = F_{\mu\nu} j^{\nu}.$$

f_{μ} n'est autre que la densité de force agissant sur la matière constituant les sources du champ. L'équation du mouvement d'un corps s'écrit (pour quatre dimensions)

$$(1) \quad \frac{dP_{\mu}}{dt} = F_{\mu} = \int f_{\mu} dV.$$

On peut, au moins dans un sens phénoménologique, décrire la structure interne de la matière au moyen du tenseur de la matière $T_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$$

($T_{\mu\nu} = 0$ dans le vide). Pour la somme $T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$ nous avons la *loi de conservation d'impulsion et d'énergie totale*,

$$(2) \quad (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})_{,\nu} = 0,$$

qui est valable dans tout l'espace. L'impulsion P_{μ} d'un corps matériel, qui n'est pas en contact avec des autres corps ($T_{\mu\nu} = 0$ dans son voisinage), est donnée par la formule

$$P_{\mu} = \int T_{\mu\lambda} dV,$$

l'intégration étant étendue sur le volume occupé par le corps considéré (pour $t = \text{const.}$). Alors il est facile de montrer que l'équation du mouvement (1) peut être déduite de l'équation (2) par intégration de cette dernière sur le volume du corps. C'est dire que *l'équation (2) contient (1)*. Pour exprimer ce fait nous désignerons l'équation (2) dans la suite comme *l'équation dynamique de la Relativité restreinte*.

En général, il peut exister aussi, dans la théorie d'un champ, une loi de conservation pour les sources du champ. Par exemple, dans la théorie de Maxwell :

$$j^{\mu}_{,\mu} = 0.$$

Les équations de Maxwell étant

$$F_{\mu\nu, \nu} = j_{\mu} \quad (\text{avec } F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}),$$

on voit que cette loi de conservation *est automatiquement satisfaite, quand les équations du champ sont satisfaites*. Mais la loi de conservation (2) sera, en Relativité restreinte, tout à fait indépendante des équations d'un champ quelconque. Ceci est évident dans le cas du champ électromagnétique, car les quantités $T_{\mu\nu}$ ne sont aucunement liées aux quantités décrivant ce champ. On pourrait s'attendre à une dépendance directe entre (2) et les équations du champ seulement dans le cas d'une théorie tensorielle du champ gravifique (le tenseur $T_{\mu\nu}$ étant la source du champ). Mais nous ne connaissons en Relativité restreinte aucune théorie de la gravitation conduisant à une loi de conservation pour $T_{\mu\nu}$, qui serait satisfaite automatiquement quand les équations du champ sont satisfaites.

Une situation tout à fait différente se présente en Relativité générale. Il y a dans cette théorie une loi de conservation pour les sources du champ $T_{\mu\nu}$,

$$(3) \quad \mathfrak{T}_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (\mathfrak{T}_{\mu}{}^{\nu} = T_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})$$

qui est une conséquence immédiate des équations du champ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Cette loi (3) est équivalente à la loi (2). On peut en effet montrer qu'il est possible de mettre (3) sous la forme (2). Mais ici la forme (3) est avantageuse : les quantités $t_{\mu\nu}$ du champ gravifique ne forment pas un tenseur pour des transformations de coordonnées générales. Il convient alors de désigner (3) comme *l'équation dynamique de la Relativité générale*. Les équations du mouvement étant dérivables de l'équation dynamique, il s'ensuit qu'en Relativité générale on pourra déduire les équations du mouvement des équations du champ. C'est le résultat fondamental d'Einstein, présenté ici d'un point de vue, que je crois être plus directement physique.

Nous pouvons aujourd'hui formuler avec précision la raison pour laquelle ce fait nouveau se présente en Relativité générale. Dans le formalisme variationnel de cette théorie on part d'une fonction de Lagrange qui (est covariante et) contient seulement les quantités

décrivant le champ ($g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées) :

$$\mathcal{L}_{gr} = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \equiv \mathcal{L}_{gr}(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu, \rho}).$$

La première des identités fondamentales correspondant à \mathcal{L}_{gr} a la forme

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma} \right)_{,\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma, \mu} = 0,$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\rho\sigma}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\rho\sigma, \alpha}} \right)_{,\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\rho\sigma}}.$$

Or, en tenant compte des équations du champ

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{gr}}{\partial g^{\rho\sigma}} \equiv R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} R = \kappa T_{\rho\sigma},$$

on voit que cette identité n'est autre chose que l'équation dynamique (3) ⁽²⁾. On devra ne pas oublier que l'équation du mouvement déduite de l'équation dynamique (3) est valable pour des corps introduits dans la théorie à l'aide du tenseur phénoménologique $T_{\rho\sigma}$. *Toutes les connaissances, que nous possédons aujourd'hui sur le problème du mouvement, se rattachent à ce cas spécial.* Dans le cas, où il y aurait des solutions des équations du champ homogènes ($T_{\rho\sigma} = 0$ dans tout l'espace), l'équation du mouvement des corps correspondants devrait être déduite de ces équations homogènes et l'équation dynamique n'aurait aucun rôle.

Ce résultat se généralise immédiatement. On pourra déduire les équations du mouvement des équations du champ non seulement dans le cas de la théorie einsteinienne du champ gravifique pur, mais aussi dans une théorie combinée de plusieurs champs (unifiée ou non), à condition que :

- 1° l'un de ces champs soit la gravitation (traité d'après la Relativité générale); et
- 2° les équations des autres champs seront aussi formulées dans

(²) Il est presque évident que dans le cas, où la fonction de Lagrange ne contient que les quantités décrivant le champ, les équations du champ seront nécessairement non linéaires. Mais cette dernière propriété seule ne suffit pas pour que l'équation du mouvement soit déductible des équations du champ. Exemple : Théorie de Born-Infeld pour le champ électromagnétique pur (Relativité restreinte). Les équations du champ sont non linéaires, mais la fonction \mathcal{L} de cette théorie contient, à côté de $\varphi_{,\lambda}$, le tenseur métrique de l'espace de Minkowski.

l'espace riemannien (c'est-à-dire avec $g_{\mu\nu}$), de sorte que la fonction de Lagrange totale ne contiendra que $g_{\mu\nu}$ et les potentiels des autres champs considérés.

Prenons comme exemple la théorie « naïve » (non unifiée) de gravitation et électromagnétisme résultant de la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gr} + \kappa \mathcal{L}_{em};$$

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\varphi_{\nu,\mu} - \varphi_{\mu,\nu})(\varphi_{\beta,\alpha} - \varphi_{\alpha,\beta}).$$

L'identité fondamentale correspondant à la forme

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\sigma}} g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\nu}} \varphi_{\mu} \right)_{,\nu} + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma}{}_{,\mu} + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\rho}} \varphi_{\rho,\mu} = 0.$$

En tenant compte des équations du champ

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\rho\sigma}} \equiv R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} R - \kappa (T_{Maxw.})_{\rho\sigma} = \kappa T_{\rho\sigma},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\rho}} \equiv \kappa (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta})_{,\nu} = \kappa j^{\mu}$$

($F_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta,\alpha} - \varphi_{\alpha,\beta}$), on peut mettre cette identité sous la forme

$$\mathfrak{C}_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} + F_{\mu\nu} j^{\nu} = 0,$$

qui est l'équation dynamique de la théorie considérée. De cette relation on déduira les équations du mouvement des corps chargés.

II.

LE PROBLÈME ASTRONOMIQUE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

Revenons à notre conclusion : En Relativité générale l'équation dynamique est une conséquence immédiate des équations du champ. Il s'ensuit que, les équations du mouvement étant en tous cas contenues dans l'équation dynamique, on pourra en Relativité générale les déduire des équations du champ. D'après ce point de vue, on devra encore s'attendre à ce que dans les calculs nécessaires à la déduction des équations du mouvement la relation exprimant l'équation dynamique joue un rôle particulièrement important. Cette conclusion a été réellement confirmée. Mais pour des raisons évidentes ceci a été possible seulement dans l'une des deux méthodes de calcul que nous possédons à présent.

C'est la méthode de Fock ⁽³⁾, qui considère aussi l'intérieur de corps en mouvement, où $T_{\mu\nu} \neq 0$. La méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann ⁽¹⁾ considère seulement l'espace entourant les corps en mouvement, où $T_{\mu\nu} = 0$: Dans cette région de l'espace, l'équation dynamique sera satisfaite identiquement et par conséquent ne peut jouer aucun rôle.

Dans la suite je m'efforcerai de montrer l'importance de l'équation dynamique pour la solution du problème du mouvement *astronomique* traité d'après la méthode de Fock. Il sera utile de commencer avec une énumération des différentes hypothèses caractérisant ce problème :

1° Le champ gravifique est faible,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu};$$

$\eta_{\mu\nu}$, tenseur métrique de Minkowski; $h_{\mu\nu}$, très petit (en valeur absolue) par rapport à $\eta_{\mu\nu}$. Dans la méthode de Fock, cette hypothèse est valable dans tout l'espace. Mais cela ne constitue pas une restriction supplémentaire, parce que les équations du mouvement résultant de ce calcul sont valables seulement pour des corps macroscopiques (astronomiques).

2° Les vitesses de tous les corps sont petites (comparées à celle de la lumière),

$$v \ll c.$$

Ces deux hypothèses prises ensemble permettent de développer $g_{\mu\nu}$ en série par rapport à un paramètre petit λ de l'ordre de $\frac{v}{c}$ (formellement $\lambda = \frac{1}{c}$) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + g_1^{\mu\nu} + g_2^{\mu\nu} + \dots$$

On aura de plus (indices latins : $k, l, \dots = 1, 2, 3$)

$$g_2^{\mu\nu,0} \sim g_2^{\mu\nu,k}.$$

3° Dans la méthode de Fock on introduit des expressions explicites pour les composantes $T_{\mu\nu}$. Il s'agit des séries, dont les premiers termes ont la forme habituelle (en Relativité restreinte) pour un fluide parfait

⁽³⁾ *J. Phys. U. S. S. R.*, t. 1, 1939, p. 81.

⁽¹⁾ *Ann. Math.*, t. 39, 1938, p. 65; voir aussi EINSTEIN-INFELD, *Canad. J. Math.*, t. 1, 1949, p. 209.

à vitesse petite :

$$T^{00} = \rho c^2 + \dots, \quad T^{0k} = \rho c v^k + \dots, \quad T^{kl} = \rho v^k v^l + p \delta^{kl} + \dots$$

Cette forme de départ est aussi utilisée dans la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann, mais sous une forme explicite différente [voir équ. (5)].

4° Pour restreindre suffisamment les systèmes de coordonnées permis il est nécessaire d'introduire une *condition de coordonnées*. Une telle condition a été introduite pour la première fois dans la discussion de la forme approchée des équations du champ par Einstein. Posant

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \quad h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} = \gamma_{\mu\nu},$$

on trouve comme équation du champ en première approximation

$$\frac{1}{2} \square \gamma_{\mu\nu} + \dots + \dots + \dots = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Or Hilbert a remarqué qu'il est toujours possible d'introduire un système de coordonnées tel que la condition

$$\eta^{\rho\sigma} \gamma_{\mu\rho,\sigma} = 0$$

soit satisfaite; mais alors les trois derniers termes du membre gauche s'annulent et l'équation du champ ne contient que l'opérateur de d'Alembert :

$$(4) \quad \frac{1}{2} \square \gamma_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Dans la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann on introduit comme condition de coordonnées celle de Hilbert, simplifiée d'après l'hypothèse 2°. Dans la méthode de Fock on utilise la condition « isotherme » :

$$g^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0;$$

mais cette condition aussi est identique à celle de Hilbert en première approximation.

En remarquant que $\kappa T_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho + \dots$ commence avec un terme du second ordre, $\kappa T_{0k} = \frac{8\pi G}{c^3} \rho v^k + \dots$ du troisième et $\kappa T_{kl} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho v^k v^l + \dots$

du quatrième ordre, on déduit de l'équation approchée (4) que

$$(5) \quad \gamma_{00} = \gamma_{00} + \dots, \quad \gamma_{0k} = \gamma_{0k} + \dots, \quad \gamma_{kl} = \gamma_{kl} + \dots$$

Einstein-Infeld-Hoffmann ne font aucun autre usage de l'hypothèse 3°, mais ils considèrent la forme (5) de $\gamma_{\mu\nu}$ comme une propriété fondamentale de leur méthode. On peut dire qu'ils remplacent l'hypothèse 3° par celle exprimée par (5).

Une dernière hypothèse a été introduite par Einstein-Infeld-Hoffmann :

5° γ_{00} et γ_{kl} contiennent seulement des termes d'ordre pair, γ_{0k} seulement d'ordre impair. Par analogie avec le champ électromagnétique cette hypothèse signifierait que la solution du problème du mouvement pour le cas gravifique calculée de cette manière ne contiendrait pas d'effets de radiation. Cette hypothèse jouera un rôle essentiel quand on procédera à la dérivation des équations du mouvement à une approximation plus élevée que la deuxième. Elle est importante pour la discussion du problème de la radiation gravifique, laquelle cependant n'a encore conduit à aucun résultat définitif.

Remarquons encore que pour la dérivation des équations du mouvement en première approximation on a besoin, dans la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann (où l'on ne peut pas faire usage de l'équation dynamique), de calculer $g_{\mu\nu}$ jusqu'aux termes du quatrième ordre; et pour la seconde approximation on doit calculer $g_{\mu\nu}$ avec des termes du sixième ordre.

Nous pouvons maintenant indiquer le rôle de l'équation dynamique dans ce problème. L'utilisation de cette équation a pour conséquence une simplification essentielle du calcul : pour les équations du mouvement de première approximation il suffit de calculer $g_{\mu\nu}$ avec des termes du second ordre, et pour la deuxième approximation avec des termes du quatrième ordre. Cette simplification ne se trouve pas dans les calculs de Fock et de ses collaborateurs, qui n'ont pas fait un usage systématique de l'équation dynamique (5).

Mais il y a aussi une autre conséquence encore plus remarquable de

(5) Fock a calculé l'équation du mouvement en première approximation. Le calcul pour la deuxième approximation a été donné par PETROVA, *Žurn. eksper. teoret. fiziki*, t. 19, 1949, p. 989.

l'équation dynamique : on peut déduire l'équation du mouvement de première approximation par un calcul extrêmement simple *en faisant usage des hypothèses 1^o, 2^o, 3^o seulement*. C'est-à-dire que pour cette approximation l'introduction d'une condition de coordonnées n'est pas indispensable. L'équation du mouvement résultant de ce calcul est valable pour un fluide quelconque,

$$T^{kl} = \rho v^k v^l + p^{kl} + \dots,$$

et est identique à celle de la théorie gravifique newtonienne :

$$\rho \frac{dv^k}{dt} + p^{k,l} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

où

$$\Delta \varphi = -4\pi G \rho \quad \text{et} \quad \rho = \text{const.}$$

Le fait que pour la première approximation on n'ait pas besoin d'une condition de coordonnées est un cas particulier d'une conclusion plus générale, à laquelle on arrive facilement à l'aide d'un changement de coordonnées. Elle est la suivante : pour la déduction de l'équation du mouvement à une approximation donnée, il suffit d'imposer la condition de coordonnées seulement pour les termes de $g_{\mu\nu}$ nécessaires dans l'approximation précédente. C'est-à-dire que pour la seconde approximation la condition de coordonnées est en réalité nécessaire seulement pour les termes de $g_{\mu\nu}$ du deuxième ordre. Ce résultat explique aussi le fait que les méthodes de Einstein-Infeld-Hoffmann et de Fock conduisent aux mêmes équations de deuxième approximation, bien qu'on ait fait usage de conditions de coordonnées différentes : ces conditions sont identiques à celles de Hilbert jusqu'aux termes du troisième ordre. On peut aussi énoncer ce résultat sous la forme suivante (Infeld) : les équations du mouvement en deuxième approximation, calculées d'après la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann, ne dépendent pas d'une condition de coordonnées. Mais il en est ainsi parce que l'hypothèse exprimée par les relations (5) est retenue et cette hypothèse est équivalente à la condition de Hilbert pour la première approximation. Par contre, si l'on introduit une condition de coordonnées tout à fait différente de celle de Hilbert, l'équation du mouvement en deuxième approximation ne sera plus identique à celle de Einstein-Infeld-Hoffmann.

C'est ce qu'a montré explicitement Haywood ⁽⁶⁾, en utilisant une condition de coordonnées de la forme

$$g^{\mu\nu, \nu} = 0.$$

L'équation du mouvement diffère alors de celle de Einstein-Infeld-Hoffmann par des termes du second ordre.

Les résultats indiqués sur l'importance de l'équation dynamique pour le problème astronomique sont contenus dans deux travaux publiés en 1951 ⁽⁷⁾. Plus récemment Infeld ⁽⁸⁾ a retrouvé indépendamment le rôle important de l'équation dynamique. Son calcul diffère du précédent en ce qu'il fait usage des fonctions δ de Dirac pour la description de la répartition des masses dans l'intérieur des corps. Mais ceci n'est possible que pour la première approximation, parce qu'il conduit à des pressions infinies. Ainsi dans la discussion de la deuxième approximation Infeld est obligé de laisser de côté les fonctions δ et de considérer des densités finies.

Enfin un résumé bref du développement plus récent du problème astronomique. Comme on l'avait déjà attendu, la méthode de Fock s'est montrée plus efficace pour la discussion de ce problème que celle de Einstein-Infeld-Hoffmann. On a pu traiter avec la méthode de Fock le problème du mouvement des corps astronomiques possédant une rotation propre, ce qu'on ne peut pas faire avec la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann, au moins sous sa forme actuelle. A côté de quelques publications traitant le problème en première approximation, un travail récent de Haywood ⁽⁹⁾ dérive les équations du mouvement des corps tournant en deuxième approximation. Haywood considère deux cas : 1° corps formés d'un fluide parfait, par conséquent aplatis par la rotation, et 2° corps « solides », conservant leur forme sphérique (tenseur de pressions p_{kl} au lieu de $p \delta_{kl}$). Il y a des termes relativistes nouveaux en deuxième approximation, mais ils sont tous trop petits, pour qu'ils puissent conduire à quelque effet observable.

Une autre remarque intéressante. Nous avons déjà vu que l'introduction de la condition de Hilbert fait apparaître dans les équations du

⁽⁶⁾ *Proc. Phys. Soc.*, t. A 65, 1952, p. 170.

⁽⁷⁾ PAPAPETROU, *Proc. Phys. Soc.*, t. A 64, 1951, p. 57 et 302.

⁽⁸⁾ *Acta Phys. Polon.*, t. 13, 1954, p. 187.

⁽⁹⁾ *Proc. Phys. Soc.*, t. A 69, 1956, p. 2.

champ en première approximation l'opérateur de d'Alembert, c'est-à-dire l'opérateur caractéristique de la Relativité restreinte. Il s'ensuit qu'on doit attendre, en Relativité générale aussi, dans les systèmes de coordonnées introduits par cette condition, un effet de contraction de Lorentz : un corps consistant en un fluide parfait et possédant seulement une vitesse de translation ne sera pas sphérique en deuxième approximation. Par conséquent l'hypothèse de symétrie sphérique utilisée dans les calculs de Petrova et Papapetrou n'est pas justifiée. Ce point a été discuté récemment par Meister ⁽¹⁰⁾. Son résultat est que, en tenant compte de l'aplatissement résultant de cette contraction, on est conduit de nouveau à l'équation du mouvement de Einstein-Infeld-Hoffmann ; seulement les $g_{\mu\nu}$ seront changés, mais les termes nouveaux sont du quatrième ordre et par conséquent sans influence sur les conclusions physiques tirées de l'équation de Einstein-Infeld-Hoffmann.

Pour finir je citerai encore un travail très intéressant de Corinaldesi ⁽¹¹⁾, qui arrive à l'équation de Einstein-Infeld-Hoffmann par une méthode tout à fait différente. Corinaldesi travaille dans le cadre de la théorie quantique des champs. Il considère deux particules avec interaction gravifique, obéissant à des équations d'ondes scalaires. Le champ gravifique est traité d'après la méthode de Gupta. La déduction de l'équation du mouvement est effectuée à l'aide des méthodes de calcul développées dans la théorie quantique des champs. Le résultat est exactement l'équation de Einstein-Infeld-Hoffmann.

III.

LES PARTICULES D'ÉPREUVE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

Nous allons maintenant examiner le problème du mouvement des *particules d'épreuve* dans un champ de gravitation, c'est-à-dire la déduction des équations du mouvement des particules d'épreuve en partant des équations du champ gravifique. Nous allons voir que dans ce cas l'équation dynamique joue un rôle encore plus important que dans le problème astronomique : L'équation dynamique seule suffit

⁽¹⁰⁾ *Ann. d. Physik*, (6), t. 19, 1957, p. 268.

⁽¹¹⁾ *Proc. Phys. Soc.*, t. A 69, 1956, p. 189.

pour la déduction des équations du mouvement des particules d'épreuve, une utilisation des équations du champ détaillées n'étant pas indispensable.

Nous rappelons d'abord brièvement comment on arrive, dans la théorie des champs, à la notion de particule d'épreuve. Le point de départ est la remarque suivante : Il arrive souvent que dans un système de corps en interaction il y ait à côté des corps principaux d'autres corpuscules beaucoup plus petits. Un exemple : le Soleil, les planètes et un petit météorite. Il est évident qu'on peut, avec une très bonne approximation, déterminer le mouvement des corps principaux en négligeant l'existence des petits corpuscules, qu'on désigne par particules d'épreuve. Alors le problème du mouvement total se sépare en deux problèmes partiels, que nous aurons à résoudre successivement :

1° Déterminer le mouvement (et le champ gravifique) des corps principaux seuls. Nous supposons que ce problème a été déjà résolu, par exemple approximativement au moyen de la méthode développée pour le cas astronomique. Alors nous aurons comme second problème :

2° Déterminer le mouvement des particules d'épreuve dans le champ de gravitation connu des corps principaux. C'est ce second problème qu'on appelle le problème du mouvement des particules d'épreuve.

Ce problème a été résolu dans des conditions plus générales que le problème astronomique : Il n'est pas nécessaire de limiter la vitesse de la particule d'épreuve. La solution de ce problème coïncide avec ce qu'on aurait attendu : Les particules d'épreuve se meuvent sur les lignes géodésiques du champ gravifique des corps principaux. La solution a été obtenue par deux voies différentes. Infeld et Schild ⁽¹²⁾ ont suivi la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann et Papapetrou ⁽¹³⁾ la méthode de Fock combinée à l'équation dynamique. Il faut encore remarquer que les calculs sont faits sous l'hypothèse que la particule d'épreuve se meut dans le vide (c'est-à-dire en dehors des corps principaux). L'autre cas, qui intéresse la cosmologie et dans lequel la particule d'épreuve se meut dans un espace où $T_{\mu\nu} \neq 0$, a été laissé de côté. Nous reviendrons sur ce cas à la fin de cette discussion.

⁽¹²⁾ *Rev. Mod. Phys.*, t. 21, 1949, p. 408.

⁽¹³⁾ *Proc. Roy. Soc.*, t. A 209, 1951, p. 248.

Sur le calcul de Infeld-Schild nous nous bornerons à dire qu'ils ne considèrent que l'espace entourant la particule d'épreuve et non pas son intérieur. On simplifie la forme du champ principal au moyen d'un choix convenable du système de coordonnées et l'on calcule alors le champ de la particule d'épreuve en première approximation. On dérive l'équation du mouvement par intégration sur une surface entourant le corpuscule, d'après la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann. Comme on ne considère pas l'intérieur de la particule d'épreuve, il n'est pas question d'utiliser l'équation dynamique.

L'emploi de l'équation dynamique dans la seconde méthode permet d'éviter tout calcul sur la contribution de la particule d'épreuve au champ. L'hypothèse de départ est que cette contribution est négligeable

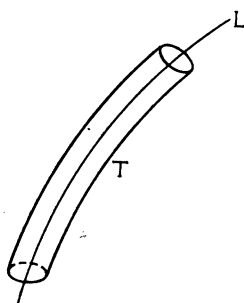


Fig. 1.

par rapport au champ principal *dans tout l'espace*. Dans le calcul de Infeld-Schild cette hypothèse n'était utilisée que pour l'espace entourant la particule d'épreuve. Ainsi il semble que notre méthode n'est valable que pour des particules d'épreuve de structure macroscopique, tandis que celle de Infeld-Schild pourrait être aussi applicable pour des particules d'épreuve ponctuelles (« corpuscules élémentaires »). Mais cette différence n'est pas réelle, comme on le voit à l'aide de l'argument suivant.

Admettons qu'il existe une particule d'épreuve « ponctuelle ». Elle sera représentée dans l'espace-temps par un certain tube de section nulle, c'est-à-dire par une ligne d'univers L (*fig. 1*). Les équations du champ gravifique pour le vide,

$$R_{\nu\mu} = 0,$$

seront satisfaites en dehors de L . Sur L même le $g_{\mu\nu}$ total sera singulier.

Mais ce $g_{\mu\nu}$ sera très peu différent du $g_{\mu\nu}$ des corps principaux, si l'on s'éloigne de la ligne L d'une distance très petite par rapport aux longueurs caractéristiques du champ principal, à cause du fait que la masse de la particule d'épreuve est très petite par rapport aux masses des corps principaux. Alors entourons L d'un tube T de section petite, telle que le $g_{\mu\nu}$ total soit très près du $g_{\mu\nu}$ principal sur la surface de T. Nous pouvons faire continuer le champ extérieur à T dans l'intérieur de telle manière que :

- 1° le champ reste régulier dans T et
- 2° il satisfait aux conditions de raccordement sur la surface de T.

Ceci revient évidemment à remplacer la particule d'épreuve ponctuelle par un autre corpuscule macroscopique, dont les dimensions sont celles de la section du tube T. Or, on voit immédiatement qu'il est encore possible de choisir la continuation du champ extérieur dans l'intérieur de T de telle façon, que le $g_{\mu\nu}$ total soit très peu différent du $g_{\mu\nu}$ des corps principaux *partout*. Mais c'est la condition nécessaire pour qu'il soit permis de traiter ce corpuscule macroscopique d'après notre méthode. La conclusion finale est qu'on peut toujours remplacer une particule d'épreuve strictement ponctuelle par une autre macroscopique (satisfaisant à notre condition), dont le mouvement sera pratiquement identique au mouvement de la particule ponctuelle.

Il sera utile de faire ici une remarque fondamentale sur la limite de validité de l'équation du mouvement calculée de cette manière (c'est-à-dire la limite de validité de la loi géodésique). Rappelons qu'il s'agit ici de l'application en théorie gravifique de la méthode de la particule d'épreuve, qui a été d'abord développée dans la théorie du champ électromagnétique. Or, dans cette dernière théorie quand on néglige la contribution d'un corpuscule au champ électromagnétique total, ceci a automatiquement pour conséquence de supprimer dans l'équation du mouvement de ce corpuscule la « self-force », c'est-à-dire la force de réaction de la radiation émise par le corpuscule. On devra s'attendre à ce qu'une situation pareille se présente en théorie gravifique. Ainsi, dans le cas où la radiation gravifique se montrerait comme existant réellement, la loi du mouvement géodésique prendrait un caractère approximatif et devrait être complétée par un terme radiatif. Peut-être cette remarque conduirait-elle à une nouvelle possibilité de discuter le

problème théorique de la radiation gravifique. Celle-ci consisterait à calculer l'équation du mouvement de la particule d'épreuve dans l'approximation suivante, en tenant compte du champ de la particule en première approximation. Le calcul serait certainement très difficile, mais peut-être encore possible à effectuer.

Dans la méthode de Infeld-Schild, ainsi que celle de Einstein-Infeld-Hoffmann pour le problème astronomique, la discussion de la radiation nécessiterait le calcul de $g_{\mu\nu}$ avec une approximation plus élevée. Mais il y a aussi un autre désavantage dans cette méthode, qui semble être encore plus sérieux : Comme on considère les équations du champ pour le vide seulement on est obligé d'introduire dans la solution les termes éventuellement liés à la radiation d'une manière purement formelle. Ce sont les termes interdits d'après la dernière hypothèse de Einstein-Infeld-Hoffmann :

$$\gamma_{00} = \gamma_{\frac{2}{2}00} + \gamma_{\frac{4}{4}00} + \dots, \quad \gamma_{0k} = \gamma_{\frac{3}{3}0k} + \gamma_{\frac{5}{5}0k} + \dots, \quad \gamma_{kl} = \gamma_{\frac{4}{4}kl} + \gamma_{\frac{6}{6}kl} + \dots$$

Infeld et Scheidegger ⁽¹⁴⁾ ont considéré le terme $\gamma_{\frac{4}{4}0k}$ et ils ont alors montré que ce terme n'a aucune influence réelle sur l'équation du mouvement. Mais il y a encore d'autres termes possibles. D'après Goldberg ⁽¹⁵⁾ ce sont les termes de la forme $\gamma_{\frac{4}{4}kl}$ qui semblent être importants pour la radiation. Mais pour répondre exactement à la question : Quels sont les termes réellement indispensables pour ce problème? On doit se rappeler que la radiation gravifique devra être liée à l'utilisation des *solutions retardées* des équations du champ. Alors il est évident qu'on devra faire usage d'une forme des équations du champ contenant explicitement la généralisation de l'opérateur de d'Alembert et aussi *considérer les sources du champ* (c'est-à-dire l'intérieur des corps en mouvement), comme on le fait dans la méthode de Fock.

Pour la déduction de l'équation du mouvement à partir de l'équation dynamique on procède de la manière suivante. L'équation dynamique est écrite sous la forme

$$(6) \quad \mathfrak{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0.$$

⁽¹⁴⁾ *Canad. J. Math.*, t. 3, 1951, p. 195.

⁽¹⁵⁾ *Phys. Rev.*, t. 99, 1955, p. 1873.

$\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ est différent de zéro dans le tube d'univers T (*fig. 2*) représentant la particule d'épreuve, mais $\mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0$ dans la région de l'univers entourant ce tube. Nous désignerons par $g_{\mu\nu}$ le champ gravifique principal, par $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ la connexion affine correspondant à $g_{\mu\nu}$. Nous négligerons la contribution de la particule d'épreuve au champ gravifique, c'est-à-dire que nous introduirons dans l'équation dynamique la connexion affine principale $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Les dimensions des sections $t = \text{const.}$ du tube T seront supposées très petites par rapport aux longueurs caractéristiques du champ principal (corpuscule « presque ponctuel »). Il s'ensuit que la variation de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ dans une telle section du tube est très petite et il sera permis de développer $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ en série de Taylor. Prenons dans l'intérieur

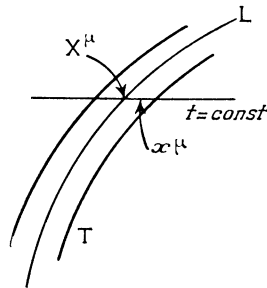


Fig. 2.

de T une ligne L , qui décrira — avec un petit arbitraire — le mouvement du corpuscule. Soient $X^\mu(t)$ les coordonnées du point de L situé sur la section $t = \text{const.}$ du tube. Alors nous poserons dans le voisinage de X^μ :

$$(7) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x^\lambda) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X^\lambda) + \Gamma_{\alpha\beta, \nu}^\mu(X^\lambda)(x^\nu - X^\nu) + \dots$$

L'équation du mouvement résultera par intégration de l'équation dynamique sur le volume (à trois dimensions) du corpuscule, c'est-à-dire sur une section $t = \text{const.}$ du tube. Cette intégration conduira évidemment — à cause de (7) — à des intégrales de la forme

$$\int \mathfrak{T}^{\mu\nu} dV, \quad \int (x^\rho - X^\rho) \mathfrak{T}^{\mu\nu} dV, \quad \int (x^\rho - X^\rho)(x^\sigma - X^\sigma) \mathfrak{T}^{\mu\nu} dV, \quad \dots$$

Ces intégrales caractérisent la *structure intérieure* du corpuscule considéré. Ici nous nous intéressons au type de corpuscule le plus

simple, équivalent à un simple pôle de masse ⁽¹⁶⁾. Pour ce type nous devons demander que toutes les intégrales contenant un ou plusieurs facteurs de la forme $x^\rho - X^\rho$ s'annulent; on doit tenir compte des intégrales $\int \mathfrak{T}^{\mu\nu} dV$ seulement. On trouve alors par intégration de (6), compte tenu de l'expression (7) pour $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$,

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \int \mathfrak{T}^{\mu 4} dV + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X^\lambda) \int \mathfrak{T}^{\alpha\beta} dV = 0.$$

On obtient une autre relation par intégration (sur la section $t = \text{const.}$) de l'équation

$$(x^\rho \mathfrak{T}^{\mu\nu})_{,\nu} + x^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \mathfrak{T}^{\mu\rho},$$

qui est une conséquence immédiate de (6). En tenant compte de la relation évidente

$$x^\rho = X^\rho + (x^\rho - X^\rho),$$

on trouve comme résultat de l'intégration

$$\frac{d}{dt} \left(X^\rho \int \mathfrak{T}^{\mu 4} dV \right) + X^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X^\lambda) \int \mathfrak{T}^{\alpha\beta} dV = \int \mathfrak{T}^{\mu\rho} dV.$$

Cette relation se simplifie à l'aide de (8) et donne

$$(9) \quad \int \mathfrak{T}^{\mu\rho} dV = \frac{dX^\rho}{dt} \int \mathfrak{T}^{\mu 4} dV.$$

Les équations (8) et (9) conduisent à l'équation du mouvement suivante :

$$(10) \quad \frac{d}{ds} (mu^\mu) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu mu^\alpha u^\beta = 0,$$

avec

$$u^\alpha = \frac{dX^\alpha}{ds}, \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta;$$

$$m = \frac{1}{u^4} \int \mathfrak{T}^{44} dV.$$

En multipliant l'équation (10) par u_α on arrive d'abord à la loi géodésique,

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0.$$

⁽¹⁶⁾ Le même cas est considéré chez Infeld-Schild.

On trouve de plus

$$\frac{dm}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire la « masse propre » du corpuscule est une constante.

On voit immédiatement que notre méthode permet aussi de déduire les équations du mouvement pour une particule d'épreuve ayant une structure intérieure plus compliquée. Le calcul a été effectué pour la structure mono-bipolaire. Dans ce cas on conserve à côté des intégrales $\int \mathfrak{T}^{\mu\nu} dV$ celles du type $\int (x^\rho - X^\rho) \mathfrak{T}^{\mu\nu} dV$. On trouve finalement les deux groupes d'équations du mouvement suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{D}{Ds} \left(mu^\alpha + u_\beta \frac{D}{Ds} S^{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\sigma R^\alpha{}_{\nu\sigma\mu} = 0, \\ \frac{D}{Ds} S^{\alpha\beta} + u^\alpha u_\rho \frac{D}{Ds} S^{\beta\rho} - u^\beta u_\rho \frac{D}{Ds} S^{\alpha\rho} = 0. \end{cases}$$

$S^{\alpha\beta}$ désigne un tenseur antisymétrique défini par

$$S^{\alpha\beta} = \int (x^\alpha - X^\alpha) \mathfrak{T}^{\beta\lambda} dV - \int (x^\beta - X^\beta) \mathfrak{T}^{\alpha\lambda} dV,$$

ce qui est le tenseur du moment cinétique propre (spin) du corpuscule. La « masse » scalaire m est définie par

$$m = \left(\int \mathfrak{T}^{\alpha\lambda} dV + \frac{1}{u^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^{\mu\nu} \right) u_\alpha.$$

$\frac{D}{Ds}$ désigne la dérivée covariante par rapport au temps propre du corpuscule ; par exemple pour un vecteur $A^\lambda(s)$:

$$\frac{DA^\lambda}{Ds} = A^\lambda{}_{;\mu} u^\mu = \frac{dA^\lambda}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu A^\nu.$$

Les deux équations (11) sont covariantes pour des transformations de coordonnées générales (ainsi que $S^{\alpha\beta}$ et m).

Mais peut-être posera-t-on la question : Des corpuscules d'une telle structure ne devraient-ils pas être exclus par des arguments physiques élémentaires ? Une telle question paraît tout à fait justifiée, quand on lit dans le travail de Einstein-Infeld ⁽¹⁷⁾ que l'équation du mouvement résulte de la condition que le dipôle total soit nul. Or, il s'agit dans les

(17) *Canad. J. Math.*, t. 1, 1949, p. 209.

considérations de Einstein-Infeld d'un dipôle de masse statique. Au contraire, le corpuscule à structure mono-bipolaire général est le modèle approprié pour la description d'une particule à moment cinétique propre (particule à spin). On le voit d'une manière élémentaire, en se rappelant que l'existence d'un moment cinétique propre signifie que certaines des grandeurs \mathfrak{C}^{0k} ($k = 1, 2, 3$) ont une distribution bipolaire. Mais si l'on a besoin d'un dipôle par rapport aux composantes \mathfrak{C}^{0k} du tenseur $\mathfrak{C}^{\mu\nu}$, on devra — à cause du caractère tensoriel de $\mathfrak{C}^{\mu\nu}$ — considérer la structure bipolaire générale.

Les équations du mouvement du corpuscule mono-bipolaire ont été déduites en Relativité restreinte il y a presque 20 ans ⁽¹⁸⁾. Elles conduisent à des résultats qualitatifs importants, montrant la parenté de ces corpuscules classiques avec les particules de Dirac ⁽¹⁹⁾. Rappelons ici le fait essentiel que pour les corpuscules à structure mono-bipolaire l'impulsion cesse d'être proportionnelle et colinéaire à la vitesse. Le calcul présent généralise ces équations pour le cas où un champ gravifique est présent ⁽²⁰⁾. Mais comme il n'y a pas d'applications physiquement intéressantes de ces dernières équations jusqu'à présent, je me bornerai à ces remarques générales.

Je voudrais encore discuter brièvement une autre question qui me paraît intéressante. Nous avons déjà dit que les équations du mouvement, que nous avons déduites, sont valables pour des particules d'épreuve se mouvant dans le vide. Il ne sera pas justifié de considérer, par exemple, une molécule d'un fluide (se mouvant dans l'espace occupé par ce fluide) et de dire : La masse de cette molécule étant très petite par rapport à la masse totale du fluide, sa contribution au champ gravifique total sera négligeable; par conséquent cette molécule doit se mouvoir comme une particule d'épreuve, c'est-à-dire sur une ligne géodésique du champ total. La raison est évidente : Cette molécule subira, à côté de la force gravifique, des interactions directes avec les autres molécules du fluide (chocs entre molécules); mais il n'est nullement nécessaire que la résultante de ces interactions soit négligeable par rapport à la force gravifique. Cependant nous pourrions dire, par

⁽¹⁸⁾ HÖNL-PAPAPETROU, *Z. Phys.*, t. 112, 1939, p. 512; PAPAPETROU-HÖNL, *Z. Phys.*, t. 114, 1939, p. 478.

⁽¹⁹⁾ HÖNL-PAPAPETROU, *Z. Phys.*, t. 116, 1940, p. 153.

⁽²⁰⁾ Voir aussi PAPAPETROU-ÜRICH, *Z. Naturforsch.*, t. 10 a, 1955, p. 109.

analogie avec les concepts fondamentaux de la théorie cinétique, que la molécule considérée se comportera comme une particule d'épreuve, si nous nous intéressons à un intervalle de temps bien plus petit que l'intervalle moyen entre chocs successifs. Dans le cas contraire on devra tenir compte de l'effet des chocs.

Une telle situation se présente dans la cosmologie, quand on cherche à établir les équations du mouvement des galaxies, qui constituent les « molécules » du fluide cosmique. On ne peut pas dans ce cas parler d'une déduction directe des équations du mouvement à partir des équations du champ. Alors on procède d'une manière différente : On introduit en cosmologie la loi géodésique pour le mouvement des galaxies comme un *postulat indépendant* ⁽²¹⁾. Je crois que ceci n'est pas généralement justifié. Dans le cas d'un modèle cosmologique à pression nulle, $p = 0$, il n'y aurait aucune objection ; mais alors il ne s'agirait plus d'un postulat indépendant : Comme l'a montré de Donder il y a 30 ans, la loi géodésique est dans ce cas — fluide incohérent — une conséquence immédiate de l'équation dynamique. Cependant les cosmologues utilisent leur hypothèse également dans la discussion des modèles à $p \neq 0$. Or, il est évident que dans ce cas l'hypothèse du mouvement géodésique ne peut être justifiée que sous les conditions suivantes :

1° la pression résulte exclusivement du mouvement « thermique » des molécules du fluide, et

2° on s'intéresse au mouvement de la molécule pendant un intervalle de temps qui est petit par rapport à l'intervalle moyen entre chocs successifs.

Cette conclusion simple ne sera plus valable, si la pression contient un terme électromagnétique non négligeable. Dans l'état actuel de notre univers ces deux composantes de la pression semblent être du même ordre de grandeur ; mais elles sont très petites par rapport à ρc^2 ,

$$p \approx 10^{-7} \rho c^2,$$

c'est-à-dire que nous nous trouvons pratiquement dans le cas $p = 0$. Cependant, dans l'évolution du modèle cosmologique il y a aussi des

(21) Voir McVITTIE, *Astronom. J.*, t. 58, 1953, p. 129.

états, où p n'est pas négligeable par rapport à ρc^2 , et par conséquent la loi du mouvement des galaxies dans un modèle à $p \neq 0$ mérite une discussion plus détaillée.

IV.

LE PROBLÈME DU MOUVEMENT DANS LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ A $g_{\mu\nu}$ NON SYMÉTRIQUE.

Nous avons déjà montré que l'équation dynamique est une conséquence des équations du champ dans une théorie covariante quelconque, sous la seule condition que la fonction de Lagrange de ce champ ne contienne que les quantités décrivant le champ. Un exemple négatif : Dans une théorie du champ électromagnétique pur, par exemple celle de Maxwell, les équations du champ ne conduiront pas à l'équation dynamique, parce que la fonction \mathcal{L}_{em} contient à côté du potentiel électromagnétique φ_μ le tenseur métrique (en Relativité restreinte le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski, en Relativité générale $g_{\mu\nu}$). Mais quand nous considérons l'ensemble des champs gravifique et électromagnétique dans la théorie déduite de

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gr} + \mathcal{L}_{em},$$

nous arrivons — en formant le terme \mathcal{L}_{em} avec le tenseur métrique de l'espace riemannien — à un cas où la condition précédente est satisfaite. Par conséquent dans une telle théorie l'équation dynamique résulte des équations du champ et l'on pourra déduire les équations du mouvement directement à partir des équations du champ. Exemple : Les équations du champ de la théorie de Maxwell réunie — d'une manière « naïve » — à la Relativité générale sont déduites de la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta}.$$

Ces équations ont pour conséquence l'équation dynamique

$$(12) \quad \mathfrak{C}_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} + F_{\mu\nu} j^{\nu} = 0.$$

Or dans ce cas on peut réellement déduire l'équation du mouvement des équations du champ. Pour une particule d'épreuve monopolaire le

calcul se fait à partir de l'équation dynamique (12). On doit encore supposer qu'il n'y a qu'un courant de convection,

$$j^\mu = \rho u^\mu,$$

et que la distribution de charge dans le corpuscule considéré correspond aussi à un pôle simple. Le résultat du calcul est (22)

$$m_0 \left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \right) + e F^{\mu\alpha} u_\alpha = 0,$$

la force électromagnétique ayant la forme de Lorentz. Ce problème a été traité aussi d'après la méthode de Infeld-Schild (23), laquelle conduit au même résultat.

Une théorie unifiée quelconque satisfait aussi à la condition précédente : La fonction de Lagrange de la théorie ne peut contenir que les quantités décrivant les champs considérés (« potentiel » du champ total). Par conséquent les équations du champ de la théorie conduiront à l'équation dynamique, donc aussi aux équations du mouvement des corps-sources du champ. Nous sommes ainsi amené à un nouveau moyen de discussion et un critère indépendant des théories unifiées. Ceci consiste à déduire les équations du mouvement à partir des équations du champ de la théorie et alors prouver si ces équations du mouvement sont « raisonnables » et satisfaisantes du point de vue physique. Exemple : Théorie à cinq dimensions sous sa forme initiale. Or, pour cette théorie nous n'avons pas besoin d'un calcul spécial, car nous savons qu'elle conduit aux mêmes équations du champ comme la théorie « naïve » discutée précédemment et, par conséquent, à la même équation du mouvement. C'est une équation du mouvement tout à fait raisonnable, mais cette théorie a été considérée comme non satisfaisante pour d'autres raisons.

Plus intéressante sera la discussion, du point de vue des équations du mouvement, de la dernière théorie unifiée d'Einstein, la théorie au tenseur $g_{\mu\nu}$ non symétrique. Même dans le cas où l'on n'arriverait pas directement à des équations du mouvement satisfaisantes, les résultats de cette discussion pourraient nous aider pour mieux comprendre et

(22) PAPAPETROU-URICH, *Z. Naturforschung*, t. 10 a, 1955, p. 109.

(23) CHASE, *Phys. Rev.*, t. 95, 1954, p. 243.

peut-être aussi pour surmonter les difficultés fondamentales concernant l'interprétation physique de cette théorie. Ce problème a été discuté pour le cas d'un champ faible et de petites vitesses des corps par la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann : Infeld ⁽²⁴⁾ a considéré le système « fort » des équations du champ,

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Il trouve en première approximation un résultat négatif : L'équation du mouvement obtenue ne contient aucune force « électromagnétique », c'est-à-dire que Infeld retrouve simplement l'équation du mouvement valable dans la théorie gravifique de Newton *sans terme électromagnétique*. Pour la théorie avec le système « faible » des équations du champ,

$$R_{\underline{\mu}\nu} = 0, \quad R_{[\underline{\mu}\nu, \rho]} = 0,$$

le calcul a été repris par Callaway ⁽²⁵⁾, qui trouve que les résultats de Infeld sont valables dans ce cas aussi.

Ces résultats sont un peu surprenants. On ne saurait dénier la possibilité que la théorie discutée ne donne pas une description correcte du champ électromagnétique. Mais alors on devrait seulement s'attendre à trouver dans l'équation du mouvement un terme de force nouveau n'ayant pas la forme de celle de Lorentz. Pourquoi ce terme a-t-il totalement disparu ? La réponse à cette question est, au moins pour le calcul de Callaway, la suivante : Parce que cet auteur a choisi une solution particulière de l'équation valable pour la partie antisymétrique de $g_{\mu\nu}$. C'est la solution, qui permettrait d'introduire dans l'équation du mouvement un terme de force ayant exactement la forme de celle de Lorentz, ou aucune force additionnelle. Pour le montrer, écrivons ces équations du champ, après avoir introduit le potentiel électrostatique, comme l'a fait Infeld :

$$\begin{aligned} \varphi_{,mnn} &= 0 \quad \text{chez Infeld,} \\ \varphi_{,mmnn} &= 0 \quad \text{chez Callaway.} \end{aligned}$$

Les solutions (à symétrie sphérique) les plus générales de ces équations

⁽²⁴⁾ *Acta Physica Polon.*, t. 10, 1950, p. 284.

⁽²⁵⁾ *Phys. Rev.*, t. 92, 1953, p. 1567.

sont

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{Inf.}} &= \frac{a}{r} + b + dr^2, \\ \varphi_{\text{Cal.}} &= \frac{a}{r} + b + cr + dr^2,\end{aligned}$$

a, b, c, d des constantes d'intégration. La constante b est sans importance pour $g_{\mu\nu}$ et nous la laisserons de côté. La constante d , devra, elle aussi, être supprimée : Elle conduit à des difficultés par rapport aux conditions aux limites à l'infini, et, de plus, elle signifie — d'après la plupart des définitions possibles de la charge — une distribution de charge s'étendant dans l'espace entier. Ainsi nous aurons

$$\varphi_{\text{Inf.}} = \frac{a}{r}, \quad \varphi_{\text{Cal.}} = \frac{a}{r} + cr.$$

On notera que la constante c apparaît seulement dans la théorie aux équations faibles. Cette constante ne donne pas de difficultés à l'infini, sauf pour quelques formes de conditions aux limites à l'infini.

D'après ce résultat on doit, dans le cas du système faible, recalculer la valeur de Λ'_{mk} et finalement de l'intégrale $\int_1 \Lambda'_{mk} n^k dS$, qui représente dans la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann le terme de force additionnel entrant dans l'équation du mouvement du corps 1. Le calcul a été effectué par Treder ⁽²⁶⁾ pour un système de deux corps, caractérisés par des valeurs a_1, c_1 et a_2, c_2 des constantes d'intégration. Leurs coordonnées (dans l'espace à trois dimensions) étant désignées respectivement par ξ^m et η^m et leur distance par r_{12} , on trouve pour la force exercée sur le premier corps la formule suivante :

$$(13) \quad \int_1 \Lambda'_{mk} n^k dS = 2(a_1 c_2 + a_2 c_1) \frac{\xi^m - \eta^m}{r_{12}^3} - 2c_1 c_2 \frac{\xi^m - \eta^m}{r_{12}}.$$

On voit que pour $c = 0$ on est ramené au résultat de Infeld. On pourrait peut-être considérer cette absence complète d'une force additionnelle dans l'équation du mouvement déduite des équations du champ du système fort comme un argument indépendant contre la théorie aux équations fortes, à côté des arguments importants donnés par Einstein

⁽²⁶⁾ *Ann. d. Physik*, (6), 19, 1957, p. 369.

et Kaufmann ⁽²⁷⁾. Dans le cas des équations faibles la force contient deux termes, l'un variant comme $\frac{1}{r_{12}^2}$ et l'autre indépendant de la distance. Nous reviendrons sur ce résultat après la tentative d'interprétation des constantes a et c à l'aide de la définition du vecteur densité de courant et charge.

Pour compléter cette discussion considérons aussi, mais très brièvement, l'autre solution des équations faibles, qu'on nomme aujourd'hui la « solution magnétique » ⁽²⁸⁾. Dans ce cas l'équation

$$R_{[\mu\nu,\rho]} = 0$$

est satisfaite automatiquement et l'on a à résoudre l'équation

$$g^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Or il est clair que la solution générale contiendra seulement une constante d'intégration, et c'est précisément la constante a précédente (avec échange de g_{kl} et g_{ok}). D'après Infeld, ce cas conduit aussi à une force égale à zéro, montrant ainsi que cette solution ne peut pas avoir, du point de vue considéré ici, une signification physique. Nous verrons dans la suite que cette conclusion est confirmée par un argument bien plus général.

Pour la critique de la formule, que nous avons trouvée pour la force dans le cas des équations faibles, on doit d'abord répondre à la question : Comment sera défini le vecteur j^μ (densité de courant et charge) dans la théorie? Il y a deux possibilités générales. Dans la première j^μ sera relié à une expression contenant des dérivées premières de $g_{\mu\nu}$. Telle est la définition

$$(14) \quad j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{[\nu\rho,\sigma]},$$

qui permet une simple correspondance formelle de la théorie unifiée à la théorie de Maxwell, à condition de supposer que l'équation du champ

$$g^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

soit satisfaite partout (c'est-à-dire dans le vide aussi bien que dans

⁽²⁷⁾ L. DE BROGLIE, *Physicien et Penseur*, Albin Michel, Paris, 1952, p. 321.

⁽²⁸⁾ PAPAPETROU, *Proc. R. Irish. Acad.*, t. A 52, 1948, p. 69.

l'espace occupé par la matière). Une autre définition de la même catégorie serait

$$(14') \quad j^\mu = \mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\nu}$$

Il y a d'autres variations possibles de cette forme, auxquelles on arrive si l'on s'efforce d'obtenir une liaison plus étroite avec la théorie de Born-Infeld, par exemple ⁽²⁹⁾

$$j^\mu = (\mathfrak{a}^{\mu\rho} a^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma})_{,\nu}, \quad a_{\nu\sigma} = g_{\nu\sigma}$$

La deuxième possibilité de définir j^μ fera usage du tenseur $R_{\mu\nu}$:

$$(15) \quad j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{[\nu\rho,\sigma]}$$

La définition (14) est celle implicitement utilisée dans les calculs de Infeld et Callaway. Cette définition présente un désavantage sérieux, au moins quand on s'intéresse à l'application macroscopique de la théorie : Si l'on admet cette définition, on doit exiger que l'équation

$$R_{[\mu\nu,\rho]} = 0$$

(ou $R_{\mu\nu} = 0$ dans la théorie considérée par Infeld) *soit satisfaite partout*; car, ayant déjà défini la densité de courant et charge par (14), il ne reste aucune possibilité d'interprétation physique de la quantité $R_{[\mu\nu,\rho]}$, supposée différente de zéro dans la matière. Mais l'hypothèse que l'équation

$$R_{[\mu\nu,\rho]} = 0$$

est satisfaite partout conduirait à

$$a = c = 0,$$

c'est-à-dire qu'il n'y aurait dans ce cas aucune solution à $g_{\mu\nu} \neq 0$.

La définition (14'), qui conduirait à la réinterprétation de la solution « magnétique » comme solution électrique, se heurte à une difficulté encore plus grave. L'équation

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

(29) MAVRIDÈS, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1566 et 1643.

résulte de la relation générale établissant la liaison entre $\Gamma_{\mu\nu}^k$ et $g_{\mu\nu}$ et pour cette raison je crois qu'on doit la respecter dans tout l'espace. Alors la solution « magnétique » devra être rejetée.

De cette manière il ne nous reste, dans l'application phénoménologique de la théorie à des problèmes macroscopiques, que la définition (15). Alors la densité de charge serait

$$\rho = R_{[12,3]} = \varphi_{,mmnn}.$$

Avec la solution $\varphi = \frac{\alpha}{r} + cr$ des équations faibles, on trouve

$$\rho = \alpha \Delta \delta(\vec{r}) + c \delta(\vec{r}).$$

On voit que la constante c joue le rôle d'une « charge totale », tandis que la constante α correspond à une sorte de moment de quadripôle. Par conséquent, pour un corps à structure monopolaire nous devons poser $\alpha = 0$. Alors la force (13) se réduit, pour deux corps portant les « charges » c_1 et c_2 , à

$$\int_1 \Lambda'_{mk} n^k dS = -2c_1 c_2 \frac{\xi^m - \eta^m}{r_{12}}.$$

C'est une force radiale, mais dont la valeur absolue est indépendante de la distance !

On retrouve les mêmes résultats en partant de l'équation dynamique de la théorie. Celle-ci doit être déduite de la première identité fondamentale de la théorie, qui a la forme suivante :

$$(16) \quad \left(R_{\underline{\mu}\rho} \mathfrak{g}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\underline{\mu}}^{\sigma} R_{\rho\sigma} \mathfrak{g}^{\rho\sigma} \right)_{,\nu} + \frac{1}{2} R_{\rho\sigma} \mathfrak{g}^{\rho\sigma}_{,;\mu} = \mathfrak{F}_{\underline{\mu}} \equiv \frac{1}{2} \mathfrak{g}^{\rho\sigma} R_{[\rho\sigma,\mu]} + R_{\underline{\mu}\rho} \mathfrak{g}^{\rho\sigma}_{,;\sigma}.$$

On peut mettre cette équation sous une forme analogue à celle valable dans la théorie « naïve » de gravitation et électromagnétisme. Il suffit de poser ⁽³⁰⁾

$$R_{\underline{\mu}\rho} \mathfrak{g}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\underline{\mu}}^{\sigma} R_{\rho\sigma} \mathfrak{g}^{\rho\sigma} = \mathfrak{C}_{\underline{\mu}}^{\sigma}.$$

Soit encore

$$g^{\rho\sigma} \sqrt{-g} = a^{\rho\sigma} \sqrt{-a}, \quad a_{\underline{\mu}\rho} a^{\rho\sigma} = \delta_{\underline{\mu}}^{\sigma}.$$

⁽³⁰⁾ HÉLY, *C. R. Acad. Sc.*, 239, 1955, p. 385 et 747.

En élevant et abaissant les indices des tenseurs à l'aide de $a_{\mu\nu}$, on trouve d'abord

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\rho} \mathfrak{T}_{\rho}^{\beta} = \mathfrak{T}^{\beta\alpha},$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique, comme en Relativité générale. Le membre gauche de (16) prend alors la forme $\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}{}_{||\nu}$, le symbole $||$ désignant la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel correspondant à la « métrique » $a_{\alpha\beta}$. Multipliant la forme nouvelle de (16),

$$\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}{}_{||\nu} = \mathfrak{F}_{\mu},$$

par $a^{\mu\alpha}$, nous trouvons

$$\mathfrak{T}^{\alpha\nu}{}_{||\nu} = \mathfrak{F}^{\alpha} \equiv a^{\alpha\mu} \mathfrak{F}_{\mu}.$$

Cette formule montre qu'on doit interpréter la quantité \mathfrak{F}^{α} , ou directement \mathfrak{F}_{α} , comme la densité de force correspondant au champ $g_{\mu\nu}$. Or, le second terme dans l'expression de \mathfrak{F}_{α} peut être supprimé à cause de l'hypothèse que l'équation

$$g^{\mu\nu}{}_{, \nu} = 0$$

est satisfaite partout. Alors il n'y aura une densité de force différente de zéro que si

$$R_{[\mu\nu, \rho]} \neq 0$$

dans la matière. Mais ceci n'est possible que si l'on définit la densité de courant et charge par (15).

Le calcul de la force exercée sur une particule d'épreuve portant la « charge » c , se mouvant dans le champ d'un corps portant la « charge » C donne comme résultat

$$f_m \equiv \int \mathfrak{F}_m dV = \frac{cC}{r} x^m.$$

(Le corps principal est situé à l'origine des coordonnées, la particule d'épreuve au point x^m .) Ceci est identique au résultat obtenu par la méthode de Einstein-Infeld-Hoffmann.

Le fait qu'il est impossible de déduire dans la théorie unifiée à $g_{\mu\nu}$ non symétrique une force ayant la forme de celle de Coulomb ne sera pas réellement surprenant, si l'on pense à la différence très essentielle entre les équations du champ correspondantes dans cette théorie et dans la théorie de Maxwell. En se bornant au cas d'un champ électrostatique,

on a dans la théorie de Maxwell l'équation

$$\Delta\varphi = \rho;$$

mais ici on a l'équation du quatrième ordre

$$\Delta\Delta\varphi = \rho.$$

La dernière équation ressemble à celle de la théorie de Bopp-Podolsky,

$$\Delta(\Delta - k^2)\varphi = \rho.$$

Mais il y a ici le terme au facteur k^2 , absent dans notre équation, lequel assure dans la théorie de Bopp-Podolsky que la loi de Coulomb soit valable asymptotiquement aux distances grandes par rapport à $\frac{1}{k}$.

Or, nous pouvons introduire le terme absent dans notre équation en allant de la théorie unifiée d'Einstein à celle de Schrödinger comprenant le terme « cosmologique » au facteur λ : L'équation

$$R_{[\mu\nu,\rho]} - \lambda g_{[\mu\nu,\rho]} = 0 \rightarrow \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j^\sigma$$

donnerait en première approximation

$$\Delta(\Delta - 2\lambda)\varphi = \rho,$$

qui est identique à celle de Bopp-Podolsky avec $2\lambda = k^2$. Mais une autre difficulté insurmontable se présente dans ce cas : pour une description physiquement acceptable du champ électromagnétique, on doit donner à la longueur caractéristique

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

une valeur très petite (ordre de grandeur subatomique). Mais le même λ se présente aussi dans l'équation gravifique,

$$R_{\underline{\mu\nu}} - \lambda g_{\underline{\mu\nu}} = 0,$$

et nous savons que pour une description satisfaisante du champ gravifique au moyen de cette équation on doit prendre une valeur de la longueur $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ d'ordre de grandeur cosmique !

La conclusion générale résultant de cette discussion du problème du

mouvement dans la théorie à $g_{\mu\nu}$ non symétrique est identique à celles tirées de la discussion des autres aspects de la théorie : Il semble impossible de faire une utilisation phénoménologique directe de cette théorie, qui permettrait un traitement satisfaisant des problèmes macroscopiques. Mais cela ne prouve rien à l'égard de l'applicabilité de la théorie dans le domaine microphysique. Au contraire, le fait que la théorie, complétée par la définition (14) des sources électromagnétiques, ne permet aucune solution monopolaire à $g_{\mu\nu} \neq 0$ pourrait être un avantage dans ce domaine : Les particules élémentaires possédant un spin, il est certain qu'on devra les décrire par des modèles plus compliqués. Mais il est de plus possible que dans une discussion du problème des particules élémentaires l'hypothèse que le champ est faible partout ne serait pas utilisable. Alors on devrait attaquer le problème microscopique en essayant de trouver des solutions exactes des équations de champ — chose terriblement difficile — ou, au moins, en introduisant des méthodes d'approximation d'un type tout à fait nouveau. Il est évident que, si la théorie pourra avoir des succès dans le domaine microphysique, son impuissance dans le domaine macrophysique n'aurait plus d'importance essentielle : On pourrait alors espérer que la théorie macroscopique résultera par une modification convenable de la théorie microscopique. Par exemple : Les équations du champ macroscopique pourraient être les équations satisfaites par les valeurs moyennes des grandeurs microscopiques dans des domaines physiquement petits, comme on l'a fait avec succès dans la théorie de Maxwell. Mais n'oublions pas que nous ne possédons à ce moment aucun résultat confirmant l'applicabilité de la théorie dans le domaine microphysique et que par conséquent un tel développement ne constitue aujourd'hui qu'une hypothèse optimiste.
