Annales de l'I. H. P.

Daniel Dugué

Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité

Annales de l'I. H. P., tome 12, nº 3 (1951), p. 159-169
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_3_159_0>

Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité.

Par

M. Daniel DUGUÉ.

---

1. Dans un article précédent j'ai déjà exposé certaines méthodes présentant des résultats fondamentaux de l'arithmétique des lois de probabilité comme des théorèmes de convexité. Je voudrais indiquer maintenant quelques aspects des décompositions dans le semi-corps des variables aléatoires. Les théorèmes de base dans cette recherche sont les théorèmes de Raikoff, Lévy-Cramer et ceux sur la représentation des lois indéfiniment divisibles donnés par M. Paul Lévy. De manière plus ou moins détournée tous ces résultats se rattachent au fait que :

La seule décomposition possible de e^z *en produit de fonctions analytiques à coefficients tous positifs ou nuls est* $e^{\lambda z} e^{\mu z} (\lambda, \mu > 0)$.

J'ajoute que la démonstration très simple de ce résultat donnée par exemple par M. Paul Lévy dans *Arithmétique des lois de probabilité* (*Journal de Mathématiques*, 1938) peut s'étendre de la façon suivante :

La seule décomposition possible de e^z *en produit de fonctions appartenant à des classes déterminées par leurs dérivées à l'origine* (*fonctions quasi-anaytiques*) *et dont toutes les dérivées sont positives ou nulles est* $e^{\lambda z} e^{\mu z}$.

On sait qu'il y a une trentaine d'années M. Borel avait émis l'hypothèse que toute fonction quasi analytique à dérivées toutes positives en un point était analytique. Ce théorème a été démontré récemment par M. Thøger Bang. Le deuxième énoncé n'est donc que la réunion du premier et du théorème de Thøger Bang. Néanmoins on peut l'établir sans faire appel au résultat général sur les fonctions quasi analytiques.

En effet si $fg = e^z$, f et g étant indéfiniment dérivables en o et $f(0) = g(0) = 1$ ce que l'on peut toujours supposer, le fait que toutes les dérivées soient positives ou nulles entraîne que $f^{(n)}(0)$ et $g^{(n)}(0)$ sont inférieures à $\left(\frac{d^n e^z}{dz^n}\right)_{z=0} = 1$. Si donc f et g sont déterminées sans équivoque par la suite de leurs dérivées à l'origine $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à l'unité. Leur produit ne pouvant pas s'annuler elles n'ont pas de zéros et par conséquent

$$f(z) = e^{\lambda z}, \qquad g(z) = e^{\mu z}.$$

On ne pourrait aller au delà et se contenter comme hypothèse pour f et g de l'indéfinie dérivabilité sur un segment toutes les dérivées en zéro étant positives. Il est facile de voir en effet que $\dfrac{e^{\lambda z}}{1 - e^{-\frac{1}{z^2}}}$ et $e^{\mu z}\left(1 - e^{-\frac{1}{z^2}}\right)$ ont toutes leurs dérivées positives en zéro.

2. Ces théorèmes d'unicité de décomposition pour les lois fondamentales étant obtenus on peut se poser pour l'arithmétique du semi-corps les mêmes questions que pour l'arithmétique des entiers. Le but de cet article est de signaler un certain nombre de différences entre les deux domaines. Dès le début des faits nouveaux apparaissent.

M. Khintchine a le premier signalé qu'on pouvait construire deux fonctions caractéristiques φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1 = \psi\varphi_2$, $\varphi_1 = \theta\varphi_2$, ψ et θ étant deux fonctions caractéristiques différentes. Il en résulte que X_1 et X_2 étant deux variables ayant pour fonction caractéristique φ_1 et φ_2 leur différence a une répartition complètement indéterminée puisqu'elle peut avoir comme fonction caractéristique $\alpha\psi + \beta\theta$ ($\alpha + \beta = 1$, α et $\beta \geqq 0$).

L'équation $X_1 = X_2 + X$ (X_2 et X étant indépendantes) a une infinité de solutions en X.

L'exemple donné est le suivant (nous adoptons la forme de fonction caractéristique de M. Paul Lévy) :

$\varphi_2 = 1 - |z|$ pour $|z| \leqq 1$ et 0 pour $|z| \geqq 1$ ce qui peut s'écrire :

$$\varphi_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\cos zx\,dx.$$

$\theta = 1 - |z|$ pour $|z| \leqq 1$ et périodique de période 2, donc :

$$\theta = \frac{1}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi z.$$

φ_2 et θ ne sont définis que pour z réel.

La deuxième forme de φ_2 et θ montre qu'il s'agit bien de fonctions caractéristiques. En prenant $\psi = \varphi_2$ on voit que

$$\psi\varphi_2 = \varphi_2^2 = \varphi_2\theta \qquad \text{quel que soit } z.$$

Bien entendu un tel résultat n'est possible que si ψ, θ, φ_2 ne sont pas analytiques à l'origine. En effet si elles l'étaient en ce point elles le seraient sur tout l'axe Ox. Or $\psi\varphi_2 = \theta\varphi_2$ ne peut avoir lieu que si $\psi - \theta = 0$ ou $\varphi_2 = 0$. L'analyticité des fonctions entraînerait que ces égalités aient lieu partout. Le résultat serait naturellement le même si l'on substituait quasi-analyticité à analyticité :

Par conséquent *si la variable* X *a tous ses moments d'ordre pair tels que* $\sum \frac{1}{(M_{2p})^{\frac{1}{2p}}}$ *diverge la décomposition de* X *en deux composantes dont l'une est* Y *ne peut avoir lieu que d'une manière unique.*

3. M. Paul Lévy a indiqué deux décompositions de la variable de probabilité uniforme comprise entre -1 et $+1$ en deux variables indépendantes X_1, X_2 et X'_1, X'_2, X_1 étant indécomposable et n'étant composante ni de X'_1 ni de X'_2. Il suffit de remarquer que

$$\frac{\sin z}{z} = \cos\frac{z}{2}\,\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} = \frac{\sin\frac{z}{3}}{\frac{z}{3}}\left(\frac{e^{-i\frac{2z}{3}} + 1 + e^{i\frac{2z}{3}}}{3}\right),$$

$\cos\frac{z}{2}$ est une fonction caractéristique indécomposable $\Big($l'aléatoire correspondante ne prend que deux valeurs $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\Big)$ et il est facile de voir qu'elle n'est composante ni de $\frac{\sin\frac{z}{3}}{\frac{z}{3}}$ $\Big($variable homogène dont le champ de variation est $\frac{2}{3}\Big)$ ni de $\dfrac{2\cos\frac{2z}{3}+1}{3}$ $\Big($dont l'aléatoire prend les valeurs $-\frac{2}{3}$, o et $\frac{2}{3}\Big)$. De même

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{\sin\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}\left[\frac{1+2\cos\frac{2z}{n}+\ldots+2\cos\frac{n-1}{n}z}{n}\right]\qquad \text{si } n \text{ est impair}$$

et

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{\sin\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}\left[\frac{2\left(\cos\frac{z}{n}+\cos\frac{3z}{n}+\ldots+\cos\frac{n-1}{n}z\right)}{n}\right]\qquad \text{si } n \text{ est pair.}$$

Donc quel que soit n on a une décomposition de la variable initiale en une variable homogène et une variable discontinue. $\frac{\sin z}{z}$ a donc une infinité de diviseurs bien que n'étant pas indéfiniment divisible (c'est-à-dire pouvant être considérée comme la somme d'une infinité d'aléatoires infiniment petites). Ces diviseurs dépendent d'un paramètre discontinu n. La première loi de Laplace donne un exemple de loi ayant une infinité de diviseurs dépendant d'un paramètre continu et qui n'est pas indéfiniment divisible. Cette loi qui a pour fonction de probabilité élémentaire $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ a pour fonction caractéristique $\frac{1}{1+t^2}$. Elle admet deux composantes de fonction caractéristique $\frac{1}{1+it}$ et $\frac{1}{1-it}$. $\frac{1}{1-it}$ est la fonction de la loi de répartition élémentaire e^{-x} pour $x \geqq 0$ et o pour $x<0$ et $\frac{1}{1+it}$ est la fonction caractéristique de la variable opposée. Toutes deux admettent une infinité de diviseurs. $\frac{1}{1-it}$ admet pour diviseur toute fonction de la forme $\frac{1-\lambda it}{1-it}$ (λ quelconque inférieur à 1). En effet l'égalité

$$\frac{1-\lambda it}{1-it}=\lambda+\frac{1-\lambda}{1-it}$$

montre que $\frac{1-\lambda it}{1-it}$ est la fonction caractéristique attachée à la loi de probabilité totale $F(x)=0$ pour $x<0$ et $1-(1-\lambda)e^{-x}$ pour $x\geqq 0$ $\big($application à la loi de la variable certaine égale à zéro et à la loi de fonction caractéristique $\frac{1}{1-it}$ de la deuxième opération du semi-corps des aléatoires avec λ et $1-\lambda$ comme coefficients$\Big)$. Or

$$\frac{1}{1-it} = \frac{1-\lambda it}{1-it}\,\frac{1}{1-\lambda it}$$

montre que la variable de fonction caractéristique $\frac{1}{1-it}$ a pour composante une variable homothétique dans le rapport λ $\Big($fonction caractéristique $\frac{1}{1-\lambda it}\Big)$ et la variable de fonction caractéristique $\frac{1-\lambda it}{1-it}$.

D'autre part $\frac{1}{1-it}$ n'est pas une fonction caractéristique de loi indéfiniment divisible car $\frac{1}{(1-it)^\alpha}$ (α non entier) devrait être caractéristique ce qui n'est pas le cas.

M. Paul Lévy a généralisé sa remarque en se posant la question suivante : Existe-t-il deux aléatoires toutes deux indécomposables X_1 et X_2 telles que la somme $X_1 + X_2$ puisse être décomposée en d'autres éléments X'_1 et X'_2 ? Voici l'exemple le plus simple que l'on puisse fournir de cette éventualité :

$$\frac{1-z^6}{1-z} = 1 + z + \ldots + z^5 = (1 + z^2 + z^4)(1 + z) = (1 + z^3)(1 + z + z^2).$$

Donc si l'on considère ces polynomes comme des fonctions génératrices (au sens de Laplace) les aléatoires qui leur correspondent sont indécomposables (on ne peut décomposer aucun de ces polynomes en produit de polynomes à coefficients positifs). Par conséquent si X_1 et X_2 correspondent à $1 + z^2 + z^4$ et $1 + z$, X'_1 à $1 + z^5$ et X'_2 à $1 + z + z^2$ on a $X_1 + X_2 = X'_1 + X'_2$ toutes les variables étant indécomposables. On peut de même trouver des variables indécomposables X telle que la somme de deux variables de même loi se décompose en deux variables X_1 et X_2 différentes de X. Dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* j'ai indiqué un exemple de fonctions génératrices donnant lieu à cette particularité :

$$G(z) = 1 + 2z + 5z^2 + 12z^3 + 15z^4 = (1 - z + 5z^2)(1 + 3z + 3z^2),$$
$$G^2(z) = (1 + 3z + 3z^2)[1 + z + 8z^2 + 17z^3 + 28z^4 + 45z^5 + 75z^6],$$

$G(z)$ est évidemment indécomposable car toutes les racines de $G(z) = 0$ sont imaginaires et la seule décomposition possible en facteurs du second degré à coefficients réels est celle indiquée où un coefficient est négatif; les deux facteurs ne sont donc pas fonctions génératrices. Nous donnerons plus loin au paragraphe 4 un exemple d'un fait analogue où les aléatoires ont une répartition continue et non discontinue comme c'est le cas ici.

Dans le même ordre d'idées considérons la somme d'une quantité aléatoire normale et d'une variable prenant les valeurs -1 et $+1$ chacune avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Sa fonction caractéristique est $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cos t$. $\cos t$ est indécomposable. En écrivant

$$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cos t = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right) e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \qquad (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2).$$

On voit que le premier facteur est sûrement une fonction caractéristique. La transformée de Laplace du second facteur sera

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2} - 1} \left[\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{8\sigma_2^2}} \operatorname{ch} \frac{x}{2\sigma_2^2} - 1 \right].$$

Si donc $\sigma_2^2 > \frac{1}{4 \log 2}$ le deuxième facteur est une fonction caractéristique. Il suffit donc pour cela que σ^2 soit supérieur à cette quantité. Dans ce cas $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cos t$ admet une autre décomposition que $\cos t$ et $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ $\left(\cos t \text{ ne divise ici ni } \frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \text{ ni } e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right)$. Cette variable est connue en statistique sous le nom de courbe à deux bosses que l'on explique par le mélange de deux populations dans laquelle deux variables gaussiennes de même écart type ont deux valeurs moyennes différentes $\Big($c'est la décomposition évidente $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ et $\cos t\Big)$. On voit par l'existence d'une seconde décomposition que cette explication n'est pas la seule possible. Cet ensemble d'exemples montre combien le semi-corps des aléatoires est différent de l'arithmétique des entiers même dans les premiers théorèmes sur la divisibilité. Les deux paragraphes suivants vont encore accentuer la différence.

4. On peut placer auprès de ces exemples des résultats analogues

concernant des lois indéfiniment divisibles. Examinons tout d'abord le cas des lois de Gauss-Laplace et de Poisson. Après les résultats connus sur leur décomposabilité on pouvait se demander si deux variables ne pouvant être décomposées en deux lois dont l'une est de Gauss-Laplace ou de Poisson (non susceptibles de « déflation » pour employer la terminologie de M. Fisher) pouvaient avoir une somme susceptible d'être décomposée en une variable de Gauss-Laplace (ou de Poisson) et une autre variable. C'est ce que M. R. A. Fisher a appelé le problème de la déflation.

Considérons l'expression

$$\text{(E)} \qquad e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}[a\cos 2t + b\cos t - c] \qquad [(a, b, c) > 0],$$

c'est la transformée de Laplace de l'expression

$$\text{(E}'\text{)} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{a}{e}\left(e^{-\frac{(x+2)^2\alpha^2}{2}} + e^{-\frac{(x-2)^2\alpha^2}{2}}\right) + \frac{b}{2}\left(e^{-\frac{(x+1)^2\alpha^2}{2}} + e^{-\frac{(x-1)^2\alpha^2}{2}}\right) - c\,e^{-\frac{x^2\alpha^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[a\,e^{-2\alpha^2}\operatorname{ch} 2x\alpha^2 + b\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\operatorname{ch} x\alpha^2 - c\right].$$

Le minimum de l'expression entre parenthèses sera atteint pour $x = 0$. Supposons que

$$(e) \qquad a\,e^{-2\alpha^2} + b\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - c = 0,$$

ce qui est possible si l'équation

$$(e') \qquad au^4 + bu - c = 0$$

a une racine inférieure à l'unité. (E′) sera constamment positif ou nul et (E) sera la fonction caractéristique d'une aléatoire ayant une probabilité élémentaire nulle en $x = 0$ et qui par conséquent n'aura aucune composante gaussienne (ne sera pas susceptible de déflation).

La somme de deux telles aléatoires aura comme fonction caractéristique :

$$e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}\left[\frac{a^2}{2}\cos 4t + ab\cos 3t + \frac{b^2 - 4ac}{2}\cos 2t + b(a - 2c)\cos t + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + c^2\right].$$

Si $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 2c$ la parenthèse sera une fonction caractéristique. Par conséquent la somme des deux aléatoires sera dans ce cas susceptible de déflation. [$a > 2c$ entraîne que l'équation (e') ait une racine inférieure à 1].

Les lois de probabilité élémentaire $K e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2p} (-\infty < x < +\infty)$ (lois du χ) peuvent être utilisées dans le même but. Prenons par exemple $p = 1$. La fonction caractéristique correspondante sera $(1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$. Une telle variable aléatoire est indécomposable. Elle ne peut en effet subir aucune déflation puisque en zéro la probabilité élémentaire est nulle. Par conséquent en vertu des résultats classiques ses seules composantes possibles auraient pour fonction caractéristique $(1 - t) e^{-\frac{k^2 t^2}{2}}$ ou $(1 + t) e^{-\frac{k^2 t^2}{2}}$ et l'on vérifie facilement que la transformée de Laplace de cette expression n'est pas une loi de probabilité élémentaire.

On a donc ici un exemple de loi absolument continue et indécomposable. X_1 et X_2 étant deux aléatoires indépendantes de fonction caractéristique $(1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$, considérons maintenant la variable $\alpha X_1 + \beta X_2$, α et β étant deux quantités positives certaines comprises entre 0 et 1 et telles que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; sa fonction caractéristique (c) sera

$$(c) \qquad (1 - \alpha^2 t^2)(1 - \beta^2 t^2) e^{-\frac{(\alpha^2 + \beta^2) t^2}{2}} = (1 - t^2 + \alpha^2 \beta^2 t^4) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Pour que cette variable soit susceptible de déflation il faut et il suffit que $(1 - t^2 + \alpha^2 \beta^2 t^4) e^{-\frac{A^2 t^2}{2}}$ soit caractéristique pour certaines valeurs de $A < 1$. Ce qui revient à écrire que le polynome en x :

$$\alpha^2 \beta^2 x^4 + \left(1 - 6 \frac{\alpha^2 \beta^2}{A^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{A^2} + 3 \frac{\alpha^2 \beta^2}{A^4}\right)$$

est constamment positif. La discussion ne présente aucune difficulté. Si $\alpha^2 \beta^2 < \frac{1}{12}$ on doit prendre $A^2 > 6 \alpha^2 \beta^2$ ce qui est toujours possible.

Si $\alpha^2 \beta^2 > \frac{1}{12}$, on doit prendre

$$A^2 > \frac{6 \alpha^2 \beta^2}{1 + \sqrt{6 \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2}}}.$$

En particulier si $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2}$, on doit prendre $A^2 > \frac{3}{4}$ et la somme des deux variables indécomposables peut subir une déflation d'écart type $\frac{1}{2}$.

C'est le cas auquel nous avons fait allusion au paragraphe 3.

La variable résiduelle, une fois la déflation maximum opérée est évidemment indécomposable; car si elle l'était, on en déduirait que $(1-\alpha^2 t^2)e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}}$ ou $(1-\beta^2 t^2)e^{-\frac{\beta^2 t^2}{2}}$ sont susceptibles de déflation ce qui n'est pas le cas.

$$(c) \qquad (1-t^2+\alpha^2\beta^2 t^4)\,e^{-\frac{t^2}{2}}$$

a donc les trois diviseurs

$$(1-\alpha^2 t^2)\,e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}},\quad (1-\beta^2 t^2)\,e^{-\frac{\beta^2 t^2}{2}},\quad (1-t^2+\alpha^2\beta^2 t^4)\,e^{-\frac{A^2 t^2}{2}}$$

(A ayant la valeur minimum) qui sont indécomposables.

Signalons les deux faits suivants que l'on peut constater dès qu'une décomposition en éléments indécomposables est possible de deux manières :

1° Bien que premiers entre eux les diviseurs ont un produit

$$(1-t^2+\alpha^2\beta^2 t^4)^2\,e^{-\frac{(1+A^2)t^2}{2}}$$

qui n'est pas diviseur de (c).

2° Bien que premiers entre eux les deux éléments $(1-\alpha^2 t^2)e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}}$ et $(1-t^2+\alpha^2\beta^2 t^4)^{-\frac{A^2 t^2}{2}}$ sont diviseurs de $(1-t^2+\alpha^2\beta^2 t^4)\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui n'est pas égal à leur produit multiplié par une fonction caractéristique (le plus petit multiple commun n'est pas égal au produit divisé par le plus grand commun diviseur).

Des exemples de faits analogues relatifs à la loi de Poisson ont été donnés par M. Paul Lévy dans son Mémoire *Sur les exponentielles de polynomes.*

La somme de deux variables indécomposables convenablement choisies peut être décomposée en une somme de trois lois de Poisson.

Les autres lois indéfiniment divisibles ont des diviseurs dépendant d'une infinité de paramètres. Des faits du genre de ceux exposés jusqu'à présent sont tout à fait normaux. J'ai donné en particulier (*C. R. Acad. Sc.*, 1941) un exemple de décomposition de loi de Cauchy en une somme de deux lois différentes en m'appuyant sur des résultats de M. Polya.

5. Enfin pour terminer nous allons indiquer quelques résultats d'une nature différente mais également « paradoxaux » sur les lois indéfiniment divisibles.

A l'intérieur du semi-corps des aléatoires appelons semi-groupe élémentaire tout semi-groupe d'aléatoires dont les fonctions caractéristiques sont toutes des fonctions caractéristiques de la forme $[\varphi(t)]^{\alpha}$. L'ensemble E des α est évidemment clos par rapport à l'addition (si $\alpha_1 \in E$ et $\alpha_2 \in E$, $\alpha_1 + \alpha_2 \in E$). Deux sortes de semi-groupes élémentaires s'imposent par leur évidence :

1° $\varphi(t)$ fonction caractéristique quelconque et E l'ensemble des entiers positifs ou nuls;

2° $\varphi(t)$ fonction caractéristique de loi indéfiniment divisible et E l'ensemble de tous les nombres positifs ou nuls.

Il en existe d'autres ce qui renforce encore les différences signalées jusqu'ici. Montrons tout d'abord que l'on peut trouver $\varphi(t)$ non caractéristique (dans l'exemple que nous allons donner ce sera non génératrice) et telle que toutes ses puissances le soient; on a en effet

$$H(z) = 1 + 2z - z^2 + 3z^3 + 3z^4$$

qui n'est pas génératrice puisqu'un coefficient est négatif. En revanche

$$H^2(z) = 1 + 4z + 2z^2 + 2z^3 + 19z^4 + 6z^5 + 3z^6 + 18z^7 + 9z^8.$$

et

$$H^3(z) = 1 + 6z + 9z^2 + 5z^3 + 36z^4 + 60z^5 + 8z^6 + 81z^7 \\ + 117z^8 + 27z^9 + 54z^{10} + 81z^4 + 27z^{12}$$

le sont. L'ensemble des nombres $2p + 3q$ (p et q étant des entiers positifs ou nuls) est évidemment constitué par zéro et tous les nombres entiers supérieurs à 1 (1 étant exclu). De plus E ne contiendra aucun autre nombre.

En effet $H(z)$ à une puissance α non entière ne peut pas être génératrice car $H(z)$ n'a pas de zéro sur l'axe réel positif [sans quoi ce zéro serait aussi zéro de $H^2(z)$ ce qui est impossible H^2 ayant tous ses coefficients positifs]. $H^{\alpha}(z)$ (α non entier) a pour seuls points singuliers les zéros de $H(z)$ et n'a donc pas de points singuliers sur l'axe réel positif. Ce fait est incompatible en vertu du théorème de Pringsheim avec le fait que $H^{\alpha}(z)$ ait tous ses coefficients positifs.

De cet exemple on peut déduire un semi-groupe élémentaire où E est l'ensemble de tous les nombres supérieurs ou égaux à α_0 et $\varphi(t)$ la fonction caractéristique d'une loi qui n'est pas indéfiniment divisible.

En effet $e^{\alpha H(z)}$ $(\alpha > 0)$ va être développable en une série dont tous les coefficients sont positifs sauf peut-être le coefficient de t^2. Pour que ce coefficient soit positif il suffit d'écrire que $\frac{d^2}{dz^2}e^{\alpha H(z)}$ est positif ou nul pour $z = 0$ ce qui est réalisé si et seulement si $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

On peut se demander si le fait d'être fermé et clos par rapport à l'addition suffit pour qu'un ensemble puisse être considéré comme un ensemble E. Il est facile de trouver une fonction $\varphi(z)$ telle que E soit l'ensemble des multiples de α. Prenons $\varphi(z) = P(z)^{\frac{1}{\alpha}}$, $P(z)$ étant un polynome à coefficients tous positifs. Pour que $\varphi(z)^m$ soit génératrice il faut et suffit que $\frac{m}{\alpha}$ soit un entier et par conséquent que $m = k\alpha$ (k étant un entier). On ne connaît pas jusqu'à présent d'exemples où E est l'ensemble $m + n\alpha$, m et n étant tous les entiers et α irrationnel. De même qu'on ne sait si l'ensemble $\frac{1}{2} \leqq m \leqq \frac{3}{4}$, $1 \leqq m$ et plus généralement un ensemble comportant des lacunes peut être considéré comme un ensemble E.

BIBLIOGRAPHIE.

PAUL LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires :*

Sur l'arithmétique des lois de probabilité (*J. Math.*, t. 17, 1938, p. 17).

Sur les exponentielles de polynomes (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 54, 1937, p. 231).

R. A. FISHER et D. DUGUÉ, *Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 1205).

D. DUGUÉ, *Sur certaines composantes des lois de Cauchy* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 718).