ANNALES DE L'I. H. P.

F. POLLACZEK

Problèmes de Calcul des Probabilités relatifs à des systèmes téléphoniques sans possibilité d'attente

Annales de l'I. H. P., tome 12, nº 2 (1951), p. 57-96
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_2_57_0>

Problèmes de Calcul des Probabilités relatifs à des systèmes téléphoniques sans possibilité d'attente.

par

F. POLLACZEK.

INTRODUCTION.

Dans ce qui suit, différents problèmes de Calcul des Probabilités concernant un groupe de $s \geqq 1$ lignes téléphoniques où sont refusés les appels qui trouvent toutes les s lignes occupées, sont traités dans des hypothèses très générales au moyen de la méthode des variables aléatoires.

Nous considérons aussi bien des groupes où un appel admis n'influence que la seule ligne qu'il occupe, que des groupes où cet appel bloque pendant une certaine période (en général aléatoire) toutes les lignes libres.

Dans chacun de ces deux cas, la solution de tous les problèmes étudiés revient à la résolution d'un seul système de s équations intégrales linéaires dont les deuxièmes membres sont des fonctions données qui varient selon la nature du problème. Ces systèmes d'équations intégrales sont résolus ici dans certaines hypothèses concernant une fonction donnée qui figure dans tous leurs noyaux; ensuite, leurs solutions permettent de calculer les probabilités cherchées.

Lors de la première application de cette méthode aux problèmes les plus simples relatifs à des groupes de lignes sans possibilité d'attente et sans blocage (1), des calculs assez étendus avaient été nécessaires pour

(1) *Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems* (*Math. Zeitschr.*, t. 35, 1932, p. 230).

établir le système d'équations intégrales auquel ces problèmes se ramènent en dernier lieu. Depuis, un calcul opérationnel exposé dans un Mémoire précédent ([2]) a permis d'abréger considérablement le passage des problèmes de probabilité aux systèmes d'équations intégrales qui leur correspondent, et a facilité l'application de notre théorie à des problèmes plus complexes.

Un abrégé de notre méthode ainsi que l'explication des notations utilisées se trouvent dans le premier Chapitre d'un autre Mémoire ([3]) qui traite des problèmes concernant des groupes de lignes avec possibilité d'attente. Ce Chapitre ainsi que le mémoire A seront considérés ici comme connus et nous y renverrons fréquemment.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS; PROBABILITÉS A UN GROUPE DE LIGNES SANS BLOCAGE.

Les raisonnements qui aboutissaient aux formules R, (13) et (15), peuvent être généralisés de la manière suivante :

Soient E l'ensemble de points $(X_1, \ldots, X_n; T_1, \ldots, T_{n-1})$ définis par les inégalités

$$(1) \qquad 0 \leqq X_1 \leqq X_2 \leqq \ldots \leqq X_n \leqq \mathfrak{T}, \qquad 0 < T_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

([2]) *Application d'opérateurs intégro-combinatoires dans la théorie des intégrales multiples de Dirichlet* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 11, 1949, p. 113-133). Ce Mémoire sera désigné, dans ce qui suit, par la lettre A. — Mentionnons que toutes les formules de A, Chap. 2, 3, 4, restent valables pour des fonctions $f_\lambda(z_1, \ldots, z_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda)$ non symétriques en $\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda$, et pour des $f(z_1, \ldots, z_\lambda; z)$ non symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$, pourvu que la notation des indices $1', \ldots, \lambda'$ [combinaisons λ à λ des nombres $1, \ldots, n$] y soit choisie de manière que $1' < 2' < \ldots < \lambda'$.

Rectifions d'autre part que pour étendre la validité des formules A, (39) et (45) à des fonctions de la forme $f_0(z_1, \ldots, z_\lambda) + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ [A, (42 *b*)], il faut admettre les conditions supplémentaires suivantes :

1° $x_\nu \neq 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$;

2° l'intégrale $C'_1, \ldots, C'_\lambda\, e^{-\sum_1^\lambda x_\nu z_\nu} f_0(z_1, \ldots, z_\lambda)$ existe pour toutes les valeurs réelles des x_ν.

([3]) *Réduction de différents problèmes concernant la probabilité d'attente au téléphone, à la résolution de systèmes d'équations intégrales* (*Ann. Inst. Poincaré*, t. 11, 1949, p. 135-173). Ce Mémoire sera désigné ici par la lettre R.

et $\mathcal{E}_m$ ($m = 1, \ldots, n$) le sous-ensemble de E où le $m^{\text{ième}}$ appel satisfait à une certaine condition $\mathcal{E}$ (par exemple, d'être traité sans attente). Désignons par $\chi_m(X_\nu, T_\nu; \mathcal{E})$ la fonction caractéristique (f. c.), au sens de la théorie des ensembles, de $\mathcal{E}_m$; donc

$$\chi_m = 1 \quad \text{sur } \mathcal{E}_m \qquad \text{et} \qquad = 0 \quad \text{sur } E - \mathcal{E}_m.$$

De manière générale, on a pour la probabilité de l'événement (de la condition) $\mathcal{E}$

$$(2a)^* \qquad \tilde{p}_\chi = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathfrak{M}(\chi_m),$$

où $\mathfrak{M}(\chi_m)$ désigne la valeur probable de χ_m.

Mais lorsque χ_m ne dépend effectivement que des variables $X_1, \ldots, X_m$; $T_1, \ldots, T_{m-1}$, la probabilité de $\mathcal{E}$ s'avère égale, dans l'hypothèse

$$(2b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Prob}\,\{x < X_m < x + dx\} = \dfrac{dx}{\mathfrak{C}}, \qquad \text{Prob}\,\{t < T_m < t + dt\} = df(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (m = 1, \ldots, n), \end{array} \right.$$

à

$$(3) \qquad \tilde{p}_\chi = \frac{(n-1)!}{\mathfrak{C}^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_z} \frac{e^{p\mathfrak{C}}}{z^n (p - z)} \Phi_\chi(p, z)\, dp\, dz,$$

où nous avons posé

$$(4) \quad \Phi_\chi(p, z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1}\, \overline{e^{-px_m}\chi_m}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} \int_0^\infty df(t_1) \ldots \int_0^\infty df(t_{m-1}) \int_0^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \ldots$$
$$\times \int_{x_{m-1}}^\infty e^{-px_m} \chi_m(x_1, \ldots, x_m;\, t_1, \ldots, t_{m-1})\, dx_m \quad (^1).$$

Dans (3), C_p est une parallèle à l'axe imaginaire, située à droite de cet axe et parcourue de bas en haut, et K_z un cercle autour de l'origine, de rayon $|z| < R(C_p)$ et parcouru dans le sens positif; $f(t)$ est une fonction de répartition pour laquelle nous admettrons plus loin

---

(1) En remplaçant ici χ_m par $s(\tau - \tau_m) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{q(t-\tau_m)} \frac{dq}{q}$, on reviendrait aux formules R, (13) et (15).

[équ. (18a)] une hypothèse restrictive. Les considérations faites à la fin de R (Chap. 1) montrent que dans le domaine $|z| < R(p)$, Φ_χ est une fonction holomorphe des variables complexes p et z qui y satisfait à l'inégalité

$$|\Phi_\chi(p, z)| \leqq \frac{1}{R(p) - |z|} \qquad [\text{pour } |z| < R(p)]. \tag{5}$$

Nous déterminerons les probabilités $\tilde{p}$ de divers événements $\mathcal{E}$ qui peuvent se produire dans un groupe de $s \geqq 1$ lignes téléphoniques sans possibilité d'attente, en calculant leurs f. c. χ_m et les fonctions Φ_χ correspondantes; ensuite il y aura lieu de faire tendre n, dans l'équation (3), vers l'infini, dans l'hypothèse que

$$\frac{n}{\mathcal{T}} = \text{const.} \tag{6}$$

Calculons d'abord, pour un système donné de valeurs $X_\nu = x_\nu$, $T_\nu = t_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, la f. c. s_m de l'événement : aboutissement du $m^{\text{ième}}$ appel. La fonction

$$s_m(x_1, \ldots, x_m;\ t_1, \ldots, t_{m-1}) \qquad (m = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

sera donc par définition $= 1$ dans le cas où le $m^{\text{ième}}$ appel aboutit, et $= 0$ s'il est refusé; dans nos hypothèses, il est évident que s_m ne dépend que des $2m - 1$ variables indiquées dans (7).

Notons que le $\nu^{\text{ième}}$ appel $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sera terminé à l'instant $x_\nu + s_\nu t_\nu$ et considérons l'instant [*voir* pour les notations suivantes A, (3a), (3b) et (4)] :

$$\max_{\nu=1, \ldots, m-1}{}^{(s)} (x_\nu + s_\nu t_\nu). \tag{8}$$

Si le $m^{\text{ième}}$ appel arrive avant cet instant, il trouvera évidemment toutes les s lignes occupées et sera par conséquent refusé; par contre, si x_m est plus grand que la quantité (8), le $m^{\text{ième}}$ appel trouvera au moins une ligne libre et sera acheminé.

On a donc

$$s_m = s\Big[x_m - \max_{\nu=1, \ldots, m-1}{}^{(s)} (x_\nu + s_\nu t_\nu)\Big]$$

ou

$$s_m(x_1, \ldots, x_m;\ t_1, \ldots, t_{m-1}) = s \min_{\nu=1, \ldots, m-1}{}^{(s)} (x_m - x_\nu - s_\nu t_\nu) \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9a}$$

Nous sommes convenu (A, Chap. 1) de poser, pour $1 \leqq m \leqq s$, le symbole $\min\limits_{\nu=1,\ldots,m-1}^{(s)}$ égal à 1; en admettant la formule ($9a$) encore pour $1 \leqq m \leqq s$, on suppose donc que

$$(9b) \qquad \mathrm{s}_m = 1 \qquad (m = 1, \ldots, s),$$

c'est-à-dire qu'au début, les s lignes sont supposées libres.

Calcul de la fonction $\Phi_\chi(p, z)$ pour $\chi_m = \mathrm{s}_m$. — Afin de déterminer maintenant la probabilité $\tilde{p}$ pour qu'un appel quelconque aboutisse, il faut introduire la f. c. de cet événement, laquelle est précisément s_m, dans (3) et (4). Pour calculer par récurrence les coefficients de la série (4), posons

$$(10a) \qquad \mathfrak{J}_{m,0} = e^{-px_m}\chi_m;$$

$$(10b) \qquad \mathfrak{J}_{m,i} = \int_0^\infty df(t_{m-i}) \int_{x_{m-i}}^\infty \mathfrak{J}_{m,i-1}\, dx_{m-i+1} \qquad (i = 1, \ldots, m-1);$$

on tire de là

$$(11) \qquad \Phi_\chi(p, z) = \sum_{m=1}^\infty z^{m-1} \int_0^\infty \mathfrak{J}_{m,m-1}\, dx_1.$$

La fonction s_m [équ. ($9a$)] peut être représentée sous forme d'une somme d'intégrales multiples de Fourier grâce aux formules A, (13) et ($24a$), où μ, m, x_ν seront respectivement remplacés par $s-1$, $m-1$, $x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu$; pour la quantité ($10a$) on obtient ainsi

$$(12) \qquad \mathfrak{J}_{m,0} = \mathrm{T}_{m-1}^{0,s-1} \exp\left[-px_m + \sum_{\nu=1}^{m-1} z_\nu(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu)\right].$$

Posons maintenant

$$(13) \qquad \pi_n = \exp\left[-px_{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu(x_{n+1} - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu)\right] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et admettons que pour un indice $i \geqq 1$, on ait déjà démontré la formule

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{J}_{m,i-1} = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1} \pi_{m-i} \left(p - \sum_{\nu=1}^{m-i} z_\nu\right) f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{m-i} z_\nu\right) \\ \qquad\qquad\qquad \left[\mathrm{R}\left(p - \displaystyle\sum_1^{m-i} z_\nu\right) > 0\right], \end{array} \right.$$

où les fonctions $f_{i-1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ sont symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$ ainsi qu'holomorphes en $z_1, \ldots, z_\lambda, y$; nous supposons en outre que les $f_{i-1,\lambda}$ satisfont à l'inégalité

$$(15)\quad \begin{cases} |f_{i-1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| < \dfrac{C^{i-1}}{|p-y|} \\ \text{pour}\quad R(p-y) > c, \qquad R(z_\nu) < \dfrac{1}{s}[R(p)-c] \qquad (\nu = 1, \ldots, \lambda), \end{cases}$$

c étant une constante arbitraire telle que $0 < c < R(p)$, et C ne dépendant que de c.

En comparant les équations (14) et (12), on trouve les relations

$$(16)\qquad f_{0,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \frac{\delta_\lambda^0}{p-y} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1),$$

δ_λ^0 étant le symbole de Kronecker.

En effectuant dans (13) les opérations indiquées dans (10 b), on obtient, compte tenu de ce que s_n ne peut prendre que les valeurs 1 et 0, les relations

$$\int_{x_n}^{\infty} \pi_n\, dx_{n+1} = \frac{\pi_{n-1}}{p - \sum\limits_1^n z_\nu} e^{-s_n z_n t_n} = \frac{\pi_{n-1}}{p - \sum\limits_1^n z_\nu} [1 + s_n(e^{-z_n t_n} - 1)]$$

et

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} df(t_n) \int_{x_n}^{\infty} \pi_n\, dx_{n+1} = \frac{\pi_{n-1}}{p - \sum\limits_1^n z_\nu} \Big[1 + s_n\big(\varepsilon(-z_n) - 1\big)\Big] \\ \left[\text{pour } R\left(p - \sum\limits_1^n z_\nu\right) > 0\right]. \end{cases}$$

Nous avons posé ici

$$(18\,a)\qquad \varepsilon(z) = \int_0^{\infty} e^{zt}\, df(t), \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon(0) = \int_0^{\infty} df(t) = 1;$$

nous supposons que cette intégrale converge pour $z = c_0 > 0$, et comme, pour simplifier, la durée moyenne d'une communication sera prise pour unité de temps, nous avons en outre

$$(18\,b)\qquad \varepsilon'(0) = \int_0^{\infty} t\, df(t) = 1.$$

Pour démontrer que $\mathcal{J}_{m,i}$ peut encore être représenté sous la forme (14), introduisons cette expression dans le deuxième membre de (10b); comme les variables réelles x_ν et t_ν ne figurent que dans le facteur π_{m-i}, il vient alors, grâce à (17),

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{J}_{m,i} = &\sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}\,\pi_{m-i-1} f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_{1}^{m-i} z_\nu\right) \\ &\times \left[1 + \mathrm{s}_{m-i}\big(\varepsilon(-z_{m-i}) - 1\big)\right] \\ &\left[\mathrm{R}\left(p - \sum_{1}^{m-i} z_\nu\right) > 0\right]. \end{aligned}\right.$$

Appliquons maintenant la formule A, (33) qui est valable en raison des propriétés admises ici pour les $f_{i-1,\lambda}$, en y remplaçant μ et n par $s-1$ et $m-i$; compte tenu de (18a), on a alors

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{J}_{m,i} = &\sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}\,\pi_{m-i-1} \\ &\times \Bigg[f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_{1}^{m-i-1} z_\nu\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} f_{i-1,\lambda+1}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}, \zeta;\ \sum_{1}^{m-i-1} z_\nu + \zeta\right) \\ &\qquad \times \left[1 + \mathrm{s}_{m-i}\big(\varepsilon(-\zeta) - 1\big)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\Bigg] \\ &\left[\mathrm{R}\left(p - \sum_{1}^{m-i-1} z_\lambda\right) > 0\right] \end{aligned}\right.$$

où nous avons posé, conformément à A (31),

$$(21)\quad f_{i-1,s}(z_1, \ldots, z_s;\ y) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1}\ \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} f_{i-1,\lambda}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ y).$$

Grâce à l'inégalité (15), on a

$$\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} f_{i-1,\lambda+1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta;\ \sum_{1}^{m-i-1} z_\nu + \zeta\right)\frac{d\zeta}{\zeta} = 0$$

$$\left[\text{pour } \mathrm{R}\left(p - \sum_{1}^{m-i-1} z_\nu - \zeta\right) > 0\right],$$

de sorte que (20) prend la forme

$$
(22)\quad \mathfrak{I}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}\pi_{m-i-1}
\times\Bigg[f_{i-1,\lambda}\Bigg(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'};\ \sum_{1}^{m-i-1} z_{\nu'}\Bigg)
- \mathrm{s}_{m-i}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varepsilon(-\zeta)-1}{\zeta}
\times f_{i-1,\lambda+1}\Bigg(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'},\,\zeta;\ \sum_{1}^{m-i-1} z_{\nu}+\zeta\Bigg)d\zeta\Bigg].
$$

Compte tenu de la signification des grandeurs s_{m-i} [(9 a)] et π_{m-i-1} [(13)], nous sommes en mesure d'appliquer ici la formule A, (45), où $\mu_1 = \mu$, n, x_ν, f seront respectivement remplacés par $s-1$, $m-i-1$, $x_{m-i} - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu$, $f_{i-1,\lambda+1}$; on obtient ainsi

$$
(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{I}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}\pi_{m-i-1}
\times\Bigg[f_{i-1,\lambda}\Bigg(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'};\ \sum_{1}^{m-i-1} z_{\nu}\Bigg)
- \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varepsilon(-\zeta)-1}{\zeta}\\
&\qquad\times f_{i-1,\lambda+1}\Bigg(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'},\,\zeta;\ \sum_{1'}^{\lambda'} z_{\nu}+\zeta\Bigg)d\zeta\Bigg]\\
&\left[\mathrm{R}\Bigg(p - \sum_{1}^{m-i-1} z_\nu\Bigg) > 0,\ \mathrm{R}\Bigg(p - \sum_{1}^{\lambda'} z_\nu\Bigg) > 0\right].
\end{aligned}\right.
$$

Donc, $\mathfrak{I}_{m,i}$ peut aussi être représenté sous la forme (14), en posant

$$
(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&(p-y)f_{i,\lambda}(z_1,\,\ldots,\,z_\lambda;\,y) = f_{i-1,\lambda}(z_1,\,\ldots,\,z_\lambda;\,y)
- \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varepsilon(-\zeta)-1}{\zeta}\\
&\qquad\times f_{i-1,\lambda+1}\Bigg(z_1,\,\ldots,\,z_\lambda,\,\zeta;\ \sum_{1}^{\lambda} z_\nu+\zeta\Bigg)d\zeta\\
&\left[\mathrm{R}(p-y) > 0,\ \mathrm{R}\Bigg(p - \sum_{1}^{\lambda} z_\nu\Bigg) > 0;\ \lambda = 0,\,\ldots,\,s-1;\ i = 1,\,2,\,\ldots\right].
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule montre que les $f_{i,\lambda}$ possèdent encore les propriétés admises pour les $f_{i-1,\lambda}$ et qu'en choisissant la constante C de manière appropriée, ils satisfont aussi à l'inégalité (15).

Donc, pour $|z|$ suffisamment petit, les séries de Taylor

$$\mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y; p, z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i f_{i,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; p) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s) \tag{25}$$

convergent, et en ajoutant les équations (24) [ou (21)], multipliées respectivement par z^i, on obtient pour les $\mathcal{F}_\lambda$, à l'aide de (16), les équations intégrales

$$(26\,a)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p - z - y)\mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \\ &\quad = -\frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon(-\zeta) - 1}{\zeta} \mathcal{F}_{\lambda+1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta; \sum_{1}^{\lambda} z_\nu + \zeta\right) d\zeta + \delta_\lambda^0 \\ &\left[\mathrm{R}(p - z - y) > 0,\ \mathrm{R}\left(p - \sum_{1}^{\lambda} z_\nu\right) > 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1\right] \end{aligned} \right.$$

$$(26\,b)\qquad \mathcal{F}_s(z_1, \ldots, z_s; y) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} \mathcal{F}_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y).$$

Comme les deuxièmes membres de $(26\,a)$ sont indépendants de y, on peut poser

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y, p, z) = \frac{1}{p - z - y} \mathcal{G}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z) \\ &\qquad (\lambda = 0, \ldots, s), \end{aligned} \right.$$

les $\mathcal{G}_\lambda$, ainsi que les $f_{i,k}$ et les $\mathcal{F}_\lambda$, étant symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$.

A l'aide des notations

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{L}_\lambda(u_\nu; z) = u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) + \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon(-\zeta) - 1}{\zeta} \frac{u_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta)}{p - z - \sum_{1}^{\lambda} z_\nu - \zeta} d\zeta \\ &\qquad \left[\mathrm{R}\left(p - z - \sum_{1}^{\lambda} z_\nu - \zeta\right) > 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1\right], \\ &\mathcal{L}_s(u_\nu) = \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} u_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}); \end{aligned} \right.$$

où les u_λ sont supposés symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$, les équations (26 *a*), (26 *b*) prennent alors la forme

$$(29) \qquad \mathcal{L}_\lambda(\mathcal{G}_\nu; z) = \delta_\lambda^0 \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \qquad \mathcal{L}_s(\mathcal{G}_\nu) = 0.$$

Pour $i = m$, la formule (14) devient [*voir* A, (23)] :

$$(30) \qquad \mathcal{I}_{m,m-1} = p\, e^{-px_1} f_{m-1,0}(0) \qquad [\mathrm{R}(p) > 0],$$

et en portant cette expression dans (11) on a, grâce aux notations (25) et (27),

$$(31) \qquad \Phi_s(p, z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} f_{m-1,0}(0) = \mathcal{F}_0(0; p, z) = \frac{\mathcal{G}_0(p, z)}{p - z}.$$

Posons maintenant

$$(32) \qquad \Omega_n\left(u(p, z); \frac{n}{\mathfrak{T}}\right) = \frac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathrm{C}_p} \int_{\mathrm{K}_z} \frac{e^{p\mathfrak{T}}}{z^n (p-z)^2} u(p, z)\, dp\, dz$$

d'où résulte en particulier, pour $u = \mathrm{C} = \text{const.}$,

$$(33) \qquad \Omega_n\left(\mathrm{C}; \frac{n}{\mathfrak{T}}\right) = \mathrm{C}.$$

A l'aide de cette notation, on obtient pour la probabilité $\tilde{p}$ d'aboutissement d'un appel, donnée par les équations (3), (4) ($\chi_m = s_m$) et (31),

$$(34) \qquad \tilde{p} = \Omega_n\left(\mathcal{G}_0(p, z); \frac{n}{\mathfrak{T}}\right).$$

Ainsi, le calcul de $\tilde{p}$ se ramène à celui de $\mathcal{G}_0\,(p, z)$ et cette fonction est déterminée par le système d'équations intégrales linéaires (29), [*voir* (28)] dont nous étudierons plus loin la solution pour des deuxièmes membres donnés de manière arbitraire.

Détermination des probabilités $\tilde{p}_a$. — Considérons maintenant les positions que le point x_m peut prendre par rapport à la suite croissante

$$\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+1)}(x_\nu + s_\nu t_\nu) \qquad (a = s, s-1, \ldots, 0).$$

A l'instant x_m, tout au plus s communications peuvent être en cours; on a donc

$$x_m > \max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s+1)}(x_\nu + s_\nu t_\nu)$$

ou

$$(35) \qquad \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s+1)}(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu) = 1.$$

Supposons maintenant que

$$\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+1)}(x_\nu + \mathrm{s}_\nu t_\nu) < x_m < \max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a)}(x_\nu + \mathrm{s}_\nu t_\nu) \qquad (0 \leqq a \leqq s);$$

dans ce cas, exactement a lignes seront occupées à l'instant x_m, et comme la f. c. des nombres x, qui satisfont à l'inégalité $a < x < b$, est $\mathrm{s}(x-a) - \mathrm{s}(x-b)$, on a

$$(36) \quad \begin{cases} \mathrm{s}_{m,a} = \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+1)}(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu) - \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a)}(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu) \\ \qquad (a = 0, \ \ldots, \ s; \ \mathrm{s}\min^{(0)} \equiv 0) \end{cases}$$

pour la f. c. $\mathrm{s}_{m,a}$ de l'événement : le $m^{\text{ième}}$ appel trouve exactement a lignes occupées.

En substituant, dans (4), $\mathrm{s}_{m,a}$ pour χ_m, on obtient la probabilité $\tilde{p}_a$ pour qu'un *appel quelconque* trouve exactement a lignes occupées, le calcul de $\Phi(p, z)$ s'effectuant comme précédemment.

Pour $0 \leqq a \leqq s-1$, on a d'abord [*voir* A, (11) et (13)]

$$(37) \qquad \begin{aligned} \mathrm{s}_{m,a}(x_\nu, t_\nu) &= (\mathrm{S}_{m-1}^{a} - \mathrm{S}_{m-1}^{a-1}) \exp \sum_{\nu=1}^{m-1} z_\nu(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu) \\ &= \mathrm{R}_{m-1}^{a} \exp \sum_{\nu=1}^{m-1} z_\nu(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu); \end{aligned}$$

en utilisant ensuite la formule A, (26 d) où n et $\varkappa$ seront remplacés respectivement par $m-1$ et a, on obtient à l'aide de la notation (13) la formule

$$(38a) \quad \mathcal{J}_{m,0} = e^{-px_m} \mathrm{s}_{m,a} = \sum_{\lambda=a}^{s-1} (-1)^{\lambda-a} \binom{\lambda}{a} \mathrm{T}_{m-1}^{\lambda,s-1} \pi_{m-1} \qquad \left[\binom{\lambda}{a} = \mathrm{C}_\lambda^a\right],$$

qui est de la forme (14), avec

$$(38b) \qquad \begin{cases} f_{0,\lambda}(z_1, \ \ldots, \ z_\lambda; \ y) = (-1)^{\lambda-a} \mathrm{C}_\lambda^a \dfrac{1}{p-y} \\ \qquad (\lambda = 0, \ \ldots, \ s-1; \ 0 \leqq a \leqq s-1). \end{cases}$$

La suite du calcul de $\Phi(p, z)$ reste inchangée sauf que, les équations (38 b) se substituant à (16), le terme δ_λ^0 qui figurait dans les deuxièmes membres de ($26\,a$) et (29) doit être remplacé par $(-1)^{\lambda-a}C_\lambda^a$. En désignant par $\mathcal{G}_{\lambda,a}$ les fonctions qui correspondent aux $\mathcal{G}_\lambda$[(27)], on trouve ainsi, à l'aide des notations (28) et (32),

$$(39)\qquad \tilde{p}_a = \Omega_n\left(\mathcal{G}_{0,a}(p, z);\, \frac{n}{\mathfrak{T}}\right) \qquad (a = 0, \ldots, s-1),$$

$\mathcal{G}_{0,a}$ étant déterminé par les équations

$$(40)\qquad \mathcal{L}_\lambda(\mathcal{G}_{\nu,a};\, z) = (-1)^{\lambda-a}C_\lambda^a \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \qquad \mathcal{L}_s(\mathcal{G}_{\nu,a}) = 0.$$

Comme $\sum_{a=0}^{s-1}(-1)^{\lambda-a}C_\lambda^a = \delta_\lambda^0$, on a $\sum_{a=0}^{s-1}\mathcal{G}_{0,a} = \mathcal{G}_0$, conformément à l'identité évidente

$$\sum_{a=0}^{s-1}\tilde{p}_a = \tilde{p}.$$

Calcul du trafic écoulé en moyenne par le groupe. — La durée des communications écoulées dans un cas particulier

$$X_\nu = x_\nu, \qquad T_\nu = t_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

du lancement de n appels est $\sum_{m=1}^{n} s_m t_m$. Comme s_m [équ. ($9a$)] ne dépend pas de la variable t_m et que $\mathfrak{M}(t_m) = 1$ [en vertu de ($18b$)], on obtient pour la valeur probable de cette somme, à l'aide de ($2a$),

$$\sum_1^n \mathfrak{M}(s_m t_m) = \sum_1^n \mathfrak{M}(s_m)\mathfrak{M}(t_m) = \sum_1^n \mathfrak{M}(s_m) = n\tilde{p}.$$

Par conséquent, la durée des communications écoulées (en moyenne) par unité de temps, c'est-à-dire, le trafic écoulé en moyenne, est égale à

$$(41\,a)\qquad \frac{n}{\mathfrak{T}}\tilde{p}.$$

De la même manière, on voit que la partie du trafic correspondant aux appels qui satisfont à une certaine condition $\mathcal{E}$, de f. c. χ (par exemple, la condition de trouver toutes les s lignes occupées), est égale, en moyenne, à

$$(41\,b)\qquad \frac{n}{\mathfrak{T}}\tilde{p}_\chi.$$

CHAPITRE II.

BLOCAGE TEMPORAIRE DE TOUTES LES LIGNES LIBRES PAR LE DERNIER APPEL ADMIS.

Considérons maintenant un groupe de $s \geqq 2$ lignes avec blocage temporaire. Nous comprenons par là un régime où chaque appel acheminé bloque pendant un certain temps Θ, appelé période d'orientation, toutes les lignes libres du groupe, y compris la sienne; en général, Θ sera une grandeur aleatoire de distribution connue. Seront refusés les appels qui trouvent toutes les s lignes occupées ou qui trouvent les lignes libres du groupe bloquées par le dernier appel admis.

Nous attribuons maintenant au $\nu^{\text{ième}}$ appel, outre son instant d'arrivée X_ν et sa durée de communication T_ν, une période d'orientation Θ_ν et, $\mathcal{F}(t, \theta)$ désignant une fonction de distribution à deux variables données, nous admettons que

$$(42)\qquad \begin{cases} \text{Prob}\{x < X_\nu < x + dx\} = \dfrac{dx}{\mathcal{C}}. \\ \text{Prob}\{t < T_\nu < t + dt;\ \theta < \Theta_\nu < \theta + d\theta\} = d^{(2)}\mathcal{F}(t, \theta)\ (^5). \end{cases}$$

Nous posons en outre

$$(43)\qquad \varepsilon(z_1, z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_1 t + z_2 \theta}\, d^{(2)}\mathcal{F}(t, \theta), \qquad \text{donc}\quad \varepsilon(0, 0) = 1,$$

en admettant que, c désignant une constante positive, cette intégrale converge pour $R(z_1) < c$, $R(z_2) < c$.

Calculons à nouveau, pour un choix particulier $X_\nu = x_\nu$, $T_\nu = t_\nu$, $\Theta_\nu = \theta_\nu$ des variables aléatoires, la f. c. s_m de l'événement : aboutissement du $m^{\text{ième}}$ appel.

Dans le cas où $s_\nu = 1$, le $\nu^{\text{ième}}$ appel occupera dès l'instant $x_\nu + \theta_\nu$ une ligne du groupe. En considérant alors cette ligne comme virtuellement occupée depuis l'instant x_ν, et concluant comme au premier Chapitre, on voit que

$$(44)\qquad \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} \big(x_m - x_\nu - s_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

est la f. c. de l'événement suivant : à l'instant d'arrivée x_m du $m^{\text{ième}}$ appel,

---

(5) Ici et dans la suite, $d^{(2)}\mathcal{F}(t, \theta)$ signifie $d_t d_\theta \mathcal{F}(t, \theta)$.

une ligne au moins est libre (c'est-à-dire, ni réellement ni virtuellement occupée); rappelons que pour $1 \leq m \leq s$, le symbole (44) sera par définition égal à 1.

Mais afin que le groupe soit accessible, en outre la période d'orientation du dernier appel précédent qui a été admis, doit être révolue à l'instant x_m. En raison de la signification des s_ν, cette condition peut être exprimée sous la forme $x_m > \max\limits_{\nu=1,\ldots,m-1} (x_\nu + \mathrm{s}_\nu \theta_\nu)$; donc,

$$(45) \qquad \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(1)} (x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu \theta_\nu)$$

est la f. c. de l'événement : à l'instant x_m, le groupe n'est pas bloqué.

Comme la f. c. de l'intersection de deux ensembles est égale au produit de leurs f. c., s_m est le produit des f. c. (44) et (45), donc

$$(46) \qquad \mathrm{s}_m = \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} \big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big)\, \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(1)} (x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu \theta_\nu).$$

De même,

$$(47) \qquad \mathrm{s}'_m = \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} \big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big)\, [1 - \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(1)} (x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu \theta_\nu)]$$

est la f. c. de l'événement : à l'instant x_m, le groupe est bloqué, une ligne au moins n'étant ni réellement ni virtuellement occupée.

A l'aide des raisonnements qui nous ont conduit à la formule (36), on montre ensuite que

$$(48\,a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{s}_{m,a} = \Big[& \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+1)} \big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big) \\ & - \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a)} \big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big)\Big] \\ & \times \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(1)} (x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu \theta_\nu) \\ & (a = 0, \ldots, s), \end{aligned} \right.$$

et

$$(48\,b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{s}'_{m,a} = \Big[& \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+2)} \big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big) \\ & - \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+1)} \big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\big)\Big] \\ & \times [1 - \mathrm{s} \min_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(1)} (x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu \theta_\nu)] \\ & (a = 0, \ldots, s-1) \end{aligned} \right.$$

sont respectivement les f. c. des événements : le $m^{\text{ième}}$ appel trouve exactement a lignes réellement occupées, le groupe étant accessible (ou bloqué).

Les probabilités correspondant à ces f. c. satisfont aux équations (3) et (4) sous condition d'y remplacer les opérations $\int_0^\infty \dots df(t_\nu)$ par $\int_0^\infty\int_0^\infty \dots dF^{(2)}(t_\nu, \theta_\nu)$; pour calculer par récurrence la fonction $\Phi_\chi(p, z)$ qui correspond à une f. c. quelconque χ_m, on posera donc maintenant

$$(49\,a)\qquad \mathcal{J}_{m,0} = e^{-px_m}\chi_m,$$

$$(49\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{J}_{m,i} = \int_0^\infty\int_0^\infty d^{(2)}\mathcal{F}(t_{m-i}, \theta_{m-i})\int_{x_{m-i}}^\infty \mathcal{J}_{m,i-1}\,dx_{m-i+1} \\ &\qquad (i = 1, \dots, m-1) \end{aligned}\right.$$

et l'équation (11) reste toujours valable.

Calcul de la fonction $\Phi_\chi(p, z)$ pour la f. c. (46). — Déterminons à nouveau la probabilité $\tilde{p}$ pour qu'un appel quelconque aboutisse; on a alors $\chi_m = s_m$ et en représentant les deux facteurs du deuxième membre de (46) à l'aide de A, (13) et (24 a), on obtient

$$(50)\qquad \begin{aligned} \mathcal{J}_{m,0} = e^{-px_m}\,\mathrm{T}_{m-1}^{0,s-1}(z)\exp\sum_{\nu=1}^{m-1} z_\nu\bigl(x_m - x_\nu - s_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\bigr) \\ \times\,\mathrm{T}_{m-1}^{0,0}(\zeta)\exp\sum_{\nu=1}^{m-1}\zeta_\nu(x_m - x_\nu - s_\nu\theta_\nu), \end{aligned}$$

où les opérateurs $\mathrm{T}(z)$ et $\mathrm{T}(\zeta)$ se rapportent respectivement aux variables $z_1, \dots, z_{m-1}$ et $\zeta_1, \dots, \zeta_{m-1}$.

Dans le cas présent de blocage temporaire, nous posons

$$(51)\qquad \begin{aligned} \pi_n = \pi_n(z_\nu, \zeta_\nu) = \exp\Biggl[-px_{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\bigl(x_{n+1} - x_\nu - s_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\bigr) \\ + \sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu(x_{n+1} - x_\nu - s_\nu\theta_\nu)\Biggr] \end{aligned}$$

et

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{J}_{m,i-1} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}(z)\,\mathrm{T}_{m-i}^{0,0}(\zeta)\,\pi_{m-i} \\ \times\left(p - \sum_{\nu=1}^{m-i}(z_\nu + \zeta_\nu)\right) f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \dots, z_{\lambda'};\ \sum_{\nu=1}^{m-i}(z_\nu + \zeta_\nu)\right) \\ \left[\mathrm{R}\left(p - \sum_1^{m-i}(z_\nu + \zeta_\nu)\right) > 0\right], \end{aligned}\right.$$

en admettant pour les fonctions $f_{i-1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ les mêmes propriétés que précédemment; grâce à (50), la dernière formule est valable pour $i=1$, avec les valeurs (16) des $f_{0,\lambda}$.

Au lieu de (17), nous obtenons maintenant, à l'aide de la notation (43), la relation

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty d^{(2)}\mathcal{F}(t_n, \theta_n) \int_{x_n}^\infty \pi_n \, dx_{n+1} \\ &\quad = \frac{\pi_{n-1}}{p - \sum_1^n (z_\nu + \zeta_\nu)} \Big[1 + s_n\big(\varepsilon(-z_n, -z_n - \zeta_n) - 1\big)\Big] \\ &\qquad\qquad \left[\mathrm{R}\left(p - \sum_1^n (z_\nu + \zeta_\nu)\right) > 0\right] \end{aligned}\right.$$

qui nous permet d'effectuer dans $\mathcal{J}_{m,i-1}$ les opérations indiquées dans (49 *b*); il vient ainsi

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{J}_{m,i} = &\sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}(z)\mathrm{T}_{m-i}^{0,0}(\zeta)\pi_{m-i-1} f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{m-i}(z_\nu + \zeta_\nu)\right) \\ &\times \Big[1 + s_{m-i}\big(\varepsilon(-z_{m-i}, -z_{m-i} - \zeta_{m-i}) - 1\big)\Big] \\ &\qquad\qquad \left[\mathrm{R}\left(p - \sum_1^{m-i}(z_\nu + \zeta_\nu)\right) > 0\right]. \end{aligned}\right.$$

Appliquons à cette expression, considérée en tant que somme de la forme $\sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}(z) f_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; z_1, \ldots, z_{m-i})$, la formule A, (33) (en y utilisant la lettre ξ au lieu de ζ), et tenons compte de ce que [*voir* A, (9), (11) et (24 *a*)]

$$\mathrm{T}_{m-i}^{0,0}(\zeta) = \mathrm{S}_{m-i}^{0}(\zeta) = \prod_{\nu=1}^{m-i} \mathrm{C}_\nu(\zeta) = \mathrm{T}_{m-i-1}^{0,0}(\zeta)\,\mathrm{C}_{m-i}(\zeta),$$

avec

$$\mathrm{C}_{m-i}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \cdots \frac{d\zeta_{m-i}}{\zeta_{m-i}};$$

en écrivant C_ζ et ζ au lieu de $C_{m-i}(\zeta)$ et ζ_{m-i}, nous obtenons alors

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{J}_{m,i} =& \sum_{\lambda=0}^{s-1} T^{\lambda, s-1}_{m-i-1}(z)\, T^{0,0}_{m-i-1}(\zeta)\, C_\zeta \pi_{m-i-1} \\ &\times \left\{ f_{i-i,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)+\zeta\right)\left[1+s_{m-i}\big(\varepsilon(0,-\zeta)-1\big)\right]\right. \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} f_{i-1,\lambda+1}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}, \xi;\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)+\xi+\zeta\right) \\ &\quad\quad \left.\times\left[1+s_{m-i}\big(\varepsilon(-\xi, -\xi-\zeta)-1\big)\right]\frac{d\xi}{\xi}\right\}, \end{aligned}\right.$$

$f_{i-1,s}$ étant donné par l'équation (21).

Grâce à (15), on a

$$C_\zeta f_{i-1,\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)+\zeta\right) = f_{i-1,\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)\right),$$

$$\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} f_{i-1,\lambda+1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda, \xi;\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)+\xi+\zeta\right)\frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

de sorte que (55) prend la forme

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{J}_{m,i} =& \sum_{\lambda=0}^{s-1} T^{\lambda, s-1}_{m-i-1}(z)\, T^{0,0}_{m-i-1}(\zeta)\, \pi_{m-i-1} \\ &\times\left[f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)\right)\right. \\ &\quad + s_{m-i} C_\zeta\big(\varepsilon(0,-\zeta)-1\big) f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)+\zeta\right) \\ &\quad - s_{m-i} C_\zeta \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\big(\varepsilon(-\xi,-\xi-\zeta)-1\big) \\ &\quad\quad \left.\times f_{i-1,\lambda+1}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}, \xi;\ \sum_1^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)+\xi+\zeta\right)\frac{d\xi}{\xi}\right]. \end{aligned}\right.$$

En vertu de la formule A, (45) qui sera appliquée maintenant aux termes multipliés par s_{m-i}, séparément pour chacun des deux facteurs de l'expression (46), les sommes $\sum_1^{m-i-1} z_\nu$ et $\sum_1^{m-i-1} \zeta_\nu$ se transforment respectivement en $\sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu$ et en zéro, si bien que (56) devient

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{J}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} & \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}(z)\mathrm{T}_{m-i-1}^{0,0}(\zeta)\pi_{m-i-1} \\ & \times\left[f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{1}^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)\right)\right. \\ & + \mathrm{C}_\zeta\big(\varepsilon(0,-\zeta)-1\big)f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu+\zeta\right) \\ & - \mathrm{C}_\zeta\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\big(\varepsilon(-\xi,-\xi-\zeta)-1\big) \\ & \left.\times f_{i-1,\lambda+1}\left(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'},\ \xi;\ \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu+\xi+\zeta\right)\frac{d\xi}{\xi}\right] \\ & \left[\mathrm{R}\left(p-\sum_{1}^{m-i-1}(z_\nu+\zeta_\nu)\right)>0\right]. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, $\mathfrak{J}_{m,i}$ est transformé en une expression de la forme (52), les $f_{i,\lambda}$ étant donnés par la formule

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} & (p-y)f_{i,\lambda}(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ y) \\ & \quad = f_{i-1,\lambda}(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ y) \\ & \quad + \mathrm{C}_\zeta\big(\varepsilon(0,-\zeta)-1\big)f_{i-1,\lambda}\left(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ \sum_{1}^{\lambda} z_\nu+\zeta\right) \\ & \quad - \mathrm{C}_\zeta\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\frac{\varepsilon(-\xi,-\xi-\zeta)-1}{\xi} \\ & \quad \times f_{i-1,\lambda+1}\left(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda,\ \xi;\ \sum_{1}^{\lambda} z_\nu+\xi+\zeta\right)d\xi \\ & \quad [\mathrm{R}(p-y)>0;\ \lambda=0,\ \ldots,\ s-1]. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas présent, les fonctions $\mathcal{F}_\lambda$, définies par (25), satisfont, outre à (26 *b*), aux équations

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} & (p-z-y)\mathcal{F}_\lambda(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ y) \\ & \quad = z\,\mathrm{C}_\zeta\big(\varepsilon(0,-\zeta)-1\big)\mathcal{F}_\lambda\left(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ \sum_{1}^{\lambda} z_\nu+\zeta\right) \\ & \quad - \frac{z}{2\pi i}\mathrm{C}_\zeta\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\frac{\varepsilon(-\xi,-\xi-\zeta)-1}{\xi} \\ & \quad \times \mathcal{F}_{\lambda+1}\left(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda,\ \xi;\ \sum_{1}^{\lambda} z_\nu+\xi+\zeta\right)d\xi+\delta_\lambda^0 \\ & \quad [\mathrm{R}(p-y)>0;\ \lambda=0,\ \ldots,\ s-1], \end{aligned}\right.$$

dont les deuxièmes membres ne contiennent pas y. On peut donc à nouveau introduire les fonctions $\mathcal{G}_\lambda[(27)]$ grâce auxquelles (59) prend la forme

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) = {} & \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{\varepsilon(0, -\zeta) - 1}{\zeta} \, \frac{\mathcal{G}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda)}{p - z - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta}\, d\zeta \\ & - \frac{z}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} d\zeta \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\varepsilon(-\xi, -\xi-\zeta) - 1}{\zeta\xi} \\ & \times \frac{\mathcal{G}_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_\lambda, \xi)}{p - z - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi - \zeta}\, d\xi + \delta_\lambda^0 \\ & (\lambda = 0, \ldots, s-1), \end{aligned}\right.$$

la dernière équation (29) restant en outre valable.

En remplaçant enfin $\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \ldots d\zeta$ respectivement par les résidus en $p - z - \sum_1^\lambda z_\nu$ et en $p - z - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi$, on obtient le système d'équations intégrales

$$(61)\qquad L_\lambda(\mathcal{G}_\nu; z) = \delta_\lambda^0 \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \qquad L_s(\mathcal{G}_\nu) = 0;$$

nous avons posé ici

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} L_\lambda(u_\nu; z) \equiv {} & \left(1 - z\,\frac{\varepsilon\left(0, \sum_1^\lambda z_\nu + z - p\right) - 1}{p - z - \sum_1^\lambda z_\nu}\right) u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) \\ & + \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\varepsilon\left(-\xi, \sum_1^\lambda z_\nu + z - p\right) - 1}{\xi} \, \frac{u_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_\lambda, \xi)}{p - z - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi}\, d\xi \\ & \left[R\left(p - z - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right) > 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1 \right], \\ L_s(u_\nu) \equiv {} & \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} u_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}). \end{aligned}\right.$$

Les équations (11), (30) et (31) restent valables; en raison de (3), la probabilité $\tilde{p}$ d'aboutissement d'un appel quelconque est donc à nouveau donnée par les formules (34) et (32), $\mathcal{G}_0(p, z)$ étant déterminé par le système d'équations intégrales (61) et (62).

Détermination des probabilités $\tilde{p}_a$ et $\tilde{p}'_a$. — On procédera de la même manière pour déterminer la valeur probable de la f. c. $s_{m,a}$ [(48 a)], c'est-à-dire, la probabilité $\tilde{p}_a$ pour qu'un appel quelconque trouve exactement a lignes occupées, le groupe étant accessible.

En représentant le premier facteur de (48a) selon (36), (37) et (38a) et le second facteur selon A, (13) et (24a), on obtient, à l'aide de la notation (51),

$$(63)\qquad \mathcal{J}_{m,0} = e^{-px_m}\,s_{m,a} = \sum_{\lambda=a}^{s-1}(-1)^{\lambda-a}\binom{\lambda}{a}T_{m-1}^{\lambda,s-1}(z)\,T_{m-1}^{0,0}(\zeta)\,\pi_{m-1}$$
$$(0 \leqq a \leqq s-1)$$

donc, dans le cas présent, les $f_{0,\lambda}$ qui figurent dans (52) (pour $i=1$), sont données par la formule (38b) [au lieu de (16)], tandis que la suite du calcul reste inchangée. On arrive ainsi aux équations [*voir* (62) et (32)]

$$(64)\qquad L_\lambda(\mathcal{G}_{\nu,a};\, z) = (-1)^{\lambda-a}C_\lambda^a \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \qquad L_s(\mathcal{G}_{\nu,a}) = 0$$
$$(a = 0, \ldots, s-1),$$

et

$$(65)\qquad \tilde{p}_a = \Omega_n\left(\mathcal{G}_{0,a}(p, z);\, \frac{n}{\mathfrak{C}}\right) \qquad (a = 0, \ldots, s-1),$$

et comme précédemment, on peut vérifier l'identité $\sum_{a=0}^{s-1}\tilde{p}_a = \tilde{p}$.

En posant enfin, dans (11) et (49a), $\chi_m = s'_{m,a}$ [équ. (48 b)], nous obtiendrons la probabilité $\tilde{p}'_a$ pour qu'un appel quelconque trouve exactement a lignes occupées, le groupe étant bloqué. A l'aide de (36), (37), (38a), (51) et de A, (13) et (24a), on trouve dans ce cas

$$(66)\qquad \mathcal{J}_{m,0} = e^{-px_m}s'_{m,a} = \sum_{\lambda=a+1}^{s-1}(-1)^{\lambda-a-1}\binom{\lambda}{a+1}T_{m-1}^{\lambda,s-1}(z)\,\pi_{m-1}(z, 0)$$
$$- \sum_{\lambda=a+1}^{s-1}(-1)^{\lambda-a-1}\binom{\lambda}{a+1}T_{m-1}^{\lambda,s-1}(z)\,T_{m-1}^{0,0}(\zeta)\,\pi_{m-1}(z, \zeta).$$
$$(a = 0, \ldots, s-2).$$

Nous poserons ici

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{J}_{m,i-1} = & \sum_{\lambda=a+1}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}(z)\pi_{m-i}(z,\mathrm{o})(-\mathrm{I})^{\lambda-a-1}\binom{\lambda}{a+\mathrm{I}}\frac{\mathrm{I}}{\left(p-\sum_{1}^{m-i} z_\nu\right)^{i-1}} \\
& +\sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}(z)\mathrm{T}_{m-i}^{0,0}(\zeta)\pi_{m-i}(z;\zeta) \\
& \times\left(p-\sum_{1}^{m-i}(z_\nu+\zeta_\nu)\right) f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_{1}^{m-i}(z_\nu+\zeta_\nu)\right) \\
& \left[\mathrm{R}\left(p-\sum_{1}^{m-i} z_\nu\right)>\mathrm{o},\ \mathrm{R}\left(p-\sum_{1}^{m-i}(z_\nu+\zeta_\nu)\right)>\mathrm{o};\ i=\mathrm{I},\ldots,m\right],
\end{aligned}\right.$$

en admettant pour les $f_{i-1,\lambda}$ les mêmes propriétés que précédemment; en comparant les deux dernières formules on voit alors que les $f_{0,\lambda}$ ont la valeur $(-\mathrm{I})^{\lambda-a}\binom{\lambda}{a+\mathrm{I}}$.

On trouve ensuite, à l'aide de A, (31), (33) et (45), que l'opération (49*b*) transforme la première somme de (67) en

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned}
& \sum_{\lambda=a+1}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}(z)\pi_{m-i-1}(z,\mathrm{o})(-\mathrm{I})^{\lambda-a-1}\binom{\lambda}{a+\mathrm{I}}\frac{\mathrm{I}}{\left(p-\sum_{1}^{m-i-1} z_\nu\right)^{i}} \\
& -\sum_{\lambda=a}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}(z)\mathrm{T}_{m-i-1}^{0,0}(\zeta)\pi_{m-i-1}(z,\zeta) \\
& \times(-\mathrm{I})^{\lambda-a-1}\binom{\lambda+\mathrm{I}}{a+\mathrm{I}}\mathrm{C}'_{\xi}\frac{\varepsilon(-\xi,-\xi)-\mathrm{I}}{\left(p-\sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu-\xi\right)^{i}},
\end{aligned}\right.$$

tandis que la deuxième somme de (67) se transforme comme l'expression (52).

Par conséquent il faut ajouter maintenant, dans le deuxième membre de la $\lambda^{\text{ième}}$ formule de récurrence (58), le terme

$$(-\mathrm{I})^{\lambda-a}\binom{\lambda+\mathrm{I}}{a+\mathrm{I}}\mathrm{C}'_{\xi}\frac{\varepsilon(-\xi,-\xi)-\mathrm{I}}{\left(p-\sum_{1}^{\lambda} z_\nu-\xi\right)^{i}}\qquad\left[\mathrm{R}\left(p-\sum_{1}^{\lambda} z_\nu-\xi\right)>\mathrm{o}\right],$$

et dans le deuxième membre des $\lambda^{\text{ièmes}}$ équations (59), (60) et (61) figurera [*voir* (43)] le terme supplémentaire

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^{\lambda-a}\binom{\lambda+1}{a+1}\sum_{i=1}^{\infty} z^i C'_\xi \frac{\varepsilon(-\xi,-\xi)-1}{\left(p-\sum_1^{\lambda} z_\nu-\xi\right)^i} \\ &= z(-1)^{\lambda-a}\binom{\lambda+1}{a+1} C'_\xi \frac{\varepsilon(-\xi,-\xi)-1}{p-z-\sum_1^{\lambda} z_\nu-\xi} \\ &= z(-1)^{\lambda-a}\binom{\lambda+1}{a+1}\left[\frac{1-\varepsilon(-x,-x)}{x}\right]_{x=p-z-\sum_1^{\lambda} z_\nu} \\ &\qquad (\lambda=0,\ \ldots,\ s-1). \end{aligned}\right.$$

Pour les fonctions $\mathcal{G}'_{\lambda,a}$ qui correspondent ici aux $\mathcal{G}_\lambda$ [équ. (27)] nous obtenons ainsi, à l'aide de la notation

$$(70)\qquad \varphi(x) = \frac{1-\varepsilon(-x,-x)}{x},$$

les équations

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} &L_\lambda(\mathcal{G}'_{\nu,a};\, z) = (-1)^{\lambda-a} C_\lambda^{a+1} + (-1)^{\lambda-a} C_{\lambda+1}^{a+1} z\,\varphi\left(p-z-\sum_1^{\lambda} z_\nu\right) \\ &\qquad (\lambda=0,\ \ldots,\ s-1); \\ &L_s(\mathcal{G}'_{\nu,a}) = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour en déduire la valeur de $\tilde{p}'_a$, posons, dans (67), $i=m$; il vient [*voir* (51) et A, (23)]

$$\mathcal{J}_{m,m-1} = p\, e^{-px_1} f_{m-1,0}(0)$$

et en substituant ceci dans (11), on a

$$\Phi(p,z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} f_{m-1,0}(0) = \mathcal{F}_0(0;\, p,\, z) = \frac{\mathcal{G}'_{0,a}(p,z)}{p-z}.$$

En portant cette expression dans l'équation (3), on a, grâce à (34),

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} &\tilde{p}'_a = \Omega_n\left(\mathcal{G}'_{0,a}(p,z);\, \frac{n}{\mathfrak{T}}\right) \\ &(a=0,\ \ldots,\ s-2). \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir ensuite la probabilité $\tilde{p}_s$, espérance mathématique de $s_{m,s}$, on a qu'à modifier légèrement les derniers calculs.

Pour $a = s$, il vient dans (48a), en vertu du raisonnement qui nous a conduit à (35),

$$\underset{\nu=1,\ldots,m-1}{\mathrm{s}\min}^{(s+1)}\Big(x_m - x_\nu - \mathrm{s}_\nu(t_\nu + \theta_\nu)\Big) = 1. \tag{73}$$

Afin de représenter les $\mathcal{I}_{m,i-1}$, on remplacera donc la première somme qui figure dans le deuxième membre de (67), par

$$T^{0,0}_{m-i}(\zeta)\,\pi_{m-i}(0,\zeta)\left(p - \sum_1^{m-i}\zeta_\nu\right)^{1-i}.$$

Ainsi, on obtient les formules

$$\tilde{p}_s = 1 - \Omega_n\left(\mathcal{G}_{0,s}(p,z);\, \frac{n}{\mathfrak{F}}\right), \tag{74}$$

$$\left\{\begin{aligned} &L_\lambda(\mathcal{G}_{\nu,s};\, z) = \delta^0_\lambda\, \frac{p - z\,\varepsilon(0,\, z-p)}{p-z} \qquad (\lambda = 0,\ldots,s-1),\\ &L_s(\mathcal{G}_{\nu,s}) \quad = 0. \end{aligned}\right. \tag{75}$$

Toutes les autres probabilités étant désormais connues, on peut enfin calculer $\tilde{p}'_{s-1}$ au moyen de l'équation

$$\tilde{p}'_{s-1} = 1 - \sum_0^s \tilde{p}_a - \sum_0^{s-2}\tilde{p}'_a = 1 - \tilde{p} - \tilde{p}_s - \sum_0^{s-2}\tilde{p}'_a. \tag{76}$$

CHAPITRE III.

CONSTRUCTION DE DIFFÉRENTES FONCTIONS GÉNÉRATRICES DE PROBABILITÉS.

La méthode utilisée ici permet aussi de traiter des problèmes plus complexes. Revenant aux groupes sans blocage, cherchons par exemple la probabilité $\tilde{p}^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots$) pour qu'un appel ainsi que le $j^{\text{ième}}$ appel précédent aboutissent. On obtiendra $\tilde{p}^{(j)}$ en substituant dans (3) et (4) pour χ_m la f. c. de cet événement qui est évidemment égale à $\mathrm{s}_m \mathrm{s}_{m-j}$ pour $m \geqq j+1$, et à 0 pour $m \leqq j$.

Il vient donc

$$(77) \qquad \tilde{p}^{(j)} = \frac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_z} \frac{e^{p\mathfrak{T}}}{z^{n-j}(p-z)} \Phi^{(j)}(p, z)\, dp\, dz,$$

où nous avons posé

$$(78) \qquad \Phi^{(j)}(p, z) = \sum_{m=j+1}^{\infty} z^{m-j-1} \overline{e^{-px_m} s_m s_{m-j}} \qquad (j = 0, 1, \ldots; \Phi^{(0)} \equiv \Phi_{s_m}).$$

En posant, en outre, conformément à ($10a$) et ($10b$),

$$(79) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{J}^{(j)}_{m,0} = e^{-px_m} s_m s_{m-j}, \qquad \mathfrak{J}^{(j)}_{m,i} = \displaystyle\int_0^{\infty} df(t_{m-i}) \int_{x_{m-i}}^{\infty} \mathfrak{J}^{(j)}_{m,i-1}\, dx_{m-i+1} \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, m-1) \end{array} \right.$$

on a pour la série (78)

$$(80) \qquad \Phi^{(j)} = \sum_{m=j+1}^{\infty} z^{m-j-1} \int_0^{\infty} \mathfrak{J}^{(j)}_{m,m-1}\, dx_1.$$

Comme s_{m-j} ne dépend pas des variables $x_{m-j+1}, x_{m-j+2}, \ldots, t_{m-j}, t_{m-j+1}, \ldots$, on a

$$(81) \qquad \mathfrak{J}^{(j)}_{m,i} = s_{m-j} \mathfrak{J}_{m,i} \qquad (\text{pour } 0 \leqq i \leqq j),$$

$\mathfrak{J}_{m,i}$ désignant à nouveau la quantité définie par ($10a$) et ($10b$) pour $\chi_m = s_m$. Pour $i = j$, on a donc, à l'aide de (14)

$$(82) \qquad \mathfrak{J}^{(j)}_{m,j} = s_{m-j} \sum_{\lambda=0}^{s-1} T^{\lambda, s-1}_{m-j-1} \pi_{m-j-1}\left(p - \sum_1^{m-j-1} z_\nu\right) f_{j,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{m-j-1} z_\nu\right)$$

les valeurs initiales $f_{0,\lambda}$ étant données par (16); en utilisant ensuite [comme pour transformer l'équ. (22)] la formule A, (45), nous obtenons

$$(83) \qquad \mathfrak{J}^{(j)}_{m,j} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} T^{\lambda, s-1}_{m-j-1} \pi_{m-j-1}\left(p - \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right) f_{j,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right).$$

Posons maintenant

$$(84) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{J}^{(j)}_{m,i} = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{s-1} T^{\lambda, s-1}_{m-i-1} \pi_{m-i-1}\left(p - \sum_1^{m-i-1} z_\nu\right) f^{(j)}_{i-j,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{m-i-1} z_\nu\right) \\ \qquad\qquad (i = j, \ldots, m-1); \end{array} \right.$$

pour $i = j$, on a alors les équations

$$(85)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p-y) f_{0,\lambda}^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \left(p - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f_{j,\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right) \\ &\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \end{aligned} \right.$$

tandis que pour $i > j$, les $f_{i-j,\lambda}^{(j)}$ se déduisent des $f_{i-j-1,\lambda}^{(j)}$ au moyen des formules (24) et (21). On obtient donc pour les fonctions

$$(86)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}_\lambda^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z) &= (p-z-y)\,\mathcal{F}_\lambda^{(j)} \\ &= (p-z-y) \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu f_{\nu,\lambda}^{(j)}(z_1, \ldots z_\lambda; y) \\ &\qquad (\lambda = 0, \ldots, s), \end{aligned} \right.$$

les équations intégrales

$$(87)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{G}_\nu^{(j)}; z) = \left(p - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f_{j,\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right) \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \\ &\mathcal{L}_s(\mathcal{G}_\nu^{(j)}) = 0, \end{aligned} \right.$$

dont les deuxièmes membres $f_{j,\lambda}$ sont déterminés par (25), (27) et (29).

Portons ensuite l'expression $\mathcal{J}_{m,m-1}^{(j)} = pe^{-px_1} f_{m-j-1,0}^{(j)}(0)$ qui résulte de (84) dans l'équation (80); il vient

$$(88)\quad \Phi^{(j)}(p, z) = \mathcal{F}_0^{(j)}(0; p, z) = \frac{1}{p-z}\,\mathcal{G}_0^{(j)}(p, z)$$

et en introduisant cette expression dans (77), on a [*voir* (32)]

$$(89)\quad \tilde{p}^{(j)} = \Omega_n\left[z^j \mathcal{G}_0^{(j)}(p, z); \frac{n}{\mathfrak{T}}\right] \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Donc, le calcul de $\tilde{p}^{(j)}$ se ramène à la résolution des équations (87).

Formons maintenant, à l'aide d'une variable complexe z' de module suffisamment petit, les séries

$$(90)\quad \Gamma_\lambda^{(1)}(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z; z') = \sum_{j=0}^{\infty} z'^j \mathcal{G}_\lambda^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s);$$

en vertu des équations (87), (25) et (27), ces fonctions satisfont aux équations

$$(91)\quad \begin{cases} \left(\Gamma_\nu^{(1)}(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z; z'); z\right) = \dfrac{p - \sum\limits_1^\lambda z_\nu}{p - \sum\limits_1^\lambda z_\nu - z'} \mathcal{G}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z') \\ \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \\ \mathcal{L}_s(\Gamma_\nu^{(1)}) = 0 \end{cases}$$

et, d'autre part, on tire de (89) et (90) (pour $\lambda = 0$) la relation

$$(92)\quad \sum_{j=0}^{\infty} z'^j \tilde{p}^{(j)} = \Omega_n\left[\Gamma_0^{(1)}(p, z; zz'); \frac{n}{\mathfrak{C}}\right];$$

ainsi le calcul de la fonction génératrice des probabilités $\tilde{p}^{(j)}$ est ramené à la résolution des systèmes d'équations intégrales (29) (avec z' au lieu de z) et (91).

Désignons maintenant par $\tilde{p}^{(j,k)}$ $(j, k \geqq 0)$ la probabilité pour qu'un appel ainsi que les $j^{\text{ième}}$ et $(j+k)^{\text{ième}}$ appels précédents aboutissent et soient z' et z'' deux variables complexes. On obtient de la même façon que précédemment la formule

$$(93)\quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z''^j z'^k \tilde{p}^{(j,k)} = \Omega_n\left[\Gamma_0^{(2)}(p, z; zz', zz''); \frac{n}{\mathfrak{C}}\right],$$

où $\Gamma_0^{(2)}$ est déterminé par les trois systèmes d'équations

$$(94\,a)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_\lambda\left(\Gamma_\nu^{(2)}(z_1, \ldots, z_\nu; p, z; z', z''); z\right) \\ \quad = \dfrac{p - \sum\limits_1^\lambda z_\nu}{p - \sum\limits_1^\lambda z_\nu - z'} \Gamma_\lambda^{(1)}(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z'; z'') \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \\ \mathcal{L}_s(\Gamma_\nu^{(2)}) = 0, \end{cases}$$

$$(94\,b)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_\lambda\left(\Gamma_\nu^{(1)}(z_1, \ldots, z_\nu; p, z'; z''); z'\right) \\ \quad = \dfrac{p - \sum\limits_1^\lambda z_\nu}{p - \sum\limits_1^\lambda z_\nu - z''} \mathcal{G}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z'') \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \\ \mathcal{L}_s(\Gamma_\nu^{(1)}) = 0; \end{cases}$$

$$(94\,c)\quad \mathcal{L}_\lambda\left(\mathcal{G}_\nu(z_1, \ldots, z_\nu; p, z''); z''\right) = \delta_\lambda^0 \quad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \qquad \mathcal{L}_s(\mathcal{G}_\nu) = 0.$$

Finalement, nous cherchons les probabilités

$$p_{a,b}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \ldots; 0 \leqq a, b \leqq s-1)$$

pour qu'un appel quelconque et le $j^{\text{ième}}$ appel précédent trouvent respectivement a et b lignes occupées.

La *f. c.* de cet événement est égale à $s_{m,a} s_{m-j,b}$ pour $m \geqq j+1$ et à 0 pour $m \leqq j$; donc pour le calcul de $\tilde{p}_{a,b}^{(j)}$, les équations (77) à (82) restent valables à condition d'y remplacer s_m et s_{m-j} respectivement par $s_{m,a}$ et $s_{m-j,b}$ et de prendre comme valeurs initiales des $f_{j,\lambda}$ [équ. (82)] les grandeurs (38 b).

Au lieu de (82) on obtient ainsi, à l'aide de (36), la relation

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{J}_{m,j}^{(j)} = {} & \sum_{\lambda=0}^{s-1} T_{m-j-1}^{\lambda,s-1} \pi_{m-j-1}\left(p - \sum_{1}^{m-j-1} z_\nu\right) \\ & \times f_{j,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1}^{m-j-1} z_\nu\right) \\ & \times \Big[\underset{\nu=1,\ldots,m-j-1}{\mathrm{s} \quad \min{}^{(b+1)}} (x_{m-j} - x_\nu - s_\nu t_\nu) \\ & \quad - \underset{\nu=1,\ldots,m-j-1}{\mathrm{s} \quad \min{}^{(b)}} (x_{m-j} - x_\nu - s_\nu t_\nu)\Big], \end{aligned} \right.$$

qui, grâce à la formule A, (45) où μ, μ_1, n, x_ν seront remplacés respectivement par b (ou $b-1$), $s-1$, $m-j-1$, $x_{m-j} - x_\nu - s_\nu t_\nu$, se transforme en

$$(96) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_{m,j}^{(j)} = {} & \sum_{\lambda=0}^{b} \left[T_{m-j-1}^{\lambda,b} - T_{m-j-1}^{\lambda,b-1}\right] \pi_{m-j-1}\left(p - \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right) \\ & \times f_{i,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right). \end{aligned}$$

Représentons maintenant les opérateurs $T_{m-j-1}^{\lambda,b} - T_{m-j-1}^{\lambda,b-1}$, à l'aide de A, (26 c) où n, $\varkappa$, μ seront remplacés respectivement par $m-j-1$, b, $s-1$, sous forme de sommes d'opérateurs $T_{m-j-1}^{\lambda',s-1}$; on a ainsi

$$(97) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_{m,j}^{(j)} = {} & \sum_{\lambda=b}^{s-1} T_{m-j-1}^{\lambda,s-1} \pi_{m-j-1} (-1)^{\lambda-b} \sum_{\tau=0}^{b} C_{\lambda-\tau}^{b-\tau} \sum_{1'',\ldots,\tau''=1'}^{\lambda'} \left(p - \sum_{1''}^{\tau''} z_\nu\right) \\ & \times f_{j,\tau}\left(z_{1''}, \ldots z_{\tau''}; \sum_{1''}^{\tau''} z_\nu\right). \end{aligned}$$

En admettant pour $\mathcal{J}^{(j)}_{m,i}(i=j, \ldots, m-1)$ l'équation (84), on a maintenant pour les $f^{(j)}_{0,\lambda}$ les relations

$$(98) \quad \begin{aligned} &(p-y)f^{(j)}_{0,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \\ &= (-1)^{\lambda-b}\sum_{\tau=0}^{b} C^{b-\tau}_{\lambda-\tau} \sum_{1',\ldots,\tau'=1}^{\lambda} \left(p-\sum_{1'}^{\tau'} z_\nu\right) f_{j,\tau}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\tau'}; \sum_{1'}^{\tau'} z_\nu\right); \end{aligned}$$

par contre, les $f^{(j)}_{i,\lambda}(i=1, 2, \ldots)$ se déduisent des $f^{(j)}_{i-1,\lambda}$ au moyen de (24) et (21).

La suite du calcul reste inchangée sauf que les deuxièmes membres des équations (87) et (91) doivent être modifiés conformément à (98). On obtient ainsi pour la fonction génératrice des $\tilde{p}^{(j)}_{a,b}$ la formule

$$(99) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} z'^j \tilde{p}^{(j)}_{a,b} = \Omega_n\left[\Gamma_{0;a,b}(p, z; zz'); \frac{n}{\mathfrak{T}}\right],$$

$\Gamma_{0;a,b}$ étant déterminé par les équations

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{L}_\lambda\big(\Gamma_{\nu;a,b}(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z; z'); z\big) \\ &= (-1)^{\lambda-b}\sum_{\tau=0}^{b} C^{b-\tau}_{\lambda-\tau} \sum_{1',\ldots,\tau'=1}^{\lambda} \frac{p-\sum_{1'}^{\tau'} z_\nu}{p-\sum_{1'}^{\tau'} z_\nu - z'} \mathcal{G}_{\tau,a}(z_{1'}, \ldots, z_{\tau'}; p, z') \\ &\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \\ &\qquad \mathcal{L}_s(\Gamma_{\nu;a,b}) = 0, \end{aligned} \right.$$

tandis que les $\mathcal{G}_{\lambda,a}$ satisfont aux équations (40) (avec z' au lieu de z).

Les formules (91), (92), (93), ($94\,a-b$), (99), (100), écrites avec L_λ [équ. (62)] au lieu de $\mathcal{L}_\lambda$, restent valables pour des systèmes avec blocage temporaire, et d'autres probabilités qu'on peut définir pour ces systèmes pourront être calculées sans peine sur le modèle des raisonnements de ce Chapitre.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES.

Tous les problèmes de probabilité concernant des groupes de lignes sans blocage que nous avons traités ici nécessitent le calcul de certaines fonctions $u_0 = u_0(p, z)$ satisfaisant à des systèmes d'équations intégrales de la forme

$$\text{(101 }a\text{)} \quad \left\{ \begin{aligned} & u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) + \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\varepsilon(-\zeta)-1}{\zeta} \\ & \times \frac{u_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta)}{p - z - \sum\limits_{1}^{\lambda} z_\nu - \zeta}\, d\zeta = c_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda;\, p) \\ & \left[\mathrm{R}\left(p - z - \sum_{1}^{\lambda} z_\nu - \zeta\right) > 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1 \right], \end{aligned} \right.$$

$$\text{(101 }b\text{)} \qquad \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} u_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) = 0,$$

dont les deuxièmes membres c_λ sont supposés connus.

Admettons comme précédemment que $\varepsilon(z)$ est holomorphe pour

$$\text{(102 }a\text{)} \qquad \mathrm{R}(z) < c_0,$$

c_0 étant une constante positive, et soit

$$\text{(102 }b\text{)} \qquad \mathrm{R}(p) > -c_0.$$

On montre alors au moyen de la méthode des approximations successives que, $r_0 > 0$ désignant une quantité suffisamment petite, ces équations ont une solution unique, dont les composantes $u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda;\, p, z)$ sont symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$ ainsi qu'holomorphes et bornées dans le domaine

$$\text{(103)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{R}(z_\nu) \leqq \frac{\mathrm{R}(p) + c_0}{s} \qquad (\nu = 1, \ldots, \lambda;\ \lambda = 0, \ldots, s-1); \\ & \mathrm{R}(p) > -c_0; \qquad |z| < r_0, \end{aligned} \right.$$

pourvu que les deuxièmes membres c_λ y possèdent les mêmes propriétés.

En particulier, $u_0(p, z)$ fournit le prolongement analytique des fonctions

$$\mathcal{G}_0(p, z) = (p - z)\,\mathcal{F}(0;\, p, z) = (p - z)\,\Phi(p, z),\ \mathcal{G}_{0,a}(p, z), \ldots$$

au delà du domaine $\mathrm{R}(p) > |z|$ (6).

---

(6) Le fait que les fonctions $\mathcal{G}_0(p, z)$ sont holomorphes pour $\mathrm{R}(p) > |z|$, est mis en évidence par la série (4).

De manière générale, on peut montrer que pour des deuxièmes membres $c_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda;\, p)$

Comme les u_λ sont holomorphes pour $|p|$ et $|z|$ assez petits, on est en droit de poser, dans (101 a, b), $p = z$ (en admettant que $|z| \leqslant 1$); nous pourrons ainsi calculer la fonction $u_0(z, z)$ qui, en vertu de (131) et de (34), (40), (65 a), etc., fournit, pour $n = \infty$, les probabilités que nous cherchons.

Pour $p = z$, les équations (101 a) dont nous désignons la variable d'intégration par $z_{\lambda+1}$ au lieu de ζ, prennent, à l'aide des opérateurs ψ_ν définis par

$$(104) \qquad \psi_\nu \mathcal{F}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty - 0}^{i\infty - 0} \frac{\varepsilon(-z_\nu) - 1}{z_\nu^2} \mathcal{F}(z_\nu)\, dz_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, s),$$

---

quelconques, holomorphes pour $R(z_1) < 0, \ldots, R(z_{s-1}) < 0$ (en général, non symétriques) et tels que les modules des quantités $C'_1 \ldots C'_\lambda e^{\sum_1^\lambda x_\nu z_\nu} . c_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda)$ soient uniformément bornés pour toutes les valeurs réelles des x_ν, les équations (101 a, b) possèdent la solution suivante :

$$(101\,c) \quad \left\{ \begin{aligned} u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; p, z) &= \left(p - z - \sum_1^\lambda z_\nu\right) \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\mu} \sum_{1', \ldots, \mu' = 1}^{\lambda} \\ &\quad \times \left(p - \sum_1^{1'-1} z_\nu\right) \ldots \left(p - \sum_1^{\mu'-1} z_\nu\right) M_\mu(z_{1'}, \ldots, z_{\mu'}) \\ &\quad [1 \leqq 1' < \ldots < \mu' \leqq \lambda;\ \lambda = 0, \ldots, s-1], \end{aligned} \right.$$

où

$$(101\,d) \quad \begin{aligned} M_\mu(\zeta_1, \ldots, \zeta_\mu) &= (-1)^\mu \zeta_1 \ldots \zeta_\mu \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^\infty e^{\zeta_1 t_1}\, dt_1 \ldots \int_0^\infty e^{\zeta_\mu t_\mu}\, dt_\mu \\ &\quad \times \int_0^\infty df(t_{\mu+1}) \ldots \int_0^\infty df(t_{m+\mu}) \\ &\quad \times \int_0^\infty dx_1 \ldots \int_{x_{m+\mu}}^\infty \mathfrak{M}_{m+\mu}(x_\nu;\ t_\nu)\, dx_{m+\mu+1}, \end{aligned}$$

$$(101\,e) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{M}_{m+\mu}(x_1, \ldots, x_{m+\mu+1};\ t_1, \ldots, t_{m+\mu}) \\ &\quad = \sum_{\lambda=0}^{s-1} T_{m+\mu}^{\lambda, s-1} \pi_{m+\mu}\, c_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \qquad [1 \leqq 1' < \ldots < \lambda' \leqq m + \mu;\ \mu = 0, \ldots, s-1]. \end{aligned}$$

En majorant, à l'aide de la relation

$$(101\,f) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_{m+\mu}(x_\nu;\ t_\nu) &= e^{-p x_{m+\mu+1}} \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1', \ldots, \lambda' = 1}^{m+\mu} \mathrm{s} \min_{\nu \neq 1', \ldots, \lambda'}{}^{(s-\lambda)} (x_{m+\mu+1} - x_\nu - \mathrm{s}_\nu t_\nu) \\ &\quad \times C'_1 \ldots C'_\lambda\, e^{\sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu (x_{m+\mu+1} - x_{\nu'} - \mathrm{s}_{\nu'} t_{\nu'})} c_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda), \end{aligned}$$

les termes de la série (101 d), on voit que les composantes u_λ de la solution (101 c) sont holomorphes dans le domaine

$$(101\,g) \qquad R(z_1) < 0, \qquad \ldots, \qquad R(z_{s-1}) < 0; \qquad R(p) > |z|.$$

la forme

$$(105)\quad \begin{cases} u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) - z\psi_{\lambda+1}\dfrac{z_{\lambda+1}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda+1} z_\nu} u_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_{\lambda+1}) = c_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) \\ \left[\mathrm{R}\left(\sum\limits_1^{\lambda+1} z_\nu\right) < 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1 \right]. \end{cases}$$

Effectuons ici l'opération $\prod\limits_{\nu=1}^{\lambda} \psi_\nu$; comme $u_{\lambda+1}$ est une fonction symétrique des z_ν, on est alors en droit de remplacer, dans l'intégrale multiple $\prod\limits_{\nu=1}^{\lambda+1} \psi_\nu \dfrac{z_{\lambda+1}}{\sum\limits_1^{\lambda+1} z_\nu} u_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_{\lambda+1})$, le facteur $z_{\lambda+1}$ par $\dfrac{1}{\lambda+1}\sum\limits_1^{\lambda+1} z_\nu$.

On tire ainsi de (105), à l'aide des notations

$$(106)\quad \begin{cases} u_0 = x_0; & \prod\limits_{\nu=1}^{\lambda} \psi_\nu u_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) = x_\lambda, \\ c_0 = c'_0; & \prod\limits_{\nu=1}^{\lambda} \psi_\nu c_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) = c'_\lambda \\ & (\lambda = 0, \ldots, s), \end{cases}$$

les équations linéaires

$$(107\,a)\qquad x_\lambda - \frac{z}{\lambda+1} x_{\lambda+1} = c'_\lambda \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1).$$

Pour $\mathcal{F}(z_\nu) = \text{const.} = \mathrm{C}$, (104) et (18 b) donnent

$$(108)\qquad \psi_\nu \mathrm{C} = \mathrm{C}\varepsilon'(0) = \mathrm{C},$$

et grâce à cette formule et aux notations (106), on déduit de (101 b) au moyen de l'opération $\prod\limits_{\nu=1}^{s} \psi_\nu$ l'équation

$$(107\,b)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s} \mathrm{C}_s^\lambda x_\lambda = 0.$$

Les $s+1$ équations ($107\,a$) et ($107\,b$) permettent de calculer les x_λ; on trouve ainsi

$$(109)\quad \begin{cases} x_0 = u_0(z,z) = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{s}\frac{z^\nu}{\nu\,!}}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{z^\nu}{\nu\,!}\sum_{\lambda=0}^{\nu}C_\nu^\lambda c'_\lambda, \\ \text{où}\quad c'_\lambda = \dfrac{1}{(2\pi i)^\lambda}\displaystyle\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\cdots\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\prod_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\varepsilon(-z_\nu)-1}{z_\nu^2} \\ \qquad\times c_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda)\,dz_1\ldots dz_\lambda. \end{cases}$$

Pour $c_\lambda = \text{const.}$ ($\lambda = 0, \ldots, s-1$) on a [*voir* (104) et (108)] $c'_\lambda = c_\lambda$; donc, dans ce cas, $u_0(z;\,z)$ est indépendant de $\varepsilon(z)$, c'est-à-dire, de la fonction de distribution $f(t)$.

Hypothèses particulières sur $f(t)$. — Prenons maintenant pour $f(t)$ une fonction de la forme

$$(110)\quad f(t) = 1 - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\alpha_\nu t} \qquad \left[\mathrm{R}(\alpha_1) > 0, \ldots, \mathrm{R}(\alpha_n) > 0;\ \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu = 1\right];$$

on a alors [équ. ($18\,a$)]

$$(111)\qquad \varepsilon(z) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu\,\alpha_\nu}{\alpha_\nu - z}.$$

Comme alors $\varepsilon(-\zeta)$ n'a, dans le demi-plan gauche des ζ, que n pôles et que $u_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta)$ y est borné, l'intégrale qui figure dans ($101\,a$) se réduit à la somme des résidus en $\zeta = -\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$; on a ainsi

$$(112)\quad \begin{cases} u_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda) - z\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{p - z - \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\lambda} z_\mu + \alpha_\nu}\,u_{\lambda+1}(z_1,\ldots,z_\lambda,-\alpha_\nu) \\ \quad = c_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda) \\ \qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1). \end{cases}$$

En substituant dans ces équations [où u_s sera exprimé au moyen de ($101\,b$)] pour $z_1, \ldots, z_\lambda$ toutes les combinaisons λ à λ avec répétition, à savoir $-\alpha_{1^\star}, \ldots, -\alpha_{\lambda^\star}$, des nombres $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$, on obtient un système de C_{n+1-s}^{s-1} équations linéaires, à déterminant non identiquement nul, qui permet de calculer tous les $u_\lambda\,(-\alpha_{1^*}, \ldots, -\alpha_{\lambda^*})$.

Ces grandeurs sont rationnelles en p et z, si le même vaut pour les c_λ. Comme les deuxièmes membres de (29) et (40) sont constants, on voit de proche en proche que pour $\varepsilon(z)$ rationnel, tous les $\mathcal{G}_\lambda(-\alpha_{1^*}, \ldots, -\alpha_{\lambda^*}; p, z), \ldots, \Gamma_\lambda^{(\nu)}(-\alpha_{1^*}, \ldots, -\alpha_{\lambda^*}; p, z; z', \ldots, z^{(\nu)})$ sont rationnels en $p, z, z', z'', \ldots$; en particulier, c'est donc le cas pour $\mathcal{G}_0(p, z), \Gamma_0^{(1)}(p, z; z'), \Gamma_0^{(2)}(p, z; z', z''), \ldots$.

Déterminons $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_{0,a}, \ldots$, à titre d'exemple, dans l'hypothèse

$$f(t) = 1 - e^{-t}, \qquad \text{donc} \quad \varepsilon(z) = \frac{1}{1-z}. \tag{113}$$

Dans (111) et (112), on aura alors $n = 1, \alpha_1 = 1$; en posant ensuite, dans (112) et (101 b), $z_1 = \ldots = z_s = -1$ et en écrivant $u_\lambda(p, z)$ et $c_\lambda(p)$ au lieu de $u_\lambda(-1, \ldots, -1; p, z)$ et $c_\lambda(-1, \ldots, -1; p)$, on obtient les équations

$$\left\{\begin{aligned} & u_\lambda(p, z) - \frac{z}{p-z+\lambda+1} u_{\lambda+1}(p, z) = c_\lambda(p) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \\ & \qquad\qquad u_s(p, z) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1} C_s^\lambda u_\lambda(p, z). \end{aligned}\right. \tag{114}$$

Désignons par $u_\lambda^{(a)}(p, z)$ les solutions de ces équations pour

$$c_\lambda = \delta_\lambda^a \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1;\ 0 \leqq a \leqq s-1); \tag{115 a}$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned} & u_\lambda^{(a)}(p, z) = \frac{1}{\varpi} \prod_{\nu=1}^{\lambda} \frac{p-z+\nu}{z} \sum_{\mu=a+1}^{s} C_s^\mu \prod_{\nu=a+1}^{\mu} \frac{p-z+\nu}{z} \\ & \qquad\qquad - \prod_{\nu=a+1}^{\lambda} \frac{p-z+\nu}{z}, \\ & \qquad\qquad \left[\varpi = \sum_{\mu=0}^{s} C_s^\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{p-z+\nu}{z}\right]; \\ & \left[\prod_{\nu=a+1}^{\lambda} \equiv 0 \,(\text{pour } 0 \leqq \lambda \leqq a); \quad \lambda, a = 0, \ldots, s-1\right], \end{aligned}\right. \tag{115 b}$$

et à l'aide de ces grandeurs, les solutions de (114) s'expriment par la formule

$$(116)\qquad u_\lambda(p,z)=\sum_{\tau=0}^{s-1} c_\tau(p)\,u_\lambda^{(\tau)}(p,z)\qquad(\lambda=0,\ldots,s-1).$$

Comme pour $a=0$, les grandeurs ($115a$) coïncident avec les deuxièmes membres de (29), la fonction $\mathcal{G}_0(p,z)$ qui figure dans (34) est identique à $u_0^{(0)}(p,z)$; on a donc, dans l'hypothèse (113),

$$(117)\qquad \mathcal{G}_0(p,z)=1-\left[\sum_{\mu=0}^{s} C_s^\mu \prod_{\nu=1}^{\mu}\frac{p-z+\nu}{z}\right]^{-1}.$$

On obtiendra la fonction $\mathcal{G}_{0,a}$ qui figure dans (39) et (40), en posant, dans (116), $c_\tau=(-1)^{\tau-a}C_\tau^a$ et $\lambda=0$; il vient ainsi, à l'aide de ($115b$),

$$(118)\qquad \mathcal{G}_{0,a}(p,z)=\frac{1}{\varpi}\sum_{\tau=0}^{s-1}(-1)^{\tau-a}C_\tau^a\sum_{\mu=\tau+1}^{s} C_s^\mu\,\frac{p-z+\nu}{z}.$$

De même, les équations (91) se réduisent dans l'hypothèse (113), pour $z_1=\ldots=z_{s-1}=-1$, aux équations (114) avec

$$c_\lambda=\frac{p+\lambda}{p+\lambda-z'}\mathcal{G}_\lambda(-1,\ldots,-1;p,z')=\frac{p+\lambda}{p+\lambda-z'}u_\lambda^{(0)}(p,z');$$

en introduisant ces valeurs dans (116) ($\lambda=0$), on obtient donc

$$(119)\qquad \Gamma_0^{(1)}(p,z;z')=\sum_{\tau=0}^{s-1}\frac{p+\tau}{p+\tau-z'}u_\tau^{(0)}(p,z')\,u_0^{(\tau)}(p,z).$$

Enfin, on obtient de la même façon pour la fonction $\Gamma_{0;a,b}$ qui figure dans (99) et (100),

$$(120)\qquad \Gamma_{0;a,b}(p,z;z')$$
$$=\sum_{\tau=b}^{s-1}(-1)^{\tau-b}C_\tau^b\,u_0^{(\tau)}(p,z)\sum_{\rho=0}^{b}C_b^\rho\,\frac{p+\rho}{p+\rho-z'}\sum_{\tau_1=a}^{s-1}(-1)^{\tau_1-a}C_{\tau_1}^a u_\rho^{(\tau_1)}(p,z').$$

Les problèmes qui concernent des groupes de lignes avec blocage temporaire nécessitent la résolution de systèmes d'équations de la forme [*voir* (62)]

$$(121)\qquad L_\lambda(u_\nu;z)=c_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda)\quad(\lambda=0,\ldots,s-1);\qquad L_s(u_\nu)=0.$$

Hypothèse sur la forme de $\mathcal{F}(t, \theta)$. — Toutes les remarques d'ordre général faites au sujet de (101 a) et (101 b) s'appliquent encore à ces équations; on voit aussi que dans le cas où $\mathcal{F}(t, \theta)$ est de la forme

$$(122)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathcal{F}(t, \theta)=\sum_{\nu=1}^{n}(1-e^{-\alpha_\nu t})a_\nu(\theta)\\ &\left[R(\alpha_1)>0, \ldots, R(\alpha_n)>0;\ \sum_{1}^{\infty}a_\nu(\infty)=1\right],\end{aligned}\right.$$

de sorte que la fonction $\varepsilon(z_1, z_2)$ [(43)] est rationnelle en z_1, elles se transforment et se résolvent de la même manière que les équations (112).

Admettons, à titre d'exemple, que $\mathcal{F}(t, \theta)$ est le produit de la fonction de distribution des durées de communication $1-e^{-t}$ par la fonction de distribution (arbitraire) des périodes d'orientation $g(\theta)$, donc

$$(123)\qquad f(t, \theta)=(1-e^{-t})\,g(\theta);$$

on a alors

$$(124)\qquad \varepsilon(z_1, z_2)=\frac{1}{1-z_1}\delta(z_2),\qquad \text{où}\quad \delta(z)=\int_0^{\infty}e^{z\theta}\,dg(\theta).$$

Substituons cette expression dans (62) et (121); les intégrales $\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\ldots d\xi$ se réduisent alors aux résidus en $\xi=-1$. En posant dans (121) en outre $z_1=\ldots=z_s=-1$, nous obtenons

$$(125)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(1-z\frac{\delta(z-p-\lambda)-1}{p-z+\lambda}\right)u_\lambda(p, z)-\frac{z\,\delta(z-p-\lambda)}{p-z+\lambda+1}u_{\lambda+1}(p, z)=c_\lambda\\ &\qquad(\lambda=0, \ldots, s-1);\\ &u_s(p, z)=-\sum_{\lambda=0}^{s-1}C_s^\lambda u_\lambda(p, z)\\ &[u_\lambda(-1, \ldots, -1; p, z)=u_\lambda(p, z);\ c_\lambda(-1, \ldots, -1)=c_\lambda].\end{aligned}\right.$$

Remplaçons ici c_λ, selon (61), (64) et (70), (71), (124), par

$$(126)\qquad \delta_\lambda^0,\quad (-1)^{\lambda-a}C_\lambda^a,\quad (-1)^{\lambda-a}\left[C_\lambda^a+C_{\lambda+1}^a z\frac{p-z+\lambda+1-\delta(z-p-\lambda)}{(p-z+\lambda+1)(p-z+\lambda)}\right];$$

$u_0(p, z)$ se confond alors respectivement avec $\mathcal{G}_0(p, z)$, $\mathcal{G}_{0,a}(p, z)$, $\mathcal{G}'_{0,a}(p, z)$.

Par exemple, on trouve ainsi pour $c_\lambda = \delta_\lambda^0$:

$$(127)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{G}_0(p, z) = \frac{1}{\mathcal{D}}\,\frac{1}{z\,\delta(z-p)}\sum_{\mu=1}^{s} C_s^\mu(p-z+\mu)\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{p+\nu-z\,\delta(z-p-\nu)}{z\,\delta(z-p-\nu)},\\ &\text{où}\quad \mathcal{D} = \frac{1}{p-z}\sum_{\mu=0}^{s} C_s^\mu(p-z+\mu)\prod_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{p+\nu-z\,\delta(z-p-\nu)}{z\,\delta(z-p-\nu)}\end{aligned}\right.$$

pour la fonction $\mathcal{G}_0(p, z)$ qui donne, en vertu de (34), la probabilité d'aboutissement d'un appel.

CHAPITRE V.

VALEURS LIMITES DES PROBABILITÉS.

Examinons maintenant, dans l'hypothèse

$$(128)\qquad \frac{n}{\mathcal{C}} = y = \text{const.},$$

les valeurs de nos probabilités pour de grandes valeurs de n.

Comme nous avons pris la durée moyenne de communication [*voir* (18 *b*)] pour unité de temps, la « quantité de trafic » y est égale au nombre d'heures de communications demandées en moyenne au groupe par heure; dans les applications y peut prendre, indépendamment de s, n'importe quelle valeur positive.

Pour $R(p) > |z|$, $\mathcal{G}_0(p, z)$, $\mathcal{G}_{0,a}(p, z)$, ... sont holomorphes en p et z [*voir* (5) et (31)]. Admettons maintenant que la fonction $u(p, z)$ qui figure dans (32), soit holomorphe et $O(1)$ dans le domaine

$$(129)\qquad R(p) \geqq |z| - \delta,$$

δ désignant une quantité positive arbitrairement petite qui pourra varier avec $|z|$; on montre alors sans difficulté que

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega_n\left(u(p, z); \frac{n}{\mathcal{C}}\right)\\ &\quad = \frac{(n-1)!}{\mathcal{C}^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{y-i\sqrt{2\delta y}}^{y+\sqrt{2\delta y}}\left[\frac{\partial\left(e^{p\mathcal{C}}u(p, z)\right)}{\partial p}\right]_{p=z}\frac{dz}{z^n} + O(e^{-c'n})\\ &\qquad\qquad \left(\text{pour } \frac{n}{\mathcal{C}} = y,\ n \to \infty\right),\end{aligned}\right.$$

c' désignant ici une quantité positive qui ne dépend pas de n.

Comme développement asymptotique de cette expression, on obtient, grâce à la méthode du col, une série (divergente) de la forme $u(y, y)+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots$, et en particulier on a

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n\big(u(p, z); y\big) = u(y, y), \tag{131}$$

Les calculs faits dans le précédent Chapitre montrent que dans les hypothèses (110) [ou (122)] sur $f(t)$ [ou $\mathcal{F}(t, 0)$], les fonctions $\mathcal{G}_0(p, z)$, $\mathcal{G}_{0,a}(p, z)$, ... sont méromorphes dans un voisinage de la variété $\mathrm{R}(p) = |z|$. Nous montrerons ailleurs que pour de tels $\mathcal{G}_0(p, z), \ldots$, la condition mentionnée relative au domaine (129) est satisfaite.

De même, cette condition est satisfaite dans le cas $s = 1$ pour tous les $\varepsilon(z)$ qui sont holomorphes en $z = 0$. Car, à l'aide de la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon(-\zeta)-1}{\zeta}\,\frac{d\zeta}{p-z-\zeta} = \frac{\varepsilon(z-p)-1}{p-z},$$

(28), (29), (91), (94 *a-c*) donnent alors

$$\tag{132} \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}_0(p, z) &= \frac{p-z}{p-z\varepsilon(z-p)}, \\ \Gamma_0^{(1)}(p, z; z') &= \frac{p}{p-z'\varepsilon(z'-p)}\,\frac{p-z}{p-z\varepsilon(z-p)}, \\ \Gamma_0^{(2)}(p, z; z', z'') &= \frac{p}{p-z''\varepsilon(z''-p)}\,\frac{p}{p-z'\varepsilon(z'-p)}\,\frac{p-z}{p-z\varepsilon(z-p)} \\ &\qquad (s=1), \end{aligned}\right.$$

et l'on vérifie sans peine que la fonction $\frac{p-z}{p-z\varepsilon(z-p)}$ est holomorphe et $O(1)$ dans le domaine (129). Dans tous ces cas, les relations (130) et (131) sont donc valables.

Pour les valeurs limites des probabilités correspondant à $\mathcal{G}_0(p, z), \ldots$, et qui seront désignées par $\mathrm{P} = \lim_{n=\infty} \tilde{p}(y; n), \ldots$, nous obtenons, grâce à (131) les expressions suivantes :

A. *Groupe de $s \geqq 1$ lignes sans blocage :*

$$\mathrm{P} = \mathcal{G}_0(y, y) = 1 - \frac{y^s}{s!}\left[\sum_{\nu=0}^{s} \frac{y^\nu}{\nu!}\right]^{-1} \tag{133}$$

(probabilité d'aboutissement d'un appel).

$$(134) \qquad P_a = \mathcal{G}_{0,a}(y, y) = \frac{y^a}{a!}\left[\sum_{\nu=0}^{s}\frac{y^\nu}{\nu!}\right]^{-1} \qquad (a = 0, \ldots, s)$$

(probabilité pour qu'un appel trouve exactement a lignes occupées).

$$(135) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P^{(j)} z^j = \Gamma_0^{(1)}(y, y; yz)$$
$$= \left[\sum_{\nu=0}^{s}\frac{y^\nu}{\nu!}\right]^{-1}\left\{\frac{1}{1-z}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{y^\nu}{\nu!}\right.$$
$$-\left[\sum_{\mu=0}^{s} C_s^\mu (yz)^{s-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(y-yz+\nu)\right]^{-1} y^s \sum_{\tau=0}^{s-1}\frac{z^{s-\tau}}{\tau!}$$
$$\left.\times\frac{y+\tau}{y-yz+\tau}\prod_{\nu_1=1}^{\tau}(y-yz+\nu_1)\sum_{\nu=0}^{s-\tau-1}\frac{y^\nu}{\nu!}\right\}$$

(fonction génératrice des probabilités pour qu'un appel ainsi que le $j^{\text{ième}}$ appel précédent aboutissent).

Cette formule n'est valable que dans l'hypothèse $f(t) = 1 - e^{-t}$, tandis que les expressions de P et P_a sont indépendantes [*voir* équ. (109) pour $c'_\lambda = c_\lambda$] de $f(t)$.

En outre, on déduit de (132) les formules

$$(136) \quad \begin{cases} \Gamma_0^{(1)}\ (y, y; yz) = \dfrac{1}{1+y}\,\dfrac{1}{1-z\varepsilon(yz-y)}, \\ \Gamma_0^{(2)}(y, y; yz, yz') = \dfrac{1}{1+y}\,\dfrac{1}{1-z\varepsilon(yz-y)}\,\dfrac{1}{1-z'\varepsilon(yz'-y)}, \quad \ldots, \\ \qquad (s = 1), \end{cases}$$

valables pour tout $\varepsilon(z)$ qui est holomorphe en $z = 0$.

B. *Groupe de $s \geqq 2$ lignes avec blocage, dans l'hypothèse d'une répartition exponentielle des durées de communication.* — A l'aide des notations

$$(137) \quad \begin{cases} y\mathcal{D}(y, y) = y + s\bigl(1 + y\delta'(0)\bigr)\displaystyle\sum_{\mu=0}^{s-1} C_{s-1}^\mu y^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}\frac{\nu + y\bigl(1-\delta(-\nu)\bigr)}{\delta(-\nu)}; \\ \delta(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{z\theta}\, dg(\theta), \end{cases}$$

(34) et (127) donnent

$$(138) \qquad P = \mathcal{G}_0(y, y) = \frac{s}{y\mathcal{D}(y, y)} \sum_{\mu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\mu} y^{-\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\nu + y\big(1 - \delta(-\nu)\big)}{\delta(-\nu)},$$

(probabilité d'aboutissement d'un appel).

En pratique, on utilise surtout la grandeur $1 - P$ qui est la probabilité de perte d'un appel ([7]).

En résolvant (125) pour les quantités deuxième et troisième indiquées dans (126), on obtient en vertu de (65), (72), (74) et (76) respectivement

$$(139) \qquad \begin{cases} P_a = \mathcal{G}_{0,a}(y, y) = \dfrac{s}{y\mathcal{D}(y, y)} \displaystyle\sum_{\tau=a}^{s-1} (-1)^{\tau-a} C_{\tau}^{a} \frac{1}{\delta(-\tau)} \\ \qquad\qquad \times \displaystyle\sum_{\mu=\tau}^{s-1} C_{s-1}^{\mu} y^{\tau-\mu} \prod_{\nu=\tau+1}^{\mu} \frac{\nu + y\big(1 - \delta(-\nu)\big)}{\delta(-\nu)}, \\ \qquad\qquad (a = 0, \ldots, s-1), \\ P_s = 1 - \mathcal{G}_{0,s}(y, y) = \dfrac{1}{\mathcal{D}(y, y)} \end{cases}$$

(probabilité pour qu'un appel trouve exactement a lignes occupées, le groupe étant accessible)

et

$$(140) \qquad \begin{cases} P'_a = \mathcal{G}'_{0,a}(y, y) \\ \quad = \dfrac{s}{y\mathcal{D}(y, y)} \displaystyle\sum_{\tau=a}^{s-1} (-1)^{\tau-a} \left(C_{\tau}^{a+1} + y C_{\tau+1}^{a+1} \frac{\tau + 1 - \delta(-\tau)}{\tau(\tau+1)} \right) \\ \quad \times \dfrac{1}{\delta(-\tau)} \displaystyle\sum_{\mu=\tau}^{s-1} C_{s-1}^{\mu} y^{\tau-\mu} \prod_{\nu=\tau+1}^{\mu} \frac{\nu + y\big(1 - \delta(-\nu)\big)}{\delta(-\nu)} \\ \quad \left(\left[\dfrac{\tau + 1 - \delta(-\tau)}{\tau} \right]_{\tau=0} = 1 + \delta'(0);\ a = 0, \ldots, s-2 \right), \\ P'_{s-1} = \dfrac{s}{\mathcal{D}(y, y)} \, \dfrac{1 - \delta(1-s)}{(s-1)\delta(1-s)} \end{cases}$$

(probabilité pour qu'un appel trouve exactement a lignes occupées, le groupe étant bloqué).

([7]) Dans *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 2045, nous avons désigné la probabilité de perte par $\lim\limits_{n=\infty} P(y;\, n)$. Dans les hypothèses $g(\theta) = 1 - e^{-\frac{\theta}{b}}$, donc $\delta(z) = \dfrac{1}{1 - bz}$, et $\theta = \text{const.} = b$, donc $\delta(z) = e^{bz}$, b étant une constante positive, (138) se confond respectivement avec la formule de MM. R. Leroy et E. Vaulot (*C. R. Acad. Sc.*, t. 220, 1945, p. 84) et avec la formule de M. R. Fortet (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 159).

De (140), on déduit pour $P' = \sum_{a=0}^{s-1} P'_a$ la formule

$$(141) \qquad P' = \frac{s\delta'(0)}{\varpi(y,y)} \sum_{\mu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\mu} y^{-\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\nu + y(1-\delta(-\nu))}{\delta(-\nu)} = y\delta'(0)P.$$

(probabilité pour qu'un appel arrive à un instant où le groupe est bloqué).

En vertu des équations ($41a, b$) et (128), le trafic écoulé par le groupe est, pour $n = \infty$, égal à

$$(142) \qquad yP$$

et de même, yP_a et yP'_a sont respectivement les parties du trafic qui sont demandées pendant que le groupe se trouve dans un état de probabilité P_a ou P'_a.

A l'aide de (137) et (138), il vient ensuite

$$(143) \quad \lim_{y=\infty} yP = C_s[\delta(z)] = s \sum_{\mu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} (1-\delta(\nu)) \prod_{\nu=\mu+1}^{s-1} \delta(-\nu)$$
$$\times \left[s\delta'(0) \sum_{\mu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} (1-\delta(-\nu)) \prod_{\nu=\mu+1}^{s-1} \delta(-\nu) + \prod_{\nu=1}^{s-1} \delta(-\nu) \right]^{-1} < s.$$

Nous retrouvons ainsi, comme il fallait s'y attendre, la constante qui figure dans R, (141) et (145) et dont la signification était la suivante [8]:

Un groupe de s lignes avec possibilité d'attente, où les durées de communications sont réparties selon (113), ne peut se trouver en état d'équilibre statistique que lorsque le trafic imposé $\eta s[\equiv y]$ est inférieur à $C_s[\delta(z)]$.

---

[8] Dans R, équ. (144), 3e ligne, il faut lire :

$$c_\mu = -\delta_\mu^0 s \sum_{\lambda=0}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{\lambda} (1-\delta(-\nu)) \prod_{\nu=\lambda+1}^{s-1} \delta(-\nu) + \mu \prod_{\nu=1}^{\mu-1} (1-\delta(-\nu)) \prod_{\nu=\mu}^{s-1} \delta(-\nu).$$