

ANNALES DE L'I. H. P.

A. BLANC-LAPIERRE

**Considérations sur la théorie de la transmission de l'information
et sur son application à certains domaines de la Physique**

Annales de l'I. H. P., tome 13, n° 4 (1952-1953), p. 245-296

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1953__13_4_245_0

© Gauthier-Villars, 1952-1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Considérations sur la théorie de la transmission de l'information et sur son application à certains domaines de la Physique ⁽¹⁾

par

A. BLANC-LAPIERRE,

Professeur à la Faculté des Sciences d'Alger.

I.

INTRODUCTION.

On sait que, sous l'influence du développement des télécommunications, s'est édifiée une véritable *théorie de la transmission de l'information*. Cet exposé est destiné à préciser certains points de cette théorie et à suggérer des applications possibles.

Dans une première partie, je rappellerai rapidement l'essentiel de la théorie telle qu'elle a été donnée principalement par Shannon. Ce rappel sera incomplet : il sera limité aux points nécessaires à la compréhension de la suite. Je ne me préoccuperais pas, dans cette partie, des questions de démonstrations, me bornant essentiellement à marquer l'enchaînement des notions introduites. D'ailleurs, il s'agit là d'une théorie qui est maintenant bien connue et, d'autre part, le lecteur désireux de connaissances détaillées trouve à son sujet, une abondante documentation [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

⁽¹⁾ Conférences faites à l'Institut Henri Poincaré les 16, 18, 22 et 23 avril 1953.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de quelques propriétés des fonctions aléatoires à spectre limité. J'indique tout de suite le lien qui existe entre cette partie et la précédente.

La théorie de la transmission de l'information n'aborde qu'avec des difficultés importantes l'étude du *cas continu* c'est-à-dire du cas où l'information est confiée à un signal qui est une fonction aléatoire variant continûment en fonction du temps. Par contre, elle se développe beaucoup plus facilement dans le cas particulier où l'information est traduite par une suite de variables aléatoires, correspondant à des signaux élémentaires discrets. C'est ce que l'on appelle le *cas discret*. En fait, l'étude du cas continu se ramène à celle du cas discret dans le cas particulier des fonctions aléatoires à spectre limité et ceci grâce au théorème suivant :

Si le spectre d'une fonction $X(t)$ est limité à la bande

$$(1.1) \quad -F < \nu < F$$

alors la connaissance de $X(t)$, pour tout t , est équivalente à celle de la suite des valeurs $X\left(\frac{n}{2F}\right)$ (n décrivant la suite des entiers de $-\infty$ à $+\infty$) et, ceci, conformément au théorème d'interpolation suivant :

$$(1.2) \quad X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)};$$

c'est de résultats liés à ce théorème que nous nous occuperons dans la deuxième partie.

Dans la *troisième partie*, nous étudierons l'application des résultats et des schémas de la théorie de l'information à des domaines différents de celui pour lequel elle a été élaborée c'est-à-dire à des domaines différents de celui des télécommunications. D'une façon précise, nous développerons ces considérations en étudiant l'*application à l'optique de la théorie de l'information*.

Au cours de cette troisième partie, nous discuterons certaines expériences illustrant, d'un point de vue concret, quelques résultats de la théorie développée.

II.

PREMIÈRE PARTIE.

RAPPEL DE RÉSULTATS DE LA THÉORIE DE LA TRANSMISSION DE L'INFORMATION.

1. **Position du problème.** — A. MODÈLE GÉNÉRAL D'UN SYSTÈME DE COMMUNICATION. — La figure II.1.1 fournit ce modèle général. Le système

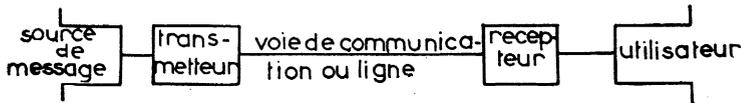


Fig. II.1.1.

de communication doit assurer la liaison entre une *source de messages* et un *utilisateur*. La liaison est assurée par une « *voie de communication* » ou « *ligne* » qui transmet des *signaux* c'est-à-dire, en général, des courants électriques fonctions du temps. Du côté de l'émission, un transmetteur transforme le message en un signal d'entrée $\Sigma(t)$ qui est transmis par la ligne. Au cours de la transmission, Σ est perturbé par du bruit et, à la réception, même en supposant la ligne sans distorsion, on a un signal de sortie $S \neq \Sigma$. C'est $S(t)$ qui est restitué à l'utilisateur à travers le récepteur.

Avant même toute définition mathématique précise des expressions « *quantité d'information* » ou « *débit d'information* » et en donnant à ces termes le contenu que leur attribue l'expérience vulgaire, il est bien évident que la quantité d'information transmise de la source à l'utilisateur dépend à la fois de la source et de la ligne de transmission. De ce point de vue, deux problèmes complémentaires peuvent se poser :

- a. la source étant donnée, quelles conditions devra-t-on imposer à la ligne C pour qu'elle puisse écouler l'information due à la source ;
- b. réciproquement, C étant donnée, quelles sont les caractéristiques des sources que C peut écouler ?

Le point de vue auquel se rattache ce qui suit est surtout lié à la question b. Nous considérons la ligne C comme donnée ; le signal $\Sigma(t)$

est une certaine fonction, évidemment aléatoire; d'ailleurs Σ n'est pas quelconque; il doit appartenir à la classe \mathcal{F} des fonctions que C peut transmettre de façon acceptable. Par exemple, \mathcal{F} sera l'ensemble des fonctions aléatoires dont l'analyse harmonique ne fait intervenir que certains domaines de l'axe des fréquences; le bruit $B(t)$ sera une caractéristique de la ligne; Σ et B étant donnés, S , signal de sortie, en découlera; en définitive, c'est sur l'ensemble des trois fonctions

$$(II.1.1) \quad \Sigma \in \mathcal{F}, \quad B, \quad S = f[\Sigma, B]$$

que nous aurons à définir ce que nous appellerons :

- a. la quantité d'information Q correspondant à un temps T ;
- b. le débit d'information ρ égal à la limite suivante, si elle existe :

$$(II.1.2) \quad \rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Q}{T};$$

c. enfin, la ligne étant donnée, c'est-à-dire B et \mathcal{F} étant fixés, on pourra se demander quel est le signal Σ qui rend ρ maximum. Nous appellerons le maximum ρ_0 de ρ *capacité de la ligne*.

B. SCHÉMA EMPRUNTÉ A L'OPTIQUE. — Le modèle précédent est décrit en utilisant le langage des télécommunications. Donnons un autre exemple emprunté à un domaine tout à fait différent. Il s'agit de l'observation, en lumière monochromatique (longueur d'onde λ) d'un objet

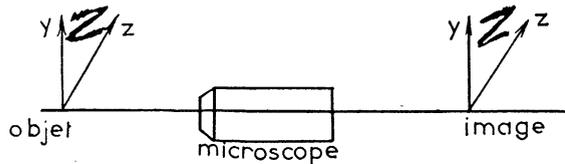


Fig. II.1.2.

plan à travers un instrument d'optique (*fig. II.1.2*); ce modèle s'identifie au précédent conformément à la correspondance suivante :

Signal d'entrée = $\Sigma(x, y)$ = distribution de l'éclairement dans l'objet;

Voie de communication = instrument d'optique. Nous verrons que \mathcal{F} s'identifie avec l'ensemble des fonctions dont le spectre se limite à un certain domaine du plan des fréquences spatiales;

Signal de sortie = $S(x, y)$ = distribution de l'éclairement dans l'image;

Bruit = B : il provient :

- a. de l'imprécision des moyens d'observation de l'image;
- b. de la diffusion accidentelle de la lumière;
- c. des fluctuations du rayonnement lui-même.

C. CAS GÉNÉRAL D'UN APPAREIL DE MESURE QUELCONQUE. — D'une façon générale, le schéma A s'applique à un appareil de mesure quelconque. Un tel appareil est très analogue à un appareil de télécommunications; il possède, dans la plupart des cas, une *bande passante*, c'est-à-dire qu'il ne transmet que certaines composantes de fréquences et il est sujet à des causes d'imprécision qui jouent le rôle du bruit. On trouvera de nombreux exemples illustrant cette analogie dans un article de J. Loeb [8].

2. **Rappel succinct d'un certain nombre de résultats.** — A. REMARQUES GÉNÉRALES. — Nous allons maintenant rappeler rapidement quelques résultats qui seront utiles pour la suite; ils visent essentiellement à donner une définition précise *du débit d'information* ρ . Nous rappelons ces résultats sans démonstration : ils sont, à quelque différence de présentation près, extraits du travail de Shannon [5].

Une remarque préliminaire pourra faciliter la compréhension de l'enchaînement de ce qui va suivre. La théorie de Shannon ignore ce qu'on pourrait appeler les *délais de transmission*. Elle suppose qu'un retard aussi grand que l'on veut peut s'écouler entre le début de la transmission et le début de la réception. En d'autres termes, si l'on s'intéresse aux valeurs du signal comprises entre 0 et T, on pourra regarder ces valeurs comme données dans leur ensemble et non comme débitées, en quelque sorte, au fur et à mesure, au cours du temps. C'est là une limitation sérieuse pour les problèmes de communication et R. Fortet a indiqué une voie permettant de restituer à la notion de retard la place à laquelle elle a droit [9]. Cependant, cette restriction est sans importance si l'on envisage le schéma B d'origine optique dans lequel les notions de passé, de futur, de retard, perdent leur sens. D'autre part, la théorie de Shannon, se limite, en fait, au cas discret c'est-à-dire au cas où la connaissance du signal entre 0 et T est équivalente à la connaissance

d'un nombre fini de variables aléatoires qui pourront être, par exemple, les valeurs $\Sigma(t_0 + n\lambda)$ (t_0 et λ constantes, n entier) prises par $\Sigma(t)$ à des instants régulièrement espacés sur l'axe t . Il découle de cette remarque que les quantités Q et $\frac{Q}{T}$ des relations (II.1.1) et (II.1.2) peuvent, en fait, être définies pour un ensemble d'un nombre fini de variables aléatoires ou, si l'on veut, pour une variable aléatoire à p dimensions. Pour ne pas alourdir les notations, nous raisonnerons sur une variable aléatoire à une dimension, les formules s'étendant sans difficulté au cas de p dimensions.

B. CAS D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES ALÉATOIRES. — Ces remarques faites, on peut définir Q en passant par les étapes suivantes :

a. on définit d'abord la quantité Q associée à une *variable aléatoire discontinue, ne prenant qu'un nombre fini n de valeurs* : c'est ce que nous appellerons, pour simplifier, une variable aléatoire discontinue;

b. on définit ensuite Q pour un *ensemble de deux variables aléatoires discontinues X et Y dont l'une joue le rôle de Σ et l'autre le rôle de S* ; la présence du bruit se traduisant par l'erreur $Y - X$ souvent appelée *équivocation*;

c. on ramène au cas précédent celui où X et Y sont continus par un passage à la limite.

Premier cas. — Soient p_i les probabilités des diverses valeurs i que X peut prendre. Nous appellerons ε_i l'événement $X = i$. Shannon suppose que Q qui, naturellement, est une fonction des p_i , doit être astreint à vérifier les conditions suivantes :

1° Q est une fonction continue des p_i .

2° Si tous les p_i sont égaux entre eux ($p_i = \frac{1}{n}$), alors Q doit être une fonction monotone de n et croissante avec n .

3° Divisons l'ensemble des événements possibles en deux sous-ensembles :

— E' (constitué d'éléments ε');

— E'' (constitué d'éléments ε'').

Soient p' et p'' les probabilités correspondant aux deux ensembles E' et E'' , $p'_i = \frac{p_i}{p'}$ et $p''_i = \frac{p_i}{p''}$ les probabilités conditionnelles dans E' et E'' ;

Shannon remarque que l'épreuve qui permet de choisir un événement ε_i quelconque peut se décomposer comme suit :

- α . une épreuve décidant si l'on prendra ε_i dans E' (probabilité p') ou dans E'' (probabilité p'');
- β . si l'on a choisi E' , un choix à l'intérieur de E' (en utilisant les p'_i);
- γ . si l'on a choisi E'' , un choix à l'intérieur de E'' (en utilisant les p''_i).

A chacun de ces choix correspond une valeur de Q définie par l'ensemble des probabilités mises en jeu ; soient $Q[p', p'']$, $Q[p'_i]$, $Q[p''_i]$ ces valeurs. Shannon admet que la fonction Q correspondant à l'ensemble, soit $Q[p_i]$, est la somme pondérée des fonctions Q correspondant aux choix partiels α , β , γ , chacune de ces fonctions étant pondérée par la probabilité pour que l'on soit conduit à effectuer le choix correspondant. En d'autres termes, Q doit vérifier

$$(II.2.1) \quad Q[p_i] = Q[p', p''] + p'Q[p'_i] + p''Q[p''_i].$$

Shannon montre alors que, comme conséquence des conditions 1^o, 2^o, 3^o, il faut prendre

$$(II.2.2) \quad Q[p_i] = -K \sum_{i=1}^n p_i \log p_i,$$

où K est une constante positive liée au choix de l'unité de mesure. Nous appellerons Q la quantité d'information associée à la variable aléatoire X . Si l'on convient de prendre comme unité de quantité d'information celle qui correspond au choix entre deux éventualités équiprobables [*bit*] et si l'on utilise des logarithmes à base 2, alors $K = 1$.

Ce qui précède, s'étend à un ensemble de p variables aléatoires liées, la relation (II.2.2) s'écrivant alors

$$(II.2.3) \quad Q = -K \sum_{i,j,\dots} p[i, j, \dots] \log p[i, j, \dots];$$

en particulier, si l'on considère deux variables aléatoires X et Y pouvant respectivement prendre les valeurs i et j , on a

$$(II.2.4) \quad Q[X, Y] = -K \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j).$$

Il est évident que la probabilité d'avoir $X = i$, $Y = j$ est aussi celle d'avoir $X = i$, $Z = Y - X = j - i$; on en déduit sans peine que

$$(II.2.5) \quad Q[X, Y] = Q[X, Z].$$

Il est utile d'introduire des grandeurs qui jouent le même rôle, par rapport à Q , que les notions de *probabilité marginale et de probabilité conditionnelle* dans l'étude de l'ensemble de deux variables aléatoires liées.

À X et à Y , considérés isolément, nous associons respectivement $Q(X)$ et $Q[Y]$; à l'ensemble (X, Y) nous associons $Q[X, Y]$ défini par (II.2.4). On montre sans peine que l'on a

$$(II.2.6) \quad Q[X, Y] \leq Q[X] + Q[Y],$$

l'égalité correspondant au cas de l'indépendance. Nous définirons aussi la quantité $Q_x[Y]$ que nous appellerons la *quantité d'information conditionnelle de Y en présence de X* . $Q_x[Y]$ est définie de la façon suivante. Fixons X ; Y a alors une loi conditionnelle Y/X à laquelle correspond $Q[Y/X]$; par définition

$$(II.2.7) \quad Q_x[Y] = E \{ Q[Y/X] \} = -K \sum_{i,j} p(i, j) \log p_i(j),$$

où $p_i[j]$ représente la probabilité d'avoir $Y = j$ conditionnellement lorsque $X = i$.

L'étude de la transmission de l'information en présence d'un bruit (*voir deuxième cas*) nous fournira une interprétation intéressante de $Q_x[Y]$. On établit facilement la relation

$$(II.2.8) \quad Q[X, Y] = Q[X] + Q_x[Y],$$

d'où, par comparaison avec (II.2.6)

$$(II.2.9) \quad Q[Y] \geq Q_x[Y],$$

l'égalité correspondant à l'indépendance.

Rappelons encore que tout ce qui précède subsiste si X et Y ne sont plus deux variables aléatoires mais deux ensembles d'un nombre fini de variables liées (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) .

Deuxième cas. — Nous avons défini la quantité d'information correspondant à une variable aléatoire discontinue X qui va jouer un rôle ana-

logue à celui du *signal d'entrée* Σ . Nous supposons que, par suite de l'intervention d'une *source d'erreur ou bruit*, nous faisons une erreur $Y - X$ ce qui nous conduit à transmettre Y (également variable aléatoire discontinue) qui jouera le rôle de S . D'après le sens courant du mot quantité d'information, l'information transmise dans ces conditions, soit R , doit être inférieure à $Q[X]$.

Comment définir R ? On peut opérer comme suit pour avoir une évaluation raisonnable de la *perte d'information* ou *équivocation* produite par l'erreur $Y - X$,

Conditionnellement, lorsque l'utilisateur a reçu Y_0 pour Y , il aurait besoin, pour éviter toute perte d'information de recevoir, en plus, l'information $Q[X/Y = Y_0]$ liée à la variable aléatoire $X/Y = Y_0$.

Si l'on envisage toutes les valeurs possibles de Y , l'utilisateur devra, pour retrouver l'information $Q[X]$, recevoir, en moyenne

$$(II.2.10) \quad E \{ Q[X/Y] \} = Q_Y[X];$$

c'est cette expression que Shannon propose de prendre pour traduire la perte d'information due au bruit. Nous poserons donc

$$(II.2.11) \quad R = Q[X] - Q_Y[X].$$

Naturellement, X et Y peuvent représenter deux ensembles (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) de variables aléatoires discrètes, la donnée du signal d'entrée correspondant à l'ensemble des X_i et la donnée du signal de sortie à l'ensemble des Y_i .

APPLICATIONS. — 1° *Supposons que le signal soit constitué d'une suite de signaux élémentaires émis à raison d'un signal par seconde, chaque signal élémentaire étant représenté par une variable aléatoire discontinue X_i ; supposons que le bruit Z_i soit émis sous la même forme. Il en sera de même de $Y_i = X_i + Z_i$.*

On aura alors, pour l'intervalle $0 \leq t \leq N$:

$$(II.2.12) \quad R(N) = Q[X_1, \dots, X_N] - Q_{Y_1, \dots, Y_N}[X_1, \dots, X_N]$$

$$(II.2.13) \quad = -K \sum p(X_1, \dots, X_N) \log p(X_1, \dots, X_N) \\ + K \sum p(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N) \\ \times \log p[X_1, \dots, X_N/Y_1, \dots, Y_N].$$

Le débit d'information sera égal à la limite suivante, si elle existe :

$$(II.2.14) \quad \varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R(N)}{N} \quad \text{pour } N = \infty.$$

2° Si le bruit et le signal sont indépendants, on peut donner à la relation (II.2.11) une forme plus commode. Il résulte de (II.2.5) et de (II.2.8) que l'on a

$$Q[Y] + Q_Y[X] = Q[X] + Q_X[Z],$$

soit, à cause de l'indépendance de X et Z :

$$Q[Y] + Q_Y[X] = Q[X] + Q[Z],$$

d'où

$$(II.2.15) \quad R = Q[X] - Q_Y[X] = Q[Y] - Q[Z]$$

ou

$$(II.2.16) \quad R = Q[Y_1, \dots, Y_N] - Q[Z_1, \dots, Z_N].$$

3° Si les X_i sont indépendants entre eux et de même loi, et s'il en est de même des Z_i , on a

$$(II.2.17) \quad R = N[Q(Y) - Q(Z)],$$

$$(II.2.18) \quad \varphi = Q[Y] - Q[Z].$$

Troisième cas. — On peut maintenant étendre les résultats précédents au cas des variables continues par un passage à la limite à partir des résultats du deuxième cas.

Shannon ne procède pas exactement de cette manière : il traite le cas des variables continues et le cas des variables discontinues comme deux cas distincts ne se ramenant pas l'un à l'autre par passage à la limite. Le procédé que nous utilisons ici a été indiqué par P. Aigrain.

Partons de la relation (II.2.11) que nous écrirons, en supposant que les valeurs possibles des X et Y forment une suite serrée :

$$(II.2.19) \quad R = Q[X] - Q_Y[X] = -K \sum \Delta P(X) \log \Delta P(X) \\ + K \sum \sum \Delta P(X, Y) \log \frac{\Delta P(X, Y)}{\Delta P(Y)}.$$

Posons

$$(II.2.20) \quad \begin{cases} \Delta P(X) = p(X) \Delta X, & \Delta P(Y) = p(Y) \Delta Y, \\ \Delta P(X, Y) = p(X, Y) \Delta X \Delta Y; \end{cases}$$

(II.2.19) s'écrit

$$(II.2.21) \quad R = -K \sum p(X) \Delta X \log(p(X) \Delta X) \\ + K \sum \sum p(X, Y) \Delta X \Delta Y \log \frac{p(X, Y) \Delta X}{p(Y)}.$$

D'où, en faisant tendre vers zéro les ΔX et les ΔY :

$$(II.2.22) \quad R = K \iint p(X, Y) \log \frac{p(X, Y)}{p(X)p(Y)} dX dY.$$

On remarquera que si l'on substitue aux valeurs X, Y des valeurs X', Y' qui s'en déduisent par une transformation non aléatoire

$$X' = f(X), \quad Y' = f(Y),$$

où f possède un inverse, l'expression R n'est pas modifiée. Cela était logiquement nécessaire puisque l'ensemble (X, Y) est évidemment équivalent à (X', Y') du point de vue de l'information transmise, puisque l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation non aléatoire.

Cas particulier : Signal d'entrée et bruit indépendants. — Il est alors commode d'effectuer le passage à la limite sur (II.2.15) ou (II.2.16). On trouve en prenant les ΔY égaux aux ΔZ :

$$(II.2.23) \quad R = -K \int p(Y) \log p(Y) dY + K \int p(Z) \log p(Z) dZ,$$

$$(II.2.24) \quad = Q'[Y] - Q'[Z].$$

Les quantités Q' que nous introduisons ici ont beaucoup de propriétés communes avec les Q du premier cas. En particulier, les relations (II.2.5) et (II.2.6) sont valables pour les Q' . Si l'on fait une transformation $y' = f(y), z' = f(z)$, les Q' ne sont pas invariants, mais, naturellement, R est invariant.

C. CAS OU LE SIGNAL A L'ENTRÉE $X(t)$ ET LE BRUIT $Z(t)$ SONT DEUX FONCTIONS ALÉATOIRES. — En fait, nous nous limiterons au cas où ces deux fonctions aléatoires satisfont aux conditions suivantes :

- a. elles sont stationnaires et de spectre limité à la bande $-F, +F$;
- b. elles sont indépendantes;
- c. le bruit sera supposé laplacien et de spectre uniforme sur $-F, +F$.

D'après a et b , $Y(t)$ sera aussi stationnaire et de spectre limité à $-F, +F$.

Il résulte du théorème d'interpolation que la connaissance de $Y(t)$ et de $Z(t)$ se ramène à la connaissance de ces fonctions pour la suite des instants $t_n = \frac{n}{2F}$ (n entier ≥ 0) c'est-à-dire à la suite des

$$Y_n = Y\left[\frac{n}{2F}\right], \quad Z_n = Z\left[\frac{n}{2F}\right].$$

Dans le cas du bruit, la fonction de corrélation est

$$(II.2.25) \quad \Gamma_Z = \frac{\sin 2\pi F\tau}{2\pi F\tau};$$

elle s'annule pour $\tau = \frac{n}{2F}$ (n entier $\neq 0$), ce qui montre que tous les Z_n sont indépendants. On a donc, pour un intervalle T contenant $2FT$ points t_n :

$$(II.2.26) \quad Q'(Z) = \sum Q'[Z_n].$$

D'ailleurs, tous les $Q'[Z_n]$ sont égaux. Leur valeur commune est celle de l'intégrale $-K \int p \log p dX$ lorsque X est gaussien et de carré moyen $E\{Z^2\}$.

On trouve sans peine que cette valeur est

$$(II.2.27) \quad Q'[Z_n] = \log \sqrt{2\pi e E\{Z^2\}}.$$

On a donc, dans le cas actuel

$$(II.2.28) \quad R(T) = -K \int_{2FT \text{ variables}} p[Y_1, \dots, Y_{2FT}] \log p[Y_1, \dots, Y_{2FT}] dY_1 \dots \\ - 2FT \log \sqrt{2\pi e E\{Z^2\}}.$$

Il est alors intéressant de se poser la question suivante : *parmi tous les signaux possibles $X(t)$ satisfaisant aux conditions précédentes, quel est celui qui rend $R(T)$ maximum?* A cause du caractère stationnaire de Y , tous les Y_n ont même loi marginale (\mathcal{L}). Il résulte de (II.2.6) que le premier terme de (II.2.28) qui représente $Q'(Y)$ sera maximum, pour un \mathcal{L} donné, si tous les Y_n sont indépendants. Il reste à choisir la loi \mathcal{L} qui donne le maximum. Comme dans tous les problèmes d'extremum,

cette question n'a de sens que si l'on impose à \mathcal{L} une condition. Nous pouvons, par exemple, fixer la valeur $E[Y^2]$ ce qui revient à imposer au signal une puissance moyenne $E[Y^2] - E[Z^2]$. On est alors conduit au problème suivant de calcul des variations : quelle est la densité de probabilité $p(Y)$ qui rende maxima Q' si $E[Y^2]$ est donné ?

On trouve que l'extremum est atteint si $p[Y]$ est laplacien. X , différence de deux variables aléatoires laplaciennes et indépendantes Y et Z , est lui-même laplacien. En d'autres termes, si l'on impose la puissance $E\{X^2\}$ du signal, le débit d'information sera maximum si le signal est lui aussi une fonction aléatoire laplacienne, naturellement stationnaire et de spectre uniforme.

Conformément à (II.2.27) on aura

$$(II.2.29) \quad Q'[Y_n] = \log \sqrt{2\pi e [E[Z^2] + E[X^2]]}.$$

D'où

$$(II.2.30) \quad R_{\max}(T) = 2FT \log \sqrt{\frac{E(Z^2) + E(X^2)}{E(Z^2)}}.$$

Le débit maximum ou capacité sera donné par

$$(II.2.31) \quad \rho = \frac{R_{\max}(T)}{T} = F \log \left[1 + \frac{E(X^2)}{E(Z^2)} \right].$$

III.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ALÉATOIRES A SPECTRE LIMITÉ.

Nous avons vu que, pour le problème qui nous intéresse, le cas où signal et bruit sont des fonctions aléatoires à spectre limité se ramenait immédiatement à ce que nous avons appelé le cas discret en utilisant le théorème d'interpolation dont il a été question au début. Ceci donne un intérêt particulier à ces fonctions aléatoires et à ce théorème. C'est de ces deux questions que nous allons maintenant nous occuper ⁽²⁾ [10].

⁽²⁾ Signalons deux articles de J. Oswald sur les fonctions aléatoires à spectre limité : *Câbles et transmissions*, 1950, n° 3, p. 197 à 215 et 1951, n° 2, p. 158 à 177.

Nous allons successivement :

1° donner une démonstration du théorème d'interpolation due à B. Van der Pol [14];

2° démontrer certains résultats relatifs à des fonctions à spectre limité qui constituent en quelque sorte des réciproques du théorème d'interpolation [12];

3° discuter quelques exemples;

4° faire une application de ce qui précède à un problème d'optimum qui généralise celui que nous avons traité au paragraphe II.C.

1. Démonstration du théorème d'interpolation (d'après B. Van der Pol). — *a. Soit une fonction $X(t)$ sur le spectre de laquelle nous ne faisons pour l'instant aucune restriction.* Considérons l'opération \mathfrak{G}_F qui transforme $X(t)$ en $x(t)$ conformément à

$$(III.1.1) \quad x(t) = \mathfrak{G}_F\{X(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}$$

dont nous supposons l'existence (n entier $\cong 0$).

\mathfrak{G}_F est une transformation linéaire; on peut donc, pour l'étudier, se limiter au cas où

$$(III.1.2) \quad X(t) = e^{2\pi i\nu t}.$$

Un calcul que je ne reproduis pas ici, montre que, sauf si $\nu = (2p + 1)F$ où p est un entier, on a

$$(III.1.3) \quad x(t) = e^{2\pi i\nu' t},$$

la correspondance entre ν et ν' étant définie par

$$(III.1.4) \quad \nu' = 2F \left\{ \left[\frac{F - \nu}{2F} \right] - \frac{F - \nu}{2F} + \frac{1}{2} \right\},$$

où $[x]$ représente le plus grand entier inférieur à x . La figure III.1.1 indique d'ailleurs de façon très claire la correspondance (ν, ν').

b. Si le spectre de $X(t)$ ne contient que des fréquences ν telles que

$$(III.1.5) \quad |\nu| < F,$$

on a

$$(III.1.6) \quad x(t) = X(t),$$

et l'on peut écrire

$$(III.1.7) \quad X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \frac{\sin 2\pi F(t - t_n)}{2\pi F(t - t_n)},$$

avec

$$(III.1.8) \quad X_n = X(t_n), \quad t_n = \frac{n}{2F}.$$

La relation (III.1.7) est d'ailleurs encore vraie si l'on définit les t_n non plus selon (III.1.8) mais, plus généralement, selon

$$(III.1.9) \quad t_n = t_0 + \frac{n}{2F},$$

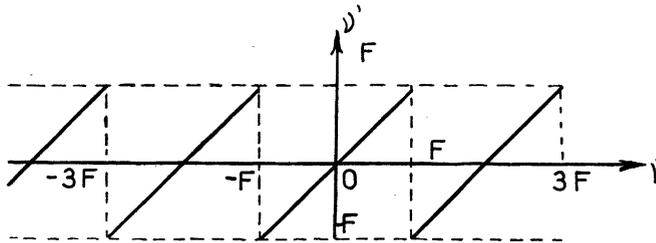


Fig. III.1.1.

où t_0 est une constante quelconque [en effet, un changement de l'origine des t ne modifie pas la condition (III.1.5)].

c. Cas des fonctions aléatoires. — Ce qui précède n'a rien à voir avec le caractère, certain ou aléatoire, de $X(t)$. Si $X(t)$ est une fonction aléatoire de spectre conforme à (III.1.5), on pourra, sous réserve de conditions de convergence, le mettre sous la forme (III.1.7) où les X_n constitueront une suite de variables aléatoires. Nous dirons que cette suite est équivalente à $X(t)$ puisque la connaissance de la suite entraîne celle de X et réciproquement. Naturellement, *a priori*, nous ne savons rien sur la corrélation qui peut exister entre les X_n . De plus, si les t_n sont choisis conformément à (III.1.9), les propriétés de la suite $\{X_n\}$ peuvent dépendre de t_0 . Évidemment, si X est une fonction aléatoire stationnaire, les propriétés statistiques de la suite $\{X_n\}$ ne dépendent pas de t_0 .

2. Les fonctions aléatoires stationnaires à spectre limité et le théorème d'interpolation. — Nous supposons maintenant que $X(t)$ [$E[X(t)] = 0$] est une fonction aléatoire stationnaire réelle à

spectre limité à la bande $-F, +F$. D'une façon plus précise, nous admettrons que le spectre de la puissance moyenne $E\{X^2\}$ possède une densité $f(\nu)$ nulle à l'extérieur de $-F, +F$ et différente de zéro en tout point de $-F, +F$ [13]. Le théorème d'interpolation s'applique à $X(t)$. Il existe donc au moins une formule d'interpolation du type

$$(III.2.1) \quad X(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(t_0 + n\lambda) \varphi(t - t_0 - n\lambda),$$

où la sommation s'étend à tous les entiers n ;

où t_0 et λ sont des constantes;

où φ est une fonction certaine.

D'après le théorème d'interpolation cela est possible au moins pour

$$(III.2.2) \quad \lambda = \frac{1}{2F}, \quad t_0 \text{ quelconque}, \quad \varphi = \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}.$$

On peut alors se poser la question suivante : existe-t-il d'autres ensembles (λ, t_0, φ) qui satisfont à (III.2.1) ?

Si l'on n'impose aucune condition aux $X_n = X(t_0 + n\lambda)$, la réponse est certainement affirmative. On a, en particulier, tous les systèmes

$$(III.2.3) \quad \lambda = \frac{1}{2F_1}, \quad t_0 \text{ quelconque}, \quad \varphi = \frac{\sin 2\pi F_1 t}{2\pi F_1 t} \quad \text{pour } F_1 > F.$$

Par contre, nous allons voir que si les X_n sont non corrélés, il n'existe que la solution (III.2.2).

THÉORÈME I. — Si les X_n sont non corrélés, il n'y a que la solution (III.2.2) et $X(t)$ a un spectre uniforme sur $-F, +F$.

Démonstration. — Désignons par Γ_X la fonction de corrélation relative à X .

a. En calculant

$$E\{X(t_0 + n\lambda)X(t)\},$$

on voit immédiatement que

$$(III.2.4) \quad \varphi(0) = \frac{\Gamma_X(0)}{\Gamma_X(0)},$$

ou a, d'autre part,

$$(III.2.5) \quad E\{X(t)X(t-\tau)\} = \Gamma_X(0) \sum_n \varphi(t - t_0 - n\lambda) \varphi(t - \tau - t_0 - n\lambda).$$

Multiplions les deux membres par dt et intégrons de zéro à $+\lambda$; il vient

$$(III.2.6) \quad \lambda \Gamma_X(\tau) = \Gamma_X(0) \sum_n \int_{-(t_0+n\lambda)}^{-[t_0+(n-1)\lambda]} \varphi(t) \varphi(t-\tau) dt$$

ou, encore

$$(III.2.7) \quad \lambda \Gamma_X(\tau) = \Gamma_X(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(u-\tau) du$$

et enfin

$$(III.2.8) \quad \lambda \varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(u-\tau) du.$$

D'ailleurs, à cause de (III.2.4), φ est une fonction paire; on peut donc écrire en définitive

$$(III.2.9) \quad \lambda \varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(\tau-u) du.$$

Mais φ (qui est égal à Γ_X à un facteur constant près) admet une transformée de Fourier puisque X a un spectre pourvu d'une densité. Posons

$$(III.2.10) \quad G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \nu \tau} \varphi(\tau) d\tau.$$

Alors (III.2.9) est équivalent à

$$(III.2.11) \quad \lambda G(\nu) = G^2(\nu).$$

On a donc

$$(III.2.12) \quad G(\nu) = 0 \quad \text{ou} \quad G(\nu) = \lambda,$$

$G(\nu)$ est évidemment nul pour $|\nu| > F$, et, d'après nos hypothèses, $G(\nu)$ ne peut être nul sur $-F, +F$, il y est donc constant; en définitive, dans cet intervalle, on a

$$(III.2.13) \quad G(\nu) = \lambda.$$

D'où

$$(III.2.14) \quad \varphi(t) = \lambda \int_{-F}^{+F} e^{2\pi i \nu t} d\nu = \lambda \frac{\sin 2\pi F t}{\pi t}.$$

b. Il reste à relier λ à F . D'après (III.2.4) et (III.2.14), les zéros de la fonction de corrélation sont les points

$$(III.2.15) \quad 0 = \pm \frac{n}{2F}.$$

Mais puisque les $X(t_0 + n\lambda)$ sont non corrélés, les points

$$(III.2.16) \quad \theta = \pm n\lambda$$

sont aussi des zéros de Γ_X . On en déduit que

$$(III.2.17) \quad \lambda = K \frac{1}{2F},$$

où K est un entier positif.

Explicitons alors (III.2.1) en prenant, par exemple, $t_0 = 0$ (caractère stationnaire)

$$(III.2.18) \quad X(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{nK}{2F}\right) \lambda \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{nK}{2F}\right)}{\pi\left(t - \frac{nK}{2F}\right)}.$$

Si $K > 1$, on voit que, pour $t = \frac{1}{2F}$, on a $X = 0$. Cela est impossible car, par suite du caractère stationnaire, il en résulterait que X est toujours nul. On a donc $K = 1$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME II. — *Si l'on impose aux X_n d'être non seulement non corrélés mais encore indépendants, alors, en plus des conclusions du théorème I, on peut dire que X est une fonction aléatoire laplacienne. (On suppose maintenant X strictement stationnaire.)*

Démonstration. — *a.* Tous les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi; soit $\Phi(u)$ leur fonction caractéristique; c'est aussi celle de $X(t)$ pour t quelconque. La relation (III.2.1) permet donc d'écrire :

$$(III.2.19) \quad \Phi(u) = \Pi_n \{ \Phi(u \varphi(t - t_n)) \}.$$

Posons

$$(III.2.20) \quad \Psi = \text{Log } \Phi,$$

Ψ doit donc satisfaire la relation

$$(III.2.21) \quad \Psi(u) = \sum_n \Psi\{u \varphi(t - t_n)\}$$

quel que soit t .

b. Montrons maintenant que la condition (III.2.21) est satisfaite si X est laplacien c'est-à-dire si

$$(III.2.22) \quad \Psi(u) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} \quad (\sigma \text{ réel}).$$

Supposons, en effet, que $X(t)$ soit une fonction aléatoire stationnaire laplacienne [13].

La fonction de corrélation de X est, d'après le théorème I,

$$(III.2.23) \quad \Gamma_X(\theta) = K \frac{\sin 2\pi F\theta}{2\pi F\theta}$$

[K étant une constante positive $= \Gamma_X(0)$]. Les $X(t_n)$ étant non corrélés et laplaciens, seront indépendants ce qui prouve que (III.2.21) sera sûrement satisfait.

Ceci nous montre, par un chemin détourné, que la fonction

$$(III.2.24) \quad \varphi(\theta) = \frac{\sin 2\pi F\theta}{2\pi F\theta}$$

satisfait à

$$(III.2.25) \quad -\frac{Ku^2}{2} = \sum_n \left[-\frac{Ku^2}{2} \varphi^2(t-t_n) \right],$$

c'est-à-dire à

$$(III.2.26) \quad \sum_n \varphi^2(t-t_n) = 1$$

quel que soit t .

D'ailleurs $|\varphi(\theta)| < 1$ sauf pour $\theta = 0$. On déduit donc de (III.2.26) que, pour tout t différent de tout t_n , on a nécessairement

$$(III.2.27) \quad \sum_n |\varphi^p(t-t_n)| < 1$$

(p entier > 2), l'égalité étant exclue ⁽³⁾.

⁽³⁾ Bien que ceci soit inutile pour ce qui suit, notons que la considération de la fonction aléatoire stationnaire laplacienne $X(t)$ permet d'établir une autre propriété de la fonction φ . La relation (III.2.5) montre en effet que l'on a

$$\sum_n \varphi(t-t_n) \varphi(t-\tau-t_n) = \varphi(\tau)$$

quel que soit t .

c. Montrons maintenant que, sous certaines conditions de régularité imposées à Ψ , (III.2.22) est la seule solution de (III.2.21).

Nous supposons que Ψ ait un rayon de convergence positif à l'origine

$$(III.2.28) \quad \Psi = \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \dots;$$

on aura donc

$$(III.2.29) \quad \Psi(u) = \sum [\alpha_2 u^2 \varphi^2(t - t_n) + \alpha_3 u^3 \varphi^3(t - t_n) + \dots].$$

A cause des inégalités (III.2.27) qui peuvent au plus devenir des égalités si t était plus égal à l'un des t_n , on peut sommer terme à terme; on a donc

$$(III.2.30) \quad \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \dots = \alpha_2 u^2 \sum \varphi^2(t - t_n) + \alpha_3 u^3 \sum \varphi^3(t - t_n) + \dots$$

(III.2.29) doit être vérifié *quel que soit* t et, en particulier, pour t différent de t_n , il résulte alors des conditions (III.2.26) et (III.2.27) que seul le coefficient α_2 peut être pris différent de zéro, ce qui établit le résultat annoncé.

d. On notera les liens de ce qui précède avec le problème de l'analyse factorielle linéaire (voir à ce sujet une conférence de M. le Professeur G. Darmais [14]).

3. Étude de quelques exemples. — Résumons ce qui précède; si X est une fonction aléatoire stationnaire de spectre limité :

— le théorème d'interpolation nous fournit toujours au moins une suite X_n équivalente à $X(t)$, $X(t)$ s'exprimant, à partir des X_n , sous la forme d'une combinaison linéaire;

— si les X_n sont non corrélés, le spectre de X est uniforme;

— si les X_n sont indépendants, X est laplacien et de spectre uniforme. Lorsque les X_n sont indépendants nous dirons qu'ils constituent un système de degrés de liberté de $X(t)$.

Nous allons maintenant étudier directement quelques exemples particuliers destinés à bien montrer le rôle des hypothèses qui ont été faites ou à préciser le sens des résultats obtenus.

Exemple I. — Indépendamment de ce qui précède, considérons une suite de variables aléatoires indépendantes α_i de même loi, d'ailleurs quelconque [$E\{\alpha\} = 0$, $E\{\alpha^2\} = \sigma^2 < \infty$]. Nous pouvons toujours, *a priori*, considérer la fonction aléatoire $X(t)$ définie par

$$(III.3.1) \quad X(t) = \sum \alpha_n \varphi(t - \lambda n)$$

(λ constante, n entier et φ astreint simplement à assurer l'existence de la sommation en moyenne quadratique).

En général, $X(t)$ ne sera pas une fonction stationnaire. On peut facilement voir à quelle condition $X(t)$ sera de covariance stationnaire. On a

$$(III.3.2) \quad E\{X(t)X(t-\tau)\} = E\{\alpha^2\} \sum \varphi(t-n\lambda)\varphi(t-\tau-n\lambda).$$

la covariance sera stationnaire si

$$(III.3.3) \quad \psi(t, \tau) = \sum \varphi(t-n\lambda)\varphi(t-\tau-n\lambda)$$

est indépendant de t . ψ , qui est une fonction périodique de t de période λ , sera constant si tous ses coefficients de Fourier sont nuls à l'exception du terme constant c'est-à-dire si l'on a, pour p entier $\neq 0$,

$$(III.3.4) \quad \int_0^\lambda \sum \varphi(t-n\lambda)\varphi(t-\tau-n\lambda) e^{-2\pi ip \frac{t}{\lambda}} dt = 0$$

ou encore

$$(III.3.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2\pi ip \frac{t}{\lambda}} \varphi(t-\tau) dt = 0.$$

Soit f la transformée de Fourier de φ ; supposant le théorème de Parseval applicable, on arrive à l'identité en τ suivante :

$$(III.3.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\nu + \frac{p}{\lambda}\right) f^*(\nu) e^{2\pi i \nu \tau} d\nu \equiv 0,$$

ce qui entraîne :

$$(III.3.7) \quad \left| f\left(\nu + \frac{p}{\lambda}\right) \right| |f(\nu)| \equiv 0.$$

Si deux valeurs ν et ν' diffèrent d'un multiple entier de $\frac{1}{\lambda}$, au moins l'un des deux modules $|f(\nu)|$ et $|f(\nu')|$ doit être nul.

Cette condition est certainement vérifiée si φ est une fonction à spectre limité au domaine $-\frac{1}{2\lambda}, +\frac{1}{2\lambda}$.

Ceci n'est pas en contradiction avec le théorème I précédent car rien ne nous autorise à dire que

$$(III.3.8) \quad X_n = X(\lambda n) = \alpha_n.$$

Si nous choisissons φ de façon que $\varphi[p\lambda] = \delta_0^p$ (p entier; $\delta = 0$ si $p \neq 0$; $\delta = 1$ si $p = 0$), (III.3.8) est vérifié; les valeurs prises par $X(t)$ aux points t_n sont non corrélées; la fonction φ doit alors satisfaire à la condition

$$E[X(0)X(t)] = E[X(0)^2] \varphi[t] = \frac{E\{X(0)^2\}}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \varphi(t-\tau) dt$$

et, conformément aux conclusions du théorème I, on doit conclure que X a un spectre uniforme et que

$$(III.3.9) \quad \varphi = \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}, \quad F = \frac{1}{2\lambda}.$$

Rien ne nous prouve d'ailleurs encore que les X_n , dont on sait qu'ils sont indépendants, soient aussi laplaciens. Mais nous n'avons exprimé que la stationnarité du second ordre. En supposant simplement les X_n indépendants, $E\{X\} \equiv 0$ et φ conforme à (III.3.9) on obtient, compte tenu de (III.2.26) :

$$\begin{aligned} & E\{X(t)X(t')X(t'')X(t''')\} \\ &= [E\{X^2\}]^2 \{ \varphi(t-t')\varphi(t''-t''') + \varphi(t-t'')\varphi(t'-t''') + \varphi(t-t''')\varphi(t'-t'') \} \\ &+ [E\{X^4\} - 3[E\{X^2\}]^2] \sum \varphi(t-t_n)\varphi(t'-t_n)\varphi(t''-t_n)\varphi(t'''-t_n). \end{aligned}$$

Si l'on veut que $X(t)$ ait la stationnarité du quatrième ordre, ou bien $E\{X^4\} = 3[E\{X^2\}]^2$ ou bien le \sum doit rester invariant pour toute translation de (t, t', t'', t''') dans son ensemble. Or faisons $t = t' = t'' = t'''$; le \sum vaut 1 pour $t = 0$ et est inférieur à 1 pour $t \neq t_n$ [voir (III.2.27)]. Il est donc nécessaire que l'on ait

$$E\{X^4\} = 3[E\{X^2\}]^2$$

et l'on voit ainsi apparaître progressivement les relations entre moments caractéristiques de la loi de Gauss.

Exemple II. — Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire laplacienne à spectre uniforme sur $-F, +F$ [$E\{X\} \equiv 0$].

La figure (III.3.1) représente le spectre et la fonction de corrélation de $X(t)$.

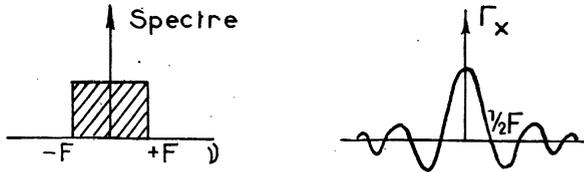


Fig. III.3.1.

Soit

$$(III.3.10) \quad Y(t) = X^2 - E\{X^2\}.$$

On sait que la fonction de corrélation Γ_Y relative à Y est $2 \Gamma_X^2$ et que le spectre de Y est triangulaire (fig. III.3.2).

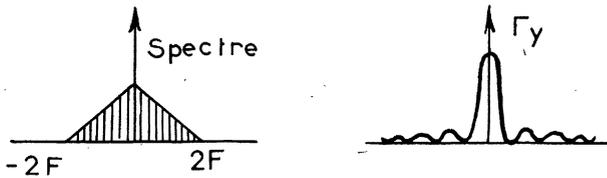


Fig. III.3.2.

Appliquons le théorème d'interpolation à $Y(t)$. On a

$$(III.3.11) \quad Y(t) = \sum Y\left(\frac{n}{4F}\right) \frac{\sin 4\pi F\left(t - \frac{n}{4F}\right)}{4\pi F\left(t - \frac{n}{4F}\right)}.$$

La suite Y_n qui intervient ici a les propriétés suivantes :

a. les termes pairs $n = 2p$ sont indépendants entre eux comme étant égaux à

$$Y\left[\frac{2p}{4F}\right] = X^2\left(\frac{p}{2F}\right) - E\left\{X^2\left(\frac{p}{2F}\right)\right\};$$

b. les termes impairs $n = 2p + 1$ sont aussi indépendants entre eux ;

c. tout terme pair est corrélé avec tout terme impair et nous savons que ceci provient du fait que l'on n'a plus un spectre uniforme.

Exemple III. (D'après une remarque de B. Van der Pol [11]). — Nous partons encore d'une fonction aléatoire stationnaire laplacienne à spectre limité, uniforme sur $-F, +F$; reprenons

$$(III.3.12) \quad X(t) = \sum X(t_n) \varphi(t - t_n); \quad t_n = \frac{n}{2F}; \quad \varphi = \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}.$$

Il est facile de voir que l'on peut dériver terme à terme :

$$(III.3.13) \quad \frac{d^p X}{dt^p} = \sum X(t_n) \frac{d^p \varphi}{dt^p} = \frac{1}{E[X^2]} \sum X(t_n) \Gamma_p(t - t_n),$$

Γ_p étant la fonction de corrélation associée à $\frac{d^p X}{dt^p}$. Les $X(t_n)$ jouent exactement ici le rôle des α_n de (III.3.1). $\frac{d^p X}{dt^p}$ est stationnaire et Γ_p a un spectre limité à $-F, +F$.

Considérons maintenant la transformation qui fait passer de $X(t)$ à

$$(III.3.14) \quad Y_K(t) = \left[1 + \frac{d^2}{[d[Ft\sqrt{K}]]^2} \right]^K X.$$

Le spectre de $Y_K(t)$ a une densité d , nulle à l'extérieur de $-F, +F$ et égale à

$$(III.3.15) \quad d(\nu) = \left[1 - \frac{4\pi^2 \nu^2}{F^2 K} \right]^{2K}$$

entre $-F$ et $+F$. Si K est grand, le spectre est approximativement défini par

$$(III.3.16) \quad d_K(\nu) \approx e^{-\frac{8\pi^2 \nu^2}{F^2}}$$

et la fonction de corrélation associée est

$$(III.3.17) \quad \Gamma_{Y_K} \approx \frac{F}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{F^2 \nu^2}{32\pi^2}}.$$

La fonction $Y_K(t)$ admet une représentation conforme à (III.3.1) avec, ici,

$$\alpha_n = \frac{X(t_n)}{E\{X^2\}} \quad \text{et} \quad \varphi = \Gamma_{Y_K}.$$

On voit ainsi apparaître un mode très important de représentation : celui dans lequel la fonction φ est gaussienne; ce mode de représentation a été très utilisé en théorie des communications, en particulier

par Gabor [1]. Nous rappelons que *les φ gaussiens réalisent l'encombrement minimum dans l'espace temps-fréquence*. D'une façon plus précise, si Φ est la transformée de Fourier de φ , c'est lorsque φ est gaussien (et Φ aussi) que l'expression

$$\frac{\int |\Phi|^2 \nu^2 d\nu}{\int |\Phi|^2 d\nu} \frac{\int |\varphi|^2 t^2 dt}{\int |\varphi|^2 dt}$$

(qui peut être interprété comme le produit des carrés moyens de deux variables aléatoires ν et t de densités de probabilités

$$\frac{|\Phi|^2}{\int |\Phi|^2 d\nu} \text{ ou } \frac{|\varphi|^2}{\int |\varphi|^2 dt}$$

est minima. Si φ est gaussien, cette expression vaut 1. Dans le cas des fonctions

$$\varphi = \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}$$

ce produit est infini.

4. Un problème de débit d'information. — Ce qui précède montre le rôle fondamental joué par les fonctions aléatoires laplaciennes dans la théorie de l'information. On a déjà vu que, dans le cas d'une transmission limitée à une bande $-F, +F$, avec un bruit stationnaire laplacien de spectre uniforme, le débit d'information était maximum pour un signal de puissance donnée, lorsque ce dernier était lui-même laplacien, stationnaire et de spectre uniforme. Le débit ainsi obtenu était alors donné par la relation

$$(III.4.1) \quad \rho_0 = \rho_{\max} = F \log \left[1 + \frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit}} \right].$$

Nous allons maintenant traiter un autre problème d'optimum qui d'ailleurs a été traité par Shannon [15]. On ne suppose plus la bande limitée. On se donne un bruit $B(t)$ stationnaire laplacien de spectre non uniforme défini par une certaine densité $d(\nu)$ (fig. III.4.1). On se donne d'autre part la puissance $E[X^2]$ du signal $X(t)$ supposé stationnaire, il s'agit de savoir quelle forme on doit donner à $X(t)$ pour avoir un débit maximum d'information.

a. On peut d'abord résoudre la question en supposant donné non seulement $E\{X^2\}$ mais aussi le spectre $D(\nu)$ de X que nous représentons pour fixer les idées par la courbe en pointillé de la figure III.4.1.

α . Particularisons encore le problème en supposant, que $D(\nu)$ et $d(\nu)$ sont des fonctions en escalier conformément à la figure III.4.1 bis, Δ étant une valeur donnée.

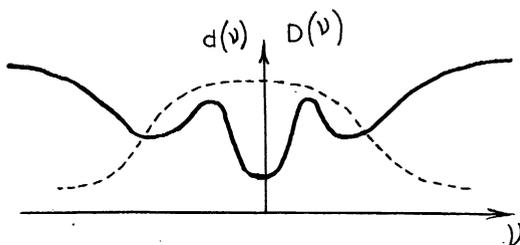


Fig. III.4.1.

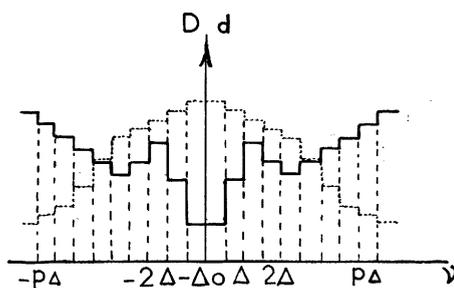


Fig. III.4.1 bis.

Nous désignerons par Ω_p le domaine

$$(III.4.2) \quad p\Delta \leq \nu \leq (p+1)\Delta \quad (p \geq 0)$$

et par \mathcal{F}_p le filtre linéaire [13] qui passe la bande Ω_p . La donnée de $X(t)$ et de $B(t)$ est équivalente à celle des ensembles

$$\mathcal{F}_p[X(t)] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_p[B(t)]$$

ou encore des ensembles

$$X'_p[t] = \text{partie réelle de } e^{-2\pi i \left[p + \frac{1}{2} \right] \Delta} \mathcal{F}_p[X(t)],$$

$$B'_p[t] = \text{partie réelle de } e^{-2\pi i \left[p + \frac{1}{2} \right] \Delta} \mathcal{F}_p[B(t)],$$

$$X''_p[t] = -i \text{ partie imaginaire de } e^{-2\pi i \left[p + \frac{1}{2} \right] \Delta} \mathcal{F}_p[X(t)],$$

$$B''_p[t] = -i \text{ partie imaginaire de } e^{-2\pi i \left[p + \frac{1}{2} \right] \Delta} \mathcal{F}_p[B(t)].$$

Toutes les fonctions X', X'', B', B'' ont leur spectre limité à $-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}$; il résulte du caractère stationnaire laplacien de $B(t)$ et de la forme particulière de son spectre que les fonctions B' et B'' sont indépendantes dans leur ensemble, chacune étant stationnaire laplacienne et de spectre uniforme.

La quantité Q' associée, pour un intervalle T , aux ensembles X'_p, X''_p sera maximum lorsque toutes ces fonctions aléatoires seront indépendantes entre elles, chacune étant stationnaire laplacienne; *on aura donc le débit d'information maximum lorsque $X(t)$ sera lui-même stationnaire laplacien*. Le débit maximum ou capacité est alors donné, comme on s'en rend compte immédiatement, par la relation

$$(III.4.4) \quad C = \Delta \sum_p \log \left[1 + \frac{D_p[v]}{d_p[v]} \right],$$

où D_p et d_p sont les densités sur Ω_p . La relation (III.4.4) résulte de l'application de la formule (III.4.1) à chaque groupe (X'_p, B'_p) ou (X''_p, B''_p) .

β . *Le cas où D et d varient de façon continue* se déduit de celui que nous venons de considérer par un passage à la limite. Le résultat est

$$(III.4.5) \quad C = \int_0^\infty \log \left[1 + \frac{D(v)}{d(v)} \right] dv.$$

b. Reprenons alors notre problème d'optimum. — Nous devons rechercher le maximum de C pour d donné et

$$(III.4.6) \quad P = \int D(v) dv$$

également donné.

Il revient au même de rechercher l'optimum de

$$(III.4.7) \quad \int_0^\infty \log [d(v) + D(v)] dv.$$

Supposons d'abord l'intégrale limitée à $|v| \leq F$ et admettons que $d(v)$ reste supérieur à d_0 (le bruit n'est jamais nul). L'intégrale précédente est alors égale à

$$(III.4.8) \quad F \log d_0 + \int_0^F \int_{d_0}^y \frac{dv d\theta}{\theta} \quad \text{avec } y = D + d.$$

Interprétons les relations (III.4.6) et (III.4.8). La relation (III.4.6) nous indique que l'aire en pointillé de la figure III.4.2 est imposée. (III.4.8) nous indique que le débit d'information varie comme la masse distribuée sur l'aire hachurée avec une densité superficielle $\frac{1}{\theta}$. On devra donc loger les éléments de l'aire hachurée le plus près possible de $\theta = 0$; $y = D + d$ devra donc être horizontal comme indiqué sur la figure III.4.2.

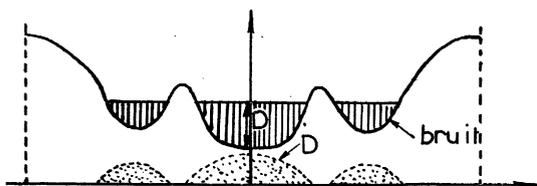


Fig. III.4.2.

Au fur et à mesure que P croît, y devra se déplacer tout en restant constant. Naturellement la limite F que nous avons arbitrairement introduite, s'élimine elle-même de la signification du résultat.

IV.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A L'OPTIQUE DE LA THÉORIE DE L'INFORMATION [16], [17], [18], [19].

1. Généralités — Nous allons envisager l'application du cadre général qui précède à l'étude de la transmission de l'information dans la liaison entre l'objet $\Sigma(x, y)$ et son image $S(x, y)$ à travers un dispositif optique.

Diverses remarques préliminaires s'imposent.

A. EFFET DE LA DISTORSION. — Nous avons admis au paragraphe II (2, B, 2^o cas) que, en l'absence de bruit, on avait $X = Y$; nous supposons donc la ligne *sans distorsion*. Ce n'est pas le cas ici car, ne fût-ce qu'à cause des phénomènes de diffraction, on n'a pas :

$$(IV.1.1) \quad \Sigma \equiv S.$$

Nous avons cependant noté que, si l'on remplace X par $f(X)$ et Y par $f(Y)$ (où f a un inverse) le débit d'information n'est pas modifié. D'où les deux remarques suivantes relatives à l'effet de *distorsion* :

— Si l'on se place au point de vue de l'information transmise, on pourra toujours dans le cas actuel où la ligne de transmission a des propriétés linéaires, supposer qu'il n'y a pas de distorsion, à condition de supposer que le bruit $B_e(x, y)$ est rapporté à l'entrée c'est-à-dire que $B_e(x, y)$ représente un bruit (peut-être fictif) qui, s'il était appliqué à l'entrée de la ligne produirait, à la sortie, le bruit B_s , réellement observé. La correspondance entre les grandeurs que nous considérons et les X, Y, Z du paragraphe II.2 est alors la suivante :

	Entrée de la ligne.	Sortie de la ligne.
X.....	$\Sigma(x, y)$	$S(x, y)$
Z.....	$B_e(x, y)$	$B_s(x, y)$
Y.....	$\Sigma + B_e$	$S + B_s$

— Si l'on se place au point de vue de la ressemblance image-objet ou même de la commodité d'observation, alors la distorsion qui a pour conséquence de fournir une image S différente de l'objet Σ joue un rôle de premier plan.

B. BANDE PASSANTE, DEGRÉS DE LIBERTÉ, QUANTIFICATION. — Revenons à ce qui a été dit sur la transmission d'un signal $X(t)$ à spectre limité $[-F < \nu < +F]$ en présence d'un bruit laplacien de spectre uniforme pour bien marquer les étapes du raisonnement.

1° *Le fait que la bande passante est limitée*, permet de dire que la suite des $X_n = X\left(\frac{n}{2F}\right)$ est équivalente à $X(t)$. La recherche du maximum du débit d'information conduit à rendre les X_n indépendants. La limitation de la bande passante permet donc de résoudre le problème de la recherche des *degrés de liberté*.

2° *On peut dire que le bruit produit une véritable quantification des X_n* . Modifions un peu les conditions que nous avons imposées jusqu'ici et supposons les X_n limités par les bornes 0 et $\bar{X} > 0$. On peut dire que le bruit fait apparaître une petite imprécision ϵ de sorte que, sur l'intervalle $(0, \bar{X})$ il y aura (en supposant \bar{X} multiple de ϵ)

$\left(1 + \frac{\bar{X}}{\varepsilon}\right)$ états discernables. Supposons tous ces états équiprobables, il y aura, sur un intervalle T ,

$$(IV.1.2) \quad N = \left(1 + \frac{\bar{X}}{\varepsilon}\right)^{2FT}$$

signaux possibles tous équiprobables. La quantité Q associée sera [voir (II.1.2)]

$$(IV.1.3) \quad Q = -kN \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} = 2kFt \log \left(1 + \frac{\bar{X}}{\varepsilon}\right).$$

L'analogie entre cette formule et la formule (II.2.29) montre bien que cette dernière traduit une idée de quantification.

C. PLAN DE L'ÉTUDE « INFORMATIONNELLE » DU PROBLÈME D'OPTIQUE CONSIDÉRÉ. — *a. Dans une première partie (IV.2), nous étudierons la « ligne de transmission » cette étude mettra en évidence une bande passante et une distorsion.*

b. Dans une deuxième partie (IV.3), nous étudierons la capacité de cette ligne. Nous devons introduire un « bruit ». La ligne interviendra plus spécialement par sa bande passante.

c. Dans une troisième partie (IV.4) nous ferons abstraction du bruit; nous quitterons donc le point de vue de l'information. Nous nous intéresserons plus spécialement à des questions liées au pouvoir de résolution ou la dissemblance objet-image. La ligne interviendra dans ces questions à la fois par sa bande passante et par sa distorsion.

2. Étude de la ligne de transmission : bande passante, distorsion. —

Nous admettons que notre dispositif optique est complètement corrigé des aberrations géométriques; la distorsion ne provient alors que de la *diffraction*. Supposons l'objet éclairé de telle sorte qu'on puisse le considérer comme un ensemble de *sources incohérentes*.

Pour étudier l'influence de la diffraction sur les propriétés de la ligne, nous raisonnerons dans le cas de la diffraction à l'infini. D'autre part, nous resterons dans le cadre de ce qu'en Optique on appelle la diffraction paraxiale c'est-à-dire que nous ne considérerons que des directions faisant de petits angles avec la normale au plan de la pupille de diffraction.

La correspondance entre un objet incohérent Δ_1 , situé à l'infini, et sa

figure de diffraction à l'infini Δ_2 , à travers une ouverture \mathcal{L}_0 , a été soigneusement étudiée par M. Duffieux [20] et ses collaborateurs. On peut résumer les résultats dont nous aurons besoin de la façon suivante :

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle qui va nous servir de repère. Nous supposons que la pupille de diffraction est une ouverture \mathcal{L}_0 , d'aire Γ entourant l'origine et pratiquée dans le plan xOy supposé opaque. L'espace-objet est le demi-espace $z > 0$ et l'espace image le demi-espace $z < 0$. A un point de l'objet, correspond une certaine direction D_1 dont nous désignerons les cosinus directeurs par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. De même, à

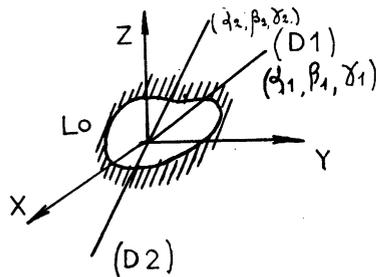


Fig. IV.2.1.

un point de l'image, correspond une direction D_2 dont nous désignerons les cosinus directeurs par $(-\alpha_2 -\beta_2 -\gamma_2)$ (fig. IV.2.1). Le fait de supposer la diffraction paraxiale se traduira par le fait que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 sont petits (fig. IV.2.1).

Pour caractériser l'objet que nous avons supposé monochromatique, nous introduirons un *facteur de brillance* $\Sigma(\alpha_1, \beta_1)$ défini par le fait que le flux envoyé sur \mathcal{L}_0 par la région $dx_1.d\beta_1$ de Δ_1 est égal à $\Gamma \Sigma(\alpha_1, \beta_1) dx_1.d\beta_1$. De même, l'image sera caractérisée par un facteur $S(\alpha_2, \beta_2)$ défini de façon analogue.

Supposons d'abord que l'objet se réduise à une source ponctuelle (α_1, β_1) c'est-à-dire que la fonction $\Sigma(\alpha_1, \beta_1)$ ne diffère de zéro qu'au voisinage de α_1, β_1 avec la condition

$$(IV.2.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma[\alpha_1, \beta_1] dx_1 d\beta_1 = 1.$$

L'onde incidente est alors une onde plane qui, au facteur $e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\gamma_1 z + \frac{z^2}{2\lambda})}$ près, est de la forme

$$(IV.2.2) \quad K e^{\frac{2\pi i}{\lambda}[\alpha_1 x + \beta_1 y]}$$

L'amplitude diffractée dans la direction α_2, β_2 s'exprime par l'intégrale double suivante :

$$(IV.2.3) \quad A[\alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_1] = k \iint_{\mathcal{L}_0} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} [x(\alpha_2 - \alpha_1) + y(\beta_2 - \beta_1)]} dx dy,$$

où k est un facteur constant.

La relation (VI.2.3) traduit d'ailleurs un résultat bien connu : l'amplitude diffractée dans la direction α_2, β_2 lorsque l'objet est sur l'axe ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$) est égale à la valeur pour $\frac{\alpha_2}{\lambda}, \frac{\beta_2}{\lambda}$ de la transformée de Fourier de la transparence T de la pupille (ici $T = 1$ dans \mathcal{L}_0 et $T = 0$ à l'extérieur de \mathcal{L}_0).

A un facteur numérique constant près, la distribution des intensités dans l'image sera celle des carrés des modules de A . Nous pourrions donc écrire, en négligeant les facteurs numériques constants, que l'image d'un objet ponctuel $[\alpha_1, \beta_1]$ est caractérisée par la distribution

$$(IV.2.4) \quad I[\alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_1] = |A(\alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_1)|^2,$$

avec

$$(IV.2.5) \quad \begin{aligned} A[\alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_1] &= \iint_{\mathcal{L}_0} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} [x(\alpha_2 - \alpha_1) + y(\beta_2 - \beta_1)]} dx dy \\ &= \iint_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} T e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} [x(\alpha_2 - \alpha_1) + y(\beta_2 - \beta_1)]} dx dy. \end{aligned}$$

De ce qui précède nous retenons les deux conséquences suivantes :

1° La figure de diffraction $I[\alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_1]$ ne dépend, en réalité, que de $\alpha_2 - \alpha_1$ et de $\beta_2 - \beta_1$.

2° En considérant l'objet comme un ensemble de sources indépendantes $\Sigma[\alpha_1, \beta_1] d\alpha_1 d\beta_1$, on obtient l'image $S(\alpha_2, \beta_2)$ par superposition des intensités.

La correspondance Σ, S est donc définie par la relation

$$(IV.2.6) \quad S[\alpha_2, \beta_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(\alpha_1, \beta_1) I[\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1] d\alpha_1 d\beta_1,$$

c'est-à-dire par un produit de composition. La transformation qui fait passer de l'objet à l'image est donc un filtre linéaire [13] caractérisé par sa réponse percussionnelle $I[\alpha, \beta]$.

On sait qu'un filtre linéaire peut être aussi caractérisé par son gain $g(\xi, \eta)$. Ce dernier possède la propriété fondamentale suivante : la transformée de

$$(IV.2.7) \quad \Sigma(\alpha_1, \beta_1) = e^{2\pi i(\xi\alpha_1 + \eta\beta_1)}$$

est

$$(IV.2.8) \quad S(\alpha_2, \beta_2) = e^{2\pi i(\xi\alpha_2 + \eta\beta_2)} g[\xi, \eta].$$

D'ailleurs, le gain est relié à la *réponse percussionnelle* I par la relation de Fourier :

$$(IV.2.9) \quad g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi\alpha + \eta\beta)} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Les relations (IV.2.4), (IV.2.1) et (IV.2.9) permettent de relier $g(\xi, \eta)$ à $T(x, y)$.

D'une façon générale, représentons deux fonctions transformées de Fourier l'une de l'autre par la même lettre, utilisée une fois en majuscule et une fois en minuscule conformément à ce qui suit :

$$(IV.2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \Leftrightarrow f, \\ F = \int e^{+2\pi i(\xi\alpha + \eta\beta)} f d\xi d\eta, \\ f = \int e^{-2\pi i(\xi\alpha + \eta\beta)} F d\alpha d\beta. \end{array} \right.$$

On a alors les correspondances suivantes; en considérant A et I comme des fonctions de $\alpha_2 - \alpha_1 = x$ et $\beta_2 - \beta_1 = y$:

$$(IV.2.11) \quad I = |A|^2 = G \Leftrightarrow g,$$

$$(IV.2.12) \quad \lambda^2 T[-\lambda\xi, -\lambda\eta] = \alpha(\xi, \eta) \Leftrightarrow A,$$

$$(IV.2.13) \quad \lambda^2 T[+\lambda\xi, +\lambda\eta] = \alpha(-\xi, -\eta) \Leftrightarrow A^*.$$

D'où

$$(IV.2.14) \quad g(\xi, \eta) = g(-\xi, -\eta) = \lambda^4 [T(-\lambda\xi, -\lambda\eta) T(\lambda\xi, \lambda\eta)]^+,$$

en désignant par []⁺ le produit de composition.

Revenant au problème initial, où T est la transparence d'une pupille, c'est-à-dire vaut 1 dans un certain domaine et zéro à l'extérieur; il est facile de voir que g ne diffère de zéro que dans un certain domaine \mathcal{L}' borné, englobant l'origine. En effet, soit \mathcal{L} le domaine du plan $\xi \times \eta$

limité par la courbe qui, en ξ, η , a la même équation que la frontière de \mathcal{L}'_0 dans x, y . La fonction $T[\lambda\xi', \lambda\eta']$, n'est différente de zéro que dans un domaine qui se déduit de \mathcal{L}' par une homothétie dont le centre est le point $\xi = \eta = 0$ et dont le rapport est $\frac{1}{\lambda}$. Soit $\mathcal{L}''_{0,0}$ ce nouveau domaine. La fonction $T[\lambda(\xi' - \xi), \lambda(\eta' - \eta)]$ où l'on suppose ξ, η fixes

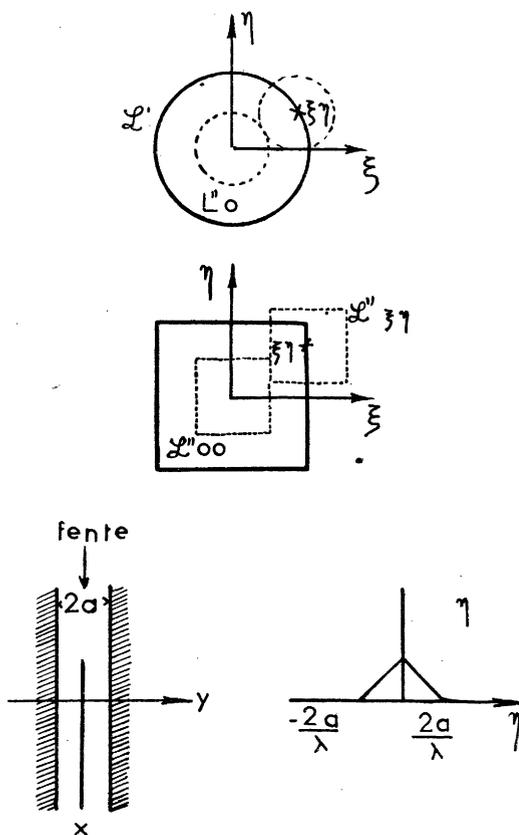


Fig. IV.2.2.

et ξ', η' variables, n'est différente de zéro que dans un domaine $\mathcal{L}''_{\xi,\eta}$ qui se déduit de $\mathcal{L}''_{0,0}$ par une translation de composantes ξ, η .

Naturellement, le produit de composition qui représente g ne sera différent de zéro que si $\mathcal{L}''_{0,0}$ et $\mathcal{L}''_{\xi,\eta}$ ont des points ξ', η' communs. Il en résulte, de façon évidente, que g ne peut être différent de zéro qu'à l'intérieur d'un domaine borné englobant l'origine.

La figure IV.2.2 indique les formes de \mathcal{L}' :

- a. dans le cas d'une pupille circulaire ;
- b. dans le cas d'une pupille rectangulaire.

Elle indique aussi, dans le cas du problème unidimensionnel de la diffraction par une fente, la forme de la courbe donnant le gain $g(\eta)$ en fonction de l'unique fréquence spatiale η .

De tout ce qui précède, nous retenons que le gain $g(\xi, \eta)$ n'est différent de zéro que dans un domaine \mathcal{L}' borné entourant l'origine $\xi = \eta = 0$.

En définitive, la « liaison » qui permet de passer de l'objet à l'image est un filtre linéaire défini

- a. soit par sa réponse percussionnelle I ;
- b. soit par son gain g .

L'objet est caractérisé par Σ (ou par sa transformée de Fourier σ) l'image par S (ou par sa transformée de Fourier s). La correspondance objet-image est définie par l'une ou l'autre des deux relations

$$(IV.2.15) \quad S[\alpha_2, \beta_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma[\alpha_1, \beta_1] I[\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1] d\alpha_1 d\beta_1$$

ou

$$(IV.2.16) \quad s(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) \sigma(\xi, \eta).$$

Si l'on considère l'objet comme une superposition d'ondes $e^{2\pi i(\xi\alpha + \eta\beta)}$ on peut dire :

- a. toute onde Θ_1 pour laquelle le point ξ, η est extérieur à \mathcal{L}' est éliminée dans la transmission ;
- b. toute onde Θ_2 pour laquelle le point ξ, η est intérieur à \mathcal{L}' est transmise avec un gain $g(\xi, \eta)$.

La transmission correspond à un filtre passe-bas ; on peut dire que, dans le plan des fréquences ξ, η , le domaine \mathcal{L}' joue un rôle équivalent à celui de la bande passante.

On voit donc de façon très nette quelles sont les perturbations apportées par l'existence de la diffraction :

1° Toute une partie du spectre de l'objet — la partie que tout naturellement nous appellerons la partie haute fréquence — est éliminée par la transmission. Tous les objets qui ne diffèrent que par des ondes Θ_1

ont la même image. Il n'est donc pas possible de reconstituer l'objet avec précision à partir de l'image.

2° L'ensemble des ondes transmises, c'est-à-dire l'ensemble des ondes Θ_2 subit une distorsion puisqu'elles sont inégalement transmises.

Ainsi donc, les propriétés mêmes de la diffraction nous ont permis, dans le cadre de l'approximation paraxiale, de définir avec précision une bande passante dans le cas de la correspondance entre un objet incohérent et son image et de mettre en évidence une distorsion dans cette bande.

Ce qui précède découle directement des propriétés de la diffraction envisagées sous l'angle de l'analyse harmonique telles qu'elles ont été présentées dans les travaux de Duffieux. J'ai montré, en collaboration avec M. Perrot [16] que ces propriétés permettaient de ramener l'étude de la correspondance objet-image à celle de problèmes classiques de la théorie de la communication. Par ailleurs, M. Gabor dans un très intéressant travail [17] a montré, à partir de l'équation de propagation, que si l'on éclaire, par une onde cohérente $e^{2\pi i(vt + \frac{z}{\lambda})}$ un objet plan situé dans $z = 0$ et caractérisé par une transparence $t(x, y)$, la lumière diffractée par cet objet ne retient les composantes de t du type $e^{2\pi i(x\xi + y\tau)}$ sous forme d'onde se propageant à amplitude constante que dans la mesure où l'on a

$$\xi^2 + \tau^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Les autres composantes donnent lieu à des ondes évanescentes dont l'amplitude devient très petite dès que $z \gg \lambda$. Si l'on néglige ces ondes évanescentes, on retrouve, là aussi, le fait que la lumière diffractée ne véhicule pas l'information correspondant aux hautes fréquences de l'objet et, par suite, on retrouve la notion de bande passante.

3. Étude de la capacité de la ligne. — A. DÉFINITION DU MODÈLE ÉTUDIÉ. — Les considérations qui précèdent ne présentent pas d'ambiguïté; elles découlent directement des propriétés de la diffraction. *Par contre l'étude de la capacité de la ligne revêtira un aspect beaucoup plus vague par suite du caractère assez hypothétique des propriétés que nous imposerons au « bruit ».*

Nous englobons dans le terme « bruit » toutes les causes d'imprécision :

- a. fluctuations du rayonnement;
- b. fluctuations dans l'uniformité de l'éclairage de l'objet;
- c. diffusion accidentelle de la lumière;
- d. imprécisions des moyens d'observation de l'image.

De plus une difficulté mathématique surgit : elle provient du fait que Σ et S sont des fonctions nécessairement positives ce qui est extrêmement gênant étant donné la facilité avec laquelle les lois de Laplace s'introduisent dans ces questions. Si nous admettons que l'objet aléatoire n'est pas trop contrasté, en moyenne, c'est-à-dire si nous admettons que $\Sigma - E[\Sigma]$ reste relativement petit devant $E[\Sigma]$ nous pouvons admettre que la restriction $\Sigma > 0$ peut être ignorée et que des distributions gaussiennes autour de $E[\Sigma]$ peuvent être prises en considération si leur écart type est faible devant $E[\Sigma]$. Dans ces conditions, on pourra, en retranchant $E[\Sigma]$, considérer de nouveau des signaux à espérance mathématique nulle. Nous ferons ces hypothèses pour la commodité des calculs. Elles limitent de façon importante la portée des résultats obtenus.

Il reste à voir quelles propriétés nous attribuons au bruit de fond.

- a. des bruits B_1 qui interviennent à l'entrée et sont en quelque sorte donnés avec l'objet;
- b. des bruits B_2 qui interviennent à la sortie et sont liés aux moyens d'observation de l'image.

Voici comment nous pouvons nous représenter les uns et les autres de ces bruits :

a. *Bruit à l'entrée.* — L'objet est caractérisé par une transparence $\Sigma(x, y)$ que nous supposons peu différente de sa valeur moyenne $E[\Sigma]$. Il est éclairé par un fond incohérent $C(x, y)$. Nous admettons que C fluctue lui aussi peu autour de $E[C]$. En fait l'objet est donc défini par

$$(IV.3.1) \quad C\Sigma = E\{\Sigma\}E\{C\} + E\{\Sigma\}[C - E\{C\}] + E\{C\}[\Sigma - E\{\Sigma\}] + [C - E\{C\}][\Sigma - E\{\Sigma\}].$$

Éliminons le terme du second ordre et le terme constant qui donne un éclairage constant à la sortie; il reste

$$(IV.3.2) \quad C\Sigma \approx E\{\Sigma\}[C - E\{C\}] + E\{C\}[\Sigma - E\{\Sigma\}].$$

soit en posant

$$(IV.3.3) \quad E\{\Sigma\}[C - E\{C\}] = B'_1, \quad E\{C\}[\Sigma - E\{\Sigma\}] = \Sigma',$$

$$(IV.3.4) \quad C\Sigma \approx B'_1 + \Sigma'.$$

L'éclairage étant incohérent, B'_1 doit être à corrélation microscopique à l'échelle des fréquences qui nous intéressent. Dans la bande transmise, nous attribuerons donc à B'_1 un spectre uniforme. Nous supposons de plus B'_1 laplacien.

b. Bruit à la sortie. — Par exemple, on photographie l'image à la sortie. Elle sera alors perturbée par le grain de la plaque. L'image est, en général, très agrandie, de sorte que, si l'on se ramène au grandissement 1 [ce qui correspond à la formulation utilisée en (IV.2.15)] tout se passe comme si le grain était un accident extrêmement petit. On pourra donc encore considérer que B_2 est un bruit à corrélation microscopique et il est assez naturel de le supposer gaussien.

Nous admettons d'autre part que l'on élimine par un filtrage convenable toutes les fréquences de B_2 extérieures à \mathcal{L}' . Cela peut présenter des difficultés pratiques considérables mais est tout à fait réalisable d'un point de vue théorique. Naturellement de telles fréquences n'existent pas dans les « images » de Σ' et de B'_1 . Nous supposons de plus le signal stationnaire en α, β .

On est alors ramené au modèle suivant : On considère la transmission d'un objet Σ' limité à la bande \mathcal{L}' et perturbé par l'adjonction d'un bruit laplacien à spectre uniforme B'_1 appliqué à l'entrée, et par l'adjonction d'un bruit laplacien à spectre uniforme B_2 appliqué à la sortie.

On peut remplacer ces deux bruits par un bruit unique B appliqué à l'entrée; B sera laplacien et aura un spectre de densité :

$$(IV.3.5) \quad d(\xi, \eta) = d_1 + d_2 \frac{1}{|g(\xi, \eta)|^2},$$

où d_1 et d_2 sont deux constantes provenant respectivement de B'_1 et de B_2 . C'est ce modèle que nous allons étudier :

B. ÉTUDE DU MODÈLE DÉFINI. — Il s'agit de l'extension au cas de deux dimensions du problème traité au (IV.4). Cette extension se fait aisément, nous passons rapidement.

a. Le théorème d'interpolation s'applique aux fonctions dont le spectre n'intéresse que les fréquences (ξ, η) intérieures à (Δ) ,

$$(IV.3.6) \quad -F < \xi < +F; \quad -F < \eta < +F.$$

Il s'écrit

$$(IV.3.7) \quad X(\alpha, \beta) = \sum_{n,m} X \left[\frac{n}{2F}, \frac{m}{2F} \right] \frac{\sin 2\pi F \left[\alpha - \frac{n}{2F} \right]}{2\pi F \left[\alpha - \frac{n}{2F} \right]} \frac{\sin 2\pi F \left[\beta - \frac{m}{2F} \right]}{2\pi F \left[\beta - \frac{m}{2F} \right]}.$$

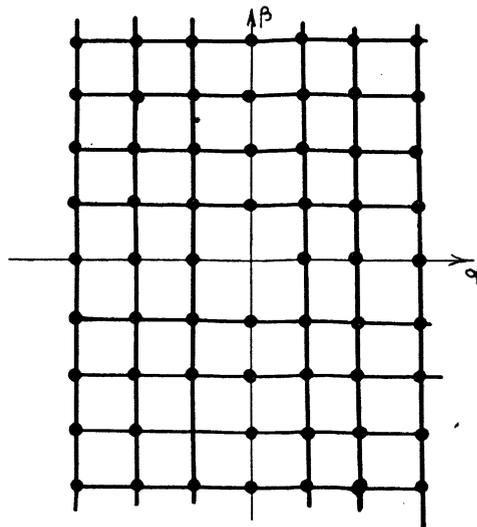


Fig. IV.3.1.

b. Les fonctions aléatoires stationnaires laplaciennes à spectre uniforme sur $-F, +F$ du cas à une dimension sont remplacées par les fonctions aléatoires stationnaires laplaciennes à spectre uniforme sur (Δ) . Leur fonction de corrélation $\Gamma(\alpha, \beta)$ est représentée, après avoir été normée, par

$$(IV.3.8) \quad \Gamma(\alpha, \beta) = \frac{\sin 2\pi F \alpha \sin 2\pi F \beta}{2\pi F \alpha \cdot 2\pi F \beta}.$$

La figure (IV.3.1) donne le lieu des zéros de Γ et le réseau des points $X \left[\frac{n}{2F}, \frac{m}{2F} \right]$.

c. Si le signal et le bruit sont stationnaires et de spectres uniformes

limités à (Δ) , le bruit étant laplacien, la capacité ρ_0 (maximum d'information par unité de surface dans $\alpha \times \beta$) est égale à

$$(IV.3.9) \quad \rho_0 = 2F^2 \log \left[1 + \frac{E[\Sigma^2]}{E[B^2]} \right].$$

d. Le cas général où les spectres du signal et du bruit sont quelconques

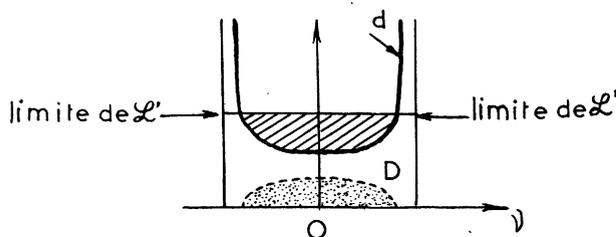


Fig. IV.3.2.

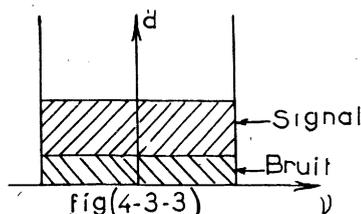


Fig. IV.3.3.

(densité D et d) (le bruit étant laplacien) et où la bande est \mathcal{L}' se traite par une extension naturelle du cas à une dimension; on trouve

$$(IV.3.10) \quad \rho_0 = \iint_{\mathcal{L}'} \frac{1}{2} \log \left[1 + \frac{D(\xi, \eta)}{d(\xi, \eta)} \right] d\xi d\eta.$$

e. Enfin si, le bruit étant conforme à (IV.3.5), on impose la puissance du signal, on aura la transmission optimum en opérant de la façon suivante : on considère la surface $d[\xi, \eta]$. Elle est minimum pour $\xi = \eta = 0$ et devient infinie sur les limites de \mathcal{L}' comme indiqué sur la figure (IV.3.2); on aura le débit maximum en prenant un signal laplacien dont le spectre a une densité D telle que le volume représenté en pointillé soit égal à $E\{\Sigma^2\}$ et telle que, pour toutes les fréquences où le signal existe, on ait $D + d = \text{const.}$, le « volume du signal » se plaçant comme le ferait un liquide qui coule dans la cuvette définie par

la surface d ; ρ_0 est alors donné par (IV.3.10). Si d_2 est nul, on a alors la configuration de la figure (IV.3.3) et le signal est stationnaire laplacien et de spectre uniforme. S'il en est ainsi, la valeur de ρ_0 est indépendante de toute distorsion survenant dans la transmission. Au contraire, si $d_2 \neq 0$, le gain g intervient dans le résultat.

4. Pouvoir séparateur. Ressemblance de l'image et de l'objet. —

A. GÉNÉRALITÉS. — Faisons maintenant abstraction du bruit et limitons-nous à l'étude de la déformation dans la correspondance objet-image. Soit \mathfrak{C} la transformation qui caractérise cette correspondance

$$(IV.4.1) \quad S = \mathfrak{C}[\Sigma],$$

Σ est différent de S pour deux raisons :

a. Les composantes Θ_1 , sont éliminées : tout objet qui ne renferme que des ondes Θ_1 , est invisible, c'est cela qui crée de façon stricte la limite correspondant au *souvenir séparateur*. Ce dernier est limité parce que \mathfrak{C} n'admet pas d'inverse \mathfrak{C}^{-1} . Il n'est pas possible de retrouver l'objet à travers l'image. Si Σ_0 est un objet qui peut correspondre à une image S , tous les objets se déduisant de Σ_0 par la relation

$$(IV.4.2) \quad \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma',$$

où Σ' est l'ensemble des objets ne contenant que des ondes Θ_1 , correspondent aussi à S et il est impossible de les discerner.

b. Dans la bande \mathcal{L}' , c'est-à-dire pour l'ensemble des ondes Θ_2 transmises, il y a distorsion car le gain $g[\xi, \eta]$ dépend de (ξ, η) .

Nous allons dans ce qui suit :

1° Envisager l'intérêt qu'il y aurait à *corriger la distorsion* dans \mathcal{L}' et indiquer une méthode pour y parvenir.

2° Indiquer certains artifices qui peuvent permettre de voir des objets constitués par des ondes Θ_1 , exclusivement, c'est-à-dire qui peuvent permettre une *amélioration du pouvoir séparateur*.

B. CORRECTION DE LA DISTORSION. — Nous allons voir comment on peut procéder si l'on cherche à corriger pratiquement la distorsion qui résulte du fait que $g(\xi, \eta)$ n'est pas constant dans \mathcal{L}' .

Faisons d'abord quelques remarques générales. Nous cherchons à réaliser un gain constant dans \mathcal{L}' . On peut d'abord se demander s'il ne

serait pas possible d'obtenir ce résultat en agissant directement sur l'optique du système de façon que l'image S, obtenue directement soit vraiment identique à Σ dans la mesure où Σ ne contient que des ondes Θ_2 .

Par exemple, le contour de la pupille \mathcal{L}_0 étant imposé, on pourrait être tenté d'agir sur la transparence de cette pupille comme cela se fait avec succès dans les méthodes d'application (voir à ce sujet les travaux de Jacquinot et de ses collaborateurs [21]). Or, quelle que soit la fonction T dans \mathcal{L}_0 (et nulle à l'extérieur de \mathcal{L}_0), le gain $g(\xi, \eta)$ tendra vers zéro lorsque le point (ξ, η) s'approchera des limites de \mathcal{L}' ; cela résulte directement de la relation (IV.2.14) et de la construction géométrique de la figure IV.2.2. On n'obtiendra donc pas, par cette méthode, le gain constant cherché.

Il faut vraiment, S étant obtenu, envisager une *transformation a posteriori de l'image S* pour la remplacer par une autre image S' égale à la « composante » de Σ sur \mathcal{L}' .

La solution de principe de ce problème consiste à transformer S dans un filtre linéaire Φ de gain égal à $\frac{1}{g}$ dans \mathcal{L}' . En fait, cette transformation ne pourra pratiquement être réalisée qu'au prix de certaines approximations car $\frac{1}{g}$ devient infiniment grand au voisinage de la frontière de \mathcal{L}' .

Voyons d'abord, dans un cas simple, l'intérêt pratique que peut présenter la correction de cette distorsion; considérons le cas particulier de la diffraction par une fente.

La figure (IV.4.1) précise les notations. Le trièdre Oxyz est trirectangle. La fente, de largeur $2a$ est située dans Oxy; elle a pour axe Ox. L'objet est supposé à l'infini et l'on admet qu'il se réduit à une distribution de sources incohérentes dont les directions sont contenues dans yOz et ne s'écartent pas trop de Oz. Conformément à nos notations précédentes, l'objet et l'image seront caractérisés par les distributions de brillance $\Sigma(\beta)$ et S(β). Le gain $g(\eta)$ est, dans ce cas particulier, défini de la façon suivante :

$$(IV.4.3) \quad \begin{cases} g(\eta) = 0 & \text{pour } |\eta| > 1 & (\text{ondes } \Theta_1), \\ g(\eta) = 1 - |\eta| & \text{pour } |\eta| < 1 & (\text{ondes } \Theta_2) \end{cases}$$

(à condition de prendre $\frac{\lambda}{2a}$ comme unité d'angle β).

Le filtre correcteur devra être un filtre Φ dont le gain γ serait défini par la condition

$$(IV.4.4) \quad \gamma = \frac{1}{1 - |\eta|} \quad \text{pour } |\eta| < 1.$$

On peut alors schématiser de la façon suivante les avantages présentés par la substitution de S' à S :

a. Si l'objet ne contient que des ondes Θ_2 , l'intérêt de la correction

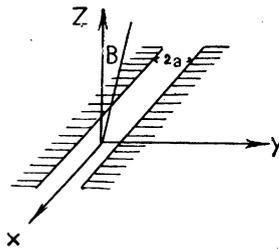


Fig. IV.4.1.

apportée par Φ consistera dans le fait que cette correction rendra l'image semblable à l'objet

$$(IV.4.5) \quad S' \equiv \Sigma.$$

b. Examinons, d'autre part, la fidélité de reproduction d'un « détail » avec ou sans la correction Φ .

Il est assez commode de prendre comme « détail » une tache définie par

$$(IV.4.6) \quad \Sigma(\beta) = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2\beta^2}{\tau^2}}.$$

Les images $S(\beta)$ et $S'(\beta)$ diffèrent par leurs valeurs centrales respectives $S(0)$ et $S'(0)$ et aussi par leurs formes. Il est commode de distinguer ces deux points en écrivant

$$(IV.4.7) \quad S(\beta) = S(0) S_1(\beta), \quad S'(\beta) = S'(0) S'_1(\beta).$$

Les figures (IV.4.2) et (IV.4.3) fournissent, pour diverses valeurs de τ , les courbes $S_1(\beta)$, $S'_1(\beta)$ ainsi que des valeurs proportionnelles

à $S'(0)$ et à $S(0)$. On voit que l'emploi de Φ permet d'obtenir, pour des valeurs de τ qui approchent de la limite du pouvoir séparateur, des taches centrales plus fines et une valeur centrale plus importante. Par contre, l'emploi de Φ fait apparaître des taches latérales.

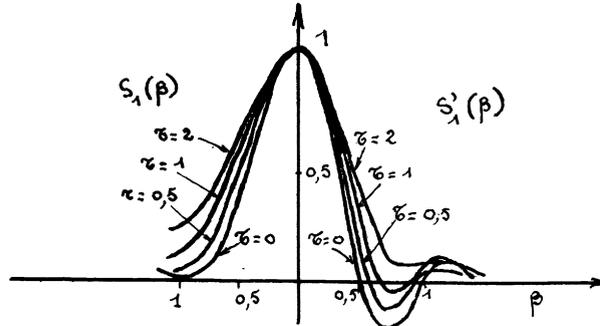


Fig. IV.4.2.

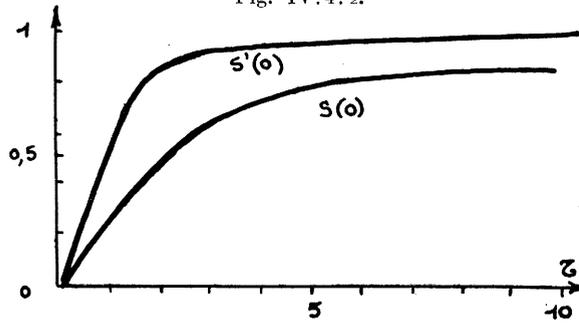


Fig. IV.4.3.

L'intérêt de la correction de la distorsion ayant été ainsi mis en évidence, comment peut-on la réaliser ?

Nous nous bornons à indiquer les principes des procédés utilisés ou suggérés :

Problèmes unidimensionnels (par exemple : diffraction par une fente). — A. Blanc-Lapierre, M. Perrot et P. Dumontet [22] ont proposé d'essayer de réaliser un filtre Φ' dont le gain γ' soit seulement voisin de γ sur l'intervalle de fréquence $-1 \leq \eta \leq 1$; on peut, par exemple, utiliser pour γ' des polynômes pairs γ'_{2n} tels que

$$(IV.4.8) \quad \gamma'_{2n}[1 - |\eta|] = P_{2n}[\eta]$$

diffère très peu de 1 sur $|\eta| < 1$.

La transformée S'_{2n} de S sera alors une combinaison linéaire de S et de ses dérivées

$$(IV.4.9) \quad \gamma'_{2n}[\gamma] = a_0 + a_2 \gamma^2 + \dots + a_{2n} \gamma^{2n},$$

$$(IV.4.10) \quad S'_{2n}[\beta] = a_0 S[\beta] + \dots + \frac{(-1)^n}{(i\pi^2)^n} \frac{d^{2n} S}{d\beta^{2n}}.$$

Il reste à voir comment on peut réaliser commodément le passage de $S(\beta)$ à $S'_{2n}(\beta)$ conformément à (IV.4.10). On peut envisager pour cela divers procédés.

Ce passage peut être réalisé par des associations de circuits électriques convenables. On peut aussi faire appel à des méthodes optiques. Si l'on remplace la dérivée par un quotient différentiel, on peut, au prix d'une petite erreur, écrire

$$(IV.4.11) \quad \frac{dS}{d\beta} \simeq \frac{\int_{\beta+\delta-h}^{\beta+\delta+h} S(\theta) d\theta - \int_{\beta-\delta-h}^{\beta-\delta+h} S(\theta) d\theta}{4\delta h},$$

où δ et h sont suffisamment petits ($h \ll \delta$).

L'opération de dérivation se ramène alors à un produit de composition du type

$$(IV.4.12) \quad \frac{dx}{dt} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} S(\theta) R(t-\theta) d\theta,$$

la fonction $R(\theta)$ étant conforme à la figure IV.4.4; on sait que de telles

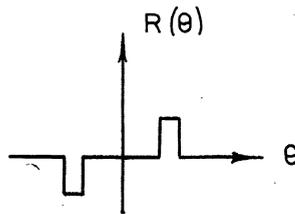


Fig IV.4.4.

opérations sont réalisables par des méthodes optiques. P. Dumontet est en train d'étudier des appareils basés sur ce principe.

Cas général. — M. Maréchal [23] a proposé une solution de principe générale pour résoudre le problème du passage de S à S' . Elle repose sur l'utilisation des propriétés de la diffraction dans le cas où les objets sont soumis à un *éclairage cohérent*.

La correspondance image-objet est alors décrite par une relation qui se déduit de (IV.2.6) en substituant A à I; or l'équation (IV.2.5) montre que A est, à un changement de paramètre près, la transformée de Fourier de la transparence de la pupille. La transparence de la pupille joue donc, à un changement de paramètre près, le rôle du gain γ . Pour passer de S à S' il suffit donc, en principe, d'éclairer de façon cohérente un objet de transparence S et de l'observer à travers une pupille de transparence $\gamma\left[-\frac{x}{\lambda}, -\frac{y}{\lambda}\right]$.

C. AMÉLIORATION DU POUVOIR SÉPARATEUR. — Nous allons maintenant envisager divers artifices qui peuvent, en principe, permettre de déceler certains objets qui normalement doivent être rendus complètement invisibles par la diffraction, c'est-à-dire certains objets constitués uniquement par des ondes Θ_1 . Il ne s'agit pas ici d'obtenir une image S semblable aux objets Σ mais d'obtenir, dans des cas où l'on aurait $S \equiv 0$, une image $S \neq 0$ qui fournisse certaines indications sur la structure de Σ . Deux exemples de principe, qui ont donné lieu à des expériences à grande échelle, ont été donnés par A. Blanc-Lapierre, M. Perrot et G. Péri [24].

D'une façon ou d'une autre, pour obtenir une image $S \neq 0$, il faut faire apparaître un système d'ondes Θ_2 lié à la structure de l'objet qui, lui, ne possède que des composantes Θ_1 . Les deux expériences que nous allons décrire reposent :

- la première, sur un procédé de *changement de fréquence*;
- La seconde sur un procédé de *détection*.

1° *Utilisation d'un changement de fréquence* ⁽¹⁾. — Précisons d'abord le « schéma radioélectrique » équivalent à cette expérience : Soit A un amplificateur qui passe la bande de fréquences 0Ω . Si le signal S est une sinusoïde pure correspondant à une fréquence $\nu_1 > \Omega$, l'amplificateur ne transmet rien du tout et, à la sortie, on ignore l'existence de S. Mais, utilisons un oscillateur local de fréquence ν_0 pour effectuer un changement de fréquence avant A. Il y aura, en particulier, apparition

⁽¹⁾ Les auteurs ont eu l'idée de faire cette expérience à la suite d'une intéressante remarque du Docteur Mac Kay au Symposium de Londres sur la Théorie de l'Information (septembre 1952) au cours de la discussion qui a suivi le rapport de A. Blanc-Lapierre, *Application to optics of information theory*.

de la fréquence $|\nu_0 - \nu_1|$ qui, pour des valeurs convenables, sera transmise; de sorte que nous pourrions déceler la présence du signal.

Tout cela est exactement transposable dans le domaine de l'optique. — Le filtre est constitué par une lentille L qui donne d'un objet situé dans un plan P une image située dans un plan P'. Un diaphragme réglable, placé contre la lentille, permet de faire varier la « bande passante » du dispositif. Comme objet, nous avons pris une photographie de franges d'interférences obtenues avec des bilentilles de Billet (fréquence spatiale ν_1). Si l'on réduit le diaphragme, on diminue la bande passante du système et il arrive un moment où la composante sinusoïdale de l'objet n'est plus transmise. L'image a alors un éclat uniforme.

Mais faisons un changement de fréquence en plaçant, sur l'objet, une plaque contenant des franges de même nature orientées parallèlement et d'interfrange un peu différent (fréquence spatiale ν_0). Cette nouvelle plaque joue le rôle d'oscillateur local et réalise le changement de fréquence recherché. Il est possible que la fréquence ν_0 ne soit pas transmise (pas plus que ν_1) mais que la composante de basse fréquence $|\nu_0 - \nu_1|$ soit transmise. Cette composante sera donc visible sur l'image et, à partir d'elle, il sera possible de remonter à la fréquence ν_1 , c'est-à-dire à l'objet. Ainsi, une structure périodique, à première vue intransmissible, aura été décelée du côté image. L'expérience, quoique délicate à réaliser, a pleinement confirmé ces vues.

La figure IV.4.5 correspond à un *diaphragme bien ouvert* donc à une grande bande passante : elle nous montre :

- α. en bas une plage où l'on voit la fréquence ν_0 ;
- β. en haut une plage où l'on voit la fréquence ν_1 ;
- γ. au milieu une plage sur laquelle existent les fréquences $|\nu_0 - \nu_1|$, ν_1 , ν_0 , $\nu_1 + \nu_0$.

La figure IV.4.6 nous montre ces mêmes plages lorsque le *diaphragme est peu ouvert*. L'objet de fréquence ν_1 est invisible, l'objet de fréquence ν_0 l'est aussi, mais, dans la plage centrale, on voit le battement de fréquence $|\nu_0 - \nu_1|$.

Naturellement, il s'agit là d'une expérience à grande échelle. Mais, à échelle microscopique, il n'est peut-être pas impossible de trouver des corps pouvant jouer le rôle d'oscillateur local.

Cette expérience montre que la notion de pouvoir séparateur n'est pas aussi restrictive qu'on pouvait le penser. Dans une expérience définie, on ne peut retirer de l'objet qu'une information correspondant à une bande limitée; mais on peut penser que des expériences successives peuvent apporter des informations correspondant à des bandes de fréquences différentes et ainsi enrichir notre connaissance de détails supplémentaires.

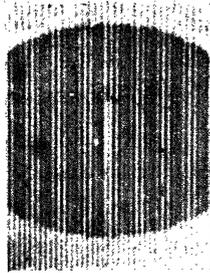


Fig. IV.4.5.



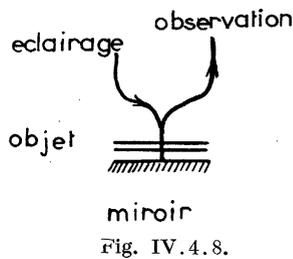
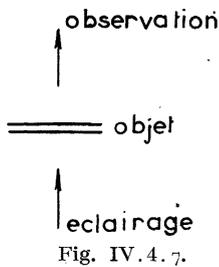
Fig. IV.4.6.

2° *Utilisation d'une détection.* — Un autre procédé pour faire apparaître des basses fréquences consiste à faire subir à Σ une transformation non linéaire : par exemple, on peut remplacer Σ par Σ^2 ce qui revient à substituer à σ le produit de composition $[\sigma.\sigma]^+$. Cela est possible optiquement. Pour passer de Σ à Σ^2 , il suffit que les rayons lumineux traversent deux fois l'objet. Supposons que l'objet soit caractérisé par une transparence Σ et qu'il soit éclairé par un faisceau réalisant dans son plan un éclairage incohérent, macroscopiquement uniforme. Si l'on opère

par transmission (*fig.* IV.4.7), on réalise un objet Σ . Si l'on opère comme sur la *figure* IV.4.8 qui fait intervenir un miroir placé immédiatement derrière l'objet, on réalise un objet Σ^2 .

Naturellement, de nombreuses précautions sont à prendre. Il faut en particulier, éliminer le faisceau réfléchi par la face avant de l'objet.

L'expérience a été réalisée avec un film sur lequel on avait imprimé



une densité telle que la transparence de ce film dépendant uniquement de x , soit de la forme

$$(IV.4.13) \quad e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos 2\pi\beta x.$$

Ce film était éclairé par transparence dans la région des $y > 0$ [on avait alors $\Sigma(x) = T(x)$] et conformément à la *figure* IV.4.8 du côté des $y < 0$.

Le spectre de $T(x)$ était conforme à la *figure* IV.4.9.

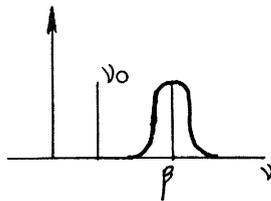


Fig. IV.4.9.

On avait réglé le diaphragme du dispositif d'observation de façon que les seules fréquences transmises satisfassent à

$$(IV.4.14) \quad |\xi^2 + \eta^2| < \nu_0^2,$$

où ν_0 (*fig.* IV.4.9) était pris assez faible pour que, pratiquement, toutes les composantes de $T(x)$ soient éliminées. Dans ces conditions,

$T(x)$ est invisible, mais $T^2(x)$ est visible et se présente comme un objet de forme gaussienne. C'est ce qui apparaît sur la figure IV.4.10. Du côté éclairé par transmission on ne voit qu'une teinte plate; au contraire, le côté éclairé par réflexion nous donne un aspect très lié à la courbe enveloppe $e^{-\frac{x^2}{2z^2}}$ de $T(x)$.



Fig. IV.4.10.

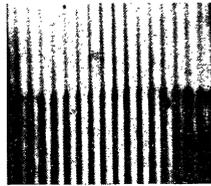


Fig. IV.4.11.

Ainsi la substitution de T^2 à T a permis de déceler l'existence de l'objet. La figure IV.4.11 représente l'aspect des deux plages pour un diaphragme beaucoup plus ouvert.

Note ajoutée au moment de la correction des épreuves. — Naturellement, si l'on veut transposer les procédés du « changement de fréquence » et de la « détection » à des objets dont les détails ont des dimensions inférieures à la longueur d'onde, on se heurtera à l'apparition d'ondes évanescentes ce qui conduira à limiter les applications à des objets de très faible épaisseur.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] D. GABOR, *Theory of Communication* (*J. Inst. Elect. Eng.*, t. 93, fasc. III, 1946, p. 429).
- [2] VILLE, *Théorie et applications de la notion de signal analytique* (*Câbles et transmissions*, n° 61, 1948).
- [3] N. WIENER, *Cybernetics*, Hermann et C^{ie}, Paris, 1948.
- [4] G. TULLER, *Theoretical limitations on the Rate of transmission of Information* (*Proc. Inst. Rad. Eng.*, t. 37, 1949, p. 468).
- [5] C. SHANNON, *The mathematical theory of Communications*, The University of Illinois Press, Urbana, 1949.
- [6] P. AIGRAIN, *Transmission de l'Information. La Cybernétique. Théorie du signal et de l'Information* (*Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de Louis de Broglie*, éditions de la *Revue d'Optique*, Paris, 1951).
- [7] FROMAGEOT, *Notion d'entropie en calcul des probabilités* (*Annales des Télécommunications*, septembre 1952, p. 388).
- [8] LOEB, *Une théorie « Informationnelle » de la mesure et de la télémessure* (*Annales des Télécommunications*, avril 1951, p. 90).
- [9] R. FORTET, Rapport sur les notions de *Quantité d'information, Débit, Capacité* présenté à l'Assemblée générale de Sydney de l'Union Radioscientifique internationale (1952).
- [10] J. OSWALD, *Les signaux à spectre limité et leurs transformations* (*Câbles et transmissions*; n° 3, 1950, p. 197); *Signaux aléatoires à spectre limité* (*Câbles et transmissions*, n° 2, 1951, p. 158).
- [11] B. VAN DER POL, *Note on signal Analysis* (*Rapport à la VI^e Commission de l'Union Radioscientifique internationale*, 15 décembre 1950).
- [12] A. BLANG-LAPIERRE, *Remarques sur un théorème d'interpolation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1733).
- [13] A. BLANG-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.
- [14] G. DARMOIS, *Analyse générale des liaisons stochastiques, Étude particulière de l'Analyse factorielle linéaire* (*Revue Internationale de Statistique*, La Haye, 1953).
- [15] C. SHANNON, *Communication in the presence of noise* (*Proc. Inst. Rad. Eng.*, t. 37, 1949, p. 10).
- [16] A. BLANG-LAPIERRE et M. PERROT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 539.
- [17] D. GABOR, *Light and information* (*Richtie Lecture Edinburgh*, March 2, 1951).
- [18] G. W. KING and A. G. EMSLIE, *J. Opt. Soc.*, June 1951, p. 405 et November 1951, p. 867.
- [19] A. BLANG-LAPIERRE, *Transposition au domaine de l'Optique de certains résultats de la théorie de l'information* (*Bull. Soc. franç. Electr.*, 7^e série, t. II, n° 20, août 1952, p. 481).

- [20] DUFFIEUX, *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'Optique*, Rennes, 1946.
- [21] B. DOSSIER, P. BOUGHON et P. JACQUINOT, *Apodisation de raies spectrales au moyen d'écrans absorbants (Journal des Recherches du C. N. R. S., n° 11, 1950).*
- [22] A. BLANC-LAPIERRE, M. PERROT et P. DUMONTET, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1342.
- [23] A. MARÉCHAL, *XXIII^e Semaine de Discussions de la Société française des électriciens (Bull. Soc. franç. Electr., 7^e série, t. III, n° 28, avril 1953, p. 235).*
- [24] A. BLANC-LAPIERRE, M. PERROT et G. PERI, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1540.