ANNALES DE L'I. H. P.

RICHARD L. INGRAHAM

L'ennuple projectif et l'unification des théories de l'électromagnétisme de Weyl et de Veblen-Hoffmann

Annales de l'I. H. P., tome 12, nº 3 (1951), p. 131-158
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_3_131_0>

L'ennuple projectif et l'unification des théories de l'électromagnétisme de Weyl et de Veblen-Hoffmann.

par

Richard L. INGRAHAM.

Université de Harvard.

---

1. Introduction. — En 1929, H. Weyl a présenté une théorie covariante (non quantique) de l'électron qui se réduisait, dans le cas spécial de la relativité restreinte, à la théorie de Dirac avec spineurs à deux composantes [1]. Un des traits les plus frappants de cette théorie était l'introduction très naturelle des potentiels électromagnétiques qui devaient caractériser le changement arbitraire de phase permis au spineur déplacé par parallélisme dans un système de coordonnées déterminé. La théorie unitaire correspondante de l'électron, de l'électromagnétisme et de la gravitation (relativité einsteinienne) est en fait obtenue sans unification formelle par la simple addition *ad hoc* des lagrangiens auxquels s'ajoutent les termes d'interaction suggérés par l'expérience entre les éléments de Dirac et ceux de Maxwell. Le tout satisfait à l'invariance bien connue de « jauge-phase » par rapport à la transformation $\psi \to \psi e^{i\lambda}$, $f_p \to f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x^p}$, où ψ et f_p sont respectivement les potentiels électronique et électromagnétique. L'invariance par rapport à ce groupe suggérait à Weyl que l'électromagnétisme est étroitement lié en premier lieu à la matière et non pas à la gravitation.

---

(1) H. WEYL, *Elektron und Gravitation* (*Zeits. f. Physik.*, 56, 1929, p. 330). Ce Mémoire sera désigné désormais par EUG.

Au contraire, la théorie à cinq dimensions initiale de Kaluza, améliorée et étendue par O. Klein, a été fondée en 1930 par Veblen et Hoffmann ([2]) comme une authentique théorie à quatre dimensions où la géométrie sous-jacente est projective au lieu d'être affine. Le tenseur projectif fondamental avec ses 14 composantes indépendantes fournit donc, en sus des potentiels de gravitation, quatre fonctions susceptibles de jouer le rôle des potentiels électromagnétiques. On a pu en tirer la relativité einsteinienne jointe à une théorie maxwellienne covariante des équations de champs sans termes anomals. Cette « relativité projective » était alors une réussite en ce qui concerne la gravitation et l'électromagnétisme. Elle a montré que l'électromagnétisme et la gravitation pouvaient être également conçus comme parties d'une même entité étroitement liées entre elles. Les objections contre cette théorie semblaient pour la plupart dirigées contre le caractère pseudo-cinq-dimensionnel prêté à l'univers par l'introduction de tenseurs à 5^n composantes. En fait, cette nature cinq-dimensionnelle est illusoire, puisque dans la géométrie projective de Veblen-Hoffmann x^0 n'est pas une véritable coordonnée dans le sens où les quatre autres le sont et entre toujours dans les tenseurs projectifs par un facteur e^{Nx^0} (correspondant au fait que la « transformation de facteur » n'est pas une véritable transformation de coordonnées). L'espace-temps reste quadridimensionnel; la géométrie fondamentale ne fait que s'élargir de l'affine au projectif, le groupe projectif ayant le groupe affine comme sous-groupe. Il me semble que l'on doive tenter de s'en tenir au caractère quadridimensionnel de l'univers, mais permettre un élargissement progressif de la géométrie fondamentale au fur et à mesure de l'accroissement du nombre de champs à unifier. Il n'y a pas de connexion nécessaire entre la dimension d'une variété et le type de sa géométrie.

L'introduction de l'électromagnétisme à la manière de Weyl aussi bien qu'à celle de Veblen-Hoffman sont si naturelles et convaincantes qu'il est désagréable d'avoir à choisir entre elles. Le point de vue adopté dans ce Mémoire est que cela n'est pas nécessaire; les deux théories admettant une unification telle que les potentiels électromagnétiques introduits des deux façons constituent un seul et même vecteur.

Ce Mémoire doit, par suite, poursuivre plusieurs fins. La théorie de

---

([2]) O. VEBLEN and B. HOFFMANN, *Projective Relativity* (*Phys. Rev.*, 36, 1930, p. 810).

Weyl, exprimée au moyen de l'ennuple orthogonal, doit être rendue projective. Et il faudra exprimer la théorie de Veblen-Hoffmann, qui part d'un tenseur symétrique fondamental, en termes d'ennuple orthogonal, l'introduction d'un tel ennuple étant nécessaire dans une théorie qui comprend des spineurs et des tenseurs. C'est à ces conditions qu'on pourra effectuer (partiellement) l'unification. Comme résultat accessoire, on montrera que le tenseur de Riemann qui joue un rôle fondamental dans les théories purement tensorielles ne semble pas pouvoir être employé de façon analogue dans la théorie de l'électron de Weyl.

J'adopterai ici le formalisme de la géométrie projective de Veblen-Hoffmann, de préférence au formalisme équivalent mais plus symétrique de Van Dantzig et Pauli, en termes de « coordonnées homogènes »; cela permet en effet une comparaison facile avec le travail de Veblen et Hoffmann.

2. **L'ennuple orthogonal affine.** — Cette première partie du Mémoire est consacrée à rendre projective la théorie de l'électron de Weyl exprimée au moyen de spineurs à deux composantes; le lecteur est prié de se reporter au Mémoire de Weyl pour une présentation plus complète de la théorie de l'ennuple affine et son emploi dans la théorie électron-plus-gravitation. Nous rappellerons brièvement les parties indispensables à l'intelligence du présent Mémoire.

On part d'une variété affine à quatre dimensions et d'un ennuple affine (« système local des coordonnées de Lorentz »), c'est-à-dire de quatre champs vectoriels linéairement indépendants $e^p(\alpha)(p=1, \ldots, 4, \alpha=1, \ldots, 4)$, où p indique la composante contravariante et α indique le vecteur [3]. Introduisons les mineurs normalisés $e_p(\alpha)$ qui satisfont à

$$e^p(\alpha)\, e_p(\beta) = \delta(\alpha\beta), \qquad e^p(\alpha)\, e_q(\alpha) = \delta^p_q. \tag{2.1}$$

---

[3] Dans ce Mémoire on se servira des conventions d'indices suivantes :

$\pi, \rho, \sigma, \tau, \xi, \chi, \psi, \ldots$	$= 0, \ldots, 4$	(indices projectifs);
$m, n, p, q, \ldots$	$= 1, \ldots, 4$	(indices affines);
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$	$= 1, \ldots, 4$	(indices tensoriels de Lorentz);
$a, b, c, \ldots$	$= 1, 2,$	(indices spinoriels);
$i, j, k, l, \ldots$	$= 1, 2, 3.$	

On adopte également la convention habituelle de sommation pour les indices muets.

Ceux-ci définissent les systèmes de coordonnées par rapport auxquels on mesure les coordonnées de Lorentz dans les espaces locaux; une transformation de Lorentz en un point effectue une rotation de l'ennuple en ce point ([4]).

La condition

$$e_p(\alpha) = g_{pq} e^q(\alpha), \tag{2.2}$$

introduit une métrique et il en résulte :

$$g_{pq} = e_p(\alpha) e_q(\alpha). \tag{2.3}$$

L'ennuple devient un ennuple *orthogonal*.

Comme on le verra, cet ennuple est le lien entre les tenseurs affines généralement covariants et les spineurs à deux composantes, qui fournissent une représentation du groupe propre de Lorentz

$$t(\alpha) = a(\alpha\beta) t(\beta) \qquad [t(\gamma) \text{ un vecteur de Lorentz}; \, |a(\alpha\beta)| = +1], \tag{2.4}$$

mais pas du groupe affine homogène plus général au point P

$$t'^q = \frac{\partial x'^q}{\partial x^m} t^m, \tag{2.5}$$

$\Big[x^p$ est un « système général de coordonnées »; à savoir, quatre fonctions réelles continues quelconques qui servent à distinguer entre eux les différents points, et telles que $\left|\frac{\partial x'^q}{\partial x^p}\right| \neq 0\Big]$, au moyen de la connexion

$$\psi^* S(\alpha) \psi = v(\alpha), \tag{2.6}$$

où ψ et ψ^* sont respectivement le spineur et son conjugué complexe, S(1), S(2), S(3) les matrices de Pauli et $S(4) = i \times$ la matrice-unité; $v(\alpha)$ se transforme comme un vecteur vis-à-vis du groupe restreint de Lorentz pour une transformation du spineur. Ensuite, si l'on définit la transformation d'un vecteur affine général t^p à son vecteur de Lorentz respectif $t(\alpha)$

$$t^p \equiv t(\alpha) e^p(\alpha), \tag{2.7}$$

([4]) En introduisant $ict = x(4)$ on se sert de la métrique de Lorentz

$$\delta(\alpha\beta) = 1 \quad (\alpha = \beta); \qquad = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

on tire de l'équation (2.1) l'autre règle de permutation des indices

$$t(\alpha) = e_p(\alpha) t^p \tag{2.8}$$

et il résulte que celle-ci fournit une correspondance biunivoque entre la classe de tous les tenseurs affines en un point donné et la classe de tous les tenseurs de Lorentz en ce point.

3. La géométrie projective. — Prenons comme géométrie fondamentale la géométrie projective; nous emploierons les tenseurs projectifs à 5^n composantes ($n = 1, 2, \ldots$). Par rapport au produit direct des deux groupes

$$x'^p = f^p(x^1, \ldots, x^4); \qquad x'^0 = x^0 \qquad \text{(transformation d'espace-temps)} \tag{3.1 a}$$

et

$$x'^p = x^p, \qquad x'^0 = x^0 + \log \rho(x^1, \ldots, x^4) \qquad \text{(tranformation de facteur)}, \tag{3.1 b}$$

le tenseur projectif $T^{\sigma\ldots}_{\rho\ldots} = e^{Nx^0} \tilde{T}^{\sigma\ldots}_{\rho\ldots}$ (où $\tilde{T}^{\sigma\ldots}_{\rho\ldots}$ sont des fonctions de $x^1, \ldots, x^4$ seulement) se transforme selon

$$\left\{ \begin{array}{l} T'^{\sigma\ldots}_{\rho\ldots} = e^{Nx'^0} \tilde{T}'^{\sigma\ldots}_{\rho\ldots}, \\ \text{où} \quad \tilde{T}'^{\sigma\ldots}_{\rho\ldots} = \dfrac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \cdots \dfrac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\pi} \cdots \tilde{T}^{\pi\ldots}_{\tau\ldots} \, [\pi, \sigma, \tau = 0, \ldots, 4] \quad (^3). \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Remarquons que la transformation de facteur se distingue de la transformation d'espace-temps en ce que x^0, qui se trouve dans le facteur e^{Nx^0}, est remplacé par x'^0 de sorte que le tenseur dans le nouveau système est multiplié par $e^{N \log \rho} = \rho^N$, en sus des transformations classiques aux coefficients différentiels $\dfrac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\tau}$ et $\dfrac{\partial x^\tau}{\partial x'^\sigma}$. Ceci correspond au fait que x^0 entre toujours sous la forme spéciale d'un facteur e^{Nx^0}, ce qui est une propriété invariante par rapport à (3.1). N s'appelle l'index. x^0 n'a donc pas le caractère d'une coordonnée d'espace-temps dans une variété ordinaire à cinq dimensions, et les tenseurs projectifs ne se conduisent pas comme les tenseurs affines dans un espace à cinq dimensions par rapport à un sous-groupe spécial (3.1) du groupe affine général à cinq variables.

4. L'ennuple orthogonal projectif. — Considérons le tenseur covariant symétrique fondamental d'ordre 2, d'index zéro, $\gamma_{\sigma\tau}$, avec les abréviations et restrictions suivantes imposées dans « la relativité projective » de Veblen-Hoffmann

$$g_{mn} \equiv \gamma_{mn}, \qquad \varphi_m \equiv \gamma_{0m}, \qquad \gamma_{00} = 1. \tag{4.1}$$

Puis

$$\gamma_{\sigma\tau} = g_{\sigma\tau} + \varphi_\sigma \varphi_\tau \tag{4.2}$$

et $g_{\sigma\tau}$ est un tenseur affine (c'est-à-dire $g_{\sigma 0} = 0$); φ_σ est un vecteur covariant projectif avec $\varphi_0 = 1$ [5]. Ces restrictions sont bien entendu invariantes par rapport à (3.1). Supposons identifiés g_{mn} et la métrique donnée dans le paragraphe 2.

Nous élargissons l'ennuple affine donné dans la section II en y ajoutant une composante nulle $e^0(\alpha)$ et nous exigeons que

$$\gamma_{\sigma\tau}\, e^\sigma(\alpha)\, e^\tau(\beta) = \delta(\alpha\beta), \tag{4.3}$$

ce qui implique que $e^\sigma(\alpha)$ a l'index zéro, et

$$g_{mn}\, e^m(\alpha)\, e^n(\beta) + \varphi_\sigma\, e^\sigma(\alpha)\, \varphi_\tau\, e^\tau(\beta) = \delta(\alpha\beta). \tag{4.4}$$

Selon (4.1), le premier terme du premier membre est égal à $\delta(\alpha\beta)$ de sorte que $e^\sigma(\alpha)$ doit satisfaire à la condition

$$\varphi_\sigma e^\sigma(\alpha) = 0, \qquad \text{ou} \qquad e^0(\alpha) + \varphi_m e^m(\alpha) = 0. \tag{4.5}$$

En définissant le tenseur de Lorentz correspondant à la partie affine φ_m de φ_0, $\varphi(\alpha) \equiv \varphi_m e^m(\alpha)$ conformément à (2.8), on a une équation qui définit $e^0(\alpha)$

$$e^0(\alpha) = -\varphi(\alpha). \tag{4.6}$$

Il est important de constater que (4.6) est une définition projectivement covariante parce qu'elle peut s'écrire sous la forme $\varphi_\sigma e^\sigma(\alpha) = 0$, forme sous laquelle elle l'est évidemment.

Nous élevons et abaissons tous les indices avec $\gamma_{\sigma\tau}$ et $\gamma^{\sigma\tau}$, ce dernier tenseur étant constitué par les mineurs normalisés du premier. De (4.5) découle

$$e_0(\alpha) \equiv \gamma_{0\tau}\, e^\tau(\alpha) \equiv \varphi_\tau\, e^\tau(\alpha) = 0, \tag{4.7}$$

---

[5] Par conséquent, selon une transformation de facteur $\varphi_m \to \varphi_m - \frac{\partial}{\partial x^m} \log \rho$, ce qui peut s'interpréter comme une transformation de jauge si l'on identifie les φ_m et les potentiels électromagnétiques.

de sorte que $e_\sigma(\alpha)$ est un vecteur *affine;* et puisqu'on a

$$(4.8)\quad e_m(\alpha) = \gamma_{m\tau}\, e^\tau(\alpha) = (g_{m\tau} + \varphi_m \varphi_\tau)\, e^\tau(\alpha) = g_{m\tau}\, e^\tau(\alpha) = g_{mn}\, e^n(\alpha),$$

$e_m(\alpha)$ est précisément défini comme dans la section II. On a les règles analogues à (2.1)

$$(4.9)\qquad e^\rho(\alpha)\, e_\tau(\alpha) = g^\rho_\tau, \qquad e^\rho(\alpha)\, e_\rho(\beta) = \delta(\alpha\beta).$$

La dernière série d'équations ne fait que répéter (4.3), et l'on déduit de (4.2) que

$$(4.10)\qquad g^m_n = \delta^m_n, \qquad g^\sigma_0 = 0, \qquad g^0_m = -\varphi_m.$$

Il est utile de constater que l'inverse de (4.3) est

$$(4.11)\qquad g_{\sigma\tau} = e_\sigma(\alpha)\, e_\tau(\alpha).$$

Quant aux conventions permettant de déplacer les indices, on a comme équation qui définit $t(\alpha)$

$$(4.12)\qquad t^\rho \equiv t(\alpha)\, e^\rho(\alpha) + t_0 \varphi^\rho.$$

Puisque $\varphi^\rho = \delta^\rho_0$, pour $\rho = 1, \ldots, 4$ cette équation répète simplement (2.7); pour $\rho = 0$ elle se réduit cependant à une identité.

Par contraction avec $e_\rho(\beta)$, il vient en faisant appel à (4.5) et (4.7)

$$(4.13)\qquad t(\alpha) = t^\rho\, e_\rho(\alpha) = t^p\, e_p(\alpha),$$

c'est-à-dire $t(\alpha)$ a exactement la valeur (2.8) trouvée antérieurement. L'équation (4.12) montre que $e^\rho(\alpha)$ fournit un homomorphisme entre la classe de tous les vecteurs projectifs en un point, et la classe de tous les vecteurs de Lorentz : deux vecteurs t^ρ et $\bar{t}^\rho$ qui ont la même partie affine correspondent au même vecteur $t(\alpha)$.

5. Le spineur projectif. — Imaginons le spineur ordinaire à deux composantes ψ_a (6) ($a = 1, 2$), pourvu d'un index N, c'est-à-dire remplaçons ψ par $e^{N x^0}\psi$. Cette nouvelle quantité géométrique (désormais désignée seulement par ψ) se transforme non seulement par le groupe du spineur ordinaire

$$(5.1)\qquad \psi \to \psi' = A\psi\,[\text{A une matrice } 2 \times 2, \quad |\text{dét. A}| = 1],$$

(6) Nous allons désormais supprimer en général les indices spinoriels.

mais aussi par la transformation de facteur (3. 1 b), selon

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{N \log \rho} \psi \tag{5.2}$$

c'est-à-dire, le groupe de ψ est le produit direct du groupe unimodulaire linéaire par la transformation de facteur. ψ doit être invariant par rapport à la transformation d'espace-temps (3. 1 a). Plus loin nous démontrerons qu'il est commode de choisir un index imaginaire $N = + i$; cela signifie que dans une transformation de facteur la phase de ψ s'accroît simplement de $\log \rho$ ([19]).

6. **Le déplacement parallèle de l'ennuple projectif.** — H. Weyl a caractérisé le déplacement parallèle de l'ennuple orthogonal affine de P à P′ en déterminant la rotation infinitésimale de Lorentz par laquelle l'ennuple déplacé parallèlement de P à P′ se déduit de l'ennuple lui-même en P′. Puisqu'on exige que la longueur soit conservée, la connexion affine résulte simplement de la connexion riemannienne. Nous allons déterminer ces quantités pour le déplacement parallèle de de l'ennuple projectif.

Écrivons

$$f^\rho(\beta;\, P') - e^\rho(\beta;\, P') = d\,o(\beta\gamma)\, e^\rho(\gamma), \tag{6.1}$$

$$f^\rho(\beta;\, P') - e^\rho(\beta;\, P) = -\Pi_{\sigma\tau}{}^{\rho}\, e^\sigma(\beta;\, P)\, dx^\tau, \tag{6.2}$$

où $f^\rho(\beta;\, P')$ est l'ennuple déplacé parallèlement en P′;

$$d\,o(\beta\gamma) = -d\,o(\gamma\beta),$$

la rotation infinitésimale de Lorentz; Π, la connexion linéaire projective. La première équation exprime que les vecteurs parallèles en P′ ont légèrement pivoté par une transformation de Lorentz à partir de leurs valeurs en P′; la deuxième équation définit de la manière habituelle les vecteurs parallèles en P′ à l'aide de ceux attachés à P et des dx^ρ. Nous supposons $d\,o(\beta\gamma) = o_\rho(\beta\gamma)\, dx^\rho$, donc une dépendance linéaire des dx^ρ. Mais puisque les $e^\rho(\alpha)$ ont l'index zéro, on a $e^\rho(\beta;\, P') = e^\rho(\beta;\, P)$ et l'on doit exiger $f^\rho(\beta;\, P') = e^\rho(\beta;\, P)$ où P et P′ ne diffèrent que de $dx^0 = x^{0\prime} - x^0$. Posons alors

$$o_0(\beta\gamma) = 0. \tag{6.3}$$

On a par suite $d\,o(\beta\gamma) = o_m(\beta\gamma)\, dx^m$. Mais (6. 1) pour $\rho = 1, \ldots, 4$ ne sont autres que les équations de Weyl pour les $o_m(\beta\gamma)$; l'équation pour $\rho = 0$ est identiquement satisfaite en vertu des quatre premières. En soustrayant on en tire une expression pour la différentielle covariante :

$$d\,e^\rho(\beta) + \Pi_{\sigma\tau}{}^\rho\, e^\sigma(\beta)\, dx^\tau = -\, o_m(\beta\gamma)\, dx^m\, e^\rho(\gamma). \tag{6.4}$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial x^0} e^\rho(\beta) = 0$, il vient $\Pi_{\sigma 0}{}^\rho\, e^\sigma(\beta) = 0$. D'après (6.1) et (6.4), on obtient donc que les $o_m(\beta\gamma)$ sont déterminés exactement comme par Weyl; en particulier

$$o(\gamma;\, \alpha\beta) = \frac{1}{2}\{[e(\alpha),\, e(\gamma)](\beta) + [e(\gamma),\, e(\beta)](\alpha) - [e(\beta),\, e(\alpha)](\gamma)\}, \tag{6.5}$$

où

$$o(\gamma;\, \alpha\beta) \equiv o_\sigma(\alpha\beta)\, e^\sigma(\gamma) = o_p(\alpha\beta)\, e^p(\gamma) \tag{6.6}$$

et

$$[e(\alpha),\, e(\beta)]^\rho \equiv \frac{\partial\, e^\rho(\alpha)}{\partial x^\xi}\, e^\xi(\beta) - \frac{\partial\, e^\rho(\beta)}{\partial x^\xi}\, e^\xi(\alpha) \tag{6.7}$$

et

$$[e(\alpha),\, e(\beta)](\gamma) \equiv [e(\alpha),\, e(\beta)]^\rho\, e_\rho(\gamma).$$

Ceci est établi en détail dans l'Appendice 1.

De (6.4) il résulte que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\xi} e^\rho(\beta)\right) e^\xi(\alpha) + \Pi_{\tau\xi}{}^\rho\, e^\tau(\beta)\, e^\xi(\alpha) = -\, o(\alpha;\, \beta\gamma)\, e^\rho(\gamma). \tag{6.8}$$

Si nous multiplions par $e^\sigma(\beta)$, et ajoutons avec $\rho \rightleftharpoons \sigma$, le second membre s'annule à cause de l'antisymétrie de $o(\alpha;\, \beta\gamma)$ en β, γ et l'on obtient une équation pour Π. Le calcul détaillé est donné dans l'Appendice 1 ; nous nous bornerons ici à en donner le résultat :

$$\Pi_{\chi\psi,\xi} - \Gamma_{\chi\psi,\xi} = \varphi_\xi \Pi_{0\,\underline{\chi,\psi}} + \varphi_\chi \Pi_{0\,\underset{\vee}{\xi,\psi}} - \varphi_\psi \Pi_{0\,\underset{\vee}{\xi,\chi}}, \tag{6.9}$$

où $\Gamma_{\chi\psi,\xi}$ sont les symboles de Christoffel des $\gamma_{\sigma\tau}$, le signe — ou $\vee$ sous une paire d'indices, représente respectivement la partie symétrique ou antisymétrique, et les indices de Π et Γ sont abaissés à l'aide des $\gamma_{\sigma\tau}$. Nous avons ainsi obtenu un système d'équations linéaires pour les Π; et nous constatons que $\Pi \neq \Gamma$ en général. Dans l'Appendice 1 on étudiera les circonstances dans lesquelles cette égalité peut exister. L'équation (6.9) montre que Π est d'index zéro, puisque Γ et φ_ξ le sont également.

7. **La dérivée covariante du spineur projectif.** — Puisque le spineur ψ est maintenant un spineur projectif, c'est-à-dire défini par rapport au groupe (3.1 b) en sus du groupe (5.1), il faut étendre la définition de la dérivée covariante du spineur donnée par Weyl pour qu'elle ait une signification projective. Le déplacement parallèle de ψ est déterminé *partiellement* par le fait que $\psi^* S(\alpha)\psi$ est un vecteur de Lorentz et les $o(\alpha;\beta\gamma)$ qui fixent complètement le déplacement parallèle des vecteurs ont été déterminés dans le paragraphe 6. Cependant, cette spécification reste incomplète puisqu'un changement arbitraire de phase de ψ peut s'ajouter [ce qui préserverait $\psi^* S(\alpha)\psi$].

Dans EUG, la dérivée covariante du spineur ψ était définie ainsi : ψ' est le spineur déplacé parallèlement en P', *lequel doit se transformer comme* ψ *en* P; pour que $\delta\psi(P) = \psi' - \psi(P)$ soit une différentielle covariante, on posait

$$\psi' - \psi(P') = dE.\psi, \tag{7.1}$$

où

$$dE \equiv \frac{1}{2} o_m(\alpha\beta)\, A(\alpha\beta)\, dx^m \equiv E_m\, dx^m \tag{7.2}$$

est la transformation du spineur en P' induite par la rotation de Lorentz $d\,o(\alpha\beta)$ en P'. Ainsi qu'il est bien connu, il s'ensuit que

$$A(23) = -\frac{1}{2i} S(1),\quad A(01) = \frac{1}{2i} S(1) \quad (^7) \quad (\text{cyclique}). \tag{7.3}$$

Ensuite, en remplaçant $\psi(P')$ par $\psi(P) + \dfrac{\partial\psi}{\partial x^m} dx^m$, on arrivait à la différentielle covariante

$$\delta\psi \equiv \psi_p\, dx^p = \left(\frac{\partial}{\partial x^p} + E_p\right).\psi\, dx^p \quad (^8), \tag{7.4}$$

---

(7) Les $S(\alpha)$ sont les matrices de Pauli :

$$S(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad S(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad S(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad S(4) = iI = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8) A remarquer que $dE.\psi$ n'est pas un spineur et $\delta\psi = 0$ ne définit pas le déplacement parallèle. Il convient aussi de remarquer que E_0 est proportionnel à $o_0 = 0$ et par conséquent E_ρ est un vecteur affine avec l'index ρ.

ce qui définissait la dérivée covariante ψ_p. Plus tard, pour se rendre compte du changement infinitésimal de phase de ψ permis par un déplacement parallèle, le terme $i\,df \equiv if_p\,dx^p$ s'est introduit de la façon suivante :

$$\psi' - \psi(\mathrm{P}') = d\mathrm{E}.\psi + i\,df\,\psi. \tag{7.5}$$

Cela mène à la dérivée covariante modifiée

$$\bar{\psi}_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^p} + if_p + \mathrm{E}_p\right).\psi. \tag{7.6}$$

Constatons que nous pouvons parvenir à la dérivée covariante projective en définissant

$$\psi_\rho : \psi_p = \bar{\psi}_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^p} + if_p + \mathrm{E}_p\right).\psi, \quad \psi_0 = 0; \tag{7.7}$$

on le vérifie simplement en remarquant l'invariance de « jauge-phase » de $\bar{\psi}_p$ par rapport à $\psi \to \psi\, e^{i\lambda}$, $f_p \to f_p - \frac{\partial\lambda}{\partial x^p}$, car celle-ci n'est autre que le résultat sur ψ_ρ de la transformation de facteur avec $\log\rho = \lambda$. Par là nous avons rendu projectif f_p en définissant $f_0 = 1$ et f_ρ d'index zéro. ψ_ρ comme défini ci-dessus est en effet un vecteur covariant projectif d'index $+i$. Une différentielle covariante projective d'index $+i$ peut alors se définir en posant $\delta\psi = \psi_\rho\, dx^\rho$. Nous écrivons ψ_ρ en fonction de ses composantes de Lorentz de la manière suivante :

$$\psi(\alpha) \equiv \psi_\rho\, e^\rho(\alpha) = \psi_m\, e^m(\alpha) = \left\{ e^m(\alpha)\frac{\partial}{\partial x^m} + \mathrm{E}(\alpha) + i f(\alpha)\right\}.\psi, \tag{7.8}$$

où nous faisons de nouveau une exception à la notation habituelle en posant $f(\alpha) \equiv f_m\, e^m(\alpha)$, [bien que $f(\alpha)$ ne soit aucunement invariante projectivement] conformément à la convention préalable du sens de $\varphi(\alpha) = \varphi_m\, e^m(\alpha)$. Le fait que ψ_ρ, défini par (7.7), n'a pas une forme évidemment invariante résulte de la nature particulière de la transformation de facteur.

8. Les lois naturelles. — Weyl définit sa densité d'action électronique $\mathbf{m}$ ainsi

$$i\varepsilon\mathbf{m} = \psi^*\, \mathrm{S}(\alpha)\, \psi(\alpha), \tag{8.1}$$

où $\varepsilon \equiv |e^p(\alpha)|$. Il définit, en outre $\psi(\alpha)$ par (7.8) sans le terme $f(\alpha)$;

mais il l'ajoute plus tard pour rendre compte du changement de phase du spineur par déplacement parallèle. Dans le cadre affine, dans lequel le groupe est simplement celui des transformations d'espace-temps, le groupe « jauge-phase »

$$(8.2)\qquad \psi \to \psi\, e^{i\lambda}, \qquad f_m \to f_m - \frac{\partial\lambda}{\partial x^m}$$

est surajouté.

Un des buts de ce Mémoire est de parvenir au même résultat (8.1), ce qui, comme on sait, rend compte justement du spin $\frac{1}{2}$ de l'électron et se réduit à la théorie de Dirac dans le cas de la relativité restreinte, mais d'y parvenir en montrant qu'elle s'obtient plus naturellement dans le cadre de la géométrie projective. Définissons pour cela comme partie de notre densité d'action totale, $\mathbf{m}$

$$(8.3)\qquad i\varepsilon\mathbf{m} = \psi^* \mathrm{S}(\alpha)\psi(\alpha),$$

où $\varepsilon \equiv |e^p(\alpha)|$ et $\psi(\alpha)$ est la dérivée covariante projective donnée par (7.8). Le second membre est alors un invariant projectif d'index zéro, c'est-à-dire un invariant affine. Comme le montre (7.7), si l'on procède projectivement, on est amené à une dérivée covariante telle que la composante d'indice zéro est nulle ($\psi_0 = 0$). En effet $\mathbf{m}$, donnée par (8.3) n'est autre que l'action modifiée de Weyl. On a donc démontré qu'en généralisant les résultats de Weyl à la géométrie projective et en formant l'invariant projectif d'action analogue, on parvient exactement au même résultat. Le groupe (8.2) peut être laissé maintenant de côté comme groupe distinct; ce n'est que la substitution effectuée par une transformation de facteur, pour laquelle tout notre formalisme est automatiquement invariant.

Essayons maintenant d'exprimer la relativité projective de Veblen-Hoffmann au moyen des $e^\rho(\alpha)$. Soit $\mathrm{B}_{\sigma\tau}$ le tenseur ordinaire de Ricci (tenseur de Riemann contracté une fois) des $\gamma_{\xi\rho}$; $\mathrm{B} \equiv \mathrm{B}_{\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}$ et γ, g, les déterminants de leurs tenseurs respectifs; on a

$$(8.4)\qquad \begin{aligned}\delta\int \mathrm{B}\, g^{\frac{1}{2}}(dx) &= \delta\int \mathrm{B}\,\gamma^{\frac{1}{2}}(dx)\\ &= \int \mathrm{B}_{\rho\tau}\,\delta\left(\gamma^{\rho\tau}\gamma^{\frac{1}{2}}\right)(dx) = \int \Gamma_{\rho\tau}\,\delta\gamma^{\rho\tau}\,\gamma^{\frac{1}{2}}(dx)\\ &= \int (\Gamma_{\rho\tau} - \varphi_\rho\varphi_\tau\Gamma)\gamma^{\frac{1}{2}}\,\delta\gamma^{\rho\tau}(dx) \qquad [(dx) \equiv dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4],\end{aligned}$$

où

$$\Gamma_{\rho\tau} \equiv B_{\rho\tau} - \frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}B \qquad \text{et} \qquad \Gamma \equiv \Gamma_{\rho\tau}\gamma^{\rho\tau},$$

de sorte que les lois naturelles sont

(8.5) $$\Gamma_{\rho\tau} - \varphi_\rho\varphi_\tau\Gamma = 0.$$

Puisque

(8.6) $$\gamma^{\sigma\tau} - \varphi^\sigma\varphi^\tau = g^{\sigma\tau} = e^\sigma(\alpha)\,e^\tau(\alpha)$$

et $\varphi^\sigma = \delta_0^\sigma$, on a

(8.7) $$\frac{\partial\gamma^{\sigma\tau}}{\partial\, e^\rho(\alpha)} = \delta^\sigma{}_\rho\, e^\tau(\alpha) + \delta^\tau{}_\rho\, e^\sigma(\alpha).$$

Alors, en variant les $e^\rho(\alpha)$,

(8.8) $$\delta\int B\, g^{\frac{1}{2}}(dx) = \int (\Gamma_{\sigma\tau} - \varphi_\rho\varphi_\tau\Gamma) \times [\delta^\sigma{}_\rho\, e^\tau(\alpha) + \delta^\tau{}_\rho\, e^\sigma(\alpha)]\, g^{\frac{1}{2}}\,\delta\, e^\rho(\alpha)\,(dx)$$

et puisque $\varphi_\sigma e^\sigma(\alpha) = 0$, on arrive aux lois:

(8.9) $$2\int \Gamma_\rho(\alpha)\,\delta\, e^\rho(\alpha)\, g^{\frac{1}{2}}(dx) = 0,$$

soit

(8.10) $$\Gamma_\rho(\alpha) \equiv \Gamma_{\rho\sigma}\, e^\sigma(\alpha) = 0.$$

Multiplions (8.10) par $e_\tau(\alpha)$; on obtient

(8.11) $$\Gamma_{\rho\sigma}\, g^\sigma{}_\tau \equiv \Gamma_{\rho\sigma}(\delta^\sigma{}_\tau - \delta_0^\sigma\varphi_\tau) = \Gamma_{\rho\tau} - \Gamma_{\rho 0}\varphi_\tau = 0.$$

Pour $\rho = 0$ ceci donne $\Gamma_{0\tau} = \Gamma_{00}\varphi_\tau$. Au contraire, en contractant la seconde équation de (8.11) en ρ et τ, on voit que d'après ces équations de champ, on a $\Gamma = \Gamma_{00}$. En portant alors $\Gamma_{0\tau} = \Gamma\varphi_\tau$ en (8.11) on obtient

(8.12) $$\Gamma_{\rho\tau} - \varphi_\rho\varphi_\tau\Gamma = 0,$$

c'est-à-dire précisément (8.5). En procédant dans l'autre sens on trouve que (8.12) implique (8.10), de sorte que ces deux manières d'exprimer les lois fondamentales sont équivalentes.

En définissant la dérivée covariante du spineur, nous avons montré au paragraphe 7 que f_p restait arbitraire; en raison de cela, nous pouvons maintenant choisir $f_\rho = \varphi_\rho$ et par conséquent $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ ([9]). Puisque $\varphi(\alpha) = -e^0(\alpha)$, (7.8) peut maintenant s'écrire ([10]),

$$\psi(\alpha) = \left[-e^0(\alpha)\frac{\partial}{\partial x_0} + e^m(\alpha)\frac{\partial}{\partial x^m} + \mathrm{E}(\alpha)\right].\psi. \tag{8.13}$$

Avec cette identification, nous sommes enfin en état de formuler les lois naturelles sous une forme très concise

$$\delta\int \mathbf{L}(dx) = 0, \tag{8.14}$$

où

$$\mathbf{L} = k\frac{1}{i\varepsilon}\psi^* \mathrm{S}(\alpha)\psi(\alpha) + \mathrm{B}g^{\frac{1}{2}}, \tag{8.15}$$

où $\psi(\alpha)$ est donné par (8.13), k est une constante dimensionnelle convenable, $\mathrm{B}g^{\frac{1}{2}}$ est exprimée en fonction des $e^\rho(\alpha)$ au moyen de (8.6), et les $e^\rho(\alpha)$, ainsi que les ψ, ψ^* sont les seules quantités à faire varier.

En faisant varier les $e^\rho(\alpha)$, on a

$$\mathbf{L}_\rho(\alpha) \equiv \mathbf{t}_\rho(\alpha) + 2\Gamma_\rho(\alpha)g^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{8.16}$$

où l'on définit

$$\delta\left\{\frac{k}{i\varepsilon}\int \psi^* \mathrm{S}(\alpha)\psi(\alpha)(dx)\right\} \equiv \int \mathbf{t}_\rho(\alpha)\delta e^\rho(\alpha)(dx). \tag{8.17}$$

Les équations (8.16) sont les équations de champ de la gravitation et de l'électromagnétisme en présence de matière; elles sont au nombre de 20. Le nombre des équations algébriquement indépendantes se réduit à 14 en vertu de

$$\mathbf{L}(\beta\alpha) = \mathbf{L}(\alpha\beta), \tag{8.18}$$

où $\mathbf{L}(\gamma\delta) = \mathbf{L}_\rho(\delta)e^\rho(\gamma)$ (symétrie imposée par l'invariance du

---

([9]) Il ne s'agit pas bien entendu de nécessité mathématique pour ce choix; cependant, lorsque les lois naturelles ont été écrites, la physique exige que $f_\rho = \varphi_\rho$ soient égaux aux potentiels électromagnétiques.

([10]) L'anomalie apparente du signe du terme $-e^0(\alpha)\frac{\partial}{\partial x^0}$ est en effet due à la nature particulière de la transformation de facteur. En effet, $\left[e^\rho(\alpha)\frac{\partial}{\partial x^\rho} + \mathrm{E}(\alpha)\right].\psi$ n'est pas un tenseur, comme on le voit en lui faisant subir une transformation de facteur. L'hypothèse que ψ est d'index $-i$ n'aide pas non plus. *Voir* cependant note ([19]).

lagrangien vis-à-vis des rotations arbitraires de Lorentz en chaque point de l'univers où la rotation peut être une fonction variable du point envisagé ([11]). Pour comprendre ceci, envisageons la rotation de Lorentz $\delta e^{\rho}(\alpha) = a(\alpha\beta)\, e^{\rho}(\beta)$ où a est une fonction ponctuelle. Alors

$$o = \int \mathbf{L}_{\rho}(\alpha)\, a(\alpha\beta)\, e^{\rho}(\beta)\,(dx) \tag{8.19}$$

(8.18) résulte directement de l'antisymétrie de $a(\alpha\beta)$. Quand on manipule $\mathbf{L}_{\rho}(\alpha) = 0$ [en utilisant les conventions (4.9) à (4.13) pour déplacer les indices] en vue de transformer l'indice α en un indice tensoriel ordinaire, il vient selon les remarques finales du paragraphe 4, que $\mathbf{L}_{\rho 0}$ reste indéterminée. L'hypothèse $\mathbf{L}_{\rho 0} = \mathbf{L}_{0\rho}$ implique donc que $\mathbf{L}_{\rho\tau} = \mathbf{L}_{\tau\rho}$ ([12]) et il ne reste que $\mathbf{L}_{00}$ d'indéterminée. Les équations de champ sont telles qu'il existe entre elles une identité algébrique qui laisse indéterminée $\mathbf{L}_{00}$. Il nous reste donc 14 équations. Bien entendu, l'invariance de l'intégrale d'action vis-à-vis des transformations d'espace-temps nous fournit en outre quatre identités différentielles de la façon bien connue ([13]).

Si l'on manipule les équations de champs (8.16) exactement comme on le faisait avec la partie de la relativité projective (8.10) jusqu'à (8.12), il résulte que

$$\mathbf{L}_{\rho\tau} - \varphi_{\rho}\varphi_{\tau}\mathbf{L} = 0. \tag{8.20}$$

Puisque $g_{pq} = e_p(\alpha) e_q(\alpha)$, on a $g = |\, e_p(\alpha)\,|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$, de sorte qu'on peut enlever le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$; on a

$$\mathrm{L}_{\rho}(\alpha) \equiv t_{\rho}(\alpha) + 2\Gamma_{\rho}(\alpha) = 0 \tag{8.21}$$

de (8.16), où $t_{\rho}(\alpha) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{t}_{\rho}(\alpha)$, et les équations correspondantes de (8.20).

Dans le cas du tenseur projectif symétrique $\mathrm{T}_{\rho\tau}$, $\mathrm{T}_{\rho\tau} = 0$ est équiva-

---

([11]) Ceci s'oppose au « parallélisme lointain » d'Einstein, où le formalisme ne doit être invariant que par rapport à des rotations de Lorentz qui sont les mêmes pour tous les points d'univers.

([12]) Puisqu'on a déjà $\Gamma_{\rho\tau} = \Gamma_{\tau\rho}$, cette symétrie ne sert qu'à déterminer $t_{\rho 0}$.

([13]) Voir EUG pour une discussion détaillée.

lente aux équations affines $T^{pq} = 0$, $T^p_0 = 0$, $T_{00} = 0$; nous pouvons alors écrire comme ensemble équivalent d'équations de champ.

$$L^{pq} \equiv t^{pq} + 2\Gamma^{pq} = 0, \tag{8.22 a}$$

$$L^p_0 \equiv t^p_0 + 2\Gamma^p_0 = 0, \tag{8.22 b}$$

$$L_{00} - L = 0. \tag{8.22 c}$$

En faisant appel à la décomposition de Γ^{pq} et Γ^p_0 donnée par Veblen-Hoffmann, celles-ci s'écrivent :

$$R^{pq} - \frac{1}{2} g^{pq} R + 2 S^{pq} + \frac{1}{2} t^{pq} = 0, \tag{8.23 a}$$

$$\varphi^{pr}{}_{;r} + \frac{1}{2} t^p_0 = 0, \tag{8.23 b}$$

où l'on a omis la dernière équation, qui est une conséquence algébrique des deux premières [14]. Ici R^{pq} est le tenseur ordinaire de Ricci de la métrique affine g_{pq}, $R \equiv g^{pq} R_{pq}$, S^{pq} est le tenseur d'énergie de Maxwell covariant formé avec les $f_{pr} \equiv \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^p} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x^r}$ et où les indices ont été élevés au moyen des g^{pq}; le ; dans (8.23 b) représente la dérivation covariante par rapport aux g_{pq}.

t^{pq} joue le rôle du tenseur d'énergie matériel. Il a été calculé explicitement dans EUG. Il contient des termes qui correspondent au spin $\frac{1}{2}$ et il se réduit au tenseur d'énergie de Dirac habituel pour le cas de la relativité restreinte [c'est-à-dire les $e^p(\alpha)$ constants avec le choix $e^1(1) = e^2(2) = e^3(3) = 1$, $e^4(4) = -i$]. Nous allons calculer t^p_0 parce qu'il est simple. De (8.13) et (8.15), on tire

$$t_0(\alpha) \equiv \varepsilon \frac{\partial L}{\partial e^0(\alpha)} = -k\psi^* S(\alpha)\psi \equiv -k s(\alpha). \tag{8.24}$$

Ensuite, d'après (4.12), on a

$$t^p_0 = t_0(\alpha) e^p(\alpha) = -k e^p(\alpha) s(\alpha) \equiv -k s^p, \tag{8.25}$$

de sorte que (8.23 b) donne

$$\varphi^{pr}{}_{;r} = \frac{k}{2} s^p, \tag{8.26}$$

la relation attendue entre le quadrivecteur courant et la divergence du

(14) $L \equiv L^{\rho\tau}\gamma_{\rho\tau} = L^{pq} g_{pq} + L_{00}$.

champ électromagnétique. Ainsi s'achève l'analyse des équations $\mathbf{L}_\rho(\alpha) = 0$.

En faisant varier ψ^*, on obtient

$$(8.27) \qquad S(\alpha)\psi(\alpha) = S(\alpha)e^m(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^m} + i\varphi_m + E_m\right).\psi = 0.$$

Les dérivées partielles et les potentiels φ_m y entrent par la combinaison attendue; en outre, l'apparition des $e^m(\alpha)$ et E_m caractérise une théorie généralement covariante. Pour le cas de la relativité restreinte avec le choix des $e^m(\alpha)$ ci-dessus mentionné et en tenant compte de $E_m = 0$, il vient

$$(8.28) \qquad S^p\left(\frac{\partial}{\partial x^p} + i\varphi_p\right).\psi = 0,$$

où $S^i = S(i)$ $(i = 1, 2, 3)$; $S^4 = \frac{1}{i}S(4) = I$, et les x^p sont des coordonnées réelles de Lorentz. Comme il le faut dans une théorie qui comprend la relativité générale, il n'y a pas de terme proportionnel à la masse de l'électron.

Quand on fait les intégrations partielles usuelles, en vue de faire varier ψ, plusieurs caractéristiques nouvelles apparaissent par rapport au cas de la relativité restreinte et qui proviennent du fait que les $e^m(\alpha)$ ne sont pas des constantes. Pour les détails, voir EUG.

9. **Vue rétrospective.** — Ce Mémoire ne parvient pas à l'unification complète des trois champs ainsi qu'en témoigne la nécessité de former la somme de deux parties distinctes pour bâtir le lagrangien total (8.15). L'électromagnétisme et la gravitation sont complètement intégrés dans la seconde partie de celui-ci, mais l'action de la matière reste distincte. Il serait désirable bien entendu, d'exprimer les $e^\rho(\alpha)$, ψ, et ψ^* comme parties d'une seule entité géométrique dont la trace donnerait la densité lagrangienne (et cela pourrait peut-être remédier au fait que le terme masse de l'électron manque aux équations de champs matériels). Comme étape préliminaire on aurait pu espérer que l'action de la matière pourrait être formée au moyen du tenseur de courbure de l'espace spinoriel défini à l'aide de la dérivée covariante spinorielle développée dans le paragraphe 7, de même que l'action de la relativité projective a été bâtie à partir du tenseur projectif de courbure. Mais elle ne l'est pas, ainsi

qu'il est démontré dans l'Appendice 2. Par conséquent, il semble indiqué de remplacer le tenseur de courbure par un autre tenseur plus important pour la construction des lagrangiens de théories unitaires faisant appel à des entités géométriques plus compliquées que celles que nous avons rencontrées jusqu'à présent.

A l'actif du bilan, il faut noter que la théorie dans sa forme actuelle est considérablement plus unifiée que ne l'était la théorie du Mémoire cité de Weyl; celle-ci était caractérisée, par la simple addition des trois lagrangiens (plus les termes convenables de couplage bien entendu). Au moyen de l'introduction de l'ennuple orthogonal projectif, les potentiels électromagnétiques introduisent non seulement le changement de phase du spineur par le déplacement parallèle (conformément à Weyl), mais aussi les composantes $(o\,p)$ d'un tenseur symétrique fondamental (conformément à Kaluza, Veblen et Hoffmann). Ils sont étroitement liés à la gravitation, car ils constituent la composante nulle de l'ennuple projectif $e^{\rho}(\alpha)$ dont les $e^{m}(\alpha)$ représentent la gravitation, et sont également liés au spineur projectif permettant l'existence d'une dérivée projectivement covariante.

On voit ainsi que :

1° Au lieu des quatre champs indépendants g_{pq}, f_p, ψ et ψ^*, il y en a actuellement trois : $e^{\rho}(\alpha)$, ψ et ψ^* (spineurs projectifs);

2° Le lagrangien se compose actuellement de deux parties distinctes au lieu de trois;

3° L'ancien formalisme était invariant par rapport aux transformations d'espace-temps, aux rotations de Lorentz, (fonctions variables du point d'univers), et par rapport à la transformation de « jauge-phase » de ψ et f_p. Dans le nouveau formalisme, les transformations sont : celles du groupe projectif (3.1) et les rotations (variables) de Lorentz.

En ce qui concerne l'avenir, il sera probablement nécessaire d'introduire des entités géométriques plus complexes et d'élargir la géométrie fondamentale. MM. Veblen et Hoffmann ont étudié le cas où l'on écarte la restriction de $\gamma_{\sigma\tau}$ à l'index zéro; cela fournit un champ supplémentaire, c'est-à-dire un scalaire projectif d'index non nul. Ils ont ainsi obtenu [2] une sorte d'équation de méson scalaire; et dans un article suivant (15), Hoffmann a développé une théorie (méson vectoriel-plus-gravitation). On s'est borné à un univers à quatre dimensions. Cependant, la théorie se heurtait soit à des difficultés d'interprétation, soit à des termes anomals ou bien aux deux. Plus tard (16), Hoffmann a élargi la géométrie fondamentale en créant la « similarity geometry », forme restreinte de la géométrie conforme qui, malheureusement, ne contient plus la géométrie projective; celle-ci permet encore l'emploi d'un tenseur fondamental d'index zéro (toujours avec un univers à quatre dimensions), et permet d'aboutir à la construction d'une théorie gravitation-électromagnétisme-méson vectoriel. Le présent mémoire montre qu'une théorie gravitation-électromagnétisme-électron peut être construite dans le cadre de la géométrie projective, mais que l'unification finale y fait défaut. Si l'on veut développer une théorie correcte des trois champs cités et de l'électron, il semble probable qu'il sera nécessaire d'unifier formellement le spineur ψ et un tenseur conforme fondamental $S_{\sigma\tau}(\sigma, \tau = 0, \ldots, 5)$, et élargir encore une fois la géométrie de manière à y englober la géométrie conforme (17).

APPENDICE I.

DÉTERMINATION DE LA CONNEXION AFFINE.

A cause de la symétrie de $\Pi_{\tau\xi}{}^{\rho}$ en τ, ξ il résulte de (6.8) que

$$[e(\beta), e(\alpha)]^{\rho} = \{o(\beta; \alpha\gamma) + o(\alpha; \gamma\beta)\} e^{\rho}(\gamma), \tag{A 1.1}$$

où $[e(\beta), e(\alpha)]^{\rho}$ est défini par (6.7). En multipliant par $e_{\rho}(\delta)$, on a

$$[e(\beta), e(\alpha)](\delta) = o(\beta; \alpha\delta) + o(\alpha; \delta\beta). \tag{A 1.2}$$

(15) B. Hoffmann, *The Vector Meson Field and Projective Relativity* (*Phys. Rev.*, 72, 1947, p. 458).

(16) B. Hoffmann, *The Gravitational, Electromagnetic, and Vector Meson Fields and the Similarity Geometry* (*Phys. Rev.*, 73, 1948, p. 30).

(17) Note sur deux nouveaux travaux : l'auteur a développé une théorie gravitation-électromagnétisme-méson vectoriel complètement conforme, en partant d'une variété à six dimensions pourvue de métrique et de parallélisme. On y trouve pour la première fois des modifications des lois classiques. Relativité ordinaire et projective y sont englobées. Tout récemment, il a réussi à construire une « relativité spinorielle » dans le cadre des « espaces-spin » locaux à huit dimensions associés uniquement en chaque point de la variété sous-jacente aux espaces euclidiens locaux à six dimensions en ces points. La théorie de Dirac plus la « relativité conforme » ci-dessus mentionnée résultent des équations de champ, qui sont « les plus simples concevables »; c'est-à-dire, qui ont la forme des équations de champ de la relativité générale.

Celle-ci a donc la solution (6.5) pour les $o(\gamma;\alpha\beta)$. D'après $o_0(\alpha\beta)=0$, $o(\alpha;\beta\gamma)$ détermine complètement $o_\rho(\beta\gamma)$; on a

(A 1.3) $$o_\rho(\beta\gamma);\quad o_p(\beta\gamma)=e_p(\alpha)\,o(\alpha;\beta\gamma),\qquad o_0(\beta\gamma)=0.$$

On constate qu'en effet seuls les $\dfrac{\partial}{\partial x_p}$ apparaissent dans les $[e(\alpha),e(\beta)]^\rho$ puisque $e^\rho(\alpha)$ est d'index zéro, et qu'on a $[e(\beta),e(\alpha)](\delta)=[e(\beta),e(\alpha)]^p e_p(\delta)$ d'après $e_0(\alpha)=0$; par conséquent, aucune quantité d'indice zéro n'apparaît plus dans le second membre de (6.5) et les $o(\gamma;\alpha\beta)$ se révèlent identiques aux composantes de la connexion affine introduites en EUG.

Afin de déterminer Π, on multiplie (6.8) par $e^\sigma(\beta)$ et ensuite pour l'éliminer on utilise la symétrie gauche de $o(\alpha;\beta\gamma)$ par rapport aux deux derniers indices. Puisque $g^{\sigma\tau}=e^\sigma(\alpha)\,e^\tau(\alpha)$, on obtient

(A 1.4) $$\left(\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\xi}+g^{\sigma\tau}\Pi_{\tau\xi}{}^{\rho}+g^{\rho\tau}\Pi_{\tau\xi}{}^{\sigma}\right)e^\xi(\alpha)=0.$$

La quantité entre parenthèses s'annule pour $\xi=0$ en tenant compte de $\Pi_{\lambda 0}{}^{\rho}e^\lambda(\alpha)=0$; ceci implique

(A 1.5) $$\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\xi}+g^{\sigma\tau}\Pi_{\tau\xi}{}^{\rho}+g^{\rho\tau}\Pi_{\tau\xi}{}^{\sigma}=0,$$

une identité pour $\xi=0$. Si $\gamma_{\sigma\tau}$ était apparu, au lieu de $g^{\sigma\tau}$, nous aurions les solutions bien connues des symboles de Christoffel pour Π. En remplaçant $g^{\sigma\tau}$ par $\gamma^{\sigma\tau}-\delta_0^\sigma\delta_0^\tau$ et en abaissant les indices ρ, σ, puis en permutant circulairement et en résolvant de la façon bien connue, on obtient la solution (6.9).

Le champ électromagnétique $f_{\rho\sigma}\equiv\dfrac{\partial}{\partial x^\rho}\varphi_\sigma-\dfrac{\partial}{\partial x^\sigma}\varphi_\rho$ est un tenseur affine ($f_{0\rho}=0$); nous allons établir le théorème intéressant suivant :

Pour que $\Pi=\Gamma$ *il faut et il suffit que le champ électromagnétique s'annule.*

En substituant pour $g^{\rho\sigma}$ dans (A 1.5), on a directement

(A 1.6) $$\frac{\partial\gamma^{\rho\sigma}}{\partial x^\xi}+\gamma^{\sigma\tau}\Pi_{\tau\xi}{}^{\rho}+\gamma^{\rho\tau}\Pi_{\tau\xi}{}^{\sigma}-\delta_0^\sigma\Pi_{0\xi}{}^{\rho}-\delta_0^\rho\Pi_{0\xi}{}^{\sigma}=0;$$

$\Pi=\Gamma$ implique que les trois premiers termes sont nuls; par conséquent

(A 1.7) $$\Pi_{0\xi}{}^{\rho}=0.$$

En outre

$$(\text{A } 1.8) \qquad o = \Pi_{0\xi,\rho} = \Gamma_{0\xi,\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\rho\xi}}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^\xi}\gamma_{0\rho} - \frac{\partial\gamma_{0\xi}}{\partial x^\rho}\right) = \frac{1}{2} f_{\xi\rho}.$$

Pour établir le caractère suffisant de l'énoncé si $f_{\rho\sigma}(=f_{pq}) = o$, on peut parvenir à $\varphi_p = o$ par une transformation de facteur. Les équations (6.9) montrent alors que $\Pi = \Gamma$ dans ces coordonnées. Mais $\Pi = \Gamma$ est une équation projectivement covariante et vaut par conséquent dans n'importe quel système de coordonnées, ce qui complète la démonstration. En particulier, on voit que si $\Pi = \Gamma$, la théorie présentée dans le paragraphe 8 se réduit simplement à la théorie électron plus relativité générale.

APPENDICE II.

LE TENSEUR DE RIEMANN SPINORIEL.

Dans EUG on dérive une expression pour le tenseur de Riemann ordinaire en fonction des quantités $o_p(\alpha\beta)$, c'est-à-dire le tenseur qui caractérise la rotation, à partir de sa position initiale, subie par l'ennuple déplacé parallèlement autour d'un petit élément de surface. Dans la représentation mixte où σ, τ sont des indices tensoriels ordinaires et α, β des indices tensoriels de Lorentz cette expression s'écrit :

$$(\text{A } 2.1) \qquad P_{\sigma\tau}(\alpha\beta) = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} o_\tau(\alpha\beta) - \frac{\partial}{\partial x^\tau} o_\sigma(\alpha\beta) + o_\sigma(\alpha\gamma)\, o_\tau(\gamma\beta) - o_\tau(\alpha\gamma)\, o_\sigma(\gamma\beta).$$

Nous l'avons écrit avec les indices σ, τ parce que cette même expression est notre tenseur de Riemann projectif. Cependant, en tenant compte du fait que les $o_p(\alpha\beta)$ sont d'index zéro et $o_0(\alpha\beta) = o$, il résulte que $P_{\sigma\tau}$ est affine.

Puisque le tenseur de Riemann ci-dessus est affine et ne contient que des quantités affines et puisque le lagrangien de la matière, formé au moyen de quantités projectives, est finalement simplement affine et ne comprend que le spineur affine et sa dérivée covariante affine modifiée, il suffira dans la suite de rester dans le cadre de la théorie affine et d'utiliser les seules quantités définies dans EUG. Considérons, alors les formules (6.1) et (7.5) qui définissent l'ennuple et le spineur déplacés parallèlement, soit

$$f(\mathrm{P}') - e(\mathrm{P}') = do.e(\mathrm{P}), \tag{A 2.2}$$

et

$$\psi' - \psi(\mathrm{P}') = d\mathrm{E}'.\psi \equiv (d\mathrm{E} + i\,df).\psi, \tag{A 2.3}$$

où l'on a écrit (6.1) symboliquement pour rendre évidente sa ressemblance formelle avec (7.5). Par conséquent, si l'on fait les correspondances $e \leftrightarrow \psi$ et $do \leftrightarrow d\mathrm{E}'$, on peut transcrire directement pour le spineur, l'analyse de EUG du déplacement parallèle de $e(\alpha)$. On obtient ainsi

$$\psi'_{(1)} = \frac{1}{2}\mathrm{S}_{pq}.\psi'_{(2)}\Delta^{pq}, \tag{A 2.4}$$

où Δ^{pq} est l'élément de surface $(dx^p\delta x^q - dx^q\delta x^p)$ et $\psi'_{(1)}$, $\psi'_{(2)}$ sont les spineurs déplacés parallèlement en P′, diamétralement opposé de P dans le « rectangle » infinitésimal, $\psi'_{(1)}$ s'étant déplacé de P à P′ le long d'une paire de côtés voisins et $\psi'_{(2)}$, le long de l'autre paire. Cela définit le tenseur de courbure spinoriel S_{pq} (dans une représentation mixte), puisque celui-ci doit avoir exactement la forme (A 2.1) avec la correspondance $do \leftrightarrow d\mathrm{E}'$:

$$\mathrm{S}_{pqa}{}^{b} = \frac{\partial}{\partial x^p}\mathrm{E}'_q(ab) - \frac{\partial}{\partial x^q}\mathrm{E}'_p(ab) + \mathrm{E}'_p(ac)\,\mathrm{E}'_q(cb) - \mathrm{E}'_q(ac)\,\mathrm{E}'_p(cb) \tag{A 2.5}$$
$$(a,\ b = 1,\ 2)\quad (^3).$$

Puisque $\psi'_{(1)}$ et $\psi'_{(2)}$ sont, toutes les deux, des quantités qui se transforment en spineurs dans P, (A 2.4) montre que S_{pq} doit avoir deux indices non pointés et que son second indice doit se trouver dans la position contravariante (le b élevé). Les indices spinoriels s'élèvent et s'abaissent de la manière suivante :

$$\psi^a = \varepsilon^{ab}\psi_b, \qquad \psi_a = \varepsilon_{ab}\psi^b, \tag{A 2.6}$$

où

$$(\varepsilon^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\varepsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{soit}\quad (\varepsilon_{ab}) = -i\mathrm{S}(2). \tag{A 2.7}$$

Il est bien connu qu'un spineur symétrique du deuxième rang à deux indices non pointés correspond à un tenseur complexe de Lorentz du deuxième rang, « self-dual » antisymétrique [18]. $G(\alpha\beta) = -G(\beta\alpha)$ s'appelle « self-dual » si $G(\alpha\beta) = G^*(\alpha\beta)$, où

$$G^*_\pm(\alpha\beta) = \pm \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma\delta} G(\gamma\delta) \tag{A 2.8}$$

définit deux possibilités $G^*_\pm(\alpha\beta)$ pour le tenseur dual. $\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est la quantité antisymétrique égale à $+1$ si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est une permutation paire de $(1, 2, 3, 4)$ et égale à -1 si la permutation est impaire. Dans la notation précédente, les indices de Lorentz contravariants et covariants ne sont pas distingués les uns des autres parce que nous employons la métrique de Lorentz $\delta(\alpha\beta)$. Si l'on pose

$$G(12) \equiv k_3, \quad \ldots \quad \text{(cyclique)} \tag{A 2.9}$$

et si g_{ab} est le spineur, la correspondance est la suivante

$$k_2 = \frac{1}{4}(g_{11} + g_{22}), \qquad k_1 = \frac{i}{4}(g_{11} - g_{22}), \qquad k_3 = -\frac{i}{4}(g_{12} + g_{21}), \tag{A 2.10}$$

où $G(\alpha\beta)$ est self-dual avec le signe moins dans (A 2.8). Cela peut s'écrire brièvement

$$G(\alpha\beta) = \langle M(\alpha\beta).g \rangle \equiv \text{Trace } M(\alpha\beta).g, \tag{A 2.11}$$

où

$$M(\alpha\beta) = -M(\beta\alpha), \qquad M(12) = M(43), \quad \ldots \quad \text{(cyclique)}$$

et

$$M(12) = -\frac{i}{4} S(1), \qquad M(23) = \frac{i}{4} S(3), \qquad M(31) = -\frac{i}{4} S(4). \tag{A 2.12}$$

La formule (A 2.11) donne donc sous une forme concise les composantes du tenseur G en fonction du spineur g correspondant et des matrices de Pauli.

Lorsqu'on considère un spineur avec un indice élevé $h_a{}^b$, le tenseur correspondant H est donné par

$$H(\alpha\beta) = \langle M(\alpha\beta).\varepsilon.h \rangle = -i \langle M(\alpha\beta).S(2).h \rangle \tag{A 2.13}$$

où ε représente ε_{ab}, conformément à (A 2.11) et aux conventions pour l'élévation et l'abaissement des indices (A 2.6) et (A 2.7). Mais cela

(18) *Voir*, par exemple, LAPORTE and UHLENBECK, *Phys. Rev.*, 37, 1931, p. 1380.

peut se simplifier en faisant appel à l'algèbre des matrices de Pauli :

$$(\text{A}\,2.14)\qquad \left\{\begin{array}{l} S(i)\,S(j) = -S(j)\,S(i) = iS(k) \\ S(4)\,S(j) = \quad S(j)\,S(4) = iS(j) \\ \qquad (i, j, k = 1, 2, 3) \end{array}\right\} \text{(cyclique)}$$ [3].

En posant

$$M'(\alpha\beta) \equiv -iM(\alpha\beta).S(2),$$

on déduit de (A 2.12)

$$(\text{A}\,2.15)\qquad \left\{\begin{array}{l} M'(ij) = M'(4k) = (-1)^k \dfrac{i}{4} S(k) \\ (i, j, k \text{ cyclique; } k \text{ non sommé}), \end{array}\right.$$

et (A. 13) dit que :

$$(\text{A}\,2.16)\qquad H(\alpha\beta) = \langle M'(\alpha\beta).h \rangle.$$

On est actuellement en état de transformer les indices spinoriels du tenseur de Riemann spinoriel en indices tensoriels de Lorentz et de là en indices tensoriels ordinaires, à l'aide des $e^p(\alpha)$ afin de former l'invariant de courbure. $S_{pq}(ab)$, donné par le second membre de (A 2.5), est un spineur dont l'indice b est en effet élevé, c'est-à-dire un spineur du type $h_a{}^b$. Ainsi nous pouvons tout simplement appliquer (A 2.16) pour obtenir ses composantes de Lorentz :

$$(\text{A}\,2.17)\qquad S = S_{pq}(\alpha\beta)\,e^q(\alpha)\,e^p(\beta) = e^q(\alpha)\,e^p(\beta) \langle M'(\alpha\beta).S_{pq} \rangle.$$

En utilisant la symétrie gauche de $M'(\alpha\beta)$ en α, β et de S_{pq} en p, q, la définition de S_{pq} (A 2.5) et les expressions pour les $M'(\alpha\beta)$ (A 2.15), cela peut s'écrire, après un calcul simple, comme suit

$$(\text{A}\,2.18)\qquad S = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3} [(e^q, e^p)_k + (e^q, e^p)_{4k}](-1)^k \left\langle S(k).\left(\frac{\partial}{\partial x^p} + E'_p\right).E'_q \right\rangle,$$

où nous introduisons, pour la commodité, les « commutateurs »

$$(\text{A}\,2.19)\qquad \left\{\begin{array}{l} (e^q, e^p)_k \equiv e^q(i)\,e^p(j) - e^q(j)\,e^p(i) \\ (e^q, e^p)_{4k} \equiv e^q(4)\,e^p(k) - e^q(k)\,e^p(4) \end{array}\right\}.\quad (i, j, k \text{ cyclique}).$$

Le pas final consiste à évaluer le $\langle \quad \rangle$ en faisant appel à la dépendance de E'_p et $E'_p.E'_q$ d'avec les matrices de Pauli. La symétrie gauche en p, q des commutateurs ci-dessus fait qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer que $E'_p.E'_q - E'_q.E'_p = E_p.E_q - E_q.E_p$, Ensuite, en tenant compte des définitions (7.2) et (7.3), on peut écrire

$$\text{(A 2.20)} \qquad E'_m = -\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{3} q_m(j)\,S(j) + \varphi_m S(4)$$

et

$$\text{(A 2.21)} \qquad E'_m.E'_n - E'_n.E'_m = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{3} (q_m, q_n)_j\,S(j),$$

où l'on a introduit le tenseur self-dual antisymétrique

$$q_m(\alpha\beta) \equiv o_m(\alpha\beta) + o^*_m(\alpha\beta)$$

[défini avec $+1$ dans la définition (A 2.8)].

On a posé $q_m(k) \equiv q_m(ij)$, $(i, j, k$, cyclique) comme d'habitude, et le commutateur a été défini comme ci-dessus. D'après l'algèbre des matrices de Pauli et les règles suivantes qui en sont des conséquences :

$$\text{(A 2.22)} \qquad \langle S(k) \rangle = 0, \qquad \langle S(4) \rangle = i \langle I \rangle = 2i,$$

on trouve aisément

$$\text{(A 2.23)} \qquad \langle S(k).E'_m \rangle = -\frac{1}{2i} q_m(k)\,2 = i q_m(k)$$

et

$$\text{(A 2.24)} \qquad \langle S(k).(E'_m.E'_n - E'_n.E'_m) \rangle = -i\,(q_m, q_n)_k.$$

En portant dans (A 2.18) on obtient enfin

$$\text{(A 2.25)} \qquad S = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3} [(e^n, e^m)_k + (e^n, e^m)_{4k}](-1)^k \times\left[\frac{\partial}{\partial x^n} q_m(k) - \frac{\partial}{\partial x^m} q_n(k) + (q_m, q_n)_k\right].$$

Tel est l'invariant de courbure désiré.

Comparons (A 2.18) avec le lagrangien employé effectivement dans le paragraphe 8

$$\text{(A 2.26)} \qquad \mathbf{L}_1 \equiv \psi^* S(\alpha)\,\psi(\alpha) = \psi^* e^p(\alpha)\,S(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^p} + E'_p\right).\psi.$$

La différence la plus frappante (celle qui montre immédiatement que S ne convient pas comme lagrangien) est le fait que S ne comprend point ψ ou ψ^*. A cette situation il n'y a pas de remède, car il n'existe pas de méthode permettant de former un invariant fonction de S_{pq} et des ψ, ψ^* seuls. Cela saute aux yeux si l'on remarque que S_{pq} correspond à un tenseur de Lorentz du deuxième rang alors que les ψ, ψ^* correspondent à un vecteur de Lorentz au moyen de la combinaison $\psi^* S(\alpha)\psi$. Par conséquent, n'importe quel tenseur formé en multipliant S_{pq} et ψ, ψ^* (en combinaisons numériques convenables) aurait trois indices de Lorentz en sus des deux indices tensoriels ordinaires p, q; et en contractant, il y aurait toujours un indice qui resterait. Au contraire, en éliminant le E'_q de la combinaison $\left(\frac{\partial}{\partial x^p} + E'_p\right) . E'_q$ qui se présente dans le tenseur de courbure, on a une quantité $\frac{\partial}{\partial x^p} + E'_p$ qui se comporte comme un vecteur covariant ordinaire; ensuite après multiplication interne par $\psi^* S(\alpha)\psi e^p(\alpha)$ qui est un autre vecteur, on obtient un invariant L_1. On voit ainsi la raison fondamentale pour laquelle on ne peut pas se servir du tenseur de courbure de l'espace spinoriel pour bâtir un lagrangien de manière analogue à ce qu'on fait dans les théories ne comprenant que des quantités purement tensorielles (17).

APPENDICE III.

LA CONNEXION SPINORIELLE INTÉGRABLE.

Nous ajoutons plusieurs remarques concernant certaines ressemblances entre la présente théorie et l'ancienne géométrie invariante de jauge, de Weyl.

De (A 2.4) et (A 2.5) on tire qu'une condition nécessaire pour que la connexion spinorielle soit « intégrable » c'est que $S_{pq} = 0$ (ce qui définit le terme « intégrable »), soit

$$\frac{\partial}{\partial x^m} E'_n - \frac{\partial}{\partial x^n} E'_m + (E'_m, E'_n) = 0, \tag{A 3.1}$$

où ( ) est le commutateur ordinaire. En se servant des résultats de l'Appendice II, cela peut s'écrire

$$-\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x^m} q_n(j) - \frac{\partial}{\partial x^n} q_m(j) + (q_n, q_m)_j\right] S(j) + f_{mn} S(4) = 0, \tag{A 3.2}$$

Les $S(\alpha)$ sont linéairement indépendants : si $F(\alpha)$ sont des fonctions quelconques,

$$F(\alpha) S(\alpha) = 0 \tag{A 3.3}$$

implique $F(\beta) = 0$. Cela se voit facilement en multipliant (A 3.3) par $S(\beta)$ et prenant la trace. Par conséquent, on a les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x^m} q_n(j) - \frac{\partial}{\partial x^n} q_m(j) + (q_n, q_m)_j = 0; \qquad f_{mn} = 0. \tag{A 3.4}$$

On voit qu'il faut que le champ électromagnétique s'annule, et qu'il existe des conditions supplémentaires pour les $o_m(\alpha\beta)$.

Dans l'ancienne géométrie de Weyl toute équation douée de sens physique devait être invariante par rapport aux changements d'étalon :

$$g_{pq} \rightarrow \rho\, g_{pq}, \qquad \varphi_m \rightarrow \varphi_m - \frac{\partial}{\partial x^m} \log \rho, \tag{A 3.5}$$

(ρ fonction ponctuelle réelle).

La condition nécessaire et suffisante pour que cette géométrie se réduise à la géométrie riemanienne (c'est-à-dire que la longueur se conserve dans un déplacement parallèle) était que $f_{mn} = 0$. La théorie de Weyl a été abandonnée lorsqu'on s'est rendu compte que l'expérience n'était pas en accord avec une géométrie qui exigeait qu'une transformation conforme de la métrique accompagne toujours la transformation de « jauge » des potentiels électromagnétiques.

La présente théorie projective évite ce défaut puisque

$$g_{pq} \rightarrow g_{pq} \qquad \text{quand} \quad \varphi_m \rightarrow \varphi_m - \frac{\partial}{\partial x^m} \log \rho$$

($g_{\rho\sigma}$ est affine et d'index zéro). Le spineur ψ joue maintenant le rôle de la métrique de l'ancienne théorie, avec la différence que ψ subit une transformation « conforme » avec un facteur complexe de module unité : selon la transformation de facteur $\varphi_m \rightarrow \varphi_m - \frac{\partial}{\partial x^m} \log \rho$, on a $\psi \rightarrow \psi e^{i \log \rho}$ (19).

(19) Il semble convenable de modifier la définition du spineur projectif afin de parvenir à la forme désirable de la dérivée covariante $\psi'(\alpha)$

$$\psi'(\alpha) \equiv \left\{ e^{\sigma}(\alpha) \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} + E(\alpha) \right\} . \psi. \tag{8.13$'$}$$

La connexion affine tensorielle ordinaire conserve la longueur des vecteurs affines par déplacement parallèle, que le champ électromagnétique s'annule ou non; $f_{mn} = 0$ fait maintenant partie du critère pour que la connexion spinorielle soit intégrable. On voit en particulier que si la théorie donnée dans le paragraphe 8 doit être une théorie de l'électromagnétisme non banal, la connexion spinorielle ne saurait être intégrable.

Dans ce but, on remplace (5.2) par

$$(5.2)' \qquad \psi \to \psi' = e^{-N\log\rho}\psi,$$

c'est-à-dire pour une transformation de facteur on remplace tout simplement x^0 dans le facteur e^{Nx^0} par $x'_0 - \log\rho$; ce faisant on multiplie le spineur par $\frac{1}{\rho^N}$, au lieu de ρ^N. Et en même temps on pose $N = -i$ au lieu de $+i$. Ce n'est que sous la forme (8.13)' que la théorie de Weyl est rendue correctement projective.