ANNALES DE L'I. H. P.

F. CAP

Le principe de Fermat dans les milieux absorbants non-homogènes

Annales de l'I. H. P., tome 15, nº 2 (1956), p. 123-131
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1956__15_2_123_0>

Le principe de Fermat dans les milieux absorbants non-homogènes

par

F. CAP

(Innsbruck).

Ce travail traite de la généralisation et de l'évolution d'un théorème important pour toutes les branches de la Physique, qui fut découvert par un des plus grands mathématiciens français : Pierre de Fermat qui vécut entre 1601 et 1665.

A côté de ses nombreuses recherches mathématiques très importantes, c'est de lui que provient le théorème qui énonce que le rayon lumineux dans des milieux homogènes et non-homogènes choisit toujours, entre deux points, le chemin qu'il met le moins de temps à parcourir. Ce principe de Fermat possède une grande importance à la fois théorique et pratique pour l'optique géométrique des milieux non-homogènes. Comme c'est un principe de variation, on peut obtenir une équation aux dérivées partielles correspondante; celle-ci porte le nom d'équation de l'optique géométrique et détermine les surfaces de phases équivalentes et constantes S. Les trajectoires orthogonales de ces surfaces sont les rayons lumineux; la dérivée normale sur cette surface S donne le vecteur de propagation $\vec{k}$.

On a

$$(1) \quad \int n\, ds \quad \text{ou} \quad \int dt = \int \frac{ds}{c(x, y, z)} = \frac{1}{\omega} \int \nabla S\, \vec{ds} \to \text{Min} \quad \text{(Fermat)},$$

où

$$(2) \quad |\nabla S| = \left|\frac{2\pi}{\lambda}\right| = \left|\frac{\omega}{c}\right| = |k|.$$

De (1) on obtient

$$(3) \quad (\nabla S)^2 \equiv \left(\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z),$$

où

$$(4) \quad n(x, y, z) = \frac{c_0}{c(x, y, z)} \qquad (c_0 = 3.10^{10} \text{ cm/s}).$$

L'équation de l'optique géométrique donne un énoncé sur la propagation des ondes lumineuses électromagnétiques; il est clair que, par là, elle peut être aussi déduite des équations de Maxwell sans employer un principe de variations, car celles-ci décrivent en effet tous les phénomènes électromagnétiques.

De même, on peut aussi partir de l'équation des ondes : si l'on passe au cas limite de petites longueurs d'ondes, donc à l'optique géométrique, on obtient alors l'équation de l'optique géométrique de l'équation des ondes. L'équation ainsi obtenue est naturellement identique avec l'équation obtenue à partir du principe de variation de Fermat.

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$(5) \quad \text{Rot}\, \vec{H} = \frac{\varepsilon(x, y, z)}{c_0} \dot{\vec{E}},$$

$$(6) \quad \text{Rot}\, \vec{E} = -\frac{1}{c_0} \dot{\vec{H}}, \qquad \text{avec} \quad \mu = 1,$$

$$(7) \quad \text{div}\left(\varepsilon \vec{E}\right) = 0, \qquad \text{avec} \quad \rho = 0,$$

$$(8) \quad \text{div}\, \vec{H} = 0.$$

Si l'on pose

$$(9) \quad \vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\omega t} e^{-ikS(x, y, z)},$$

on obtient

$$(10) \quad \vec{H} = \left[\nabla S \times \vec{E}\right]$$

et

$$(11) \quad (\nabla S)^2 = n^2 + \frac{i\lambda}{2\pi} \Delta S \qquad \text{si} \quad \frac{\lambda}{2\pi} |\Delta S| \ll (\nabla S)^2,$$

on obtient alors (3).

Il est curieux que le principe de Fermat et l'équation de l'optique géométrique ne furent dérivés jusqu'à nos jours que pour des milieux non absorbants. Lorsque des exigences de la pratique rendirent nécessaire un traitement géométrico-optique des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques dans des milieux absorbants non-homogènes ou stratifiés, je me suis attaqué, après de vaines recherches dans les écrits scientifiques publiés jusque-là, avec mon élève W. Röver à une solution du problème. Comme, dans les milieux absorbants, les rayons lumineux ne sont plus les trajectoires orthogonales de surfaces de phases constantes, la dérivation d'un principe de variation analogue au principe de Fermat est très difficile. Il convient dans ce cas de partir de l'équation des ondes ou des équations de Maxwell et de rechercher l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation de l'optique géométrique. Une fois qu'on a trouvé celle-ci, on peut alors beaucoup plus facilement obtenir le principe de variation qui lui correspond.

Les milieux absorbants possèdent une conductibilité électrique différente de zéro σ, de telle sorte que le champ des ondes électromagnétiques engendre des courants électriques dans ces milieux. Comme une production de chaleur de Joule, donc une perte d'énergie est liée à tout courant électrique, le vecteur de Poynting donnant le flux d'énergie, n'est plus parallèle aux rayons lumineux. Le vecteur de Poynting étant, d'après sa définition, perpendiculaire au champ électrique et magnétique, le rayon lumineux, c'est-à-dire la direction de propagation de la lumière, ne sera donc plus perpendiculaire aux champs électrique et magnétique : les ondes lumineuses ne seront plus transversales au sens propre.

L'absorption d'énergie électro-magnétique a pour conséquence l'apparition d'une exponentielle avec des exposants négatifs réels. Dans des milieux non-homogènes, cet exposant est une fonction non-linéaire du lieu. Dans des milieux homogènes, l'exposant du facteur décrivant l'absorption est exactement comme l'exposant du facteur de phase, une fonction linéaire. Comme pour les milieux aborbants homogènes, on peut, également dans un milieu absorbant non-homogène, comprendre en un tout le terme d'absorption et le facteur de phase. On obtient ainsi un exposant complexe ou une fonction de phase complexe. Si l'on passe à nouveau au milieu homogène absorbant, la fonction de phase complexe φ devient linéaire.

La transition du milieu non-homogène et non-absorbant au milieu absorbant non-homogène consiste donc dans le fait, que l'on remplace la fonction de phase réelle S par une fonction de phase complexe. La fonction iconale S et l'équation de l'optique géométrique deviennent complexes par ce procédé.

Il est simple de trouver la solution des équations de Maxwell qui contiennent maintenant un courant de conduction avec une expression contenant une phase complexe. De cette manière, on obtient finalement l'équation de l'optique géométrique complexe qui, lorsque la conductibilité électrique s'annule, donc lorsque l'absorption s'annule, redonne à nouveau l'équation de l'optique géométrique ordinaire.

On sait que, pour des milieux conducteurs, l'indice de réfraction est complexe; on l'exprime, d'après des formules, qui furent déjà obtenues depuis longtemps, pour le milieu homogène, également dans le cas du milieu non-homogène, au moyen de la constante diélectrique ε, de la conductibilité σ et de la fréquence ν.

On a alors pour un milieu non-homogène

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i\omega t} \, e^{-\varkappa U(x,y,z)} \, e^{-ikS(x,y,z)} \tag{12}$$

et pour un milieu homogène

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i\omega t} \, e^{-\varkappa(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)} \, e^{-ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)} \tag{13}$$

ou bien

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i\omega t} \, e^{-ik\varphi(x,y,z)}, \tag{14}$$

avec

$$\varphi(x, y, z) = S(x, y, z) + i\,T(x, y, z). \tag{15}$$

Pour un milieu non-absorbant, on a

$$\varkappa = 0, \qquad T = 0.$$

Les équations de Maxwell s'écrivent pour un milieu absorbant

$$\mathrm{Rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c_0}\sigma(x, y, z)\vec{E} + \frac{\varepsilon(x, y, z)}{c_0}\dot{\vec{E}}, \tag{16}$$

$$\mathrm{Rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c_0}\dot{\vec{H}}, \qquad \text{ou} \quad \mu = 1, \tag{17}$$

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 0, \qquad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0, \qquad \text{où} \quad \rho = 0. \tag{18}$$

Leur solution est de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i\omega t} \, e^{-ik\varphi(x,y,z)}, \tag{19}$$

où

$$\varphi(x, y, z) = S(x, y, z) + iT(x, y, z),$$

$$\vec{H} = \left[\nabla\varphi \times \vec{E}\right], \tag{20}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}. \tag{21}$$

Cela donne

$$(\nabla\varphi)^2 - N^2 = \frac{i\lambda}{2\pi}\Delta\varphi.$$

Avec

$$N(x, y, z) = n - i\varkappa = \sqrt{\varepsilon - \frac{2\sigma i}{\nu}}, \tag{22}$$

on obtient, si

$$\frac{\lambda}{2\pi}|\Delta S| \ll |\nabla S|^2, \qquad \frac{\lambda}{2\pi}|\Delta T| \ll (\nabla T)^2,$$

$$\boxed{(\nabla\varphi)^2 = N^2 \equiv (n - i\varkappa)^2} \tag{23}$$

ou

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] = n^2 - \varkappa^2, \tag{24}$$

$$\left(\vec{\nabla S}\right).\left(\vec{\nabla T}\right) = -n\varkappa. \tag{25}$$

Ce résultat paraît simple, c'est seulement la manière complexe de l'écrire qui fait illusion. Si l'on sépare les parties réelles des parties imaginaires, on obtient un système de deux équations aux dérivées partielles, pour les deux fonctions S et T.

C'est surtout le produit grad S par grad T qui complique les équations. Pour pouvoir étudier ces équations et pour en dériver le principe de Fermat dans les milieux absorbants nous introduisons deux vecteurs de direction dont la longueur est égale à un. Nous désignerons par $\vec{e}_1$ un vecteur qui sera normal à la surface $S = \text{const.}$ et par $\vec{e}_2$ un vecteur qui sera normal à la surface $T = \text{const.}$

On a donc

$$\left(\xi\vec{e}_1\right) = \operatorname{grad} S, \tag{26}$$

$$\left(\eta\vec{e}_2\right) = \operatorname{grad} T, \tag{27}$$

où

$$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1$$

et l'on obtient

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{n^2-\varkappa^2}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{n^2-\varkappa^2}{2}\right)^2 + \frac{n^2\varkappa^2}{(\vec{e}_1 . \vec{e}_2)^2}}}, \tag{28}$$

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{\varkappa^2-n^2}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{n^2-\varkappa^2}{2}\right)^2 + \frac{n^2\varkappa^2}{(\vec{e}_1 . \vec{e}_2)^2}}}, \tag{29}$$

Comme

$$\mathrm{Rot}(\xi\vec{e}_1) = \mathrm{Rot}\ \mathrm{grad}\, \mathrm{S} = 0, \tag{30}$$

on a

$$\int \mathrm{Rot}(\xi\vec{e}_1)\, df = 0 \tag{31}$$

et alors, en intégrant du point P au point Q sur deux chemins c_1 et c_2 différents, on obtient

$$\oint \xi(\vec{e}_1\, d\vec{s}) = \int_{\mathrm{PC}_1}^{\mathrm{Q}} \xi(\vec{e}_1\, d\vec{s}_1) - \int_{\mathrm{PC}_2}^{\mathrm{Q}} \xi(\vec{e}_1\, d\vec{s}_2);$$

$$|\cos(\vec{e}_1\, d\vec{s}_2)| \leqq 1$$

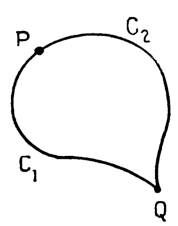

Fig. 1.

et alors

$$\int_{\mathrm{C}_1} \xi\, ds_1 < \int_{\mathrm{C}_2} \xi\, ds$$

comme

$$\vec{e}_1\, d\vec{s}_1 = ds_1,$$
$$\vec{e}_1\, d\vec{s}_2 = ds_2 \cos(\vec{e}_1\, d\vec{s}_2)$$

de manière que

$$\boxed{\int_{\mathrm{C}_1} \xi\, ds_1 = \mathrm{Min}} \tag{32}$$

ou

$$\boxed{\lim_{\varkappa\to 0} \int \xi(n,\ \varkappa)\, ds = \int n\, ds}$$

remplace le principe de Fermat.

L'emploi de ce nouveau principe est très difficile du fait qu'on ne connaît pas le produit $\vec{e}_1 . \vec{e}_2$. En pratique, les problèmes à résoudre sont presque toujours à deux dimensions, alors, si nous admettons que l'indice complexe de réfraction et par là la phase et l'absorption aussi ne dépendent pas de z, la trajectoire du rayon lumineux sera donnée par une fonction $y(x)$. Si, de plus, le coefficient d'absorption ne dépend

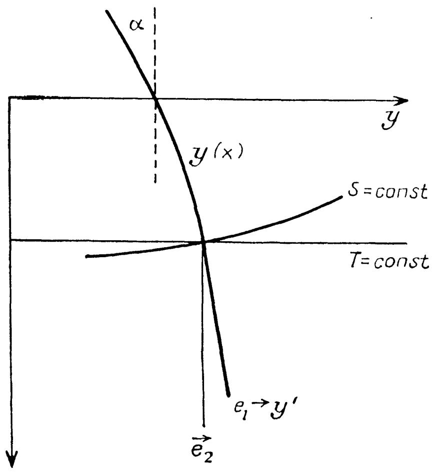

Fig. 2.

que de x, alors l'amortissement ne dépendra pas non plus de y, et $T = T(x)$. Si l'absorption, c'est-à-dire la fonction T ne dépend que de x, la surface $T = \text{const.}$ est parallèle à l'axe y et l'on peut alors calculer facilement le produit $\vec{e}_1 . \vec{e}_2$ (voir *fig.* 2).

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, \qquad \varkappa = \varkappa(x), \qquad T = T(x);$$

$$\cos\left(\vec{e}_1 . \vec{e}_2\right) = \left(\vec{e}_1 . \vec{e}_2\right) = \sqrt{\frac{1}{1 + y'^2}}.$$

On a alors

$$(33) \qquad \left(\vec{e}_1 . \vec{e}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \qquad \text{et} \qquad N = N(x) \qquad \text{et} \qquad (\nabla\varphi)^2 = N^2(x).$$

Avec

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

où y est la trajectoire orthogonale de S, on obtient

$$(34) \qquad \int \sqrt{\frac{n^2 - \varkappa^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n^2 - \varkappa^2}{2}\right)^2 + n^2\varkappa^2(1 + y'^2)}}\; \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \text{Min}$$

et alors

$$\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y') = \text{const.}, \tag{35}$$

ce qui donne $y(x)$ si $n(x)$, $\varkappa(x)$ sont donnés.

On voit que le principe de variation est assez compliqué même dans ce cas simplifié. Dans la pratique, les fonctions $n(x)$ et $\varkappa(x)$ ne sont pas toujours données. Quelquefois il faut les chercher, quelquefois elles sont données numériquement.

Il serait donc intéressant d'examiner l'équation pour la fonction iconale complexe. Nous admettons aussi que le problème est à deux dimensions et que l'indice complexe de réfraction ne dépend que de x.

On a alors

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = N^2(x) = [n(x) - i\varkappa(x)]^2, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0. \tag{36}$$

Si l'on pose

$$\varphi(x, y) = X(x) + Y(y), \tag{37}$$

cela donne

$$\varphi(x, y) = Ay + \int \sqrt{N^2(x) - A^2}\, dx + \text{const.} \tag{38}$$

Comme $\nabla S = \operatorname{Re} \nabla \varphi$,

$$y'(x) = \frac{\partial S}{\partial y} : \frac{\partial S}{\partial x} \tag{39}$$

nous donne la trajectoire du rayon lumineux.

Il est d'ailleurs intéressant que le champ électromagnétique correspondant à ces rayons lumineux ne soit rien que l'approximation WKB de l'équation d'onde du champ. S'il n'y a pas d'absorption, donc si $\varkappa = 0$, la solution de l'équation pour la fonction iconale complexe doit se ramener à la solution pour un milieu non-absorbant. Comme $\varkappa$ n'est contenu que dans N, la constante A ne dépendra pas alors de l'absorption et elle sera égale à la constante analogue dans le problème du milieu non-absorbant. Cette constante est bien connue, elle est égale à $\sin\alpha$, où l'angle α est l'angle d'incidence du rayon lumineux sur la surface limite du milieu (voir *fig.* 3).

$$N^2(x) = [n(x) - i\varkappa(x)]^2,$$
$$A = \sin\alpha,$$
$$\varphi(x, y) = \sin\alpha\, y + \int \sqrt{N^2(x) - \sin^2\alpha}\, dx.$$

Si

$$n(x) = \varkappa(x) = a + bx, \tag{40}$$

on obtient

$$y(x) = \frac{\sin\alpha}{b}\ln(a + bx) + \text{const.} \qquad \text{si} \quad \sin^2\alpha \leqslant n^2. \tag{41}$$

On obtient aussi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_0} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{ n^2(0) - \varkappa^2(0) + \sin^2\alpha + \sqrt{4n^2(0)\varkappa^2(0) + [n^2(0) - \varkappa^2(0) - \sin^2\alpha]} \right\}} \tag{42}$$

pour $x = 0$. C'est la loi de réfraction bien connue.

Il me semble qu'il y a encore beaucoup de recherches à faire dans ces problèmes relatifs aux milieux non-homogènes absorbants, la technique utilisant des couches stratifiées pour des raisons très diverses.

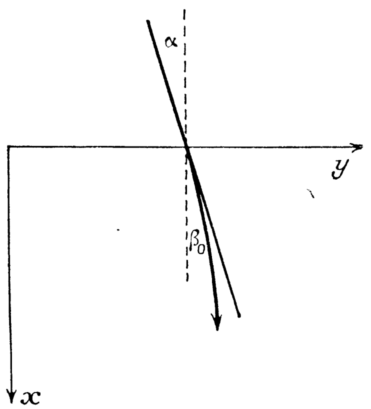

Fig. 3.

La méthode d'optique géométrique que je viens de démontrer est sans doute susceptible d'élargissement et pourra être appliquée à divers problèmes techniques.

Conférence, faite le 26 avril 1956, à l'Institut H. Poincaré