ANNALES DE L'I. H. P.

C. MÖLLER

Sur la dynamique des systèmes ayant un moment angulaire interne

Annales de l'I. H. P., tome 11, nº 5 (1949), p. 251-278

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_5_251_0>

Sur la dynamique des systèmes ayant un moment angulaire interne

par

C. MÖLLER.

On peut montrer que les difficultés bien connues que l'on rencontre dans la théorie de l'électron et dans la théorie des autres particules élémentaires sont dues à deux sortes de singularités :

1° les singularités qui sont liées à une image ponctuelle de l'électron et qui existent déjà dans la théorie classique;

2° les singularités de fluctuations qui ont essentiellement leur origine dans les théories quantiques (1).

De nombreuses tentatives ont été faites pour remédier aux singularités du premier type. Abraham et Lorentz (2) ont représenté l'électron comme un système petit mais fini possédant une charge électrique uniformément répartie et Lorentz a même émis l'hypothèse que toute la masse de l'électron serait d'origine électromagnétique. Cependant, on s'aperçut vite que le principe de relativité exige l'existence de forces et d'énergies non électromagnétiques à l'intérieur de l'électron, tout au moins si l'on suppose que les équations de Maxwell sont valables d'une façon générale. Ces considérations ont conduit Poincaré (3) à son modèle bien connu de l'électron dans lequel les forces répulsives de Coulomb sont contrebalancées par des forces de cohésion de nature inconnue. Le modèle de Poincaré fournit une image classique cohérente de l'électron qui satisfait à toutes les conditions de la théorie

(1) W. PAULI, *Difficulties of Field Theories and of Field Quantization* (*Report of the International Conference in Cambridge*, 1946, Vol. I. Fundamental Particles, p. 5. Taylor and Francis, Ltd., 1947).

(2) *Cf.*, par exemple, H. A. LORENTZ, *On the Theorie of the Electrons.*

(3) H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron* (*Rend. Pal.*, t. 21, 1906, p. 129).

de la relativité. La théorie de Poincaré est essentiellement une théorie dualistique. Mie [4] fut le premier à introduire l'idée d'une théorie unitaire du champ dans laquelle tous les phénomènes électromagnétiques sont décrits par un seul champ. A l'intérieur de l'électron, celui-ci doit être différent du champ électromagnétique tiré des équations de Maxwell. La théorie de Mie dut être abadonnée, car elle est en contradiction avec des faits physiques bien établis. Par la suite, Born [5] reprit l'idée d'une théorie unitaire des phénomènes électrodynamiques et réussit à développer une théorie électrodynamique non linéaire cohérente.

Bien qu'il ne soit pas du tout certain, ni même peut-être vraisemblable qu'une théorie quantique des électrons et des champs électromagnétiques puisse être obtenue par simple quantification des équations considérées par Poincaré et Born, il n'est tout de même pas sans intérêt de rechercher dans quelle mesure il est possible d'attribuer les propriétés d'une particule à un petit système classique de dimension finie. Par *particule classique avec spin* nous entendons ici un système qui est défini par ses coordonnées d'espace-temps, son quadrivecteur énergie impulsion, et son moment cinétique interne.

D'après la théorie de la relativité, un système aux dimensions finies a un nombre infini de degrés de liberté et il semble difficile de décrire un tel système par une particule qui a un nombre fini de degrés de liberté. Il s'agit de savoir s'il est en général possible de définir un point du système dont la position puisse être considérée comme celle d'une particule représentant le système.

En mécanique newtonienne et pour un système arbitraire, un tel point est fourni par le centre de gravité. Le mouvement de ce dernier est en effet identique à celui d'une particule dont la masse, la quantité de mouvement et l'énergie sont respectivement égales aux grandeurs correspondantes du système. On peut de plus attribuer au centre de gravité un moment cinétique interne égal au moment cinétique que possède le système par rapport à son centre de gravité. Dans ce travail nous discuterons le problème suivant : dans quelle mesure un point

---

[4] G. Mie, *Grundlagen einer Theorie der Materie* (*Ann. d. Phys.*, t. 37, 1912, p. 511; 39, 1912, p. 1).

[5] M. Born, *Proc. Roy. Soc.*, A 143, 1934, p. 410.

représentatif peut-il être défini pour un système relativiste quelconque. Dans le premier Chapitre nous considérerons un système libre sans forces extérieures, dans le second le cas général d'un système classique soumis à des forces extérieures données.

Dans une série d'articles parus aux *Acta Physica Polonica*, Mathisson (6) et Weyssenhoff (7) ont développé une théorie classique des particules à spin. Cette théorie a pour base, d'une part les principes de la relativité, d'autre part de nouvelles hypothèses; les équations du mouvement d'une particule à spin obtenues par ces auteurs ont des conséquences étranges. Étant donné qu'une particule peut être considérée comme la limite des systèmes que nous allons envisager ici, notre étude va nous donner une meilleure compréhension du sens et de l'interprétation physique des équations de Mathisson.

I. — DÉFINITION DU CENTRE DE GRAVITÉ DES SYSTÈMES LIBRES DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ.

Considérons en relativité restreinte un système quelconque fini et isolé, c'est-à-dire un système qui ne soit pas soumis à des forces extérieures, mais dont les constituants ont des interactions arbitraires. La définition du centre de gravité d'un tel système a été discutée dans une série de conférences faites à Dublin en 1947 et publiées dans les *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies* (8). Nous allons donner ici un aperçu des principaux résultats de cet article sans entrer dans tous les détails des démonstrations. Le système considéré est défini par son tenseur énergie-impulsion $T_{ik} = T_{ik}(x_l)$ qui est une fonction des coordonnées d'espace-temps

$$x_i = \{x, y, z, t, ict\} = \{\mathbf{x}, ict\}.$$

x, y, z sont les composantes du rayon vecteur $\mathbf{x}$ dans un référentiel de Lorentz arbitraire S, t est la variable de temps, c la vitesse de la lumière,

(6) M. MATHISSON, *Acta Phys. Pol.*, VI, 1937, p. 163 et 218.

(7) T. W. WEYSSENHOFF, *Nature*, 1938, p. 328; *Acta Phys. Pol.*, XI, 1947, p. 1-62.

(8) C. MØLLER, *On the Definition of the Centre of Gravity of an Arbitrary Closed System in the Theory of Relativity*. Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A No 5. La plupart des résultats contenus dans cet article ont été obtenus indépendamment par M. H. L. Pryce dans un travail au *Proc. Roy. Soc. London.* A vol. 195 (1948) p. 62.

$\ddot{\imath}$ représente une quantité dont le carré est égal à -1. (Il est commode d'employer ce symbole $\ddot{\imath}$ pour le différencier du i qui intervient dans les relations de commutation de la mécanique quantique.)

Pour un système libre, nous avons l'équation fondamentale

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{1}$$

Nous faisons la convention de sommer les indices muets (indices répétés deux fois) de 1 à 4 pour les indices en caractères romains, de 1 à 3 seulement pour les indices en caractères grecs.

Posons

$$\frac{1}{\ddot{\imath}c} T_{i4} = \frac{1}{\ddot{\imath}c} T_{4i} = g_i = \left\{ \mathbf{g}, \frac{\ddot{\imath}}{c} h \right\}; \tag{2}$$

$\mathbf{g}$ et h sont respectivement la densité de quantité de mouvement et d'énergie. Pour $i = 4$ l'équation (1) s'écrit

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_k} = 0. \tag{3}$$

Il résulte de (1) que les quatre quantités

$$P_i = \int g_i(\mathbf{x}, t)\, dV = \left\{ \mathbf{P}, \frac{\ddot{\imath}}{c} H \right\} \tag{4}$$

obtenues par intégration sur tout l'espace ordinaire à des instants donnés, sont indépendantes de t et se transforment dans une transformation de Lorentz comme les composantes d'un quadrivecteur.

Les constantes du mouvement $\mathbf{P}$, H représentent respectivement l'impulsion totale et l'énergie totale du système.

La quantité invariante M_0 définie par l'équation

$$P_i P_i = -M_0^2 c^2 \tag{5}$$

est aussi indépendante du temps et détermine la masse propre du système global. Dans la référence de Lorentz S^0 où l'impulsion $\mathbf{P}^0$ est nulle, nous avons évidemment

$$P_i^0 = \{ 0, 0, 0, \ddot{\imath} M_0 c \}. \tag{6}$$

La vitesse de S^0 par rapport au référentiel de Lorentz S est donnée par

$$\mathbf{U} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{H}. \tag{7}$$

De façon analogue, il résulte de (1) et de la symétrie du tenseur énergie-impulsion que les quantités

$$M_{ik} = - M_{ki} = \int (x_i g_k - x_k g_i)\, dV \tag{8}$$

sont les composantes d'un tenseur antisymétrique, indépendant du temps. Ce tenseur à quatre dimensions est le tenseur de moment cinétique par rapport à l'origine arbitraire de notre référentiel d'espace-temps.

En mécanique newtonienne les coordonnées du centre de gravité d'un système dont la densité de masse est $\mu(\mathbf{x}, t)$ sont données par le vecteur

$$\mathbf{X} = \frac{1}{M} \int \mu(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{x}\, dV, \tag{9}$$

où

$$M = \int \mu\, dV$$

est la masse totale du système. Le centre de gravité est donc centre de masse, sa position étant en un sens la position moyenne de la masse du sytème.

Mais d'après la théorie de la relativité, toute quantité d'énergie correspond à une quantité de masse d'inertie donnée par la relation bien connue d'Einstein. Soit $h(\mathbf{x}, t)$ la densité d'énergie du système, la densité de masse correspondante $\mu(\mathbf{x}, t)$ est donnée par l'équation

$$h = \mu c^2. \tag{10}$$

Dans un référentiel de Lorentz donné S, la position du centre de masse est déterminée par l'équation

$$\mathbf{X}(S) = \frac{1}{H} \int h(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{x}\, dV \tag{11}$$

A l'aide de (3) et de (4) on voit facilement que le point défini par (11) est animé d'une vitesse constante

$$\frac{d\mathbf{X}(S)}{dt} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{H} = \mathbf{U}, \tag{12}$$

c'est-à-dire de la même vitesse que le sytème S^0 dans lequel la quantité de mouvement totale est zéro.

Une étude plus approfondie montre que le point défini par (11) dépend du référentiel de Lorentz S dans lequel l'intégrale du deuxième membre de (11) est calculée. Ceci veut dire que les centres de masse dans deux référentiels de Lorentz différents sont en général deux points différents. En fait, dans un système physique quelconque, il y a un nombre infini de centres de masse correspondant aux différents référentiels de Lorentz S. Pour le système spécial constitué par un certain nombre de particules sans interaction mutuelle, ceci a déjà été signalé par Fokker ([9]).

D'après (12) tous les centres de masse sont au repos dans le référentiel S^0 qui est donc leur référentiel propre. L'un joue un rôle spécial : le centre de masse appartenant au référentiel S^0 lui-même. Nous appellerons ce point, dont le rayon vecteur est $\mathbf{X} = \mathbf{X}(S^0)$, le centre de gravité du système. Dans le référentiel propre S^0 ce rayon vecteur a la valeur constante

$$\mathbf{X}^0 = \frac{c^2}{H}\int \frac{h^0(\mathbf{x}^0, t^0)}{c^2}\,\mathbf{x}^0\,dv^0 = \frac{1}{M_0}\int h^0(\mathbf{x}^0, t^0)\,\mathbf{x}^0\,dv^0. \tag{13}$$

Soient X_i les coordonnées d'espace-temps du centre de gravité ainsi défini dans un référentiel de Lorentz quelconque. Si τ est le temps propre, $X_i = X_i(\tau)$ est une fonction linéaire de τ et le quadrivecteur vitesse correspondant a la valeur constante

$$U_i = \frac{dX_i}{d\tau} = \frac{P_i}{M_0}. \tag{14}$$

Nous définissons maintenant le tenseur quadridimensionnel m_{ik}, représentant le moment cinétique interne par rapport au centre de gravité, par les équations

$$m_{ik} = \int [(x_i - X_i)\,g_k - (x_k - X_k)\,g_i]\,dv = M_{ik} - (X_i P_k - X_k P_i). \tag{15}$$

A l'aide de (14) nous obtenons

$$\frac{dm_{ik}}{d\tau} = -(U_i P_k - U_k P_i) = 0. \tag{16}$$

Ainsi $m_{ik} = -m_{ki}$ est un tenseur antisymétrique constant.

([9]) A. D. Fokker, *Relativiteitstheorie*, p. 170. Nordhoff, Groningen, 1929.

Introduisons deux vecteurs d'espace $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ définis par

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathbf{m} = \{ m_x,\ m_y,\ m_z \} = \{ m_{23},\ m_{31},\ m_{12} \}, \\ i\mathbf{n} = i \{ n_x,\ n_y,\ n_z \} = \{ m_{14},\ m_{24},\ m_{34} \}. \end{cases}$$

De (15) nous déduisons que

$$(18)\qquad \mathbf{m} = \int (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times \mathbf{g}\, dv$$

est le vecteur moment cinétique par rapport au centre de gravité, que nous appellerons moment cinétique interne. De plus, de (17) et de (15) nous déduisons que, si nous prenons $x_4 = X_4(\tau)$, nous avons

$$(19)\qquad \mathbf{n} = \int (\mathbf{x} - \mathrm{X}) \frac{h(\mathbf{x}, t)}{c}\, dv \Big|_{x_4 = X_4} = \frac{1}{c} \int h\, \mathbf{x}\, dv - \mathbf{X} \frac{\mathrm{H}}{c}.$$

Il est entendu que la variable de temps $x_4 = ict$ dans les intégrales doit être prise égale à la variable de temps X_4 du centre de gravité.

La première expression de $\mathbf{n}$ dans (19) montre que $\frac{\mathbf{n}}{c}$ est égal au moment de masse du système par rapport au centre gravité.

De la dernière expression de $\mathbf{n}$ dans (19) nous obtenons, compte tenu de (11),

$$(20)\qquad \mathbf{X} = \frac{1}{\mathrm{H}} \int h\, \mathbf{x}\, dv \Big|_{x_4 = X_4} - \frac{c\mathbf{n}}{\mathrm{H}} = \mathbf{X}(\mathrm{S}) - \frac{c\mathbf{n}}{\mathrm{H}},$$

où $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}(\mathrm{S})$ correspondent respectivement à deux positions simultanées du centre de gravité et du centre de masse dans S. Ainsi nous voyons que le centre de gravité est un centre de masse dans tout référentiel de Lorentz si, et seulement si, le tenseur moment cinétique interne m_{ik} est égal à zéro, c'est-à-dire dans le cas d'un système sans spin.

Dans le référentiel propre S^0, le centre de gravité est par définition identique au centre de masse. Par conséquent, le vecteur $\mathbf{n}$ doit être nul dans S^0, c'est-à-dire

$$(21)\qquad \mathbf{n}^0 = 0, \qquad m^0_{i4} = 0.$$

Cette relation est identique à la relation invariante

$$(22)\qquad m_{ik} \mathrm{P}_k = 0,$$

comme on le déduit de (6) et de (21) si (22) est écrit dans le référentiel S^0.

En raison de (14) l'équation (22) doit aussi être écrite

$$m_{ik} U_k' = 0, \tag{23}$$

qui, par suite, sous une forme invariante, exprime la condition que le centre de gravité est le centre de masse dans son référentiel propre.

Si nous choisissons la même orientation pour les axes d'espace dans S et S^0, le référentiel de Lorentz S est défini d'une façon unique par S^0 et par le vecteur

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{H} \tag{24}$$

représentant la vitesse relative de S^0 par rapport à S.

Des propriétés de transformation d'un tenseur antisymétrique m_{ik} nous obtenons, d'après (21),

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25}$$

où $\mathbf{m}^0$ est le moment cinétique interne dans S^0.

La différence entre les positions simultanées du centre de gravité et du centre de masse dans le système S est donnée, d'après (20), (24) et (25), par le vecteur d'espace indépendant du temps

$$\mathbf{a}(S) = \mathbf{X}(S) - \mathbf{X} = \frac{c\mathbf{n}}{H} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}^0}{M_0 c^2}. \tag{26}$$

Comme le passage de S à S^0 se fait par une transformation de Lorentz sans rotation des axes d'espace et comme $\mathbf{a}$ est perpendiculaire à la vitesse relative $\mathbf{v}$, la distance mesurée dans S^0 est donnée par le vecteur d'espace $a^0(S)$ qui est égal à $\mathbf{a}(S)$ dans (26), c'est-à-dire

$$\mathbf{a}^0(S) = \mathbf{a}(S) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}^0}{M_0 c^2}. \tag{27}$$

Dans le référentiel propre S^0 tous les centres de masse obtenus par variation de S ou $\mathbf{v}$ dans (27) ont pour lieu le cercle perpendiculaire au moment cinétique interne $\mathbf{m}^0$ et dont le rayon est

$$\rho = \frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}. \tag{28}$$

Nous appellerons par la suite le cercle « le disque des centres masse » ou tout simple « disque ». Le centre de ce disque est le point $C = C(S^0)$ qui a été appelé centre de gravité du système. Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ est décomposé en somme de deux vecteurs $\mathbf{v}_\perp$ et $\mathbf{v}_\parallel$ respectivement perpendiculaire et parallèle à $\mathbf{m}^0$, nous voyons que $\mathbf{a}^0(S)$ dans (27) dépend uniquement de la composante perpendiculaire $\mathbf{v}_\perp$. Chaque point du disque est ainsi un centre de masse dans une infinité de systèmes S qui correspondent aux différentes valeurs de $\mathbf{v}_\parallel$ comprises dans l'intervalle $-\sqrt{c^2 - \mathbf{v}_\perp^2} \leqq \mathbf{v}_\parallel \leqq \sqrt{c^2 - \mathbf{v}_\perp^2}$. Le disque des centres de masse est au repos dans S^0 et par conséquent se déplace dans un système arbitraire S comme un corps rigide avec une vitesse constante.

Considérons un système qui dans S^0 est tout entier contenu à l'intérieur d'une sphère de centre C et de rayon r, c'est-à-dire un système dont toutes les composantes du tenseur énergie-impulsion sont nulles à l'extérieur de cette sphère. Si, de plus, nous supposons que la densité d'énergie h est positive dans tout référentiel, il est clair que le disque des centres de masse doit être tout entier à l'intérieur de la sphère. En effet, si nous considérons un point arbitraire C(S) sur le disque, ce point sera centre de masse dans le référentiel de Lorentz S, et comme h est positif, il doit être à l'intérieur du système.

Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$r \geqq \frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}. \tag{29}$$

En d'autres termes : *un système classique qui a une densité d'énergie positive, un moment cinétique interne donné* $|\mathbf{m}^0|$ *et une masse propre donnée* M_0 *a toujours des dimensions finies qui dans le système du centre de gravité sont données par* (29). Si le système est plus petit, la densité d'énergie h ne peut pas être partout positive dans tous les référentiels.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, Mathisson ([6]) et Weyssenhof ([7]) ont développé une théorie du mouvement des particules classiques à spin d'après laquelle le mouvement d'une telle particule ne serait pas déterminé d'une façon unique par la position et la vitesse initiales de la particule; en effet, les équations du mouvement ont un nombre infini de solutions pour des valeurs initiales données de ces quantités. Dans le cas d'une particule libre, ces solutions correspondent à des mouvements circulaires autour d'un centre qui lui-même se déplace avec une vitesse constante. En raison de la ressemblance entre ce mouvement et le *tremblement* de Schrœdinger d'un électron de Dirac, Mathisson et Weyssenhof ont considéré la particule de Mathisson comme l'image classique de l'électron de Dirac.

Puisqu'une particule peut être considérée comme le cas limite du système général considéré ici, et puisque le centre de gravité de tout système libre se déplace avec une vitesse constante, les coordonnées des particules de Mathisson ne peuvent évidemment pas être identifiées avec les coordonnées du centre de gravité comme il a été défini ci-dessus.

Cependant, dans un système physique quelconque, il existe, comme nous le verrons, un certain nombre de points qui ont des propriétés très semblables à celles du centre de gravité, et une étude plus approfondie montre que les équations de Mathisson sont en fait les équations du mouvement de ces pseudo-centres de gravité. L'existence d'une infinité de solutions de ces équations indique simplement qu'il y a une infinité de ces pseudo-centres de gravité pour tout système qui possède un moment cinétique interne. Parmi tous les centres de masse du disque le centre de gravité seul a la propriété d'être un centre de masse dans son référentiel propre S^0. Tout autre point $C(S)$ dont le rayon vecteur $a^0(S) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}^0}{M_0 c^2}$ est un centre de masse dans un système S qui se déplace avec la vitesse $-\mathbf{v}$ par rapport à son référentiel propre S^0. Maintenant, imaginons que le disque rigide considéré ci-dessus soit mis en rotation autour du centre de gravité C avec une vitesse angulaire constante

$$\boldsymbol{\omega}^0 = -\frac{M_0 c^2}{|\mathbf{m}^0|^2}\,\mathbf{m}^0. \tag{30}$$

$\boldsymbol{\omega}^0$ est donc un vecteur de même direction que $\mathbf{m}^0$ de sens opposé et de longueur

$$|\omega^0| = \frac{M_0 c^2}{|\mathbf{m}^0|}. \tag{31}$$

Tout point fixe p sur le disque en rotation sera donc à tout instant un centre de masse dans son référentiel propre instantané; car, si $\mathbf{r}^0(p)$ est le rayon vecteur à l'instant considéré, la vitesse de ce point dans le système S^0 est

$$\mathbf{u}^0 = (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{r}^0) = \frac{M_0 c^2}{|\mathbf{m}_0|^2}(\mathbf{r}^0 \times \mathbf{m}^0)$$

ou, puisque $\mathbf{r}^0$ est perpendiculaire à $\mathbf{m}^0$ et à $\mathbf{u}^0$

$$\mathbf{r}^0 = \frac{(-\mathbf{u}^0 \times \mathbf{m}^0)}{M_0 c^2}. \tag{32}$$

La comparaison de (32) et de (27) montre que p est le centre de masse dans un référentiel de Lorentz S^* animé relativement à S^0 d'une vitesse $\mathbf{u}^0$, c'est-à-dire que S^* est le référentiel propre instantané du point p. Ainsi tout point du disque en rotation est un pseudo-centre de gravité qui, à chaque instant, est centre de masse dans son référentiel propre instantané. Le nombre de ces pseudo-centres de gravité est égal au nombre de points du disque de rotation. La distance $r^0(p)$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre o et ρ défini par (28)

$$0 \leqq r^0(p) \leqq \frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}. \tag{33}$$

La vitesse de p tend vers la vitesse de la lumière c lorsque $r^0(p)$ tend vers la limite supérieure ρ; en effet,

$$u^0(p) = r^0 \omega^0 = r^0 \frac{M_0 c^2}{|\mathbf{m}^0|} \to c \tag{34}$$

quand

$$r^0 \to \frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}.$$

Nous allons voir maintenant que les équations de mouvement de ces pseudo-centres de gravité sont identiques aux équations de Mathisson. Soient $x_i^{(p)}$ les coordonnées d'espace-temps d'un pseudo-centre de gravité dans un référentiel de Lorentz arbitraire et soit τ le temps propre correspondant.

Le tenseur quadridimensionnel Ω_{ik} représentant le moment cinétique par rapport au point $x_i^{(p)}$ est donné par

$$\Omega_{ik} = \int [(x_i - x_i^{(p)}) g_k - (x_k - x_k^{(p)}) g_i] \, dV = M_{ik} - (x_i^{(p)} P_k - x_k^{(p)} P_i). \tag{35}$$

En dérivant (35) par rapport au temps propre τ nous obtenons

$$\dot{\Omega}_{ik} = \frac{d\Omega_{ik}}{d\tau} = -(u_i P_k - u_k P_i), \tag{36}$$

où

$$u_i = \frac{dx_i^{(p)}}{d\tau}$$

est le quadrivecteur vitesse du point p et satisfait aux équations

$$(37) \qquad u_i u_i = -c^2, \qquad u_i = \frac{dx_i^{(p)}}{d\tau}.$$

Si $S^*(\tau)$ est le référentiel propre de p correspondant à l'instant τ, p est par définition le centre de masse dans S^* à cet instant. Par une discussion analogue à celle que nous avons faite dans le cas du centre de gravité, nous pouvons conclure que les composantes mixtes d'espace et de temps de Ω_{ik} doivent être nulles dans S^*, c'est-à-dire

$$\Omega_{i4}^* = 0$$

équation qui peut être écrite d'une façon invariante

$$(38) \qquad \Omega_{ik} u_k = 0,$$

par analogie avec (23). En y portant l'expression (35) pour Ω_{ik} on a

$$(39) \qquad M_{ik} u_k - x_i^{(p)}(P_k u_k) + P_i(x_k^{(p)} u_k) = 0$$

et par dérivation par rapport à τ et à l'aide de (37)

$$(40) \qquad M_{ik} \dot{u}_k - u_i(P_k u_k) - x_i^{(p)}(P_k \dot{u}_k) + P_i(-c^2 + x_k^{(p)} \dot{u}_k) = 0.$$

En multipliant cette équation par $\dot{u}_i$ nous obtenons, puisque M_{ik} est antisymétrique et que $u_i \dot{u}_i = 0$,

$$(41) \qquad P_i \dot{u}_i = \frac{d}{d\tau}(P_i u_i) = 0.$$

L'invariant $P_i u_i$ est ainsi une constante du mouvement. Dans le référentiel propre instantané S^* nous avons

$$u_i^* = \{0, 0, 0, ic\},$$

et par suite

$$(42) \qquad P_i u_i = icP_4^* = -E^* = -M^* c^2,$$

où M^* est la masse totale du système dans S^*. Cette masse est donc indépendante de τ.

En multipliant (35) par $\dot{u}_k$ nous obtenons à l'aide de (41)

$$(43) \qquad \Omega_{ik} \dot{u}_k = M_{ik} \dot{u}_k + P_i(x_k^{(p)} \dot{u}_k).$$

En tenant compte de (42) et (43) les équations (40) s'écrivent

$$(44) \qquad P_i = M^* u_i + \frac{\Omega_{ik} \dot{u}_k}{c^2} = M^* u_i + \pi_i$$

avec

(45) $$\pi_i = \frac{\Omega_{ik}\,\dot{u}_k}{c^2}$$

et $\pi_i u_i = 0$ à cause de (38); par suite

(46) $$P_i P_i = -M_0^2 c^2 = -M^{*2} c^2 + \pi_i \pi_i.$$

Si l'on multiplie (36) par $\dot{u}_k$ on a, en tenant compte de (37) et de (41),

(47) $$\dot{\Omega}_{ik}\,\dot{u}_k = 0.$$

Par dérivation de l'équation (44) on obtient alors, en se rappelant que M^* est constant, les équations suivantes pour le mouvement des pseudo-centres de gravité

(48 *a*) $$M^*\,\dot{u}_i + \frac{\Omega_{ik}\,\ddot{u}_k}{c^2} = 0.$$

Introduisons de plus (44) dans (36); il vient

(48 *b*) $$\dot{\Omega}_{ik} + \frac{1}{c^2}(u_i \Omega_{kl}\,\dot{u}_l - \Omega_{il}\,\dot{u}_l u_k) = 0.$$

Les équations (48 *a*) et (48 *b*) jointes à l'équation (38) sont formellement identiques aux équations données par Mathisson pour le mouvement d'une particule à spin. Les équations (42) et (44) représentent les intégrales premières des équations (48). On voit immédiatement que

(49) $$u_i = U_i = \text{const.}, \qquad \Omega_{ik} = m_{ik} = \text{const.}$$

est une solution des équations (48).

Cette solution correspond au mouvement du centre gravité. Dans ce cas $\dot{u}_i = 0$ et nous avons d'après (45), (46) et (44)

(50) $$\pi_i = 0, \qquad M^* = M_0; \qquad P_i = M^* u_i = M_0 U_i.$$

Toutes les autres solutions de (48) et (38) pour des valeurs données de M_0 et $\mathbf{m}^0$ correspondent, comme on le voit facilement, aux mouvements des points p sur le disque en rotation considéré. Pour toutes ces solutions le quadrivecteur π_i est différent de zéro et $M^* > M_0$, c'est-à-dire le quadrivecteur P_i n'est pas proportionnel à u_i, mais a une composante π_i qui est perpendiculaire à u_i. Le centre de gravité, seul, satisfait à la fois aux équations (38) et (50).

II. — DYNAMIQUE DES SYSTÈMES SOUMIS A DES FORCES EXTÉRIEURES.

Considérons maintenant un système arbitraire soumis à des forces extérieures données. Nous traiterons d'abord le cas où les forces extérieures ne sont pas des forces de gravitation. Dans un référentiel de Lorentz déterminé, ces forces sont alors décrites par un quadrivecteur

$$f_i = \left\{ \mathbf{f}, \frac{i}{c}\mathbf{q} \right\}, \tag{51}$$

où $\mathbf{f}$ représente la densité de force et $\mathbf{q}$ l'énergie dépensée par unité de temps et de volume. Au lieu de (1) nous avons maintenant

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i, \tag{52}$$

où T_{ik} est à nouveau le tenseur énergie-impulsion de notre système. Le domaine de l'espace à quatre dimensions dans lequel $T_{ik} \neq 0$ est un tube dont la direction est du genre temps.

Nous essayerons maintenant de déterminer la ligne d'univers du centre de gravité de notre système. Soit L une courbe ayant en chacun de ses points une tangente dont la direction est du genre temps. L peut alors être considéré comme la ligne d'univers d'un point mobile que nous appellerons le point représentatif. Si $x_i^{(r)}$ sont les coordonnées d'espace-temps de ce point représentatif et τ le temps propre correspondant, L sera déterminé si les $x_i^{(r)}$ sont donnés comme fonctions du paramètre τ

$$x_i^{(r)} = x_i^{(r)}(\tau). \tag{53}$$

Le quadrivecteur vitesse $u_i = \frac{dx_i}{d\tau}$ du point représentatif vérifie les équations

$$\left\{ \begin{aligned} u_i u_i &= -c^2, \\ u_i \dot{u}_i &= 0, \end{aligned} \right. \tag{54}$$

où le point indique la différentiation par rapport à τ.

Considérons un point quelconque $p(\tau)$ de L correspondant à une valeur déterminée de τ et soit $V(\tau)$ l'hyperplan à trois dimensions perpendiculaires à la tangente en p, c'est-à-dire orthogonal au vecteur u_i en p. Les hyperplans $V(\tau)$ consécutifs sont déterminés de façon unique quand L est donné. Considérons dans l'hyperplan $V(\tau)$ un élément de volume dV formé par trois vecteurs infinitésimaux indépendants dx_i, δx_i, Δx_i. Cet élément de volume est représenté par le tenseur antisymétrique

$$dV_{ikl} = \begin{vmatrix} dx_i & \delta x_i & \Delta x_i \\ dx_k & \delta x_k & \Delta x_k \\ dx_l & \delta x_l & \Delta x_l \end{vmatrix}, \tag{55}$$

ou par le pseudovecteur dual correspondant dV_i qui est défini par

$$dV_1 = -\ddot{\imath}\, dV_{234}, \qquad dV_2 = \ddot{\imath}\, dV_{341}, \qquad dV_3 = -\ddot{\imath}\, dV_{412}, \qquad dV_4 = \ddot{\imath}\, dV_{123}. \tag{56}$$

Le pseudovecteur dV_i est orthogonal à l'hyperplan $V(\tau)$ et ainsi proportionnel à $u_i(\tau)$. Comme

$$dV_i\, dV_i = -(dV)^2, \tag{57}$$

où dV est le volume invariant de cet élément, nous avons évidemment

$$dV_i = \frac{dV}{c} u_i, \qquad dV = -\frac{1}{c}(dV_i u_i). \tag{58}$$

Dans un référentiel de Lorentz $S^*(\tau)$ dont l'axe du temps est parallèle à $u_i(\tau)$ nous avons

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^* &= \{0, 0, 0, \ddot{\imath} c\}, \\ dV_i^* &= \{0, 0, 0, \ddot{\imath}\, dV^*\}. \end{aligned} \right. \tag{59}$$

$S^*(\tau)$ est le différentiel propre du point représentatif à l'instant considéré.

Considérons maintenant deux hyperplans consécutifs $V(\tau)$ et $V(\tau + d\tau)$ et le domaine à quatre dimensions Ω limité par ces surfaces et par une surface cylindrique σ renfermant le tube dans lequel $T_{ik} \neq 0$. Considérons dans Ω un élément infinitésimal $d\Sigma$ de forme cylindrique dont l'axe dl_i de longueur dl est perpendiculaire à $V(\tau)$ et dont la section droite est dV. Si L était une ligne droite, les deux hyperplans $V(\tau)$ et $V(\tau + d\tau)$ seraient parallèles et dl serait simplement égal à la distance $\ddot{\imath} c\, d\tau$ entre les points d'intersection $p(\tau)$ et $p(\tau + d\tau)$ avec la courbe L. Si l'on tient compte de la courbure de L, on voit aisément que l'on a

$$(60)\qquad dl = \ddot{\imath} c\, d\tau \left(1 + \frac{\xi_i \dot{u}_i}{c^2}\right),$$

où

$$(61)\qquad \xi_i = x_i - x_i^{(P)}, \qquad \xi_i u_i = 0$$

est un vecteur reliant le point $p(\tau)$ à l'élément dV dans $V(\tau)$. En vertu de (60) et de (58) le volume $d\Sigma$ de l'élément cylindrique infinitésimal à quatre dimensions est égal à

$$(62)\qquad d\Sigma = dV\, dl = \frac{dV_i u_i}{\ddot{\imath}} \left(1 + \frac{\xi_k \dot{u}_k}{c^2}\right) d\tau.$$

En intégrant l'équation (52) dans le domaine Ω, nous obtenons par (62)

$$(63)\qquad \int_\Omega \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, d\Sigma = d\tau \int_\Omega f_i \frac{(dV_k u_k)}{\ddot{\imath}} \left(1 + \frac{\xi_l \dot{u}_l}{c^2}\right).$$

En appliquant le théorème de Gauss dans l'espace à quatre dimensions, on peut transformer le premier membre de cette équation en une intégrale sur la surface limitant Ω. Comme $T_{ik} = 0$ sur la surface cylindrique σ, seuls les hyperplans $V(\tau)$ et $V(\tau + d\tau)$ donnent une contribution à l'intégrale et nous obtenons pour le premier membre de (63)

$$\int_{V(\tau+d\tau)} T_{ik} \frac{dV_k}{\ddot{\imath}} - \int_{V(\tau)} T_{ik} \frac{dV_k}{\ddot{\imath}}.$$

Ainsi, après division par $\ddot{\imath} c\, d\tau$ et passage à la limite $d\tau \to 0$, l'équation (63) devient

$$(64)\qquad \frac{d}{d\tau} \int_{V(\tau)} \frac{T_{ik}}{\ddot{\imath} c} \frac{dV_k}{\ddot{\imath}} = \int_{V(\tau)} f_i \left(1 + \frac{\xi_k \dot{u}_k}{c^2}\right) \frac{dV_l u_l}{-c}.$$

En définissant deux quadrivecteurs $P_i(\tau)$ et $F_i(\tau)$ par

$$(65)\qquad P_i(\tau) = \int_{V(\tau)} \frac{T_{ik}}{\ddot{\imath} c} \frac{dV_k}{\ddot{\imath}},$$

$$(66)\qquad F_i(\tau) = \int_{V(\tau)} f_i \left(1 + \frac{\xi_k \dot{u}_k}{c^2}\right) \frac{(dV_l u_l)}{-c},$$

l'équation (64) peut s'écrire

$$(67)\qquad \frac{dP_i}{d\tau} = F_i.$$

Dans le référentiel propre instantané $S^*(\tau)$ de notre point représentatif l'expression (65) pour P_i se réduit à

(68) $$P_i^* = \int \frac{T_{i4}^*}{ic} dV^* = \left\{ \mathbf{P}^*, \frac{i}{c} H^* \right\},$$

$\mathbf{P}^*$ et H^* étant respectivement l'impulsion et l'énergie totales dans le référentiel S^*.

Dans le cas d'un système libre nous avons $f_i = 0$ et $F_i = 0$. Dans ce cas P_i est donc indépendant de τ ainsi que du choix de la courbe représentative L. En général, cependant, le quadrivecteur $P_i(\tau)$ dépendra du point $p(\tau)$ considéré aussi bien que de la direction de la tangente en ce point.

De (52) nous déduisons, en tenant compte de la symétrie du tenseur T_{ik}, la relation

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = x_i f_k - x_k f_i.$$

En intégrant cette équation dans Ω et en appliquant le théorème de Gauss comme nous l'avons fait pour l'établissement de (67), nous obtenons

(69) $$\frac{d}{d\tau} M_{ik} = D_{ik},$$

où M_{ik} et D_{ik} sont définis par les relations

(70) $$M_{ik}(\tau) = \int_{V(\tau)} \frac{x_i T_{kl} - x_k T_{il}}{ic} \frac{dV_l}{i},$$

(71) $$D_{ik}(\tau) = \int_{V(\tau)} (x_i f_k - x_k f_i)\left(1 + \frac{\xi_k \dot{u}_k}{c^2}\right)\frac{(dV_l u_l)}{-c}.$$

M_{ik}, est dans notre référentiel de Lorentz arbitraire, le tenseur à quatre dimensions représentant le moment cinétique total par rapport à l'origine et correspondant à la valeur τ du temps propre du point représentatif. De même, le tenseur représentant le moment cinétique par rapport au point représentatif $p(\tau)$ est donné par

(72) $$\Omega_{ik}(\tau) = \int_{V(\tau)} \frac{\xi_i T_{kl} - \xi_k T_{il}}{ic} \frac{dV_i}{i} = \int \frac{(x_i - x_i^{(r)}) T_{kl} - (x_k - x_k^{(r)}) T_{il}}{ic} \frac{dV_l}{i},$$

qui peut aussi s'écrire

(73) $$\Omega_{ik}(\tau) = M_{ik}(\tau) - \left(x_i^{(r)}(\tau) P_k(\tau) - x_k^{(r)}(\tau) P_i(\tau)\right).$$

En tenant compte de (69) et de (67) nous obtenons en différentiant par rapport à τ

$$\frac{d\Omega_{ik}}{d\tau} = \dot{M}_{ik} - (u_i P_k - u_k P_i) - (x_i^{(r)} \dot{P}_k - x_k^{(r)} \dot{P}_i)$$
$$= D_{ik} - (u_i P_k - u_k P_i) - (x_i^{(r)} F_k - x_k^{(r)} F_i).$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{d\Omega_{ik}}{d\tau} = d_{ik} - (u_i P_k - u_k P_i), \tag{74}$$

avec

$$d_{ik} = D_{ik} - (x_i^{(r)} F_k - x_k^{(r)} F_i) = \int (\xi_i f_k - \xi_i f_k)\left(1 + \frac{\xi_k \dot{u}_k}{c^2}\right)\frac{dV_l u_l}{-c}, \tag{75}$$

où nous avons utilisé les équations (71) et (66).

Les équations (67) et (74), c'est-à-dire

$$\dot{P}_i = F_i, \tag{76 a}$$
$$\dot{\Omega}_{ik} = d_{ik} - (u_i P_k - u_k P_i), \tag{76 b}$$

sont valables pour toute courbe L, c'est-à-dire pour tout choix du point représentatif. Nous voulons maintenant que L représente le mouvement du centre de gravité et essayerons d'abord de trouver les autres conditions définissant ce point.

Dans le cas d'un système libre le centre de gravité était déterminé de façon unique par les deux équations (50) et (38), c'est-à-dire par

$$P_i = M_0 u_i, \tag{77}$$
$$\Omega_{ik} u_k = 0. \tag{78}$$

La première équation exprime la proportionnalité du vecteur impulsion-énergie et du quadrivecteur vitesse du centre de gravité, M_0 étant la masse propre totale du système. La seconde équation exprime la condition que le centre de gravité est centre de masse dans le référentiel où il est au repos. Pour définir le centre de gravité en présence de forces extérieures, il semblerait naturel d'utiliser également les équations (77) et (78). Comme nous le verrons, il n'est cependant pas possible en général d'exiger que les équations (77) et (78) soient satisfaites toutes les deux, car elles ne sont pas en général compatibles avec les *équations du mouvement* (76).

Si nous supposons que la relation (77) reste vérifiée dans le cas général, nous pourrons écrire les équations du mouvement (76)

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} M_0\dot{u}_i+\dot{M}_0 u_i&=F_i,\\ \dot{\Omega}_{ik}&=d_{ik}.\end{aligned}\right.$$

De la première de ces équations nous déduisons en multipliant par u_i

$$(80)\qquad \dot{M}_0=-\frac{F_i u_i}{c^2},$$

d'où

$$(81)\qquad \dot{u}_i=\frac{F_i+\dfrac{F_k u_k}{c^2}u_i}{M_0}.$$

Si nous définissons un quadrivecteur a_i par

$$(82)\qquad a_i=\frac{\Omega_{ik}u_k}{M_0c^2},\qquad a_iu_i=0,$$

les équations (78) signifient que le vecteur a_i est constant et égal à zéro. Or, il est aisé d'évaluer au moyen de (79), de (80) et de (81) la dérivée de a_i; on obtient

$$(83)\qquad \dot{a}_i=2a_i\frac{F_k u_k}{M_0c^2}+\frac{\Omega_{ik}F_k}{M_0^2c^2}+\frac{d_{ik}u_k}{M_0c^2}.$$

En général a_i ne sera donc pas constant. C'est seulement si

$$(84)\qquad \frac{\Omega_{ik}F_k}{M_0}+d_{ik}u_k=0,$$

que

$$(85)\qquad a_i=0$$

sera solution de (83). C'est donc seulement dans le cas spécial défini par (84) que notre point représentatif sera centre de masse dans son référentiel propre.

Dans le cas général a_i ne restera pas nul, même s'il est nul à l'instant initial. Ceci signifie que le point représentatif déviera de la position du centre de masse du référentiel propre instantané $S^*(\tau)$. Les coordonnées d'espace-temps du centre de masse dans $S^*(\tau)$ sont données à tout instant par

$$(86)\qquad X_i(\tau)=x_i^{(r)}(\tau)-a_i(\tau),$$

comme on le voit immédiatement en considérant l'équation (86) dans le référentiel $S^*(\tau)$ et en utilisant les définitions de a_i et de Ω_{ik}. Puisque $a_i u_i = 0$ les composantes de a_i dans $S^*(\tau)$ sont de la forme $a_i^* = \{\mathbf{a}^*, 0\}$ et $a_i a_i = |\mathbf{a}^*|^2$ est égal au carré de la distance entre le point représentatif et le centre de masse dans $S^*(\tau)$.

Considérons un système initialement libre, où $a_i = 0$ pour le centre de gravité, et faisons agir pendant un certain temps des forces extérieures. Après cet intervalle de temps les valeurs des a_i et, par suite, celle de $a_i a_i$, peuvent différer de zéro par une certaine quantité, à moins que les forces intervenant dans l'équation (83) ne satisfassent à des conditions spéciales. Après que le système est redevenu libre, notre point représentatif pourra donc être très différent du centre de gravité, bien qu'il se déplace avec la même vitesse constante. Le point représentatif défini par (77) et (76) pourra même se trouver loin en dehors du système si ce dernier a été soumis à des forces extérieures pendant un certain temps. Il peut donc être plus raisonnable d'admettre que la relation (78) est toujours valable; dans ce cas notre point représentatif sera en effet toujours un centre de masse dans le référentiel propre instantané, ce qui signifie qu'il sera toujours situé à l'intérieur du système, du moins si la densité d'énergie est partout positive.

Nous définirons donc maintenant notre point représentatif par l'équation (78) jointe aux équations du mouvement (76). De (78) nous déduisons par différentiation

$$\dot{\Omega}_{ik} u_k + \Omega_{ik} \dot{u}_k = 0. \tag{89}$$

En multipliant (76 b) par u_k nous obtenons, à l'aide de (89),

$$\dot{\Omega}_{ik} u_k = -\Omega_{ik} \dot{u}_k = d_{ik} u_k - u_i(P_k u_k) - P_i c^2. \tag{90}$$

Si nous posons

$$P_k u_k = -M^* c^2, \tag{91}$$

M^* est un invariant représentant la masse totale du système dans le référentiel $S^*(\tau)$ où notre point représentatif est au repos à l'instant considéré. En portant (91) dans (90) et en résolvant cette équation par rapport à P_i nous obtenons

$$P_i = M^* u_i + \frac{\Omega_{ik} u_k}{c^2} + \frac{d_{ik} u_k}{c^2}. \tag{92}$$

Le vecteur impulsion-énergie P_i est ainsi la somme de deux termes

$$P_i = \dot{M}^{\star} u_i + \pi_i, \tag{93}$$

dont le premier est proportionnel à u_i, tandis que le second

$$\pi_i = \frac{\Omega_{ik} \dot{u}_k}{c^2} + \frac{d_{ik} u_k}{c^2} \tag{94}$$

est orthogonal à u_i, c'est-à-dire qu'en vertu de (78)

$$\pi_i u_i = 0.$$

En portant (93) dans (76) nous obtenons pour les équations du mouvement

$$\frac{d}{d\tau}(M^{\star} u_i) + \dot{\pi}_i = F_i, \tag{95 a}$$

$$\dot{\Omega}_{ik} + u_i \pi_k - u_k \pi_i = d_{ik}. \tag{95 b}$$

Dans le cas particulier où

$$d_{ik} = 0, \tag{96}$$

c'est-à-dire où les forces ne produisent aucune précession du vecteur représentant le moment cinétique interne nous avons $\pi_i \dot{u}_i = 0$, $\dot{\Omega}_{ik} \dot{u}_k = 0$ et, les équations (95) prennent la forme

$$\frac{d}{d\tau}(M^{\star} u_i) + \Omega_{ik} \ddot{u}_k = F_i, \tag{96 a}$$

$$\dot{\Omega}_{ik} + u_i \pi_k - u_k \pi_i = 0. \tag{96 b}$$

Ces équations sont de même forme que celles données par Mathisson comme *équation du mouvement d'une particule à spin dans le cas d'une force extérieure ayant un moment nul par rapport à la particule*. L'équation (96 *b*) montre que $\dot{\Omega}_{ik} \neq 0$, mais la précession décrite par cette équation est simplement la précession dite de Thomas. Elle constitue un effet purement cinématique et provient du fait que la succession d'un grand nombre de transformations de Lorentz infinitésimales sans rotation spatiale peut éventuellement produire une transformation de Lorentz finie avec une rotation déterminée des axes d'espace.

Pour un système libre, c'est-à-dire pour $f_i = 0$, nous avons $d_{ik} = 0$, $F_i = 0$ et les équations (95) se réduisent aux équations (48) décrivant le mouvement des faux centres de gravité situés sur le disque tournant qui a été mentionné dans le premier Chapitre. Les équations (95), jointes à l'équation (78), déterminent donc les lignes d'univers des pseudo-centres de gravité en présence de forces extérieures. Dans le cas d'un système libre, le centre de gravité peut être distingué des pseudo-centres par la condition $\pi_i = 0$. Mais cette condition est généralement incompatible avec les équations du mouvement (95). L'équation (95 *a*) peut s'écrire

$$M^\star \dot{u}_i + \dot{M}^\star u_i + \dot{\pi}_i = F_i.$$

Nous en déduisons, en multipliant par u_i,

$$\dot{M}^\star = -\frac{1}{c^2}(F_i u_i - \dot{\pi}_i u_i).$$

L'équation précédente donne alors

$$\dot{u}_i = \frac{F_i - \dot{\pi}_i + \frac{1}{c^2}(F_k u_k - \dot{\pi}_k u_k)\, u_i}{M^\star}.$$

En portant cette expression dans (94) et en nous souvenant que $\Omega_{ik} u_k = 0$, nous obtenons

$$\pi_i = \frac{\Omega_{ik} F_k}{M^\star c^2} + \frac{d_{ik} u_k}{c^2} - \frac{\Omega_{ik}\dot{\pi}_k}{M^\star c^2}. \tag{98}$$

Nous voyons ainsi que c'est seulement dans le cas où

$$\frac{\Omega_{ik} F_k}{M^\star} + d_{ik} u_k = 0, \tag{99}$$

que $\pi_i = 0$ sera solution de (98). Comme dans ce cas $M^\star = M_0$, la condition (99) est identique à la condition (84) trouvée précédemment.

Dans le cas général où les forces ne satisfont pas à la condition (99), la relation (98) nous montre que si $\pi_i = 0$ à un certain instant, les dérivées $\dot{\pi}_i$ seront non nulles, ce qui signifie aussi que les π_i seront différents de zéro peu après. Considérons maintenant un système libre avant et après un certain intervalle de temps pendant lequel ce système est soumis à des forces extérieures arbitraires. Avant et après le centre de gravité est donc défini de façon non ambiguë. Si notre point représentatif est choisi de sorte qu'au début $\pi_i = 0$, ce qui signifie qu'il coïncide avec le centre de gravité, l'action des forces extérieures produira un changement de valeur de π_i qui seront différents de zéro quand le système sera redevenu libre. Le point représentatif ne coïncidera donc plus après avec le centre de gravité, mais sera un des pseudo-centres de gravité du disque tournant. La distance entre le point représentatif et le centre de gravité peut par suite avoir dans le système du centre de gravité n'importe quelle valeur comprise entre zéro et le rayon du disque $\rho = \frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}$ donné par (28) ou (33).

Les lignes d'univers des différents pseudo-centres de gravité remplissent complètement dans l'espace-temps d'un tube dont l'épaisseur est de l'ordre de $\frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}$. Dans le cas d'un système libre, il était possible de choisir d'une manière unique l'une de ces lignes d'univers et de la définir comme étant celle du centre de gravité. Mais, comme nous venons de le voir, toute force extérieure, si faible soit-elle, provoquera en général le mélange des lignes d'univers des pseudo-centres de gravité, rendant impossible la distinction d'une ligne particulière comme ligne d'univers du centre de gravité. Ceci signifie qu'une définition exacte et non ambiguë du centre de gravité est en général impossible pour un système soumis à des forces extérieures, le centre de gravité ou sa ligne d'univers étant définis seulement avec l'incertitude donnée par le tube de ligne d'univers dont il a été question ci-dessus. Ces résultats généraux sont valables pour tout système et par suite aussi à la limite pour un système très petit. A notre avis, les équations de Mathisson ne doivent donc pas être considérées comme les équations du mouvement d'une particule à spin, mais plutôt comme les équations décrivant le tube des lignes d'univers des faux centres de gravité, tube qui, en présence de forces extérieures, détermine l'incertitude dans la définition du centre de gravité du système.

Il est vrai que pour la pluspart des systèmes macroscopiques les dimensions de la section droite du tube d'incertitude mentionné ci-dessus seront très petites puisque $\frac{|\mathbf{m}^0|}{M_0 c}$ sera alors très petit; mais pour un système classique ayant une masse égale à la masse m_0 de l'électron et un moment cinétique de l'ordre d'un quantum d'action h, l'incertitude dans la définition du centre de gravité sera de l'ordre de la longueur d'onde de Compton $\frac{h}{m_0 c}$. Dans le cas limite *non relativiste*, c'est-à-dire pour $c \to \infty$, le tube d'incertitude devient infiniment mince, et dans ce domaine la notion de centre de gravité acquiert également une signification précise pour des systèmes soumis à des forces extérieures quelconques.

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que des forces extérieures qui ne sont pas des forces de gravitation. Nous allons voir que la situation est différente dans le cas de pures forces de gravitation. Nous montrerons que l'on peut alors donner une signification non ambiguë à la notion de centre de gravité du moins si le système est suffisamment petit. Cela tient au fait que l'on peut faire disparaître les forces de gravitation dans une petite région de l'espace-temps par une transformation convenable des coordonnées d'espace-temps.

Soient x^i les coordonnées d'espace-temps dans un référentiel quelconque en relativité générale et soient $g_{ik}=g_{ik}(x^l)$ les composantes covariantes du tenseur métrique décrivant le champ de gravitation extérieur. (Nous avons maintenant à faire une distinction entre composantes covariantes et contrevariantes des vecteurs et tenseurs.) Nous devons étudier l'effet de ce champ de gravitation sur un système physique, quelconque mais petit, décrit par un tenseur impulsion-énergie symétrique dont les composantes contrevariantes sont $T^{ik}=T^{ki}$. Le théorème de conservation de l'énergie et de l'impulsion s'exprime en relativité par la relation

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}+\frac{T^{ik}}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x_k}+\Gamma^i_{kl}T^{kl}=0 \tag{100}$$

qui remplace l'équation (1) de la relativité restreinte. g est le déterminant du tenseur métrique et les

$$\Gamma^i_{kl}=g^{im}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{101}$$

sont les composantes géodésiques de Christoffel à trois indices. En toute rigueur, les fonctions g_{ik} dans (100) devraient aussi contenir le champ de gravitation produit par le système lui-même, mais nous admettons que ce champ est assez faible pour être négligé par rapport au champ extérieur.

Dans l'espace à quatre dimensions le domaine où T^{ik} diffère de zéro est, pour un petit système, un tube mince dont l'épaisseur est donnée par les dimensions du système. Soit L la ligne d'univers du centre de gravité que nous allons déterminer maintenant. X^i étant les coordonnées d'espace-temps du centre de gravité et τ le temps propre correspondant, la ligne d'univers L est déterminée si les X^i sont donnés comme fonctions de τ

$$X^i = X^i(\tau). \tag{102}$$

Soit $p(\tau)$ un point quelconque de L. Nous pouvons d'une infinité de manières introduire un système de coordonnées $\mathring{x}^i$ qui soit géodésique au point p, c'est-à-dire un système dans lequel les dérivées premières du tenseur métrique soient nulles au point p

$$\left|\frac{\partial \mathring{g}_{ik}}{\partial \mathring{x}^l}\right|_p = 0. \tag{103}$$

Dans ce *système local d'inertie* il est possible, comme nous le verrons, de traiter notre système physique comme un système libre sans aucune force de gravitation, à condition que le système soit assez petit pour que nous puissions négliger les *effets de marée* (tidal effects), c'est-à-dire à condition que la courbure de l'espace-temps soit suffisamment petite pour les dimensions données du système. Nous pouvons par suite définir dans ce système de coordonnées le centre de gravité en procédant de la même manière qu'en relativité restreinte pour un système libre.

Choisissons maintenant en particulier pour système géodésique un système de coordonnées normales de Riemann; par une transformation linéaire convenable nous pouvons de plus obtenir que les lignes coordonnées soient orthogonales au point p. L'origine des coordonnées $\mathring{x}^i = 0$ étant prise en p, les composantes du tenseur métrique au voisinage de p sont de la forme

$$\mathring{g}_{ik} = G_{ik} + \frac{1}{3}\mathring{R}_{ilkm}(p)\mathring{x}^l\mathring{x}^m, \tag{104}$$

où $\mathring{R}_{ilkm}$ est le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel et où

$$G_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{pour} \quad i = k = 1, 2, 3, \\ -1 & \text{pour} \quad i = k = 4 \end{cases} \tag{105}$$

est le tenseur métrique constant dans un référentiel de Lorentz en relativité restreinte.

A l'aide de (104) nous obtenons par un calcul direct, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second en $\mathring{x}^i$

$$\mathring{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{3}\left(\mathring{R}^i_{klm}(p) + \mathring{R}^i_{lkm}(p)\right)\mathring{x}^m, \tag{106}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathring{g}|}}\frac{\partial\sqrt{|\mathring{g}|}}{\partial\mathring{x}^k} = -\frac{2}{3}\mathring{R}_{kl}(p)\,\mathring{x}^l, \tag{107}$$

où $\mathring{R}_{ik}$ est le tenseur de courbure contracté.

Dans le système de coordonnées $\mathring{x}^i$ l'équation fondamentale (100) s'écrit

$$\frac{\partial\mathring{T}^{ik}}{\partial\mathring{x}^k} = -\frac{1}{3}\left(\mathring{R}^i_{klm}(p) + \mathring{R}^i_{lkm}(p)\right)\mathring{x}^m\,\mathring{T}^{kl} + \frac{2}{3}\,\mathring{T}^{ik}\,\mathring{R}_{kl}(p)\mathring{x}^l. \tag{108}$$

Si l'on divise cette équation par c et qu'on l'intègre pour toutes les valeurs de $\mathring{x}^1$, $\mathring{x}^2$, $\mathring{x}^3$ ($\mathring{x}^4$ ayant une valeur constante petite), le premier membre devient égal à $\frac{\partial\mathring{P}^i}{\partial\mathring{x}^4}$, où

$$\mathring{P}^i = \int\frac{\mathring{T}^{i4}}{c}\,d\mathring{x}^1\,d\mathring{x}^2\,d\mathring{x}^3 \tag{109}$$

est le quadrivecteur représentant l'énergie et l'impulsion totales dans notre système d'inertie local.

Supposons maintenant que la courbure de l'espace-temps soit petite, compte tenu des dimensions spatiales $\mathring{d}$ du système; nous pouvons alors négliger le deuxième membre de (108) après intégration, du fait des termes de la forme $\mathring{R}^i_{klm}\mathring{x}^m$. Les dérivées des $\mathring{P}^i$ par rapport à $\mathring{x}^4$ ou par rapport à τ sont, par suite, petites comparées aux $\mathring{P}^i$ eux-mêmes et dans le cas limite d'un système très petit on peut poser

$$\frac{d\mathring{P}^i}{d\tau} = 0. \tag{110}$$

De la même manière nous trouvons que la dérivée de la quantité $\mathring{m}_{ik}$ définie par

$$\mathring{m}^{ik} = \frac{1}{c}\int\left(\mathring{x}^i\,\mathring{T}^{k4} - \mathring{x}^k\,\mathring{T}^{i4}\right)d\mathring{x}^1\,d\mathring{x}^2\,d\mathring{x}^3, \tag{111}$$

est petite par rapport aux $\mathring{m}_{ik}$ eux-mêmes dans les conditions mentionnées. Si le système est assez petit, nous pouvons donc poser

$$\frac{d\mathring{m}^{ik}}{d\tau} = 0. \tag{112}$$

Par toute transformation linéaire et orthogonale des coordonnées $\mathring{x}^i$

les quantités $\mathring{P}^i$ et $\mathring{m}^{ik}$ se transforment respectivement comme un vecteur et un tenseur. $\mathring{m}^{ik}$ est le tenseur représentant le moment cinétique interne dans le système géodésique $\mathring{x}^i$.

Nous définissons maintenant le centre de gravité par les équations

$$(113) \qquad \mathring{m}_{ik}\,\mathring{U}^k = 0,$$

$$(114) \qquad \mathring{P}_i = \mathring{M}_0\,\mathring{U}_i,$$

où

$$(115) \qquad \mathring{U}^i = \frac{d\mathring{X}^i}{d\tau}$$

est le quadrivecteur vitesse du centre de gravité dans le système géodésique.

L'équation (113) exprime que le centre de gravité est centre de masse dans le système local d'inertie, tandis que l'équation (114) établit la proportionnalité entre $\mathring{U}^i$ et $\mathring{P}^i$. Comme la dérivée de $M_0 = -\dfrac{\mathring{P}_i\mathring{P}_i}{c^2}$ est nulle, l'équation (110) peut s'écrire

$$(116) \qquad \frac{d\mathring{U}^i}{d\tau} = 0,$$

qui est l'équation du mouvement du centre de gravité dans le système $\mathring{x}^i$. Si nous revenons au système de coordonnées primitif x^i, l'équation (116) devient

$$(117) \qquad \frac{dU^i}{d\tau} = -\Gamma^i_{rs}U^rU^s,$$

ou

$$(118) \qquad \frac{d^2X^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{rs}\frac{dX^r}{d\tau}\frac{dX^s}{d\tau}.$$

Ces équations montrent que la ligne d'univers du centre de gravité est une géodésique, c'est-à-dire que le mouvement de ce point est identique à celui d'une particule tombant librement dans le champ de gravité extérieur donné.

$\mathring{m}_{ik}$ se comportait comme un tenseur par rapport aux transformations linéaires des coordonnées $\mathring{x}^i$. Nous pouvons maintenant considérer m_{ik} comme un tenseur antisymétrique attaché au centre de gravité et *définir* ses composantes $m_{ik}(\tau)$ dans le système x^i par les lois de transformation habituelles d'un tenseur attaché au point X^i. La transformation qui fait passer au système x^i donne aux équations (112) la forme

$$\frac{dm^{ik}}{d\tau} = -\Gamma^i_{rs} U^r m^{sk} - \Gamma^k_{rs} U^r m^{is}. \tag{119}$$

Nous avons des équations semblables pour les dérivées des composantes covariantes m_{ik}. L'équation (113) peut alors être écrite sous la forme invariante

$$m_{ik} U^k = 0, \tag{120}$$

et nous voyons qu'elle est compatible avec les équations du mouvement (117) et (119). Ces équations montrent que le vecteur U^i et le tenseur m^{ik} se propagent par déplacement parallèle le long de la ligne d'univers du centre de gravité. La direction du moment cinétique interne ne sera donc pas en général identique à la direction primitive, quand le centre de gravité aura parcouru un circuit fermé. Cette *précession géodésique* de la direction du vecteur représentant le moment cinétique est conforme à la règle donnée par Fokker [10].

Dans le présent article nous avons considéré exclusivement les systèmes physiques classiques pour lesquels tous les effets quantiques ont été négligés. La notion du centre de gravité n'a en général, comme nous l'avons montré, une signification non ambiguë pour de tels systèmes que dans le cas où ils sont libres, non soumis à des forces extérieures. Il est maintenant possible d'étendre immédiatement la théorie développée ici à des systèmes quantiques quelconques. L'existence du quantum d'action introduit une limitation supplémentaire dans la définition du centre de gravité même dans le cas d'un système libre. Cette limitation prend la forme d'une relation d'incertitude quantique provenant du fait que les coordonnées du centre de gravité sont dans ce cas représentées par des opérateurs qui ne commutent pas entre eux. Pour plus de détails le lecteur est prié de se référer à l'article des *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies* cité ci-dessus [8].

Je voudrais remercier cordialement J. M. Horowitz pour l'aide qu'il m'a apportée dans la rédaction du texte français.

---

[10] A. D. Fokker, *loc. cit.* [9], p. 249.