ANNALES DE L'I. H. P.

F. YATES

Quelques développements modernes dans la planification des expériences

Annales de l'I. H. P., tome 12, nº 2 (1951), p. 113-130
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_2_113_0>

Quelques développements modernes dans la planification des expériences

par

F. YATES

Dans une première conférence, je me suis occupé des bases logiques de la planification des expériences. Dans cette conférence, je me propose de décrire quelques-uns des développements modernes de la planification. Ceux-ci sont intéressants et du point de vue pratique et parce qu'ils posent un certain nombre de problèmes logiques et mathématiques intéressants.

Expériences factorielles. — Je dois d'abord dire quelques mots des expériences factorielles. Sauf le développement des tests exacts de signification et les estimations de l'erreur, le développement du plan factoriel est, je pense, à beaucoup près le progrès le plus important de ces dernières années.

Une expérience factorielle est une expérience qui comprend toutes les combinaisons des diverses variantes concernant les différents traitements ou facteurs. Ainsi dans une expérience concernant les engrais, sur les effets des trois produits nutritifs des plantes : azote (n), phosphate (p) et potasse (k), on peut les tester simultanément en introduisant le nombre voulu des répétitions de toutes les combinaisons, avec présence ou absence de chacun d'eux, à savoir :

$$(1)\ n,\ \ p,\ \ k,\ \ np,\ \ nk,\ \ pk,\ \ npk,$$

ou (1) indique qu'il n'y a pas d'engrais.

Une telle expérience est décrite comme étant une expérience factorielle $2 \times 2 \times 2$ ou 2^3, chaque facteur étant envisagé à deux niveaux (présence et absence). De même, si l'on veut tester ces trois produits nutritifs des plantes à trois niveaux : 0,1 et 2 unités, on pourra employer une expérience du type 3^3, avec, en tout, 27 combinaisons de traitements.

Le premier et le plus évident des avantages d'un plan factoriel est qu'il fournit les estimations moyennes des effets de chacun des facteurs, calculées compte tenu de tous les niveaux des autres facteurs, et ceci avec une précision considérablement plus grands que celle que l'on aurait obtenue si l'on avait expérimenté chaque facteur séparément. Ceci découle du fait que pour ces effets moyens (que l'on appelle *effets principaux*), chaque parcelle est utilisée autant de fois qu'il y a de facteurs. Dans la mesure où l'action d'un facteur ne varie pas avec les changements dans le niveau des autres facteurs, on peut prendre comme mesure générale de cette action, l'effet principal de ce facteur. Deuxièmement, l'expérience mettra, elle-même, en évidence le degré de variation de l'action d'un facteur sous l'effet des changements dans le niveau des autres facteurs (ce que l'on appelle *interactions*). Troisièmement, dans la mesure où des conclusions générales apparaissent, celles-ci auront une plus grande base inductive.

On pourra objecter que les réponses moyennes, les effets principaux, ne présentent pas vraiment beaucoup d'intérêt et que ce qui est demandé, en pratique, est la réponse à un facteur pour des niveaux donnés des autres facteurs. Cependant, en général, le fait que les autres facteurs sont inclus dans l'expérience est une indication que l'on n'a pas une connaissance exacte des niveaux optima de leur emploi. Même si les niveaux de ces facteurs, utilisés dans la pratique, sont déjà fixés par la coutume, on pourrait modifier ces niveaux à la lumière des résultats expérimentaux. En outre, si deux facteurs agissent l'un sur l'autre, et l'existence de telles interactions et leur grandeur ne peuvent être déterminées que par des expériences factorielles, le changement dans le niveau d'un facteur changera le niveau optimum de l'autre facteur. Il est naturellement vrai que le contraste direct qui montre l'action d'un facteur, dans une combinaison donnée d'autres facteurs, est sujet à de grandes erreurs d'expérience, particulièrement dans les expériences qui comprennent un grand nombre de facteurs et qui, par conséquent, ne présentent qu'un petit nombre de répétitions de combinaisons individuelles de traitements. Cependant, nous pouvons être ordinairement assurés que les interactions comprenant trois facteurs ou plus sont de nature à être négligées, à moins que quelques-uns, au moins, de ces facteurs ne présentent des effets principaux importants. Si elles peuvent être négligées, l'action d'un facteur ou plus, en présence d'une combinaison donnée d'autres facteurs, peut être estimée avec une plus grande précision que celle qui est donnée par le contraste direct des parcelles s'y rapportant. Ainsi dans une expérience à quatre facteurs, chaque facteur étant à deux niveaux, l'effet de a en présence de b, c, d est donnée par la relation

$$abcd - bcd = \mathrm{A} + \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{AD} + \mathrm{ABC} + \mathrm{ABD} + \mathrm{ACD} + \mathrm{ABCD},$$

où A est l'effet principal de a, AB l'interaction de a et b, défini comme étant la demi-différence de l'action a, b étant présent et absent, etc. Si l'on considère qu'il est légitime de négliger des interactions à trois ou quatre facteurs, on estime l'action cherchée à partir de $\mathrm{A} + \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{AD}$, qui a une variance moitié de celle de l'expression originale, puisque tous les effets et toutes les interactions d'une expérience d'ordre 2^n ont la même variance d'erreur, chacune étant calculée à partir de la moyenne d'une moitié des parcelles diminuée de la moyenne de l'autre moitié.

D'autre part, il n'y a évidemment pas de raison d'étendre le système factoriel à des régions qui ne présentent pas d'intérêt ni théorique ni pratique. Ainsi, si l'on sait qu'un sol est très déficient en phosphate, de sorte que l'on doit s'attendre au moins à un manque partiel de la récolte à cause de l'absence de phosphate, il serait absurde d'inclure le cas de parcelles « sans phosphate » comme l'un des niveaux du phosphate dans le schéma factoriel. Au lieu de cela, le phosphate peut être compris dans le système factoriel à deux niveaux ou plus, autres que zéro. En plus, si quelque mesure de l'action totale du phosphate est recherchée, une ou deux parcelles sans phosphate peuvent être incluses dans chaque bloc, en dehors du schéma factoriel.

Un type de plan d'expérience qui était très populaire dans le passé, pour les expériences sur les engrais, était le plan non factoriel qui comprenait les cinq combinaisons de traitements

$$(1)\ np,\quad nk,\quad pk,\quad npk.$$

Ces combinaisons donneront l'effet de chaque facteur en présence des deux autres, et aussi l'effet simultané des trois facteurs, ou d'une paire quelconque de facteurs.

La justification de ce type de planification est que, si un des facteurs, disons le phosphate, ne produit pas d'effet, les effets de l'azote et de la potasse ne seront presque pas changés par l'application de phosphate. Par conséquent, lès effets en présence de phosphate, déterminés à partir de l'expérience, peuvent être acceptés comme étant corrects, même, si dans la pratique, le phosphate ne doit pas être appliqué sur de tels sols. Si, d'autre part, le phosphate produit beaucoup d'effet, il pourra bien donner lieu à une interaction avec l'azote et la potasse. Dans ce cas, les effets de l'azote et de la potasse, en absence du phosphate, ne présentent pas d'intérêt pratique, puisque, en pratique, le phosphate sera appliqué.

Cependant, même en admettant l'exactitude des postulats originels, les circonstances, dans lesquelles le plan non factoriel ci-dessus sera plus efficient avec une variance d'erreur donnée, par parcelle, seront rares. S'il y a effet seulement d'un ou de deux des trois facteurs, le plan factoriel déterminera l'effet d'un facteur ou des deux facteurs combinés de manière plus précise que le plan non factoriel. Le seul véritable avantage du plan non factoriel est que le nombre plus petit des combinaisons de traitements permet d'utiliser un carré latin au lieu de blocs avec répartition au hasard, avec la réduction qui en résulte dans la variance d'erreur par parcelle.

Un problème de pesée. — Une illustration simple que j'ai proposée il y a quelques années de la façon par laquelle un plan factoriel peut réduire les erreurs d'expériences, lorsque l'on sait que les interactions n'existent pas ou peuvent être négligées, est fournie par un problème de pesée. Étant donné une balance pour laquelle on doit déterminer une correction de zéro chaque fois que la balance est utilisée, et qui est sujette à des erreurs dues au hasard, quelle est la meilleure méthode de déterminer les poids de 7 objets ?

La méthode évidente est de peser chacun des 7 objets séparément, et de déterminer la correction de zéro par une huitième observation.

Une autre façon de faire est de peser les objets tous ensemble et en groupes de trois selon le schéma ci-contre (Table 1).

Le poids de l'objet a, par exemple, est alors donné par la moyenne des pesées 1 à 4, moins la moyenne des pesées 5 à 8, puisque chacun des autres objets figure deux fois dans chacun de ces groupes. La variance de l'erreur est donc le quart, de celle obtenue lorsque chaque objet est pesé séparément.

Les différences qui donnent les poids des 7 objets correspondent, au point de vue formel, aux différences qui donnent les effets principaux et les interactions d'un plan factoriel du type 2^3.

Pesées.	Objets pesés.
1	$a + b + c + d + e + f + g$
2	$a + b + d$
3	$a + c + e$
4	$a + f + g$
5	$b + c + f$
6	$b + e + g$
7	$c + d + g$
8	$d + e + f$

Table 1. — Schéma de pesées pour 7 objets.

Pour d'autres nombres d'objets, on peut obtenir des solutions qui n'ont pas toutes une structure factorielle. Le problème ne présente pas une grande importance pratique, mais il a récemment attiré l'attention en Amérique où il est connu sous le nom de problème de pesée d'Hotelling.

Méthode de « Confounding » (dans laquelle certaines interactions se trouvent confondues avec les différences de fertilité entre sous-blocs) (1).

Une difficulté, dans les plans factoriels, provient de ce fait que le nombre des combinaisons de traitements devient grand à mesure que le nombre de facteurs augmente. Par conséquent, si un plan ordinaire de blocs avec répartition au hasard est utilisé, de grands blocs seront nécessaires, avec une augmentation résultante de l'erreur d'expérience par parcelle.

Pour surmonter cette difficulté, on peut diviser les traitements en groupes, les contrastes entre eux représentant une ou plusieurs interactions d'ordre élevé. Les interactions choisies sont celles dont on peut s'attendre raisonnablement à ce qu'elles soient petites, et avec peu d'intérêt pratique. Ainsi, dans un plan factoriel d'ordre 2^4, nous pouvons diviser les traitements en deux groupes (*fig.* 1),

---

(1) Note du traducteur.

Le contraste de ces deux groupes représente l'interaction à 4 facteurs. Comme suit, l'expérience peut être disposée en blocs de 8 parcelles, au lieu de 16 parcelles. Dans chaque bloc, toutes les combinaisons de chaque groupe de 3 facteurs sont également représentées et, par conséquent, tous les effets principaux et toutes les interactions à 2 ou 3 facteurs ne sont pas affectées par les différences entre blocs, c'est-à-dire, sont orthogonales aux blocs.

(1)	*bc*	*a*	*abc*
ab	*bd*	*b*	*abd*
ac	*cd*	*c*	*acd*
ad	*abcd*	*d*	*bcd*

Figure 1. — « Confounding » de l'interaction ABCD dans une expérience d'ordre 2^4.

On peut confondre plus d'un degré de liberté dans un plan de type 2^n. Ainsi, dans une expérience du type 2^5, en blocs de 8 parcelles, 3 degrés de liberté seront confondus dans chaque répétition. On peut choisir à volonté deux degrés parmi les trois, le troisième étant donné par le produit généralisé des deux autres. Ainsi, si ABC et ADE sont confondus, $A^2BCDE = BCDE$ est aussi confondu.

L'énumération des systèmes possibles de « confounding » présente d'intéressants problèmes d'analyse combinatoire. Le développement de la théorie associée de l'analyse de la variance a servi à clarifier toute la procédure de l'analyse de la variance de plans compliqués.

Les problèmes les plus simples sont ceux relatifs à des plans du type 2^n. (Le confounding peut être aussi utilisé pour des plans du type 3^n, 4^n, et $2^n \times 4^n$). Des plans du type $2^p \times 3^q$ ne se prêtent pas à un « confounding » simple, bien que quelques plans avec « confounding » partiellement équilibrés soient possibles. Ainsi, il existe un plan du type $2^2 \times 3$, avec 3 répétitions dans des blocs de 6 parcelles. Le véritable degré de liberté, confondu dans chaque répétition, peut être un composé de l'interaction à 2 facteurs et de l'interaction à 3 facteurs, puisque 2^2 n'est pas un facteur de 6. Avec le plan équilibré, 8/9 de l'information sont obtenus relativement à l'interaction des deux facteurs.

La méthode de « confounding » présente une valeur particulière dans des expériences telles que celles des champs d'expériences agricoles où les conditions sont telles que l'emploi de grands blocs conduit à augmenter les erreurs d'expériences. Si les conditions sont telles que l'on puisse utiliser de grands blocs sans augmentation importante des erreurs d'expériences, on peut éviter les complications de la méthode du « confounding ».

Estimation de l'erreur à partir d'interactions d'ordre élevé. — Si la précision nécessaire peut être obtenue avec seulement une répétition de toutes les combinaisons de traitements, on peut estimer l'erreur à partir d'interactions d'ordre élevé. Ces interactions seront choisies parmi celles qu'une connaissance antérieure indique comme devant être petites, ou encore, on pourra prendre les interactions de facteurs présentant de petits effets principaux. Ainsi, dans une expérience du type 3^3 concernant les composants d'engrais n, p, k, chacun à trois niveaux, avec une seule répétition dans 3 blocs de 9 parcelles, on peut estimer l'erreur à partir des composantes non linéaires de chacune des interactions à deux facteurs, et des composantes non confondues de l'interaction à trois facteurs, ceci donnant, en tout, 15 degrés de liberté $(3 \times 3 + 6)$ pour l'erreur,

Répétition fractionnée. — L'estimation de l'erreur à partir d'interactions d'ordre élevé peut être considérée comme un moyen permettant d'introduire un facteur supplémentaire dans une expérience de dimension donnée. Le procédé peut être poussé un pas plus loin en omettant entièrement quelques-unes des combinaisons de traitement de l'expérience. Ceci est connu sous le nom de *répétition fractionnée*.

Ainsi un plan du type 2^6 peut être exécuté sur 32 parcelles, la moitié seulement des combinaisons de traitements y étant comprises. Celles-ci seront normalement choisies, de sorte que le contraste entre la moitié employée et la moitié exclue, connue sous le nom d'identité I, représente l'interaction à 6 facteurs. Chacun des 31 contrastes orthogonaux représente alors deux interactions distinctes, ou une interaction et un effet principal, les paires étant données par la règle du produit. Ainsi A est identifié avec BCDEF, puisque

$$A \times BCDEF = ABCDEF = I.$$

Si l'expérience est disposée en blocs de 8 parcelles, une interaction à deux facteurs doit être confondue, un groupe possible de paires étant :

$$ABC \equiv DEF, \qquad ADE \equiv BCF, \qquad BCDE \equiv AF.$$

Split-plots (parcelles partagées). — Le partage des parcelles, pour des traitements accessoires, est un autre procédé simple qui est d'un emploi pratique considérable. Dans ce cas, l'analyse de variance se subdivise en deux parties, une pour les traitements des parcelles principales, et l'autre pour les traitements des sous-parcelles. Il y aura des estimations différentes de l'erreur dans les deux parties. Ceci ne présente pas de difficultés théoriques.

Une extension du principe de partage des parcelles est d'employer la méthode du « confounding », en liaison avec les traitements appliqués aux parcelles partagées.

Si, par exemple, nous avons une expérience sur des variétés, et la relation des effets des composants d'engrais aux variétés présente de l'intérêt, on peut partager chaque parcelle principale en quatre, les traitements étant attribués à ces quatre sous-parcelles, de l'une des deux façons, à savoir :

$$(1), \quad np, \quad nk, \quad pk$$

ou

$$n, \quad p, \quad k, \quad npk.$$

L'interaction NPK et ses interactions avec les variétés, apparaissent alors dans la partie de l'analyse se rapportant aux parcelles principales. Dans ce type de plan, un équilibre complet est souvent impossible en raison des limitations combinatoires, mais ce fait ne présente pas une grande importance pratique.

Blocs incomplets équilibrés. — Une caractéristique des plans factoriels avec « confounding » est que chaque bloc ne contient pas une répétition complète. Le même principe est utilisé un peu différemment dans les plans de blocs incomplets. Dans un plan de blocs incomplets, le nombre des traitements compris dans l'expérience est plus grand que le nombre de parcelles par blocs. On dit que le plan est équilibré si les traitements sont groupés dans les blocs de telle façon que chaque paire de traitements soit représentée dans le même nombre de blocs. Ainsi, avec 7 traitements, un arrangement de 7 blocs de 3 parcelles est possible, 3 répétitions complètes existant alors (*fig.* 2) :

$$abc, \quad aef, \quad adg, \quad cfg,$$
$$cde, \quad bdf, \quad beg.$$

Fig. 2. — Plan de blocs incomplets équilibré pour 7 traitements en 7 blocs de 3, avec 3 répétitions.

Un plan pour 15 variétés en 35 blocs avec 3 parcelles et 7 répétitions complètes est fourni par la solution du problème classique des écolières de Kirkman. Ce problème envisageait 15 écolières qui devaient se promener à trois en crocodile pendant les 7 jours de la semaine, de telle façon que chaque écolière se promène avec une autre écolière une fois et une fois seulement.

On emploie les blocs incomplets équilibrés lorsque les conditions expérimentales sont d'un type qui conduit naturellement à des groupes uniformes (blocs), qui sont plus petits que le nombre de traitements que l'on désire faire entrer dans l'expérience.

La construction de plans de ce type présente d'intéressants problèmes de combinaisons qui ont fait le sujet d'un grand nombre de recherches au cours de ces quelques dernières années. Je n'ai pas le temps d'entrer dans ce sujet maintenant, mais les personnes que cela intéresse peuvent se reporter à la 3e édition de *Statistical Tables* (de Fisher et moi-même), où elles trouveront une liste de références et une table de plans (comprenant une liste de ceux dont l'existence a été démontrée fausse).

La propriété de l'équilibrage permet d'estimer les traitements et de traiter l'analyse correspondante de variance sans difficulté. Si la solution ordinaire des moindres carrés est utilisée, on trouvera que les effets de traitements sont estimés à partir des contrastes des multiples des quantités,

$$Q_s \equiv T_s - \frac{S(B_s)}{k},$$

où T_s est la somme des rendements de traitements, $S(B_s)$ est la somme de tous les totaux de blocs contenant le traitement s, et k est le nombre d'unités par bloc. Les effets de blocs sont évidemment éliminés et la propriété de l'équilibre résulte du fait que tous les autres traitements sont également représentés dans $S(B_s)$.

La comparaison des traitements par paires est un cas particulier des blocs incomplets. La méthode classique, lorsqu'on emploie des paires est de désigner un traitement, A par exemple, comme témoin, et de comparer tous les autres traitements avec lui. Avec 4 traitements, A, B, C, D, par exemple, et 24 paires en tout, les comparaisons AB, AC et AD seront faites avec 8 répétitions de chaque comparaison. Pour équilibrer, toutes les 6 comparaisons possibles doivent être comprises, chacune d'elles pouvant donc être répétée 4 fois. Pourvu que la variance soit la même pour toutes les comparaisons, ce qui est à peu près réalisé dès lors qu'aucun traitement ne donne une récolte nulle, de sorte que chacun puisse servir de témoin pour les autres, la précision obtenue par des paires équilibrées, pour toutes les comparaisons, est la même que celle obtenue pour les comparaisons entre le témoin et les autres traitements par la méthode de comparaison à un témoin. Je pense que ce fait remarquable fournit un exemple excellent d'un cas où un bon plan donne lieu à un gain en précision pour certaines comparaisons sans aucune perte de précision pour les autres.

Dans de nombreux cas, un grand nombre de répétitions sont nécessaires pour obtenir un équilibre complet. Dans de tels cas, il est parfois possible d'utiliser des plans partiellement équilibrés pour lesquels l'analyse est relativement simple. Ainsi, dans le cas de comparaison par paires, 6 traitements peuvent être comparés en 9 paires (au lieu des 15 nécessaires pour un équilibre complet) qui peuvent être représentées schématiquement par les 6 côtés d'un hexagone et les 3 diagonales passant par le centre.

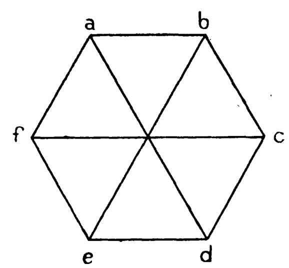

Fig. 3. — Tout partiellement équilibré pour 6 traitements comparés par paires.

Lattice designs [Plans en treillis à bandes croisées [1]]. — Les treillis ou plans quasi factoriels forment une autre classe de plans de blocs incomplets qui conviennent particulièrement pour tester un grand nombre de variétés. Comme simple exemple, nous pouvons considérer un « treillis » à deux dimensions, de deux façons différentes, pour 49 variétés. Aux 49 variétés sont attribuées les nombres, de 1 à 49 au

(1) Note du traducteur.

hasard. Elles sont alors divisées en 7 groupes de 7 de deux façons, formant les rangées et les colonnes du carré représenté à la figure 4 :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	.	.	.	.	14
15	16	.	.	.	.	21
.	.	.	.	.	.	.
43	44	.	.	.	.	49

Fig. 4. — Formation d'un plan en « lattice » (plan à bandes croisées) pour 49 variétés.

Un nombre pair de répétitions, sont arrangées en blocs de 7 parcelles, la moitié des répétitions ayant des blocs composés de la première série de groupes (rangées), et l'autre moitié ayant des blocs composés de la deuxième série de groupes (colonnes). La distribution au hasard pour l'arrangement sur le terrain se fera comme suit :

1° Attribuer une des deux séries de groupes au hasard à la première de chaque paire de répétitions;

2° Attribuer les groupes au hasard aux blocs à l'intérieur d'une répétition;

3° Attribuer les variétés au hasard à l'intérieur de chaque bloc.

Le plan peut donc être regardé comme une façon de subdiviser de grands blocs de 49 parcelles en des blocs plus petits. A cause du manque d'équilibre, il y aura de légères inégalités dans la précision des comparaisons concernant les paires de variétés qui apparaissent dans le même bloc dans un groupement ou un autre, et celles qui n'apparaissent pas dans le même bloc. Mais la différence n'est pas grande. Il y aura aussi une légère perte d'efficacité due au manque d'équilibre.

Au lieu d'utiliser seulement deux séries de groupes pour p^2 variétés, nous pouvons introduire une troisième série orthogonale aux deux autres séries. N'importe quel carré latin de type $p \times p$ donnera une telle série. Ceci est appelé « 3-way lattice » [plan à bandes triplement croisées (1)]. Si le nombre p est premier, on sait qu'il existe une série complète de $p - 1$ carrés latins mutuellement orthogonaux. Dans ce cas $p + 1$ séries de groupes peuvent être prises et il en résulte un type spécial de plan de blocs incomplets équilibrés.

(1) Note du traducteur.

Dans certains types d'expériences, telles que celles des champs d'expériences agricoles, la réduction dans la variance de l'erreur, due à la réduction dans la dimension du bloc, n'est pas nécessairement très grande. Ceci revient à dire que les comparaisons entre blocs elles-mêmes renferment une quantité appréciable d'informations. Il est possible d'évaluer, à partir des résultats expérimentaux eux-mêmes, la précision relative des comparaisons entre blocs et à l'intérieur des blocs, et de mélanger les informations entre blocs et à l'intérieur des blocs en employant une pondération appropriée. Ceci est connu sous le nom de « recovery of interblock information » [récupération de l'information entre les blocs ([1])]. Aussi surprenant que cela paraisse, l'importance de l'analyse numérique est seulement très légèrement accrue.

Si l'on donne un poids égal aux informations entre blocs et à l'intérieur des blocs, ceci revient à analyser l'expérience comme si c'était une expérience ordinaire dans des blocs de p^2 parcelles avec répartition au hasard. L'analyse ordinaire de blocs avec répartition au hasard, fournit aussi une rapide méthode d'analyse que l'on peut employer pour les mensurations secondaires, etc. Il est intéressant de considérer la validité de cette procédure.

N'importe quelle des répétitions dans un plan quasi factoriel est équivalente à un bloc ordinaire avec répartition au hasard. En fait, nous pourrions attribuer les variétés au hasard aux parcelles de la répétition, et prendre la série de groupes ainsi formés comme une des séries de groupes. Là, où le plan diffère d'un plan ordinaire de blocs avec répartition au hasard, c'est que dans les autres répétitions, dans la même série, les mêmes groupes de variétés apparaîtront toujours ensemble. Les comparaisons à l'intérieur de ces groupes seront donc d'une précision quelque peu plus grande que celles entre variétés ne tombant pas dans le même groupe, dans l'une ou l'autre série de répétitions.

On montre facilement, pour la moyenne de toutes les comparaisons des variétés que l'estimation de l'erreur, obtenue par une analyse ordinaire de blocs avec répartition au hasard est correcte. Par conséquent, le seul défaut de l'analyse, excepté le fait que l'on obtient des estimations moins précises, est que les erreurs de comparaisons de variétés, appartenant au même groupe, sont surestimées et celles des variétés

([1]) Note du traducteur.

appartenant à différents groupes sont sous-estimées. Plus les variances entre les blocs et à l'intérieur des blocs sont inégales, plus ce défaut sera important; mais aussi, plus grand sera le gain en information provenant de l'ensemble de l'analyse.

Cette inégalité de variances n'apparaît pas dans les « lattices » équilibrés. Par conséquent, ces plans peuvent être analysés comme s'ils étaient des plans en blocs ordinaires avec répartition au hasard, sans aucune perte de validité, bien que, naturellement, avec quelque perte de précision.

Lattice squares [Carrés à bandes croisées ([1])]. — Il y a de nombreux types différents de plans de *treillis* (plans à bandes croisées). Je mentionnerai, seulement ici, une autre application élégante du principe, à savoir les *lattice squares*.

Les *lattice squares* (carrés à bandes croisées) sont analogues aux carrés latins en ce que la fertilité ou les autres différences en deux dimensions perpendiculaires sont éliminées. Un arrangement en carrés à bandes croisées est seulement possible quand une série complète de carrés orthogonaux existe pour le nombre requis p^2 de variétés. Il a été prouvé que ceci est possible si le nombre p est premier ou puissance de nombre premier. Par contre c'est impossible lorsque $p = 6$, car il a été prouvé par Fisher et moi-même qu'un carré Græco-Latin 6×6 n'existe pas. (Problème d'Euler du carré magique). Une série de carrés pour 25 variétés (avant la répartition au hasard des rangées et des colonnes) est montrée dans la figure 5 :

Carré I.					Carré II.					Carré III.				
1	2	3	4	5	1	13	25	7	19	1	15	24	8	17
6	7	8	9	10	20	2	14	21	8	18	2	11	25	9
11	12	13	14	15	9	16	3	15	22	10	19	3	12	21
16	17	18	19	20	23	10	17	4	11	22	6	20	4	13
21	22	23	24	25	12	24	6	18	5	14	23	7	16	5

Fig. 5. — Groupe équilibré de *lattice squares* pour 25 variétés.

Les 25 variétés sont divisées en 6 séries orthogonales de 5 groupes de 5 variétés. Chaque série de groupes constitue le groupement des rangées ou colonnes de l'un des carrés. Par conséquent, chaque paire de variétés se trouve à la fois dans une rangée ou une colonne de l'un des carrés.

([1]) Note du traducteur.

Le principe de la répartition au hasard restreint. — La question de l'exclusion de modèles particulièrement défavorables, obtenus par répartition au hasard, devient particulièrement aiguë dans le type de plan factoriel connu sous le nom de carré quasi-latin.

Dans un carré quasi-latin, une série d'interactions est confondue avec les rangées d'un carré, et une autre série (orthogonale à la première) avec les colonnes. Ainsi, une simple répétition d'un plan factoriel d'ordre 2^6 peut être disposée dans un carré 8×8 avec les interactions

ACE, ADF, BDE, BCF, ABCD, ABEF, CDEF

confondues avec les rangées, et les interactions

ABF, ADE, BCD, CEF, ABCE, ACDF, BDEF

confondues avec les colonnes. Ainsi 8 des 20 interactions à 3 facteurs sont confondues, mais aucune des interactions à deux facteurs ne s'est confondue.

Ce type de plan a une valeur considérable puisqu'il permet l'élimination des différences de fertilité, ou autres différences, de la même manière que le carré latin, tandis qu'il rend possible l'inclusion de 6 facteurs à 2 niveaux dans un carré 8×8, au lieu des 3 facteurs qui sont seulement possibles, s'il n'y a aucun *confounding*.

Cependant, ainsi qu'on peut le penser, le *confounding* n'est possible qu'avec un type plutôt spécial de carré. Chaque effet principal et chaque interaction, qui n'est pas confondu avec les rangées ou les colonnes, sera, en fait, représenté par un contraste que l'on peut obtenir par la permutation des rangées et des colonnes du carré montré dans la figure 6 :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+	—	+	—	+	—	+	—
2	—	+	—	+	—	+	—	+
3	+	—	+	—	+	—	+	—
4	—	+	—	+	—	+	—	+
5	+	—	+	—	+	—	+	—
6	—	+	—	+	—	+	—	+
7	+	—	+	—	+	—	+	—
8	—	+	—	+	—	+	—	+

Fig. 6. — Contraste de base d'un carré quasi latin, du type 2^6, à 8 rangs et colonnes.

Une de ces permutations, on peut le noter tout de suite, donne le type le plus défavorable de contraste qui est montré dans la figure 7 :

+	+	+	+	−	−	−	−
+	+	+	+	−	−	−	−
+	+	+	+	−	−	−	−
+	+	+	+	−	−	−	−
−	−	−	−	+	+	+	+
−	−	−	−	+	+	+	+
−	−	−	−	+	+	+	+
−	−	−	−	+	+	+	+

Fig. 7. — Le type le plus défavorable de contraste dans un carré quasi latin 8×8.

Tous les carrés, ayant le signe $+$ dans le coin gauche supérieur, engendrés par ces permutations, possèdent la propriété que l'on peut déduire le signe de n'importe quelle case du produit des signes des cases qui lui sont opposées dans la première rangée et la première colonne. N'importe quel carré de ce type est donc défini par les signes de la première rangée et de la première colonne, qui peuvent chacun être réarrangés au hasard, avec un signe $+$ à la première place. Il y a 35 arrangements de ce genre, et, par conséquent, il y a 35×35 contrastes différents. Dans n'importe quel carré quasi latin 8×8, du type 2^6, tel que celui qui vient d'être considéré, les 49 effets principaux et interactions, non confondus, seront représentés par un groupe de 49 de ces contrastes. Ce groupe sera engendré par toutes les combinaisons de 7 arrangements, réciproquement orthogonaux pour les rangées, avec 7 autres arrangements réciproquement orthogonaux pour les colonnes (Table 2) :

Arrangements.								
1	+	+	+	−	−	−	+	−
2	+	+	−	−	−	+	−	+
3	+	+	−	+	+	−	−	−
4	+	−	+	−	+	+	−	−
5	+	−	+	+	−	−	−	+
6	+	−	−	+	−	+	+	−
7	+	−	−	−	+	−	+	+

Table 2. — Série de 7 arrangements réciproquement orthogonaux.

Si l'on choisit, pour engendrer le groupe de 49 contrastes, la série réciproquement orthogonale du Tableau 2 d'arrangements à la fois pour les rangées et pour les colonnes, on obtiendra le type de contraste dans lequel les + et les — sont les plus groupés, lorsque l'on prend le premier arrangement à la fois pour les rangées et pour les colonnes. Ceci engendre le contraste que montre la figure 8 :

+	+	+	—	—	—	+	—
+	+	+	—	—	—	+	—
+	+	+	—	—	—	+	—
—	—	—	+	+	+	—	+
—	—	—	+	+	+	—	+
—	—	—	+	+	+	—	+
+	+	+	—	—	—	+	—
—	—	—	+	+	+	—	+

Fig. 8. — Contraste obtenu en prenant l'arrangement 1 de la Table 2 pour la première colonne et la première rangée.

La condition pour une estimation correcte de l'erreur sera satisfaite si nous nous assurons que, à chacun des 49 degrés de liberté pour les effets et interactions non confondus, est donnée une égale probabilité d'attribution aux 49 contrastes du groupe engendré. Ceci est facilement effectué. Par cette restriction du processus de la répartition au hasard, nous excluons à la fois le contraste très favorable de la figure 5 et le contraste très défavorable de la figure 6.

On peut se demander pourquoi l'exclusion du contraste de la figure 5 prend de l'importance dans le carré quasi latin, mais non dans un carré latin 8×8 portant un plan factoriel du type 2^3, où quelque effet principal ou quelque interaction peuvent aussi être représentés par hasard par ce contraste; c'est que, dans le second cas, la probabilité de cette circonstance est extrêmement faible, tandis que dans le carré quasi latin, il y a une chance sur 25 que ce contraste se produise, et trois chances sur 175 qu'il soit associé avec l'un des effets principaux ou avec les interactions à deux facteurs.

On doit aussi considérer l'effet de la répartition au hasard restreint sur la distribution z.

L'emploi de la répartition au hasard restreint réduira nettement la fréquence de l'arrivée, aussi bien de très grandes que de très petites valeurs de z. Il apparaîtra que la distribution z sera améliorée par l'exclusion de ces valeurs extrêmes, mais que dans les plans ordinaires d'expériences, dans lesquels les arrangements extrêmes sont très rares, l'amélioration ne sera pas appréciable.

D'autre part, ce n'est pas une consolation pour un expérimentateur, mis en face d'un arrangement extrême dans un plan d'expérience ordinaire, de s'entendre dire que cela arrive seulement très rarement. L'extension du principe, à d'autres types de plans, représente donc de l'intérêt. On a déjà fait certains travaux dans ce sens et j'espère qu'il sera bientôt possible de faire connaître de nouveaux progrès.

Expériences avec permutation circulaire des traitements. — Les expériences sur les animaux, et les expériences à longs termes sur les récoltes agricoles, introduisent la possibilité d'imposer une succession de traitements à la même unité expérimentale. Ceci introduit un certain nombre de nouveaux problèmes, que je n'ai pas la place de discuter complètement ici. Cependant, je citerai, comme simple exemple, un type de plan d'expériences avec un arrangement cyclique de traitements, qui est devenu récemment populaire pour les expériences sur la nourriture des vaches laitières.

La figure 9 montre un plan pour trois traitements sur des groupes de vaches en nombre multiple de 6 :

	Vache.					
Période.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I	A	B	C	A	B	C
II	B	C	A	C	A	B
III	C	A	B	B	C	A

Fig. 9. — Plan pour une expérience, avec permutation, sur des vaches laitières.

Chaque vache reçoit chacun des trois traitements dans une des trois périodes de l'expérience, comme dans le schéma ci-dessus, chaque groupe de 6 vaches étant divisé en 2 blocs de 3 vaches, auxquelles sont attribués au hasard les nombres 1 à 3 et 4 à 6. Par ce plan, on éliminera, à la fois, les différences de périodes et de vaches, des comparaisons de traitements.

A première vue, il apparaît que ce plan est équivalent à une paire de carrés latins 3×3 et, par conséquent, ne donne donc pas lieu à de nouveaux problèmes. Ce sera le cas en effet si les effets résiduaires des traitements ne sont pas pris en considération. Cependant, souvent les effets résiduaires sont importants dans les expériences sur la nourriture des animaux. On peut les estimer par la méthode ordinaire des moindres carrés, en introduisant des constantes supplémentaires, mais les conséquences sont quelque peu gênantes.

Tout d'abord, non seulement la précision de la détermination des effets directs est considérablement réduite, avec une perte semblable de la précision des effets résiduaires, mais la somme des effets directs et résiduaires — qui, pour de nombreux buts, doivent être regardés comme étant la mesure de l'effet total des traitements — est même plus petite que ne l'indiqueraient les erreurs séparées des effets directs et des effets résiduaires.

En second lieu, l'estimation de l'erreur se trouve faussée, les différences entre vaches et entre périodes, des types I—III et I—2×II+III, entrant en des proportions différentes dans les composantes de traitements et d'erreurs, de l'analyse de la variance.

On peut décidément accroître la précision du plan en introduisant une quatrième période avec un traitement uniforme, ou par d'autres procédés semblables. Mais le fait reste que le plan est beaucoup moins attrayant qu'il apparaît à première vue. Il fournit une méthode très sensible pour détecter de petites différences de traitements que l'on peut s'attendre à voir se manifester principalement dans la période pendant laquelle le traitement est appliqué, mais, pour l'estimation de l'effet total de traitements qui produisent des effets substantiels, l'emploi de traitements continus avec covariances à partir des rendements de lait préliminaires à l'expérience, peut être plus satisfaisant.

Ces quelques exemples concernant certains développements récents dans la planification des expériences n'épuisent naturellement pas le sujet; leur but était d'en rendre sensible à la fois la complexité et l'étendue et de mettre en évidence dans une certaine mesure les avantages qu'on peut tirer de l'établissement préalable d'une bonne planification.