WILLIAM BOWEN BONNOR

I. Les équations du mouvement en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger

Annales de l'I. H. P., tome 15, nº 3 (1957), p. 133-145
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1957__15_3_133_0>

I.

Les équations du mouvement en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger

par

William Bowen BONNOR.

---

1. Introduction. — En Relativité générale il y a deux façons de montrer que le mouvement de la matière est impliqué par les équations du champ. La première façon repose sur l'emploi du tenseur d'énergie, et la seconde est une méthode d'approximation d'Einstein, d'Infeld et de Hoffmann.

a. Le tenseur d'énergie. — On utilise les équations du champ

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - 8\pi T^{\mu\nu},$$

et les identités entre ces équations

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Sous sa forme la plus simple, cette méthode consiste en ceci : si l'on suppose que la matière a la forme de particules sans action réciproque, on peut écrire $T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$ et il est facile de montrer que

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

de sorte que les particules se meuvent le long des géodésiques.

b. La méthode d'approximation d'Einstein, d'Infeld et de

Hoffmann. — Dans cette méthode, le tenseur d'énergie n'est pas utilisé et la matière est considérée comme une singularité du champ. Les équations du champ utilisées sont celles du vide,

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

et la forme nécessaire des identités est

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\nu} = 0.$$

Les traits essentiels de la méthode sont les suivants :

1° C'est une méthode d'approximation dans laquelle le tenseur fondamental est exprimé en fonction d'un paramètre λ :

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \lambda^2 \underset{2}{g}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{g}_{00} + \ldots, \\ g_{0n} &= \lambda^3 \underset{3}{g}_{0n} + \lambda^5 \underset{5}{g}_{0n} + \ldots, \\ g_{mn} &= -\delta_{mn} + \lambda^2 \underset{2}{g}_{mn} + \lambda^4 \underset{4}{g}_{mn} + \ldots; \end{aligned}$$

(ici, et ailleurs, les indices latins prennent les valeurs 1, 2, 3, et les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3).

2° Après substitution dans les équations du champ des quantités ci-dessus, la résolution des équations par l'usage des potentiels qui correspondent à des particules neutres, s'effectue par approximations successives.

3° Dans les solutions des équations correspondant à chaque dégré d'approximation, il se présente certaines conditions d'intégrabilité qui imposent la disparition de certaines intégrales de surface

$$\int \Lambda_{0m} n_m \, dS = 0, \quad \int \Lambda_{im} n_m \, dS = 0.$$

Ici les Λ sont des combinaisons de certains termes des équations du champ, y compris les termes non linéaires, et quelques-uns des termes linéaires. Les équations du mouvement résultent de ces intégrales.

2. La théorie d'Einstein-Maxwell. — En théorie de Relativité classique, l'électromagnétisme est introduit en écrivant les équations de Maxwell sous forme tensorielle, et en faisant entrer l'énergie électromagnétique dans le tenseur d'énergie. Si la matière se présente seulement comme des singularités du champ, les équations du champ sont

$$R_{\mu\nu} = -8\pi E_{\mu\nu}.$$

J'appellerai cette théorie, théorie d'Einstein-Maxwell. J'aimerais souligner que cette théorie est, entre ces limites, et autant qu'on sache, une union satisfaisante de la gravitation et de l'électromagnétisme au point de vue phénoménologique. En particulier, elle donne les équations du mouvement pour les particules chargées.

3. **La théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger.** — Par théorie du champ unitaire d'Einstein-Schrödinger, je désigne l'ensemble des équations

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (a) & g_{\underset{+-}{\mu\nu};\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} = 0, \\ (b) & \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\alpha}} = 0, \\ (c) & R_{\underset{-}{\mu\nu}} = 0, \\ (d) & R_{[\underset{\vee}{\mu\nu,\sigma}]} = R_{\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma} + R_{\underset{\vee}{\sigma\mu},\nu} + R_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu} = 0. \end{cases}$$

Ces notations sont maintenant adoptées sauf peut-être la virgule qui dénote ici la différentiation partielle :

$$g_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} g_{\mu\nu}.$$

On ne peut pas obtenir les équations du mouvement des particules chargées en théorie d'Einstein-Schrödinger à l'aide de l'une ou l'autre des méthodes précédentes.

La méthode du tenseur d'énergie a été utilisée par Hlavaty [1]. Le procédé de Hlavaty consiste à extraire des équations du champ une certaine quantité qu'il identifie avec le tenseur d'énergie, et puis à prendre la divergence de ce tenseur. Il ne trouve pas la force coulombienne à partir de cette divergence, et il rejette donc les équations (I). Il essaie de modifier les équations du champ afin d'obtenir des équations correctes du mouvement, et il pense y avoir réussi pour une certaine catégorie restreinte de champs. Il me semble que sa théorie modifiée ne donne pas la force coulombienne, même pour la classe de champs qu'il considère.

La méthode d'Einstein, d'Infeld et de Hoffmann [2] a été appliquée à l'ensemble (I) par Callaway [3] avec des résultats négatifs. Callaway supposait que $g_{\underline{\mu\nu}}$ est le tenseur métrique, et que $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ est le champ électromagnétique, et j'ai fait de même. Il ressort du travail de Pham Tan Hoang [4] que les résultats jusqu'à l'approximation du quatrième ordre sont semblables si l'on prend $g^{\underline{\mu\nu}}$ et $g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ comme tenseur métrique et champ électromagnétique respectivement.

L'ensemble des équations (I) est obtenu à partir du principe variationnel

$$\delta \int \mathfrak{h}\, d\tau = 0,$$

où

$$\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}(g_{\mu\nu}, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\sigma}).$$

Si l'on prend

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, et si l'on applique le principe variationnel sous réserve de la condition subsidaire

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0,$$

on obtient l'ensemble (I). C'était par cette méthode qu'Einstein obtint originalement l'ensemble (I), mais une méthode plus élégante pour arriver au même résultat est connue maintenant depuis le travail de Lichnerowicz.

Einstein croyait qu'aucune addition à $\mathfrak{h}$ laquelle contenait les Γ ne détruirait la relation $g_{\underset{+\,-}{\mu\nu};\sigma} = 0$. Il semble qu'il ait eu tort ici, et des possibilités intéressantes à cet égard sont discutées dans le livre de Mme M.-A. Tonnelat [5] à ce sujet. J'ai considéré [6] l'addition à $\mathfrak{h}$ d'une certaine fonction des $g_{\mu\nu}$ qui conduirait aux équations du mouvement pour des charges électriques.

Plusieurs possibilités se présentent ici, et celle que j'ai choisie finalement était

$$\mathfrak{h}^{\star} = \mathfrak{h} + p^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu} g_{\underset{\vee}{\nu\mu}},$$

où p est une constante réelle ou imaginaire. Le terme supplémentaire satisfait au principe d'hermiticité considéré par Einstein comme étant une condition essentielle des expressions fondamentales de la théorie.

D'autres additions simples à $\mathfrak{h}$ sont les suivantes :

$$\omega, \quad h, \quad \omega\, g^{\mu\nu} g_{\nu\mu}, \quad \frac{\omega^2}{h}, \quad \frac{h^2}{\omega},$$

où

$$\omega = \sqrt{-\,\text{dét}\, g_{\mu\nu}}, \qquad h = \sqrt{-\,\text{dét}\, g_{\underline{\mu\nu}}}.$$

Toutes les additions ci-dessus conduisent à un terme cosmologique dans les équations du champ, et ou bien ne donnent pas la force coulombienne, ou bien donnent des équations plus compliquées que celles de ma théorie.

Quand on fait la variation

$$\delta \int \mathfrak{h}^{\star}\, d\tau = 0,$$

on trouve que les équations ($\mathrm{I}a$) et ($\mathrm{I}b$) ne sont pas changées, mais que ($\mathrm{I}c$) et ($\mathrm{I}d$) sont changées par l'addition d'un terme supplémentaire. Les équations complètes de ma théorie sont

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} (a) & g_{\underset{+\,-}{\mu\nu};\sigma} = 0, \\ (b) & \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\alpha}} = 0, \\ (c) & \mathrm{R}_{\underline{\mu\nu}} + p^2\, \mathrm{U}_{\underline{\mu\nu}} = 0, \\ (d) & \mathrm{R}_{[\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma]} + p^2\, \mathrm{U}_{[\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma]} = 0, \end{cases}$$

où

$$\mathrm{U}_{\mu\nu} = g_{\underset{\vee}{\nu\mu}} - g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} + \frac{1}{2} g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} g_{\beta\alpha} g_{\mu\nu}.$$

A la première approximation (c'est-à-dire, quand $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$ avec les $\gamma_{\mu\nu}$ petits) les équations (II) sont les mêmes que les équations (I) sauf pour l'équation satisfaite par le courant, qui est

$$(1) \qquad \mathrm{I}_{\mu\nu\sigma,\alpha\alpha} = -\,4p^2\, \mathrm{I}_{\mu\nu\sigma} \quad \text{pour (II)}$$

et

$$(2) \qquad \mathrm{I}_{\mu\nu\sigma,\alpha\alpha} = 0 \quad \text{pour (I)},$$

où

$$\mathrm{I}_{\mu\nu\sigma} = g_{[\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma]}.$$

Si l'on considère l'équation (1) dans le cas d'une particule statique à symétrie sphérique, on a alors

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\rho}{dr}\right) = -\,4p^2 \rho,$$

où ρ est la densité de charge et r la coordonnée radiale. En supposant que p est imaginaire, on trouve une solution de la forme

$$(3) \qquad \rho = \frac{A\, e^{-\alpha^2 r}}{r},$$

où A est une constante arbitraire, et $\alpha^2 > 0$. La solution correspondante pour (2) est

$$(4) \qquad \rho = \frac{A}{r}$$

et un avantage de ma théorie c'est que la densité de la charge diminue plus rapidement quand r augmente. En particulier, l'intégrale

$$4\pi \int_R^\infty \rho r^2\, dr$$

qui donne la quantité de charge à l'extérieur de $r = R$ converge pour (3) mais pas pour (4). Ceci est intéressant si l'on se souvient que dans les solutions *exactes* et statiques à symétrie sphérique de l'ensemble (I), une des difficultés est que la charge totale est infinie.

Pour montrer que les équations (II) impliquent les équations du mouvement pour une charge électrique (ou, en tout cas, la force coulombienne), nous écrivons

$$g_{\underline{\alpha\beta}} = a_{\alpha\beta}, \qquad g_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta},$$

et supposons que les $g_{\alpha\beta}$ peuvent être développés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
a_{00} &= 1 + \lambda^2 \underset{2}{a}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{a}_{00} + \ldots, \\
a_{0n} &= \qquad \lambda^3 \underset{3}{a}_{0n} + \lambda^5 \underset{5}{a}_{0n} + \ldots, \\
a_{mn} &= -\delta_{mn} + \lambda^2 \underset{2}{a}_{mn} + \lambda^4 \underset{4}{a}_{mn} + \ldots, \\
f_{0l} &= \lambda^3 \underset{3}{f}_{0l} + \lambda^5 \underset{5}{f}_{0l} + \ldots, \\
f_{mn} &= \lambda^2 \underset{2}{f}_{mn} + \lambda^4 \underset{4}{f}_{mn} + \ldots.
\end{aligned}$$

Le procédé consiste à exprimer les équations de champ (II b, c et d) en série de puissances de λ avec des coefficients qui dépendent de $a_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées partielles, et à égaler ces coefficients à zéro. Il faut aller jusqu'à λ^3, et puis utiliser le coefficient de λ^4 pour former les intégrales de surface qui donnent les équations du mouvement. Les calculs sont les mêmes que ceux de Callaway sauf pour les termes supplémentaires introduits par $U_{\underset{\cdot}{\mu\nu}}$. Les termes supplémentaires les plus importants sont

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \underset{4}{U}_{mn} &= 2 \underset{2}{f}_{ms} \underset{2}{f}_{sn} + \frac{1}{2} \delta_{mn} \underset{2}{f}_{st} \underset{2}{f}_{st}, \\ \underset{4}{U}_{00} &= -\frac{1}{2} \underset{2}{f}_{st} \underset{2}{f}_{st}. \end{aligned} \right.$$

Au troisième ordre d'approximation les équations du champ nécessitent

$$(6) \qquad \underset{2}{f}_{ms,s} = 0, \qquad \underset{3}{f}_{0s,s} = 0,$$

$$(7) \qquad \underset{2}{I}_{ikl,ss} = -4p^2 \underset{2}{I}_{ikl}, \qquad \underset{3}{I}_{okl,ss} = -4p^2 \underset{3}{I}_{okl},$$

$$(8) \qquad \underset{2}{P}_{00} = \underset{2}{P}_{mn} = \underset{3}{P}_{0m} = 0,$$

où $P_{\underset{\cdot}{\alpha\beta}}$ est le tenseur de Ricci formé avec les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}$. Les équations (8) sont celles qui se présentent quand les équations du mouvement sont déduites en Relativité générale sans champ électromagnétique. En déterminant les $a_{\underset{\cdot}{\alpha\beta}}$ et prenant les intégrales de surface d'une quantité formée de $\underset{4}{P}_{\underset{\cdot}{\alpha\beta}}$, on obtient les équations de mouvement de Newton. Ainsi nous n'avons pas besoin de nous occuper de (8).

Considérons le cas de deux particules de masses $\overset{k}{m}$ et de charges $\overset{k}{e}(k = 1, 2)$, et introduisons un potentiel Φ par

$$\underset{2}{\Phi} = \underset{2}{\overset{1}{\Phi}} + \underset{2}{\overset{2}{\Phi}}.$$

où $\overset{1}{\Phi}$ et $\overset{2}{\Phi}$ se rapportent aux particules 1 et 2, et où

$$\underset{2}{\overset{k}{\Phi}} = \frac{\underset{2}{\overset{k}{e}}}{\overset{k}{r}},$$

$\overset{k}{r}$ signifie la distance du point-du-champ à la particule k :

$$\overset{k}{r}{}^2 = \left(x^m - \overset{k}{\xi}{}^m\right)\left(x^m - \overset{k}{\xi}{}^m\right),$$

$\overset{k}{\xi}{}^m$ étant les coordonnées de $\overset{k}{e}$.

La solution de (6) et (7) est

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \underset{2}{f}_{mn} &= q\, \varepsilon_{mns} \underset{2}{\Phi}_{,s}, \\ \underset{3}{f}_{0t} &= q\, \varepsilon_{0tnm} \underset{3}{\Phi}_{n,m}, \end{aligned} \right.$$

où q est une constante, et où

$$\underset{3}{\Phi}_n = \overset{1}{\underset{3}{\Phi}}_n + \overset{2}{\underset{3}{\Phi}}_n \qquad \text{et} \qquad \overset{k}{\underset{3}{\Phi}}_n = \overset{k}{\underset{2}{\Phi}} \overset{k}{\underset{1}{\dot{\xi}}}{}^n.$$

Ici $\dot{\xi}^n$ représente $\dfrac{d\xi^n}{d\tau}$ $(\tau = x_0 \lambda)$.

Les équations du mouvement jusqu'au quatrième ordre résultent de l'équation

$$(10) \qquad \int^k \left(\underset{4}{R}{}^*_{\underline{mr}} + p^2 \underset{4}{U}{}^*_{\underline{mr}}\right) n_r \, dS = 0,$$

où

$$\underset{4}{R}{}^*_{\underline{mn}} = \underset{4}{R}_{\underline{mn}} - \frac{1}{2} \delta_{mn} \underset{4}{R}_{ss} + \frac{1}{2} \delta_{mn} \underset{4}{R}_{00},$$

et $\underset{4}{U}{}^*_{\underline{mn}}$ est défini pareillement. L'intégrale de surface est indépendante de la forme de la surface qui entoure la $k^{\text{ième}}$ particule, parce qu'on peut vérifier que

$$\underset{4}{R}{}^*_{\underline{mr},r} + p^2 \underset{4}{U}{}^*_{\underline{mr},r} = 0.$$

Les parties relatives à l'inertie et à la gravitation des équations du mouvement résultent de

$$\int^k P^*_{mr} n_r \, dS = 0,$$

comme en Relativité générale; d'autre part, on sait d'après le travail de Callaway que l'équation

$$\int^k \left(\underset{4}{R}{}^*_{\underline{mr}} - \underset{4}{P}{}^*_{\underline{mr}}\right) n_r \, dS = 0$$

ne restreint pas le mouvement, ce qui n'est qu'une autre façon de dire que la théorie d'Einstein-Schrödinger ne donne pas les équations du mouvement pour une particule chargée. Dans ma théorie, donc, les équations du mouvement doivent se déduire de

$$(11) \qquad \int^k \underset{4}{P}{}^*_{mr} n_r \, dS + \int^k p^2 \underset{4}{U}{}^*_{\underline{mr}} n_r \, ds = 0,$$

et la force coulombienne doit être contenue dans la deuxième intégrale à gauche.

Si l'on substitue (9) dans $\underset{4}{U}{}^*_{\underline{mn}}$, on trouve

$$(12) \qquad \underset{4}{U}{}^*_{\underline{mn}} = 2q^2 \underset{2}{\Phi}_{,m} \underset{2}{\Phi}_{,n} - \delta_{mn} q^2 \underset{2}{\Phi}_{,s} \underset{2}{\Phi}_{,s}$$

et l'intégrale de surface de cette expression donne la force coulombienne. On trouve pour les équations du mouvement jusqu'à l'approximation du quatrième ordre

$$\overset{1}{m}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\overset{1}{m}\overset{2}{m}\mathbf{r}}{r^3} + p^2q^2\frac{\overset{1}{e}\overset{2}{e}\mathbf{r}}{r^3}, \tag{13}$$

où $\mathbf{r}$ est la distance de la première particule à une origine qui coïncide à chaque instant avec la position de la deuxième particule. Une équation analogue est valable pour la deuxième particule, et la méthode peut s'étendre au champ de n'importe quel nombre de particules.

Plus tard nous comparerons l'expression (12) avec

$$\underset{4}{\mathrm{R}}^{\star}_{\underline{mn}} - \underset{4}{\mathrm{P}}^{\star}_{\underline{mn}} = \left[\underset{2}{f}_{ms}\underset{2}{f}_{np,s} + \delta_{pm}\underset{2}{\Phi}_{,rn}\underset{2}{\Phi}_{,r} - \delta_{mn}\underset{2}{\Phi}_{,pr}\underset{2}{\Phi}_{,r}\right]_{,p} \tag{14}$$

qui ne donne pas la force coulombienne.

Dans l'équation (13) p est la constante introduite dans les équations du champ initiales, et q est une constante de proportionnalité entre $f_{\alpha\beta}$ et les forces du champ électromagnétique. La valeur de p^2q^2 dépend des unités choisies pour la charge électrique, et, quand elle est établie, il reste encore un paramètre — le rapport $\frac{p}{q}$ — indéterminé.

La méthode d'approximation utilisée dépend de l'hypothèse que les particules se meuvent lentement. Il est donc évident que le deuxième terme dans la force de Lorentz

$$\frac{e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H})}{c}$$

ne pourrait pas exister au quatrième ordre d'approximation. On s'attendrait à ce que ce terme vienne des intégrales de surface formée des coefficients de λ^6.

J'ai essayé de trouver les solutions exactes et statiques à symétrie sphérique dans ma théorie. Comme déjà vu, il reste encore un paramètre indéterminé dans la théorie et j'ai cru possible, dans une solution exacte, de relier au moyen de celui-ci la densité de masse à la densité de charge. Dans la théorie unitaire originale, une des difficultés des solutions exactes est que la charge est distribuée alors que la masse est concentrée en singularités. J'ai espéré que dans la théorie modifiée on trouverait des solutions non singulières avec peut-être une proportionnalité entre la densité de masse et la densité de charge.

Je n'ai pas pu trouver de solutions exactes, les équations sont trop compliquées. J'ai attaqué de deux façons le problème des solutions approchées dans le cas statique à symétrie sphérique. Si l'on prend pour le cas électrique le tenseur fondamental sous la forme

$$g_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & f\sin\theta & 0 \\ 0 & -f\sin\theta & -\beta\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{Bmatrix},$$

on peut développer la solution approchée comme une série de puissances de $\frac{1}{r}$ en écrivant

$$\beta=r^2,\qquad \alpha=1+\frac{2m}{r}+\frac{a_2}{r^2}+\frac{a_3}{r^3}+\ldots,$$

$$\gamma=1-\frac{2m}{r}+\frac{c_2}{r^2}+\frac{c_3}{r^3}+\ldots.$$

$$f=e_0+\frac{e_1}{r}+\frac{e_2}{r^2}+\ldots.$$

Si l'on substitue ces expressions dans les équations de champ de la théorie et si l'on égale à zéro les coefficients des puissances de $\frac{1}{r}$, on peut trouver des relations entre les coefficients m, a_2, a_3, c_2, c_3, e_0, e_1, e_2, ... Si l'on fait cela, on trouve *deux* constantes arbitraires, m et e_0, en plus du rapport $\frac{p}{q}$.

C'est décourageant parce que si la théorie donnait la masse comme un phénomène électromagnétique, on s'attendrait à ce que les deux constantes m et e_0, qui se rapportent respectivement à la masse et à la charge de la particule à symétrie sphérique, soient reliées, au lieu d'être indépendantes.

Il y a, toutefois, une autre méthode de calcul de la solution approchée. Supposons qu'il y ait une solution non singulière de mes équations. Alors, près de l'origine il devrait être possible de développer la solution sous la forme

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha=\frac{1}{\gamma},\\ &\beta=r^2+b_4r^4+b_5r^5+\ldots,\\ &\gamma=1+c_2r^2+c_3r^3+\ldots,\\ &f=e_2r^2+e_3r^3+e_4r^4+\ldots.\end{aligned}\right.$$

On sait que des solutions de cette forme n'existent pas dans la théorie originale parce que toutes les solutions de cette théorie sont singulières à l'origine. De telles solutions n'existent pas non plus dans la théorie d'Einstein-Maxwell. Toutefois, dans ma théorie, on peut commencer le développement (15). N'ayant pas la solution exacte, cependant, on ne peut pas savoir si cette solution serait non singulière pour toutes valeurs positives de r, et si elle satisferait les conditions limites correctes pour $r = \infty$.

4. Conclusion. — La forme modifiée de la théorie d'Einstein-Schrödinger que j'ai décrite était introduite pour donner les équations du mouvement, ou, en tout cas, la force coulombienne entre des charges électriques. La forme de l'hamiltonien que j'ai adoptée

$$\mathfrak{h} + p^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu} g_{\underset{\vee}{\nu\mu}},$$

est semblable à celle de la théorie d'Einstein-Maxwell

$$\mathcal{G} + 4\pi \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathrm{F}_{\nu\mu}$$

qui donne les équations du mouvement. Ce n'est donc pas très surprenant que la force coulombienne découle des équations que je dérive, quoique je doive signaler que mon $\mathrm{U}_{\mu\nu}$ diffère sous certains rapports du tenseur d'énergie électromagnétique de la théorie d'Einstein-Maxwell, et que ma théorie aboutit à des résultats différents; par exemple, la restriction sur le courant, laquelle se présente dans l'approximation du premier ordre.

Pour arriver aux équations du mouvement, j'ai dû compliquer considérablement la théorie originale. Toutefois, je ne crois pas que le résultat puisse être obtenu avec une modification moins radicale de la théorie.

Quand on étudie l'application de la méthode d'Einstein, d'Infeld et de Hoffmann à mes équations on voit pourquoi une addition telle que $\mathrm{U}_{\mu\nu}$ est nécessaire pour obtenir les équations du mouvement. Si l'on compare les expressions (12) et (14) il n'est pas difficile de voir qu'alors que pour $\overset{1}{r}$ et $\overset{2}{r}$ grands, $\underset{4}{\mathrm{U}}{}^{\star}_{\underline{mn}}$ contient des termes d'ordre $\frac{\overset{1}{e}\overset{2}{e}}{\overset{1}{r}{}^2\overset{2}{r}{}^2}$, l'expression (14), qui contient des dérivées d'un ordre plus élevé, consiste en termes comme $\frac{\overset{1}{e}\overset{2}{e}}{\overset{1}{r}{}^3\overset{2}{r}{}^3}$ et $\frac{\overset{1}{e}\overset{2}{e}}{\overset{1}{r}{}^2\overset{2}{r}{}^4}$, etc. Alors, quand on calcule les intégrales de surface, les contributions de ces termes sont nulles, et le mouvement n'est pas restreint; mais même quand ils ne s'annulent pas, les termes ne sont pas de degré tel en $\overset{1}{r}$ et $\overset{2}{r}$ qu'ils puissent conduire par intégration à la force coulombienne.

Pour obtenir la force coulombienne, des termes quadratiques dans les $f_{\alpha\beta}$ semblent être essentiels, et ne peuvent pas provenir de la théorie originale. Pour cette raison aussi, je crois qu'aucune modification de la théorie qui contient seulement la connexion $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ne peut donner la force coulombienne. Une telle modification ne pourrait qu'introduire dans l'approximation du quatrième ordre encore des termes n'ayant pas l'ordre voulu. Pour cette raison il me semble que des modifications dans l'hamiltonien de la théorie sont inutiles à moins qu'elles ne donnent, de façon ou d'autre, un terme quadratique dans les $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$.

Il reste la possibilité que nous avons tort d'identifier les forces du champ électromagnétique avec $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ ou $g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}$. Les autres identifications ne sont pas attrayantes, et l'idée d'utiliser, pour représenter le champ électromagnétique, la partie antisymétrique du tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, était un aspect de la simplicité mathématique de la théorie originale. Mais, au point de vue physique, l'interprétation usuelle du tenseur fondamental est bizarre pour la raison suivante. La partie symétrique de ce tenseur représente les *potentiels* gravitationnels, alors que la partie antisymétrique représente non pas des potentiels mais des *forces du champ* électromagnétique. Ceci est la raison profonde pour laquelle la théorie d'Einstein-Schrödinger ne donne pas la force coulombienne. Dans les équations

$$R_{\underline{\mu\nu}} = 0$$

les termes qui conduisent, dans la méthode d'Einstein, d'Infeld et de Hoffmann, à la force gravitationnelle, sont certains de ceux qui sont quadratiques par rapport aux dérivées premières des potentiels gravitationnels $g_{\underline{\mu\nu}}$, et de ceux qui contiennent ces potentiels multipliés par leurs dérivées secondes. Les termes correspondants dans les $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ se rapportent non pas aux potentiels mais aux forces du champ électromagnétique. On ne peut guère espérer que ces termes engendrent une loi de force de l'inverse carré.

Einstein était d'avis que ces difficultés seraient surmontées si des solutions exactes et non singulières des équations du champ représentant des particules mobiles étaient connues. Quant à moi, je ne vois pas pourquoi les lois du mouvement de ces particules non singulières doivent être fondamentalement différentes de celles obtenues par la méthode d'approximation. De telles particules engendreraient probablement les potentiels usuels à grande distance, et donc le procédé approché doit s'appliquer. En effet, si de telles solutions existent, et si les particules sont matérielles, alors leur mouvement *gravitationnel* est donné probablement correctement par le procédé d'approximation, qui opère pour le champ gravitationnel comme en Relativité générale. Je ne comprends pas pourquoi la méthode d'approximation donne le résultat correct dans le cas gravitationnel mais non pas dans le cas électrique, et je serais très surpris si la découverte des solutions non singulières donnait la solution du problème.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. Hlavaty, *Rendiconti del Seminaro Matematico, Università e Politecnico di Torino*, t. 13, 1953-1954, p. 1.

[2] A. Einstein, Infeld and Hoffmann, *Annals of Mathematics*, t. 39, 1938, p. 65.

[3] J. Callaway, *Physical Review*, t. 92, 1953, p. 1567.

[4] Pham Tan Hoang, *Comptes rendus*, t. 241, 1955, p. 170.

[5] M.-A. Tonnelat, *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*.

[6] W. B. Bonnor, *Proceedings of the Royal Society*, A, t. 226, 1954, p. 336.