FRITZ BOPP

La mécanique quantique est-elle une mécanique statistique classique particulière ?

Annales de l'I. H. P., tome 15, n° 2 (1956), p. 81-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1956__15_2_81_0>

La mécanique quantique est-elle une mécanique statistique classique particulière ?

par

Fritz BOPP,

(Munich, Institut de Physique théorique de l'Université.)

---

1. **Le but de la présente étude.** — Les systèmes atomiques ont des propriétés ondulatoires aussi bien que corpusculaires. C'est un fait dont tous les essais d'interprétation de la Mécanique ondulatoire doivent rendre compte. L'idée de Born — d'après laquelle la fonction d'onde décrit, d'une façon statistique, l'état de la particule — est une conséquence immédiate de ce dualisme entre particule et onde. Cette interprétation statistique ne pose aucun problème. Mais les difficultés commencent dès que nous considérons simultanément les ondes et les particules comme les représentants de la matière atomique. En ce cas, les deux notions sont nettement incompatibles parce qu'un système atomique ne peut à la fois être localisé et étendu dans l'espace.

L'exemple de l'Acoustique, ou la coexistence des deux notions (ondulatoires et corpusculaires) est tout à fait coutumière, montre clairement que l'incompatibilité de ces deux notions est due à la proposition qu'elles décrivent toutes les deux un même objet. Par contre, en Acoustique, seules les particules (ou éléments de masse) sont considérées comme représentants de la matière tandis que les ondes ne décrivent pas directement le mouvement de la matière, mais plutôt le changement de certaines formes (comme par exemple celui de la surface, dans le cas d'ondes dans l'eau). C'est pour cette raison, que l'on peut éviter tout conflit entre l'idée des ondes et celle des particules dans le cas de l'Acoustique.

Nous pouvons donc résumer la situation comme suit : il est impossible de s'imaginer la matière atomique représentée à la fois par des ondes et des particules, d'où la conséquence logique : *ou bien* on ne peut s'imaginer la matière représentée que par une des deux conceptions, *ou bien* aucune des deux ne convient. En tout cas, l'emploi simultané des deux est exclu.

Or, l'expérience montre pourtant que ces deux conceptions ont leur importance pour les systèmes atomiques, ce qui nous met devant l'alternative suivante : ou bien les deux conceptions ne se rapportent pas de la même manière aux systèmes atomiques (c'est-à-dire que la situation est semblable à celle de l'Acoustique), ou bien aucune des deux conceptions ne répond tout à fait à la réalité. Dans ce dernier cas, les systèmes atomiques se présentent à nous sous forme de particules ou d'ondes selon les dispositions de l'expérience choisie. Par conséquent, il serait insensé de parler de l'existence d'une particule ou d'une onde sans se référer à une observation déterminée. Il n'y a plus moyen de définir — d'une façon objective — ce que c'est qu'un système atomique. Toute objectivation est donc rendue impossible dans le domaine de la Physique atomique. Pour saisir toute la réalité, il est donc nécessaire de se servir de représentations contradictoires, mais se complétant d'une manière dialectique; bref, des représentations complémentaires, comme disait M. Bohr.

Cette doctrine de la complémentarité de Bohr et Heisenberg est sûrement irréfutable. Elle est sans lacune logique et résoud admirablement toutes les difficultés résultant du dualisme ondes-particules. De plus, cette théorie est excessivement séduisante pour les sciences non physiques parce qu'il semble que cette nouvelle *catégorie* — la complémentarité — soit d'une extrême importance bien au-delà du domaine propre à la Physique.

Malgré tout cela, les objections contre la doctrine de la complémentarité n'ont jamais complètement cessé et se sont même accrues ces dernières années parce que l'on peut seulement prouver qu'elle est sans contradiction, mais non pas qu'elle est indispensable. Nous avons vu tout à l'heure qu'elle est inévitable si l'on suppose que les conceptions ondulatoires et corpusculaires s'appliquent de la même manière aux systèmes atomiques. Pourtant, c'est une hypothèse qui ne se déduit ni de l'expérience ni de l'interprétation statistique de Born.

Ceux qui prennent la Physique uniquement pour un catalogue de données ne s'occuperont peut-être pas de la question de savoir si la Mécanique ondulatoire ne permet qu'une seule interprétation ou non. Mais, quiconque considère comme une connaissance essentielle de savoir si la question d'interprétation permet plusieurs réponses, devra faire face à une tâche réelle qui dépasse les bornes de la doctrine de la complémentarité.

On verra plus loin qu'il y a une deuxième conception qui nous fournit de nouvelles connaissances, malgré son équivalence mathématique. En outre, il serait possible que cette nouvelle forme soit d'une certaine importance pour les problèmes qui présentent actuellement des difficultés insurmontables pour la théorie quantique des champs. Évidemment, personne ne pourra savoir d'avance si cela arrivera réellement.

Au point de vue philosophique, l'importance de la doctrine de la complémentarité dépend essentiellement de la question : Est-ce que cette interprétation est une nécessité ou seulement une possibilité ? De ce point de vue, la question que nous entamons ici dépasse les limites de la Physique.

Selon nous, le raisonnement suivant montre qu'il y a vraiment encore une seconde interprétation qui ne nous prive pas de la possibilité d'une objectivation dans le domaine des systèmes atomiques.

En Physique atomique, on peut dire : toutes les observations, faites avec des systèmes atomiques, nous permettent de constater que « maintenant et ici » un événement a eu lieu ou qu'aucun événement n'a eu lieu. C'est analogue à la théorie générale de la relativité, à la base de laquelle se trouve la constatation que toutes les expériences physiques peuvent être réduites à des coïncidences dans l'espace-temps. En Physique atomique, nous observons donc à chaque instant des événements locaux. Le noircissement d'une plaque photographique, qui a subi l'influence d'un champ d'ondes en interférences derrière un réseau de diffraction, en donne un exemple. Le noircissement d'un grain peut être la suite d'une ionisation d'un de ses atomes par la collision avec une particule ou un quantum. L'évidence de cet effet est encore plus nette si nous remplaçons la plaque photographique par un multiplicateur d'électrons tout en réduisant l'intensité des particules ou quanta jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une seule particule ou un seul quantum à la fois dans l'appareil.

L'observation pourra donc être réalisée n'importe où et n'importe quand, on fera toujours l'une de ces deux constatations : « ici et maintenant, un événement a eu lieu » ou bien « ici et maintenant, aucun événement n'a eu lieu ».

Une troisième possibilité est exclue. C'est un fait. L'événement consiste dans un changement aussi bien localisé que possible, mais quand même de nature macrophysique et donc observable. Cet événement nous permet la conclusion qu'en ce moment et en ce lieu une particule est arrivée. Ici, la particule est donc définie comme la cause qui a provoqué l'événement. Le principe de la causalité est indispensable pour la conclusion que la particule se trouve au moment même de l'événement sur le lieu où l'événement arrive et pas ailleurs. Mais, cette application du principe de causalité n'a rien à voir avec la question de savoir si le mouvement est déterminable ou non [1].

Les événements nous renseignent sur la position des particules au moment où les événements ont lieu. Nous ne connaissons pas tous les actes et nous ignorons aussi où se trouvent les particules entre-temps. Nous ne savons même pas s'il est raisonnable de parler d'une existence des particules pendant les entre-temps. La doctrine de la complémentarité nie justement cette existence de particules entre deux événements et nous apprend qu'il convient d'adopter, pendant ces laps de temps, la notion d'ondes.

Si la doctrine de la complémentarité était indispensable à la compréhension de la Mécanique ondulatoire, il en résulterait le phénomène unique dans l'histoire des sciences de la nature qu'un problème purement philosophique (tel que le problème de l'existence) pourrait être résolu de manière purement physique. Mais, habituellement, les succès de la Physique ne sont pas dus à la résolution mais plutôt à l'élimination des problèmes philosophiques.

C'est ce que Newton a formulé, d'une façon admirable, et tout à fait

(1) *Cf.* M. Born, *Natural Philosophie of Cause and Chance*, Oxford, 1949. Chapitre II.

applicable à nos réflexions, dans son traité d'Optique. Dans la proposition XII du deuxième volume, il dit, en parlant du phénomène des anneaux d'interférences (en omettant quelques digressions peu importantes) : « ... ici, je n'examine pas les raisons de ce phénomène. Ceux qui ne veulent pas reconnaître une nouvelle découverte avant qu'ils ne puissent l'expliquer par une hypothèse, pourront toujours supposer que les rayons optiques provoquent des oscillations qui se propagent d'une manière analogue aux oscillations de l'air quand elles produisent un son. Ici, je ne veux pas discuter si cette hypothèse est juste ou fausse, je me contente d'avoir trouvé que les rayons optiques reçoivent, par une cause quelconque, la faculté ou la disposition d'être réfléchies ou réfractées. »

Comme Newton, nous voulons d'abord nous contenter de constater avec quelle « disposition », c'est-à-dire ici avec quelle « probabilité » les particules peuvent déclencher « ici et maintenant » des événements locaux. Ainsi, nous évitons la décision philosophique de savoir s'il s'agit de corpuscules ou d'ondes — dans un sens métaphysique — ou si nous avons quelque chose qui ne peut être saisi que par la catégorie de la complémentarité (ce qui serait également une décision métaphysique).

2. Les équations statistiques du mouvement en Mécanique quantique. — Nous examinerons, à titre d'exemple, le mouvement selon une seule dimension d'un point de masse M sous l'influence d'un potentiel $V(x)$. En ce cas, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t). \tag{1}$$

Si nous voulions directement atteindre notre but à partir de cette équation, nous aboutirions à des résultats semblables à ceux de M. de Broglie et de ses successeurs. Nous serions amenés a nous représenter les particules sous forme d'ondes et nous serions ainsi obligés de faire une hypothèse pour répondre à la question : comment une particule peut-elle avoir des propriétés ondulatoires ?

Il se peut que de pareilles hypothèses soient fort raisonnables; mais, à mon avis, l'expérience actuelle ne fournit pas encore une base suffisante. Pour cette raison, nous voulons ici éviter ces hypothèses, ce qui est possible si nous ne prenons pas seulement en considération la variété des probabilités indépendantes qui se déduisent de la fonction d'ondes de Schrödinger, mais aussi la plus grande variété des probabilités linéairement indépendantes, cette dernière ayant la même étendue que la variété des éléments de la matrice statistique de von Neumann. Il semble donc mieux approprié à notre problème de traiter les « cas mixtes » de la Mécanique quantique que de se borner aux « cas purs » comme on le fait généralement.

Dans les cas mixtes, la fonction d'ondes de Schrödinger est remplacée par la matrice statistique de von Neumann $\underline{\mathrm{P}}(t)$ avec ses éléments

$$\langle x' \,|\, \underline{\mathrm{P}}(t) \,|\, x'' \rangle = \mathrm{P}(x', x'', t), \tag{2}$$

qui obéit à l'équation de von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \mathrm{P}(x', x'', t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{M}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x''^2}\right)\mathrm{P}(x', x'', t) + [\mathrm{V}(x') - \mathrm{V}(x'')]\,\mathrm{P}(x' x'' t). \tag{3}$$

Soit

$$\psi(x, t) = \Phi_k(x, t), \qquad \text{avec} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

un jeu complet d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation de Schrödinger. Un jeu complet de solutions de l'équation (3) est alors donné par

$$\mathrm{P}(x', x'', t) = \Phi_k(x', t)\Phi_l^*(x'', t), \qquad \text{avec} \quad k, l = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

Ici, « complet » veut dire que chaque solution doit dépendre, d'une manière linéaire, de toutes les autres données ci-dessus. La plus grande variété des solutions linéairement indépendantes montre que l'équation de von Neuman (3) est d'une validité plus générale que celle de Schrödinger.

Il a déjà été montré que les variétés des solutions indépendantes de l'équation de von Neumann et de celle de Liouville sont les mêmes. Sous cette forme, l'énoncé est démontré pour un espace composé d'un nombre fini de points. Mais, la démonstration est aussi applicable sur un espace continu; car la variété des fonctions hermitiennes $\mathrm{P}(x', x'')$ de deux variables est égale à la variété des fonctions réelles $f(p, q)$ de deux variables. Il y a donc une transformation univoque et réversible menant d'une variété de fonctions à l'autre.

Soit $\underline{\mathrm{G}}$ l'opérateur d'une quantité physique en Mécanique quantique sa valeur moyenne est alors pour les cas purs

$$\overline{\mathrm{G}} = \psi^{+} \underline{\mathrm{G}} \psi. \tag{6}$$

S'il s'agit de cas mixtes, par contre, cette valeur moyenne devient

$$\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{Tr}(\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{G}}). \tag{7}$$

Ces valeurs moyennes sont des probabilités élémentaires si la matrice $\underline{\mathrm{G}}$ est idempotente avec la trace 1, c'est-à-dire si elle obéit aux équations

$$\underline{\mathrm{G}}^2 = \underline{\mathrm{G}}, \qquad \mathrm{Tr}\,\underline{\mathrm{G}} = 1, \tag{8}$$

d'où suit directement pour les éléments de matrice

$$\langle x' \mid \underline{\mathrm{G}} \mid x'' \rangle = u(x')\,u^{*}(x''), \qquad \int u^{*}(x)\,u(x)\,dx = 1. \tag{9}$$

Ainsi, toutes les probabilités élémentaires qui peuvent être déduites de $\underline{\mathrm{P}}$ ont la forme suivante :

$$\mathrm{W} = u^{+}\,\underline{\mathrm{P}}\,u = \int u^{*}(x')\,\mathrm{P}(x', x'', t)\,u(x'')\,dx'\,dx''. \tag{10}$$

Nous considérons maintenant un ensemble à deux dimensions de fonctions u, à savoir

$$u(p, q, x) = e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,u(x - q) \tag{11}$$

que l'on obtient à partir de la fonction particulière

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\,l\hbar}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{12}$$

par une translation dans l'espace des phases, c'est-à-dire par la transformation $\underline{\mathrm{T}}(p, q)$, avec ses éléments :

$$\langle x' \mid \underline{\mathrm{T}}(p, q) \mid x'' \rangle = \exp\left(\frac{ipx'}{\hbar}\right)\delta(x' - x'' - q). \tag{13}$$

En effet, on vérifie aisément l'équation suivante :

$$\int \langle x' \mid \underline{\mathrm{T}}(p, q) \mid x'' \rangle\,u(x'')\,dx'' = u(p, q, x'). \tag{14}$$

Au moyen des fonctions (11), nous pouvons définir la fonction de répartition

$$(15)\quad f(p, q, t) = \frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar} \times \int \exp\left[-\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \left(\frac{q-x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2\right] P(x', x'', t)\, dx'\, dx''.$$

Puisque $\underline{P}$ est hermitienne et définie positive, f doit être réelle et positive. La valeur $f = 0$ est admise; toutefois, $f \not\equiv 0$ parce que

$$(16)\quad \int f(p, q, t)\, dp\, dq = \int P(x', x'', t)\, \delta(x'-x'')\, dx'\, dx'' = \mathrm{Tr}\, \underline{P} = 1.$$

Si nous nous rappelons que chaque valeur de la fonction f est rapportée à un certain point de l'espace des phase, nous pouvons donc appeler $f(p, q, t)$ la « densité de la probabilité dans l'espace des phases ».

Il est pourtant surprenant qu'il y ait, à côté du quantum d'action $\hbar$, une longueur l. Il paraît de plus que l est d'une importance fondamentale pour la formation de $f(p, q, t)$. En tous cas, la relation (15) ne peut être inversée si l est égal zéro ou infini. Dans l'état actuel de nos connaissances, il est impossible de dire s'il faut attribuer à l une valeur définie ou non. Nous ignorons également si la fonction (12) est définitivement la base. Mais pour les réflexions suivantes, la valeur particulière prise par l est sans importance si nous exceptons $l = 0$ et $l = \infty$. Même une variation de la fonction de base $u(x)$ de l'équation (12) n'impliquera probablement pas de changement essentiel. Le choix particulier de $u(x)$ ne signifie donc aucune restriction essentielle de nos possibilités. En outre, tout choix sans singularité conduit à des équations qui sont équivalentes à celles de la Mécanique quantique. Évidemment la fonction $u(x)$ décrit la loi d'erreur de l'observation des lieux, peu importe qu'elle soit fondamentale ou accidentelle; et l'équation (12), est la loi d'erreur de Gauss.

Il nous reste encore à montrer que l'équation (15) peut être inversée. Dans ce but, nous l'écrirons sous la forme suivante :

$$f(p, q, t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi^3}\, l\hbar} \exp\left(-\frac{2q^2}{l^2}\right) \times \int \exp\left[-\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \frac{(x'-x'')^2}{2l^2} - \frac{(x'+x'')^2}{2l^2} + \frac{2q(x'+x'')}{l^2}\right] P(x', x'', t)\, dx'\, dx'').$$

Posant

$$x' + x'' = \sqrt{2}\, l\xi, \qquad x' - x'' = \sqrt{2}\, l\eta$$

et, par conséquent aussi,

$$dx'\, dx'' = l^2\, d\xi\, d\eta,$$

on obtient

$$f(p, q, t) = \frac{2l}{\sqrt{8\pi^3}\,\hbar} e^{-\frac{l^2 p^2}{2\hbar^2}} \int e^{-\left(\xi - \sqrt{2}\frac{q}{l}\right)^2 - \left(\eta + \frac{ilp}{\sqrt{2}\,\hbar}\right)^2}$$
$$\times \mathrm{P}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{l}{\sqrt{2}}(\xi - \eta), t\right) d\xi\, d\eta.$$

Soit

$$\mathrm{P} = \sum_{m,n} \varphi_{mn}(t)\, \mathrm{He}_m\left(\sqrt{2}\,\xi\right) \mathrm{He}_n\left(\sqrt{2}\,\eta\right)$$

le développement des éléments de matrice P en polynomes d'Hermite. D'après Magnus-Oberhettinger (2) l'équation (15) devient

$$f(p, q, t) = \frac{l}{\sqrt{2\pi}\,\hbar} e^{-\frac{l^2 p^2}{2\hbar^2}} \sum_{mn} \varphi_{mn} \left(\frac{2q}{t}\right)^m \left(-\frac{ilp}{\hbar}\right)^n.$$

Tant qu'il existe un développement de f en série de puissances de p et q, on peut exprimer P par une série de polynomes d'Hermite dont les coefficients se calculent à partir de la fonction f. La convergence de la série pour P dans la limite $\xi, \eta \to \infty$ est la même que celle du développement de f parce que les séries sont asymptotiquement identiques.

Ainsi, $\mathrm{P}(x', x'', t)$ et $f(p, q, t)$ sont des représentations équivalentes de l'état du système mécanique-quantique. Nous pouvons donc remplacer l'équation de von Neumann par une équation équivalente pour $f(p, q, t)$. Dans ce but, nous multiplions l'équation (3) par le facteur

$$-\frac{2i}{\sqrt{2\pi^3}\, l\hbar^2} \exp\left[-\frac{ip}{\hbar}(x' - x'') - \left(\frac{q - x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q - x''}{l}\right)^2\right] \equiv -\frac{2i}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar^3} e^{\mathrm{Q}}.$$

et intégrons sur x' et x''. Tenant compte de l'équation (15), on obtient ainsi

$$(17) \qquad \frac{\partial f(p, q, t)}{\partial t} = -\frac{2i}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar^2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{M}} \int e^{\mathrm{Q}} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x''^2}\right) dx'\, dx'' \right.$$
$$\left. + \int [\mathrm{V}(x') - \mathrm{V}(x'')]\, e^{\mathrm{Q}}\, \mathrm{P}\, dx'\, dx'' \right\}.$$

(2) W. Magnus, F. Oberhettinger, *Formule und Sätze für die speziellen funktionen der mathematischen Physik*, Berlin, 1943, chapitre 8, § 5, p. 139.

Une intégration par partie sur le premier terme de l'intégrand dans la première intégrale $\left[\text{avec } Q = -\left(\frac{q-x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2 - \frac{ip}{\hbar}(x'-x'')\right]$ donne

$$\left(-\frac{p^2}{\hbar^2} - \frac{4ip}{\hbar l^2}(q-x') + \frac{4}{l^4}(q-x')^2 - \frac{2}{l^2}\right) e^Q\, P.$$

De même, le deuxième terme de la première intégrale devient

$$-\left[-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{4ip}{\hbar l^2}(q-x'') + \frac{4}{l^4}(q-x'')^2 - \frac{2}{l^2}\right] e^Q\, P,$$

d'où la somme

$$\left[-\frac{4ip}{\hbar l^2}(2q-x'-x'') - \frac{4}{l^4}(x'-x'')(2q-x'-x'')\right] e^Q\, P.$$

Or,

$$\frac{\partial e^Q}{\partial p} = -\frac{i}{\hbar}(x'-x)\, e^Q, \qquad \frac{\partial e^Q}{\partial q} = -\frac{2}{l^2}(2q-x'-x_1)\, e^Q.$$

On peut donc remplacer dans les parenthèses devant e^Q

$$(18) \qquad x'-x'' \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}, \qquad 2q-x-x'' \to -\frac{l^2}{2}\frac{\partial}{\partial q},$$

ou bien, ce qu'il nous faut pour le terme potentiel,

$$(19) \qquad x' \to q + \frac{l^2}{4}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}, \qquad x'' \to q + \frac{l^2}{4}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}.$$

L'intégrand précité s'écrit maintenant

$$\left(\frac{2ip}{\hbar}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{2\hbar}{il^2}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right) e^Q P$$

et l'équation (17) devient, si nous tenons compte de l'équation (19) dans le terme potentiel

$$(20) \qquad \frac{\partial f(p, q, t)}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial f(p, q, t)}{\partial q} + \frac{\hbar^2}{M l^2}\frac{\partial^2 f(p, q, t)}{\partial p\,\partial q}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left[V\left(q + \frac{l^2}{4}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{l^2}{4}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right] f(p; q, t).$$

C'est une équation statistique du mouvement pour la fonction de répartition $f(p, q, t)$ que nous avons définie par l'équation (15) et qui est apparentée à l'équation de Liouville de la Mécanique statistique.

En définissant l'oscillateur harmonique linéaire par

$$V(x) = \frac{M}{2}\omega_0^2 x^2, \tag{21}$$

on obtient au lieu de l'équation (20) le cas particulier

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial f}{\partial q} - M\omega_0^2 q \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\hbar^2}{M l^2}\left[1 - \left(\frac{M l^2 \omega_0}{2\hbar}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}. \tag{22}$$

Ici, de même que dans le cas de l'absence de tout champ potentiel, la comparaison avec l'équation de Liouville est particulièrement remarquable.

Soit f_0 une solution de l'équation de Liouville

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial f_0}{\partial q} - M\omega_0^2 q \frac{\partial f_0}{\partial p} = 0. \tag{23}$$

Il s'en suit, si nous replaçons f_0 par les valeurs moyennes locales

$$\bar{f}_0(p, q, t) = \frac{1}{\pi\,\Delta p\,\Delta q} \times \int \exp\left[-\left(\frac{p-p'}{\Delta p}\right)^2 - \left(\frac{q-q'}{\Delta q}\right)^2\right] f(p', q', t)\,dp'\,dq', \tag{24}$$

que l'on obtient en prenant la moyenne de f_0 dans de petits domaines de l'espace de phase, ce qui est mieux adapté aux observations réelles,

$$\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial q} - M\omega_0^2 q \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial p} = -\frac{\Delta p^2}{2M}\left[1 - \left(\frac{M\,\Delta q\,\omega_0}{\Delta p}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial p\,\partial q}. \tag{25}$$

Cette équation est identique à (22) si l'on met

$$\Delta p = \frac{\hbar}{l}\sqrt{2}, \qquad \Delta q = \frac{l}{\sqrt{2}}. \tag{26}$$

Cette équivalence est indépendante de la fréquence et donc également existante dans le cas d'un mouvement qui n'est pas sous l'influence de forces extérieures, c'est-à-dire pour $\omega_0 = 0$.

Dans ce dernier cas, aussi bien que dans le cas d'un oscillateur harmonique, l'équation dérivée de celle de Liouville ne diffère pas de celle de von Neumann ([3]).

([3]) *Cf.* E. Wigner, *Phys. Rev.*, t. 40, 1932, p. 49, équation (8). Ici nous trouvons une équivalence complète entre l'équation de Liouville et celle de Wigner dans le cas des oscillateurs harmoniques.

Vu que les matrices statistiques $\underline{P}$, qui sont à valeurs propres positives conservent cette propriété et fournissent une fonction de répartition essentiellement positive, on peut déjà dire d'avance : Les fonctions de répartition qui peuvent être affectées à un certain moment à un système de la Mécanique quantique gardent cette propriété et restent toujours positives.

Tout système de la Mécanique quantique peut donc être affecté, selon l'équation (15), *d'un ensemble statistique de points dans l'espace de phase.*

Pourtant, l'inversion de ce théorème n'est pas juste. Il y a bien des fonctions de répartition positives $f(p, q, t)$ sans correspondance en Mécanique quantique, par exemple toutes celles qui ne sont pas compatibles avec la relation d'incertitude. Mais, que se passe-t-il pour de pareilles répartitions anti-heisenbergiennes au cours du temps? Est-ce que l'équation (20) a aussi des solutions anti-heisenbergiennes et pourquoi sont-elles à exclure, si elles existent, de la Mécanique quantique?

La réponse de la doctrine de la complémentarité est la suivante : Ici, nous rencontrons le domaine réservé à la conception d'ondes. Certe, il est possible de parler seulement des causes localisées d'accidents. Il est compréhensible que l'on obtient pour les lieux d'accidents des équations statistiques qui sont comparables à l'équation de Liouville. Mais, si nous avions affaire à de véritables particules, il faudrait que toutes les fonctions de répartition soient réalisables. Qu'elles ne le soient pas s'explique facilement par la nature ondulatoire des particules.

Assurément, les propriétés ondulatoires sont étroitement liées à la possibilité de différence entre les ensembles réalisables et irréalisables ; mais la nécessité de la doctrine de la complémentarité serait seulement prouvée s'il n'était pas possible de comprendre cette classification par les équations statistiques mêmes, ce qui est justement possible.

Dans la troisième section, nous montrerons que les répartitions anti-heisenbergiennes sont éliminées. Là nous considérons un autre exemple : En regardant la fonction de répartition (24), on reconnaît facilement que dans ce cas, seules les répartitions ayant une incerttitude finie peuvent avoir un sens physique, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de différencier les ensembles *réalisables* et *irréalisables*, même si la structure corpusculaire de ses objets est hors question.

3. L'entropie de l'ensemble comme nombre caractéristique pour les différentes classes de solutions. — L'équation statistique du mouvement (2.20) fournit toute la fonction de répartition $f(p, q, t)$ si ses valeurs sont connues à un seul instant. D'après la remarque faite à la fin de la deuxième section, les solutions se divisent en deux classes : celles qui peuvent être déduites d'une matrice statistique (et qui obéissent, par conséquent, à la relation d'incertitude) et celles qui ne peuvent être déduites de P et qui n'obéissent donc pas à la relation d'incertitude. Vu que cette classification ne varie pas avec le temps, il suffit de considérer les fonctions de répartition en un seul instant où elles peuvent être choisies — au moins du point de vue purement mathématique — de façon tout à fait arbitraire.

Nous baserons notre étude sur les fonctions de répartition du type suivant :

$$f(p, q) = \frac{1}{\pi \Delta p \Delta q} \exp\left(-\frac{p^2}{\Delta p^2} - \frac{q^2}{\Delta q^2}\right). \tag{1}$$

Parmi ces fonctions, il y a tout aussi bien des répartitions heisenbergiennes que anti-heisenbergiennes. Un représentant de la première classe est le cas limite de répartition uniforme (Δp, $\Delta q \to \infty$) ; un représentant de la deuxième classe est la distribution (Δp, $\Delta q \to 0$).

Pour pouvoir mieux séparer les deux classes, il nous faudra regarder la matrice statistique appartenant à (1). Selon l'équation (2.15) on la trouve à partir de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} &\sqrt{2\pi}\, \frac{l\hbar}{\Delta p \Delta q} \exp\left(-\frac{p^2}{\Delta p^2} - \frac{q^2}{\Delta q^2}\right) \\ &\quad = \int \exp\left(-\frac{ip}{\hbar}(x' - x'') - \left(\frac{q - x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q - x''}{l}\right)^2\right) \mathrm{P}(x', x'')\, dx'\, dx''. \end{aligned} \tag{2}$$

Cette équation est séparable. En substituant

$$x' = x + \frac{\xi}{2}, \qquad x'' = x - \frac{\xi}{2} \tag{3}$$

et

$$\mathrm{P}(x', x'') = \mathrm{A}(x)\, \mathrm{B}(\xi), \tag{4}$$

on obtient

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{l\hbar}{\Delta p\,\Delta q}\exp\left(-\frac{p^2}{\Delta p^2}-\frac{q^2}{\Delta q^2}\right)$$
$$=\int\exp\left(-\frac{\xi^2}{2l^2}-\frac{ip\xi}{\hbar}\right)\mathrm{B}(\xi)\,d\xi\int\exp\left(-\frac{2}{l^2}(q-x)^2\right)\mathrm{A}(x)\,ax,$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$(5)\qquad \sqrt{2\pi}\,\frac{l\hbar}{\Delta p\,\Delta q}\exp\left(-\frac{q^2}{\Delta q^2}\right)=\int\exp\left(-\frac{2}{l^2}(q-x)^2\right)\mathrm{A}(x)\,dx,$$

si l'on choisit $\mathrm{B}(\xi)$ de façon que

$$(6)\qquad \exp\left(-\frac{p^2}{\Delta p^2}\right)=\int\exp\left(-\frac{\xi^2}{2l^2}-\frac{ip\xi}{\hbar}\right)\mathrm{B}(\xi)\,d\xi$$

Ces deux équations peuvent être résolue au moyen de fonctions du type gaussien.

En posant $\mathrm{B}=b\exp(-\beta\xi^2)$, l'équation (6) devient

$$\exp\left(-\frac{p^2}{\Delta p^2}\right)=b\sqrt{\frac{2\pi l^2}{1+2\beta l^2}}\exp\left(\frac{-l^2p^2}{2\hbar^2(1+2\beta l^2)}\right),$$

d'où il suit

$$(7)\qquad \beta=\frac{\Delta p^2}{4\hbar^2}-\frac{1}{2l^2}$$

et

$$(8)\qquad b=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\Delta p}{2\hbar}.$$

De la même manière, on obtient de (5), avec $\mathrm{A}=a\exp(-\alpha x^2)$.

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{l\hbar}{\Delta p\,\Delta q}\exp\left(-\frac{q_2}{\Delta q^2}\right)=a\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\frac{2}{l^2}}}\exp\left(-\frac{2q^2}{l^2}+\frac{4q^2}{l^2(2+\alpha l^2)}\right).$$

On a donc

$$(9)\qquad \alpha=\frac{2}{2\Delta q^2-l^2},\qquad a=\frac{2\hbar}{\Delta p}\sqrt{\frac{2}{2\Delta q^2-l^2}}.$$

La matrice statistique appartenant à la fonction de répartition (1) devient maintenant

$$(10)\qquad \mathrm{P}(x',x'')=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\Delta q^2-l^2}}\exp\left[-\frac{(x'+x'')^2}{4\Delta q^2-2l^2}-\left(\frac{\Delta p^2}{4\hbar^2}-\frac{1}{2l^2}\right)(x'-x'')^2\right]$$

et existe pour n'importe quelle valeur des paramètres Δp et Δq.

Mais cette matrice n'est pas toujours définie positive. Si, par exemple $\Delta p = \frac{\hbar}{l}\sqrt{2}$, le second terme de l'exposant devient zéro et les fonctions propres sont $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ dont les valeurs propres ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe. Dans ce cas, la matrice est sûrement indéfinie. Quelle est la condition pour que P soit à éléments positifs?

On trouvera la réponse si l'on écrit P sous la forme suivante :

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \exp[-\alpha x'^2 - \alpha x''^2 - \gamma(x' - x'')^2], \tag{11}$$

où α et γ sont des abréviations pour

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta q^2 - l^2}, \qquad \gamma = \frac{\Delta p^2}{4\hbar^2} - \frac{1}{2l^2} - \frac{1}{4\Delta q^2 - 2l^2}. \tag{12}$$

Tant que $\gamma \geqq 0$, nous pouvons représenter $\exp[-\gamma(x'^2 - x''^2)]$ par une intégrale de Fourier, à savoir par

$$\frac{\gamma}{\pi}\exp(-\gamma x^2) = \frac{1}{2\pi}\int \exp\left(-\frac{k^2}{4\gamma} + ikx\right) dk, \tag{13}$$

et l'on trouve ainsi

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \int dk \exp\left(-\frac{k^2}{2\gamma}\right) \exp(-\alpha x'^2 + ikx') \exp(-\alpha x''^2 - ikx''). \tag{14}$$

Cette matrice est définie positive, car elle est une combinaison linéaire de matrices définies positives ayant la forme $u(x')\,u^*(x'')$, avec les coefficients positifs $dk \exp\left(-\frac{k^2}{2\gamma}\right)$.

Suivant l'équation (12), la proposition $\gamma \geqq 0$ est équivalente à la formule

$$\left(\Delta p^2 - \frac{2\hbar^2}{l^2}\right)\left(\Delta q^2 - \frac{l^2}{2}\right) \geqq \hbar^2 \tag{15}$$

dont nous montrerons, au cours de la quatrième section, qu'elle correspond à la relation d'incertitude malgré sa forme extérieurement différente. Ainsi, nous avons trouvé que la matrice statistique (11) est définie positive si la fonction de répartition (1) obéit à la relation d'incertitude donnée par l'équation (15). Mais si l'équation (15) n'est pas vérifiée, l'intégrale de Fourier de P diverge. Si, de plus, au moins une des deux équations

$$\Delta p^2 - \frac{2\hbar^2}{l^2} \geqq 0, \qquad \Delta q^2 \geqq \frac{l^2}{2} \tag{16}$$

n'est pas vérifiée, P deviendra singulière. Évidemment, toutes ces matrices sont nettement exclues par le postulat de régularité de Schrödinger. Ces dernières équations arrivent ici pour la première fois parce que dans la représentation par opérateurs de la Mécanique quantique, seules les différences

$$(17) \qquad (\Delta p)^2_Q = \Delta p^2 - \frac{2\hbar^2}{l^2}, \qquad (\Delta q)^2_Q = \Delta q^2 - \frac{l^2}{2}$$

apparaissent. Pour ces équations nous renvoyons également à la quatrième section.

Le postulat de régularité peut donc servir à une classification formelle des fonctions de répartition. Pour trouver une caractéristique plus profonde pour cette différence de classes, il convient de déterminer les fonctions propres de P et de calculer l'entropie de la répartition.

Au premier coup d'œil, l'application de la notion d'entropie paraît douteuse parce que nous considérons un système n'ayant que très peu de degrés de liberté. Mais l'exemple récemment discuté par Born et Hooton ([4]) montre que la notion d'entropie est aussi applicable sur des systèmes à un seul degré de liberté du moment que nos connaissances sur le système en question sont limitées. Seulement, la source statistique de cette notion ressort alors plus clairement. En général, il n'est plus possible de mesurer l'entropie comme en Thermodynamique parce que les fluctuations ne sont plus négligeable vis-à-vis des incertitudes de mesures, comme c'est le cas dans les systèmes macrophysiques. Pour cette raison, l'entropie ne peut plus être indiquée que de façon statistique. Mais la notion d'entropie et même le théorème de l'entropie reste valable, car il n'y a pas de différence fondamentale entre la connaissance incomplète des données initiales d'un système macrophysique et de celle d'un système microphysique. Évidemment la notion de température n'a aucune place dans ces considérations.

D'abord nous voulons analyser le cas limite $\gamma = 0$.

Dans ce cas particulier, le problème séculaire, défini par (11), s'écrit

$$(18) \qquad \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha x'^2) \int \exp(-\alpha x''^2)\, \psi(x'')\, dx'' = p\, \psi(x').$$

([4]) M. Born, D. J. Hooton, *Zeits. Phys.*, t. 142, 1955, p. 201; M. Born, *Phys. Blätter*, t. 11, 1955, p. 49 et 314.

Il suit : si p n'est pas identique à o,

$$\psi_0(x) \text{ doit être égal à } \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\exp(-\alpha x^2) \tag{19}$$

et la valeur propre devient

$$p_0 = 1. \tag{20}$$

Toutes les autres valeurs propres sont égales à zéro et les vecteurs propres sont, à part le facteur de Gauss sus-mentionné égaux aux polynomes d'Hermite.

Il s'en suit que l'entropie de la fonction de répartition devient o pour $\gamma = 0$. Bien connue en Mécanique quantique, cette entropie est donnée par l'équation (5)

$$S = -k\,\mathrm{Tr}(\underline{P}\ln\underline{P}), \tag{21}$$

car : premièrement, cette expression pour S est une intégrale première du mouvement et deuxièmement, elle devient identique à l'expression habituelle pour l'entropie si l'équilibre thermodynamique est atteint; c'est-à-dire pour $\underline{P} = C\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)$, où $\underline{H}$ signifie l'opérateur hamiltonien et T la température absolue.

On obtient $S = 0$ de l'équation (20) comme suit :

Soit p_k les valeurs propres de P et Φ_k les fonctions propres, on a

$$\langle x' \mid \underline{P} \mid x'' \rangle = \sum_k p_k \Phi_k(x')\,\Phi_k^\star(x''),$$

et

$$\langle x' \mid \underline{P}\ln\underline{P} \mid x'' \rangle = \sum_k p_k \ln p_k\, \Phi_k(x')\,\Phi_k^\star(x'').$$

A cause de la normalisation $\int \Phi^\star(x)\,\Phi(x)\,dx = 1$, la trace de la matrice devient

$$S = -k\sum p_k \ln p_k. \tag{22}$$

---

(5) Ici nous parlons seulement de l'entropie qui appartient aux répartitions données par P. Nous ne considérons pas celles qui interviennent, si nous n'avons pas des connaissances complètes de P. Évidemment les problèmes très difficiles de la notion de l'entropie thermodynamique, discutée de nouveau par M. N. G. van Kompen (*Fortschrifte der Physik*, 1956) sont sans intérêt pour ce qui suit.

Dans le cas d'un équilibre thermodynamique,

$$p_n = \frac{\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum\limits_m \exp\left(\frac{E_m}{kT}\right)},$$

d'où suivent les expressions

$$(23) \qquad S = \frac{\sum\limits_n E_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{T\sum\limits_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} + k\ln\sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

et

$$(24) \qquad S = kT\frac{\partial \ln Z}{\partial T} + k\ln Z$$

qui correspondent aux expressions qui nous sont familières en Thermodynamique. Ici, la fonction de partition est donnée par l'équation

$$(25) \qquad Z = \sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) = \operatorname{Tr}\exp\left(-\frac{H}{kT}\right).$$

Dans le cas de la répartition caractérisée par $\gamma = 0$, $p_0 = 1$ et $p_k = 0$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient, en portant ces valeurs dans l'équation (23)

$$S = -k(1\ln 1 + 0\ln 0 + \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire l'entropie devient 0.

D'après l'équation de von Neumann aussi bien que d'après l'équation de Liouville, l'entropie est une constante. Pour la varier, il faut un couplage du système avec le monde ambiant, comme c'est le cas en Thermodynamique. Après cela, l'entropie du système peut augmenter ou diminuer. On peut montrer que la limite $\gamma = 0$ ne peut pas être dépassée. Il est impossible que les matrices $\underline{P}$ cessent d'avoir des valeurs propres positives.

Pour ces raisons il n'est pas possible de réaliser les ensembles anti-heisenbergiens. En tout cas nous commençons l'observation sans connaître l'état actuel d'un système physique. Par conséquent, nous partons toujours d'une matrice statistique de von Neuman proportionnelle à l'unité qui a des valeurs propres positives évidemment positives. Toutes leurs valeurs propres ne sont pas négatives et suivant le théorème déjà mentionné elles ne peuvent pas changer de signes. Par conséquent, il n'est plus possible de réaliser les matrices indéfinies. Elles sont absolument inaccessibles. Il y a donc seulement les matrices à éléments positifs qui sont réalisables. Encore une fois : Du point de vue mathématique, les répartitions anti-heisenbergiennes sont possibles. Mais elles sont éliminées par des raisons physiques. D'une part, nous avons deux classes de solutions de l'équation statistique du mouvement complètement séparées et sans aucune communication. D'autre part, les véritables états initiaux des ensembles statistiques qui décrivent l'inconnaissance complète de l'état des systèmes en considération appartiennent à une seule classe, à savoir la classe des matrices à valeurs propres positives, la seule classe considérée en Mécanique quantique. Par conséquent, c'est uniquement cette dernière classe qui peut être réalisée par les expériences.

Alors le théorème bien connu de M. von Neumann n'est plus applicable. Il a constaté : d'une part, toutes les équations statistiques ont des solutions sans fluctuations dans un certain moment ou même dans un intervalle de temps; d'autre part, les équations de la Mécanique quantique n'ont pas de solutions sans fluctuations. Ainsi, il semble qu'il y a une contradiction insurmontable entre les équations statistiques et celles de la Mécanique quantique. Nous venons de montrer qu'il est possible d'avoir des équations statistiques, avec des solutions sans fluctuations, mais non réalisables qui sont, malgré cela, des solutions des équations de la Mécanique quantique.

Pour montrer cela, dans l'exemple donné ici, il nous faudra d'abord calculer les valeurs propres de (11) aussi dans les cas $\gamma \neq 0$. A part un facteur de Gauss, les fonctions propres sont des polynomes d'Hermite

$$\Phi_n = \mathcal{C}\, e^{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\gamma}\, x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\gamma}\, x^2}. \tag{26}$$

Substituant cette expression dans l'équation séculaire qui se déduit de (11), on obtient, avec l'abréviation $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\gamma} = \rho$,

$$\mathcal{C}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int e^{-(\alpha+\gamma)x'^2 + 2\gamma x' x'' - (\alpha+\gamma-\rho)x''^2} \frac{d^n}{dx''^n} e^{-2\rho x''^2}\, dx'' = p_n \Phi_n,$$

ce qui est égal à

$$\mathcal{C}\sqrt{2\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\left(\alpha+\gamma-\frac{\gamma^2}{\alpha+\gamma-\rho}\right)x'^2} \int e^{-(\alpha+\gamma-\rho)\left(x''-\frac{\gamma x'}{\alpha+\gamma+\rho}\right)^2} \frac{d^n}{dx''^n} e^{-2\rho x''^2}\, dx''.$$

L'intégration par partie et un changement du paramètre de différentiation fournit

$$\mathcal{C}\sqrt{2\frac{\alpha}{\pi}}\left(\frac{\alpha+\gamma-\rho}{\gamma}\right)^n e^{-\left(\alpha+\gamma-\frac{\gamma^2}{\alpha+\gamma-\rho}\right)x'^2}\frac{d^n}{dx'^n}$$
$$\times\int e^{-(\alpha+\gamma-\rho)\left(x''-\frac{\gamma x'}{\alpha+\gamma-\rho}\right)^2} e^{-2\rho x''^2}\,dx''.$$

L'intégration reproduit un multiple des fonctions dont on est parti, à savoir

$$\mathcal{C}\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+\gamma+\rho}}\left(\frac{\alpha+\gamma-\rho}{\gamma}\right)^n e^{\rho x'}\frac{d^n e^{-2\rho x'^2}}{dx'^n}=\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+\gamma+\rho}}\left(\frac{\alpha+\gamma-\rho}{\gamma}\right)^n \Phi_n.$$

Ainsi, on a montré qu'il s'agit vraiment de fonctions propres avec les valeurs propres

$$p_n=\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+\gamma+\sqrt{\alpha^2+2x\gamma}}}\left(\frac{\alpha+\gamma-\sqrt{\alpha^2+2\alpha\gamma}}{\gamma}\right)^n, \tag{27}$$

tout en tenant compte du fait que

$$\sum_n p_n=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha\gamma}-\alpha}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\alpha+\gamma+\sqrt{\alpha^2+2\alpha\gamma}}}=1. \tag{17a}$$

Si $\gamma\geqq 0$, toutes ces valeurs propres sont positives ou 0. Mais si $\gamma<0$, les fonctions propres d'ordre impair fournissent des valeurs propres négatives et sont à éliminer pour des raisons d'entropie.

Pour simplifier la déduction, nous avons mis à la base l'expression connue de l'entropie en Mécanique quantique. Mais pour juger de l'importance de ces conclusions il est indispensable de prendre en considération le fait que l'expression (21) pour l'entropie est déterminée non seulement, par l'équation de von Neumann, mais aussi par l'équation statistique du mouvement équivalente (2.20). Ainsi les équations du mouvement donnent elles-mêmes la réponse à la question après séparation entre les ensembles réalisables et irréalisables.

Même pour cette question de classification, les ondes ne jouent donc pas de rôle indépendant. Pour cette raison, nous pouvons formuler toute la Mécanique quantique de manière purement corpusculaire. Il n'y a plus aucune raison — du point de vue physique — de douter de la possibilité d'objectivations dans le domaine de systèmes atomiques. Des équations statistiques décrivant le mouvement des particules peuvent avoir la propriété d'éliminer des fonctions de répartition exactement déterminées. Dans ce cas, il est impossible de mesurer précisément à la fois la vitesse et la position d'une particule parce qu'une mesure exacte consiste justement à établir un ensemble de Gibbs où chaque système a la même position dans l'espace de phase; fait sur lequel Planck a déjà attiré l'attention.

Vu qu'une transformation mathématique ne fait naturellement pas perdre les propriétés ondulatoires, toutes les réflexions faites jusqu'ici gardent leur validité dans la représentation ondulatoire ; seul le rôle des ondes varie. Elles ne sont plus les représentants, de la matière, mais seulement ceux de la loi statistique du mouvement. Elles sont donc d'une structure semblable à celle des ondes acoustiques ou des ondes des liquides.

Nous avons montré qu'il est possible de représenter un système quantique comme un ensemble de Gibbs dans l'espace des phases et par conséquent de parler objectivement de « particules ». Nous pouvons dire qu'il existe des particules aussi quand nous ne les observons pas. La situation dans la théorie de la connaissance n'est pas très différente de celle des objets macrophysiques où le problème philosophique de l'objectivation est le même qu'ici, mais sans influence sensible sur la Physique (6).

4. — **Valeurs moyennes et carrés de fluctuation moyens.** — La valeur moyenne d'une quantité quantique $\underline{G}$ est donnée par l'équation (2.7). Nous appelons $g(p, q)$ la quantité assignée à l'opérateur $\underline{G}$ dans la Mécanique statistique des particules si l'on a

$$\bar{G} = \mathrm{Tr}(\underline{G}\,\underline{P}) = \int g(p, q) f(p, q, t)\, dp\, dq. \tag{1}$$

Portant l'équation (2.15) dans (1), on obtient

$$\int G(x'', x')\, P(x', x'')\, dx'\, dx'' = \frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar} \times \int g(pq)\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x''-x') - \left(\frac{q-x'}{l}\right) - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2} P(x' x'', t)\, dx'\, dx''\, dp\, dq,$$

(6) Cf. *Niels Bohr and the development of physics*, edited by Pauli (Rosenfeld, Weisskopf), Essay de Heisenberg, p. 19, ligne 10 sous (*b*), London 1955.

ce qui doit être valable identiquement en P et, par conséquent,

$$(2) \qquad G(x'x'') = \frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar} \int g(p, q)\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \left(\frac{q-x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2} dp\, dq.$$

Ainsi, un opérateur est attribué à chaque fonction de p et q. Cette équation prend la place du principe de correspondance qui consiste à remplacer les coordonnées canoniques p et q dans $g(p, q)$ par $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ et x et qui n'est pas toujours univoque.

Particulièrement pour p et q, on obtient les résultats usuels :

Écrivant $\underline{p}$ en abrégé pour $\langle x' | \underline{p} | x'' \rangle$, on a

$$\underline{p} = \frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar} \int p\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \left(\frac{q-x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2} dp\, dq.$$

L'intégration sur q fournit :

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int p\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \frac{1}{2l^2}(x'-x'')^2} dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{1}{2l^2}(x'-x'')^2} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx'} \int e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-x'')} dp \end{aligned}$$

et celle sur p

$$\underline{p} = e^{-\frac{1}{2l^2}(x'-x'')^2} \frac{\hbar}{i} \delta'(x'-x'').$$

Cette expression peut aussi être écrite dans une forme plus courante. De

$$\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-x''}{l}\right)^2} \delta(x'-x'')\right]' = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-x''}{l}\right)^2} \left[\delta'(x'-x'') - \frac{x'-x''}{l^2} \delta(x'-x'')\right],$$

il suit, en appliquant les relations connues de la fonction de Dirac,

$$(3) \qquad \delta'(x'-x'') = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-x''}{l}\right)^2} \delta'(x'-x''),$$

d'où l'on obtient immédiatement

$$(4) \qquad p = \frac{\hbar}{i} \delta'(x'-x'').$$

Le facteur de Gauss peut être supprimé dans l'équation (3). Mais cela n'est pas possible sans les considérations ci-dessus un peu compliquées. Car nous donnerons plus tard des exemples dans lesquels cette dérivation quelque peu compliquée devient essentielle. L'opérateur $\underline{q}$ se calcule de la même manière

$$\underline{q} = \frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\, l\hbar} \int q\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x' \ldots x'') - \left(\frac{q-x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2} dp\, dq.$$

Par intégration sur q, on trouve

$$\underline{q} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{l}\, \delta(x' - x'') \int [(q - x') + x']\, e^{-\frac{2}{l^2}(q-x')^2} dq.$$

Évidemment, l'intégrale avec le facteur $q - x'$ dans l'intégrand est zéro pour des raisons de symétrie. Il reste seulement

$$\underline{q} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{l}\, x'\, \delta(x' - x'') \int e^{-\frac{2}{l^2}(q-x')^2} dq,$$

ce qui correspond à l'opérateur ordinaire $\langle x' | \underline{q} | x'' \rangle$

(5) $$\underline{q} = x'\, \delta(x' - x'').$$

Les différences ne surviennent que dans les fonctions d'un ordre plus élevé. On a, par exemple,

$$\underline{(q^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{l}\, \delta(x' - x'') \int [(q - x')^2 + 2x'(q - x') + x'^2]\, e^{-\frac{2}{l^2}(q-x')^2} dq.$$

Tenant compte de l'équation

$$\int (q - x')^2\, e^{-\frac{2}{l^2}(q-x')^2} dq = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, l^3,$$

on trouve

(6) $$\underline{(q^2)} = x'^2\, \delta(x' - x'') + \frac{l^2}{4}\, \delta(x' - x''),$$

où le premier terme à droite est identique à $\underline{q}^2$. En accord avec l'équation (3.17), on a donc

(7) $$\underline{(q^2)} = \underline{q}^2 + \frac{l^2}{4}.$$

Suivant (3.1) et (3.11),

$$\overline{q^2} = \frac{\Delta q^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \overline{\underline{q}^2} = \frac{1}{4\alpha} = \frac{\Delta q^2}{2} - \frac{l^2}{4}$$

et par conséquent :

$$\underline{\overline{(q^2)}} = \frac{\Delta q^2}{2}.$$

Partant de l'équation (2), nous obtenons de la même façon, pour p^2 l'opérateur

$$\underline{(p^2)} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int p^2 e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \frac{1}{2l^2}(x'-x'')^2} dp = -\hbar^2 \exp\left(-\frac{(x'-x'')^2}{2l^2}\right)\delta''(x'-x'').$$

Or,

$$\left[e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\delta(x)\right]'' = e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\delta'' + 2\left(e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\right)'\delta'(x) + \left(e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\right)''\delta(x),$$

$$-\left[2\left(e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\right)'\delta(x)\right]' = -2\left(e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\right)'\delta'(x) - 2\left(e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\right)''\delta(x).$$

La combinaison de ces deux équations fournit

$$\delta''(x) = e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\delta''(x) + \frac{1}{l^2},$$

vu que selon l'équation (3.1).

$$\overline{p^2} = \frac{\Delta p^2}{2}$$

et, suivant (3.11),

$$\overline{p^2} = \hbar^2(\alpha + 2\gamma) = \frac{\Delta p^2}{2} - \frac{\hbar^2}{l^2}$$

on a

$$\underline{\overline{(p^2)}} = \overline{p^2} + \frac{\hbar^2}{l^2} \tag{8}$$

et

$$\underline{(p^2)} = \underline{p}^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}, \tag{8a}$$

ce qui est en parfait accord avec l'équation (3.17). Ainsi, il est évident qu'il faut écrire dans ce cas la relation d'incertitude sous forme de l'équation (3.15). L'application de la relation de commutation transforme l'équation (8) en l'équation

$$\underline{(p^2)} = e^{+\frac{q}{l}}\underline{p}\, e^{-\frac{2q}{l}}\underline{p}\, e^{+\frac{q}{l}} \tag{9}$$

et (7) en

$$\underline{(q^2)} = e^{+\frac{lp}{2\hbar}}\underline{q}\, e^{-\frac{2lp}{2\hbar}}\underline{q}\, e^{\frac{lp}{2\hbar}}. \tag{10}$$

On pourrait se demander s'il faut prendre $\underline{\overline{(q^2)}} - \underline{\bar{q}}^2$ ou $\underline{\overline{q^2}} - \underline{\bar{q}}^2$ pour carré moyen de la fluctuation. En Mécanique quantique, on prend la seconde valeur. Pourtant, il paraît que la première valeur est préférable du point de vue de la notion corpusculaire. Seule, l'expérience pourra décider entre ces deux possibilités. Mais, dans des dimensions atomiques, cette différence sera négligeable si l est du même ordre de grandeur que la longueur fondamentale. Des effets sensibles ne pourront être attendus que dans des dimensions nucléaires. Nous remettrons leur analyse jusqu'à ce que la théorie soit étendue à plusieurs dimensions.

En conséquence de ce qui a été dit pour les coordonnées de lieu, la valeur moyenne du carré de la fluctuation de la quantité de mouvement ne devrait pas être donnée par $\underline{\overline{p^2}} - \underline{\bar{p}}^2$, mais par l'expression $\underline{\overline{(p^2)}} - \underline{\bar{p}}^2$ et serait donc plus grande que d'habitude, du terme $\frac{\hbar^2}{l^2}\cdot$ Même si la première valeur pour la variation était o, la seconde aurait une grandeur remarquable et tendrait vers l'infini pour $l \to 0$. Il paraît peut être que c'est une contradiction éclatante vis-à-vis l'expérience. Mais il n'en est pas ainsi; car cette immense largeur du moment est une mesure pour l'exactitude avec laquelle nous connaissons le moment quand nous exécutons une mesure de lieu. Pour mesurer le moment même, nous utilisons un appareil qui réduit la mesure d'un moment à une mesure de lieu, de façon que le moment est connu avec la précision avec laquelle nous pouvons réaliser une mesure de lieu, c'est-à-dire au mieux aller avec l'exactitude.

Nous obtenons un autre résultat intéressant si nous considérons la fonction hamiltonienne $\mathrm{H}(p, q)$ qui est assignée, selon l'équation (2). à l'opérateur hamiltonien

$$(11) \qquad \underline{\mathrm{H}} = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{M}}\delta''(x'-x'') + \mathrm{V}(x')\,\delta(x'-x'').$$

Dans ce but, il nous faudra résoudre l'équation intégrale

$$(12) \qquad -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{M}}\delta''(x'-x'') + \mathrm{V}(x')\,\delta(x'-x'') = \frac{2}{\sqrt{8\pi^3}\,l\hbar}\int \mathcal{H}(p, q)\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-x'') - \left(\frac{q-x'}{l}\right)^2 - \left(\frac{q-x''}{l}\right)^2} dp\, dq.$$

En se servant de mêmes notations que dans l'équation (3.3), on obtient l'équation séparable suivante :

$$(13)\quad -\frac{\hbar^2}{2M}\delta''(\xi)+V(x)\,d(\xi)=\frac{2}{\sqrt{2\pi^3}\,l\hbar}\int \mathcal{H}(p,q)\,e^{\frac{ip\xi}{\hbar}-\frac{\xi^2}{2l^2}+\frac{2}{l^2}(q-x)^2}\,dp\,dq.$$

Posant

$$(14)\quad \mathcal{H}(p,q)=\mathcal{H}_1(p)+\mathcal{H}_2(q),$$

nous trouvons pour H_1 l'équation

$$(15)\quad -\frac{\hbar^2}{2M}\delta''(\xi)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathcal{H}_1(p)\,e^{\frac{ip\xi}{\hbar}-\frac{\xi'}{2l^2}}\,dp$$

et pour H_2 l'équation

$$(16)\quad V(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{l}\int \mathcal{H}_2(q)\,e^{-\frac{2}{l^2}(q-x)^2}\,dq.$$

L'équation (15) est déjà traitée implicitement plus haut. La solution s'écrit

$$(17)\quad \mathcal{H}_1(p)=\frac{p^2}{2M}-\frac{\hbar^2}{2Ml^2},$$

tandis que l'équation (16) devient — on le dérive facilement — pour la limite $l\to 0$

$$H_2(q)=V(q).$$

Mais dans le cas où $l\neq 0$, ce qui est le seul cas que nous devons prendre en considération à cause de l'équation (2.15), $H_2\neq V$. Dans des dimensions comparables à la longueur fondamentale, l'équation (16) provoque une « égalisation » du potentiel. On déduit, par exemple, de $H_2=V_0\,\partial(q)$

$$(18)\quad V(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{V_0}{l}\,e^{-\frac{2x^2}{l^2}},$$

et de l'expression plus générale

$$(19)\quad \mathcal{H}_2(q)=V_0\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha q^2}$$

on obtient

$$(20)\quad V(x)=V_0\sqrt{\frac{2\alpha}{2+\alpha l^2}}\,e^{-\frac{2\alpha x^2}{2+\alpha l^2}}.$$

Il paraît de nouveau que la longueur l — qui s'introduit forcément par la notion de particules — est d'une importance primordiale dans les domaines de dimensions nucléaires parce que des pointes de potentiel d'une largeur inférieure à l sont interdites dans l'équation (11), même si elles apparaissent dans l'équation (14). Mais il me semble encore trop tôt pour préciser davantage cette hypothèse.

5. **L'action de diaphragmer.** — L'expérience d'interférence de Young joue un rôle primordial dans les principes de la Mécanique quantique. Vu qu'il s'agit d'un phénomène à plusieurs dimensions, nous ne sommes pas encore à même de traiter cette expérience ici. Mais le processus qui est à la base de l'expérience d'interférence, l'action de diaphragmer, peut déjà être analysé.

Dans le sens propre du mot, « action de diaphragmer » désigne l'emploi d'un procédé par lequel une part bien définie est séparée d'un ensemble de rayons, par exemple tous les rayons qui passent à travers des portions limitées d'un plan, à savoir les ouvertures de diaphragme. Pour une analyse mathématique, il convient de définir l'action de diaphragmer d'une façon plus générale, mais qui comprend la définition primitive comme un cas particulier.

Du point de vue mathématique, l'action de diaphragmer consiste en une sorte de transformations spéciales des fonctions de répartition $f(p, q, t)$ qui sélectionnent, parmi tous les systèmes individuels de l'ensemble, certains entre eux. Des systèmes qui se trouvent à l'instant $t = 0$ à l'intérieur d'un domaine bien défini de l'espace des phases font partie des systèmes sélectionnés, tous les systèmes qui se trouvent à l'extérieur n'en font pas partie.

Si l'action de diaphragmer a lieu à l'instant $t = 0$, l'expression mathématique de ce fait peut se faire comme suit. Soit

$$(1) \qquad g(p, q, 0) = \begin{cases} 1 & \text{à l'intérieur,} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

d'un certain domaine du plan des phases, alors l'action de diaphragmer fait de la répartition $f(p, q, 0)$ la répartition transformée

$$(2) \qquad f'(p, q, 0) = f(p, q, 0)\, g(p, q, 0).$$

Ceci est d'abord valable pour le temps $t = 0$. La question fondamentale est maintenant : comment cette action de diaphragmer se propage-t-elle avec le temps ?

La réponse dépend du genre des équations statistiques du mouvement.

Supposons d'abord l'équation de Liouville

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial f}{\partial q} - V'(q)\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{3}$$

Vu que f, tout aussi bien que f', doit vérifier l'équation de Liouville et vu que l'équation (3) est linéairement homogène non seulement en f, mais aussi par rapport à ses dérivées premières, il suit que $g(p, q, t)$, qui est définie comme le quotient de f' et f, vérifie également l'équation de Liouville. Or, pour la même raison qu'avant, g^2 et $g^2 - g$ sont également des solutions si g en est une. Parce que à l'instant $t = 0$, suivant l'équation (1), $g^2 - g = 0$ et $f = 0$ est l'intégrale de (3) — avec les valeurs initiales $g^2 - g$ —, g doit obéir, pour tous les temps, à l'équation

$$g^2 = g, \tag{4}$$

c'est-à-dire que quelque chose qui est une fois diaphragmé, reste toujours diaphragmé.

Soit g_1 et g_2 deux actions de diaphragmer nullement coïncidentes, alors

$$g_1 g_2 = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire : deux actions de diaphragmer qui ne coïncident pas à un instant déterminé, ne coïncident jamais.

Des actions de diaphragmer non-coïncidentes peuvent être composées. Soit g un composé de g_1 et g_2 de façon que chaque particule qui est sélectionnée par g_1 ou par g_2 soit aussi sélectionnée par g. Dans ce cas

$$g = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_1 + g_2 = 1, \\ 0 & \text{si} \quad g_1 + g_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

à cause de l'équation (5), $g_1 + g_2 = 2$ est exclu. Posant

$$f_1 = f g_1, \qquad f_2 = f g_2, \qquad f_{12} = f g,$$

on trouve, à cause de (6),

$$f_{12} = f_1 + f_2. \tag{7}$$

La superposition de plusieurs actions de diaphragmer non coïncidentes se fait donc par addition de leurs probabilités.

Nous avons méticuleusement démontré cette proposition bien connue et presque triviale parce qu'elle n'est pas toujours valable pour les autres équations statistiques. Il est donc nécessaire que les propriétés physiques de l'action de diaphragmer se distinguent clairement, sans être attachées à l'équation de Liouville.

Ces propriétés physiques sont :

1° Une répétition immédiate de la même action de diaphragmer ne change plus la répartition;

2° L'action de diaphragmer ne fait pas accroître l'entropie d'une répartition.

L'équation (4) montre immédiatement que la première proposition est accomplie dans le cas de Liouville. La seconde proposition sera accomplie parce que les états d'un ordre parfait sont des fonctions de Dirac dans l'espace des phases et parce que de pareilles fonctions sont annulées ou reproduites par la transformation (2).

L'expression générale pour l'action de diaphragmer est surtout importante dans les cas où les fonctions de Dirac ne représentent pas d'ensembles réalisables; car dans ces cas, les probabilités, dans les expériences de diaphragmes ne peuvent plus être additives, ce qui se montre de façon frappante par le fait qu'il est tout à fait impossible de diaphragmer au-delà de l'incertitude minimum.

D'après l'équation de von Neumann, un ensemble en Mécanique quantique est représenté par la matrice statistique $\underline{P}$. Par une action de diaphragmer, cette matrice est transformée en une autre qui doit de nouveau être définie positive. Puisqu'elle doit aussi être linéairement reliée à $\underline{P}$, on a

$$\underline{P} \rightarrow \underline{P}' = \underline{G}_1^+ \underline{P}\,\underline{G}_1 + \underline{G}_2^+ \underline{P}\,\underline{G}_2 + \ldots .$$

A cause de la deuxième condition, les cas purs doivent toujours rester purs, ce qui est justement le cas s'il n'y a qu'un seul $\underline{G}$ qui n'est pas identique à zéro. Nous obtenons ainsi

$$\underline{P}' = \underline{G}^+ \underline{P}\,\underline{G}. \tag{8}$$

Une répétition de l'action de diaphragmer ne doit plus changer $\underline{P}'$. $\underline{P}$ doit donc vérifier identiquement l'équation suivante :

$$\underline{G}^{+2} \underline{P}\,\underline{G}^2 = \underline{G}^+ \underline{P}\,\underline{G},$$

c'est-à-dire, il doit être

$$\underline{G}^2 = \underline{G}. \tag{9}$$

L'action de diaphragmer est donc représentée par une matrice idempotente.

Ceci est d'abord valable pour l'instant où l'action de diaphragmer a lieu, par exemple au moment $t=0$. A ce moment, soit $\underline{G}=\underline{G}(0)$. Mais il suit de l'équation de von Neumann que l'équation (8), avec $\underline{G}=\underline{G}(t)$, est valable à tout moment, si $\underline{G}(t)$ est aussi une solution de l'équation de von Neumann ayant comme matrice initiale $\underline{G}(0)$. Car il suit de

$$i\hbar\dot{\underline{P}}=\underline{H}\,\underline{P}-\underline{P}\underline{H}$$

et de

$$i\hbar\dot{\underline{P}}'=\underline{H}\,\underline{P}'-\underline{P}'\underline{H}$$

ou

$$i\hbar(\dot{\underline{G}}^{+}\underline{P}\,\underline{G}+\underline{G}^{+}\dot{\underline{P}}\,\underline{G}+\underline{G}^{+}\underline{P}\,\dot{\underline{G}})=\underline{H}\,\underline{G}^{+}\underline{P}\,\underline{G}-\underline{G}^{+}\underline{P}\,\underline{G}\,\underline{H}.$$

Le côté gauche peut aussi s'écrire

$$i\hbar(\dot{\underline{G}}^{+}\underline{P}\,\underline{G}+\underline{G}^{+}\underline{P}\,\dot{\underline{G}})+(\underline{G}^{+}\underline{H}\,\underline{P}\,\underline{G}-\underline{G}^{+}\underline{P}\,\underline{H}\,\underline{G});$$

par conséquent, on peut réduire les termes suivants à o :

$$(i\hbar\dot{\underline{G}}^{+}-\underline{H}\,\underline{G}^{+}+\underline{G}^{+}\underline{H})\underline{P}\,\underline{G}+\underline{G}^{+}\underline{P}(i\hbar\dot{\underline{G}}+\underline{G}\,\underline{H}-\underline{H}\,\underline{G})=0.$$

Cette équation est valable si

$$i\hbar\dot{\underline{G}}=\underline{H}\,\underline{G}-\underline{G}\,\underline{H},\qquad i\hbar\dot{\underline{G}}^{+}=\underline{H}\,\underline{G}^{+}-\underline{G}^{+}\underline{H}, \tag{10}$$

comme nous l'avons exigé plus haut. $\underline{G}$ est donc une matrice idempotente, comme g l'était dans le cas de l'équation de Liouville, et représente une solution de l'équation statistique du mouvement.

Pour les cas purs, il suit de l'équation (8) : par une action de diaphragmer, l'amplitude de la probabilité devient

$$\Phi \text{ devient } \Phi'=\underline{G}\,\underline{\Phi}, \tag{11}$$

c'est-à-dire s'il s'agit d'une action de diaphragmer dans l'espace de la position si l'on a

$$\langle x' \mid \mathrm{G} \mid x'' \rangle = g(x')g(x''), \tag{12}$$

on trouve, $g(x)^2=g(x)$:

$$\Phi'(x)=g(x)\,\Phi(x). \tag{13}$$

L'équation de von Neumann ou — ce qui est la même chose — l'équation statistique du mouvement (2.20) provoquent une « action de diaphragmer pour les ondes ». *Dans le cas d'une action de diaphragmer, ce ne sont pas les probabilités mêmes, mais plutôt les amplitudes de probabilité qui sont additives !*

Indépendamment du cas particulier de la Mécanique quantique, nous pouvons résumer nos résultats comme suit : Il y a des équations statistiques du mouvement qui n'ont pas de solutions du type de fonctions de Dirac. Dans ces cas, l'action de diaphragmer n'est plus additive.

Spécialement, dans le cas de la Mécanique quantique, on trouve, à cause de la structure particulière des équations statistiques du mouvement (2.20), que l'on peut le mieux saisir, ce qui arrive pendant le processus de diaphragmer en utilisant le point de vue ondulatoire. Ceci est tout aussi légitime que dans le cas des ondes acoustiques.

Ce n'est pas de l'utilité de la notion des ondes que nous doutons. Seulement, il ne nous semble pas justifié de voir dans les ondes plus qu'une image géométrique qui nous sert à illustrer la loi statistique des mouvements.

Pour cette raison, toutes les propriétés ondulatoires doivent être dérivées à partir de l'image des particules, comme nous l'avons fait ici pour le processus ondulatoire dans l'action de diaphragmer.

Résumons :

1° On démontre le théorème suivant : *Tout système quantique peut être représenté par un ensemble de Gibbs de points dans l'espace des phases.*

2° On déduit l'équation du mouvement de l'ensemble qui le représente.

3° Cette équation est caractérisée par l'existence de deux classes de solutions complètement séparées. Il n'est pas possible à passer de l'une à l'autre. C'est donc un type d'équation stochastique, non considéré jusqu'ici.

4° Si l'on part d'une répartition qui décrit l'inconnaissance complète de l'état actuel du système considéré, on ne peut réaliser qu'une des deux classes de solutions, à savoir celle qui satisfait à la relation d'incertitude de Heisenberg.

5° De plus, on admet de l'équation du mouvement des ensembles représentatifs qu'il y a une possibilité unique de définir l'action de diaphragmer, c'est celle donnant la superposition des amplitudes ondulatoires.

6° Ainsi il est possible de déduire à partir de la conception des particules toutes les propriétés ondulatoires, si l'on accepte l'équation du mouvement des ensembles représentatifs.

7° C'est leur forme particulière selon laquelle il n'est pas possible de réaliser des répartitions arbitraires, qui provoque les difficultés d'interprétation bien connues. Hors de la mécanique quantique on ne connaît jusqu'ici malheureusement guère d'exemples de telles équations stochastiques.