

ANNALES DE L'I. H. P.

R. FORTET

Quelques travaux récents sur le mouvement brownien

Annales de l'I. H. P., tome 11, n° 4 (1949), p. 175-226

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_4_175_0

© Gauthier-Villars, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Quelques travaux récents sur le mouvement brownien

par

R. FORTET.

Abréviations et symboles.

Les chiffres entre [] renvoient à la bibliographie
placée à la fin de cet exposé.

Abréviations.

- resp. pour respectivement.
v. a. » variable aléatoire.
f. a. » fonction aléatoire.
p. s. » presque sûrement.
p. » en probabilité.
m. q. » en moyenne quadratique.
e. m. » espérance mathématique.
e. m. q. » écart moyen quadratique.
l. de p. » loi de probabilité.
f. c. » fonction de corrélation (d'une fonction stationnaire d'ordre 2).
f. s. » fonction spectrale (d'une fonction stationnaire d'ordre 2).

Symboles.

- $E[X]$ ou $E(X)$: valeur moyenne de la v. a. X .
 $\min(a, b)$: plus petit des deux nombres a et b .
 $[a]$: partie entière du nombre réel positif ou nul a .
 $J_\nu(x)$: symbole classique de la fonction de Bessel d'ordre ν .
 $\text{Pr}[\mathcal{E}/\mathcal{A}]$: probabilité conditionnelle de l'événement \mathcal{E} dans l'hypothèse où l'événement \mathcal{A} est réalisé.
 $E[X/\mathcal{A}], E[X/Y]$: espérance mathématique conditionnelle de la v. a. X dans l'hypothèse où l'événement \mathcal{A} est réalisé, ou par rapport à la v. a. Y .
-

INTRODUCTION.

Le texte suivant reproduit à peu près intégralement quatre conférences que j'ai prononcées, sous le titre : *Quelques travaux récents sur le mouvement brownien*, à l'Institut H. Poincaré, durant le mois de mai 1947. Je suis heureux d'avoir ici l'occasion d'exprimer mes remerciements au Conseil de l'Institut Poincaré, pour l'honneur qu'il m'a fait en m'invitant à faire ces conférences, et je tiens à y joindre l'expression de ma reconnaissance envers M. le professeur Kac, de Cornell University, qui m'a beaucoup aidé dans leur préparation.

1. On appelle, à strictement parler, *mouvements browniens* les mouvements aléatoires qu'effectuent des particules en suspension dans un fluide par suite des chocs qu'elles subissent de la part des molécules du fluide, ces molécules étant comme on sait en perpétuelle agitation; nous disons à *strictement parler* parce que l'habitude s'établit de désigner par le même vocable de *mouvements browniens* d'autres phénomènes aléatoires, de nature concrète toute différente (par exemple les phénomènes de bruit de fond dans les circuits électriques [1, 2, 3], ou encore les phénomènes de croissance de populations en biologie [4]) mais correspondant aux mêmes modèles mathématiques; ce qui, soit dit en passant, établit l'importance capitale pour les applications des processus stochastiques dont il va être question; et si dans l'exposé qui va suivre notre langage se référera en principe au mouvement brownien proprement dit, dans un fluide supposé homogène et isotrope, on ne devra pas perdre de vue les autres champs d'application des théories en question.

Si $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ désignent les coordonnées (cartésiennes rectangulaires) à l'instant t d'une particule déterminée, on est amené à les considérer comme trois fonctions aléatoires du temps t , d'ailleurs indépendantes entre elles et *de même loi de probabilité*, en raison de l'isotropie supposée du fluide et de la loi d'équipartition de Maxwell; il était donc indiqué d'étudier d'abord isolément l'une d'entre elles, soit $X(t)$; c'est-à-dire, comme l'on dit, d'étudier le *mouvement brownien projeté sur ox* .

2. Les schémas approchés E. S. — Or, on sait, depuis Einstein et Smoluchovski [5, 6] qu'on traduit correctement, dans certaines limites, restriction sur laquelle nous devons revenir, la réalité physique en admettant que le phénomène possède une certaine continuité et que $X(t)$ est une fonction markoffienne, ce qui signifie que si $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < \tau$, la probabilité $P(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n; \tau, \xi)$ que $X(\tau) < \xi$ étant donné que $X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n$, ne dépend que de t_n, x_n, τ, ξ et non de $t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-1}, x_{n-1}$; nous appellerons schémas E. S. les schémas obtenus conformément à ces hypothèses; tout le problème en ce qui les concerne repose alors sur la considération de la probabilité de passage $P(t, x; \tau, \xi)$ que $X(\tau) < \xi$ étant donné que $X(t) = x [t < \tau]$; Einstein et Smoluchovski ont montré qu'alors la densité de probabilité $\frac{\partial P}{\partial \xi} = U(t, x; \tau, \xi)$ satisfait en (τ, ξ) à une équation aux dérivées partielles du type parabolique : $L = 0$; par exemple, en l'absence de champ de forces agissant sur les particules, et en ne tenant pas compte de l'influence des parois de l'enceinte contenant le fluide, l'équation $L = 0$ se réduit à l'équation de la chaleur

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},$$

où D est une constante (à signification physique précise, d'ailleurs); nous appellerons schémas de Wiener-Lévy les schémas E. S. correspondant à (1).

Par ailleurs U satisfait, en (t, x) , à l'équation $L^* = 0$ adjointe de $L = 0$.

Ce point de vue, approfondi de Kolmogoroff [7] et Feller [8] et, dans un esprit un peu différent, par S. Bernstein [9], a donné lieu à une première méthode d'étude dont le principe est de ramener la question au problème classique en Analyse de l'intégration des équations paraboliques, et qui a permis de résoudre un certain nombre de problèmes : cas où intervient un champ de force, influence d'une paroi réfléchissante ou absorbante, etc. (cf. par exemple Smoluchovski [6], Fortet [10]).

Mais si l'on remarque que (1) peut s'interpréter comme signifiant que $X(t)$ est une f. a. à accroissements indépendants (et laplaciens), on voit la possibilité d'une seconde méthode, plus probabiliste, s'appuyant

essentiellement sur la théorie de l'addition des v. a.; ce point de vue est celui auquel se réfèrent la plupart du temps dans leurs travaux Wiener [12], P. Lévy [13, 14, 15], Doob [16], Doob [17], obtenant eux aussi de cette manière de très importants résultats.

3. Il y a cependant, toujours dans le cadre des schémas E. S., quelques points, nous en donnons un exemple page 184, que ni l'une ni l'autre des deux méthodes précédentes ne semblent jusqu'à présent aptes à résoudre aisément; c'est une des considérations qui ont incité M. Kac à développer une troisième méthode dont le principe peut être défini comme suit : on sait depuis longtemps que les schémas continus E. S. correspondant à une équation parabolique peuvent être obtenus comme limites des schémas discontinus ou discrets, correspondant, eux, à des équations aux différences finies; cette idée, qui est l'idée directrice de Bernstein dans sa théorie des équations différentielles stochastiques [9], n'avait par ailleurs servi jusqu'à présent, en somme, qu'à conduire, d'une façon rigoureuse ou seulement heuristique (Einstein [8], Smoluchovski [6], Polyá [8]), à l'équation parabolique régissant le schéma continu; mais Kac a eu l'idée du procédé suivant : étant donné un problème relatif à un schéma E. S. continu, traiter d'abord complètement le problème correspondant pour le schéma discret, et ensuite, mais ensuite seulement, faire tendre le schéma discret vers le schéma continu et en déduire la solution du problème pour celui-ci.

La première partie de cet exposé sera consacrée à cette méthode de Kac et à montrer la richesse des résultats qu'elle a déjà permis et qu'elle pourra permettre d'obtenir.

4. Une fois achevée l'étude *séparée* de $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, la question se posait de les considérer simultanément; car leur considération *simultanée* conduit à des problèmes, des notions et des propriétés tout à fait nouveaux, comme il ressort bien d'un mémoire de M. P. Lévy [15]; malgré l'importance de ce mémoire par la nature et l'abondance des résultats qu'il contient, nous n'en parlerons pas ici, sauf sur un point particulier (p. 5 et suiv.), pour nous consacrer à des travaux moins connus en France.

5. Les schémas O. U. — Comme nous l'avons déjà signalé, les

schémas E. S. ne sont, du point de vue physique, qu'une première approximation; en fait, la loi de passage $P(t, x; \tau, \zeta)$ fournie par l'équation parabolique n'est acceptable que pour $(\tau - t)$ assez grand; les raisons en sont faciles à comprendre :

a. D'abord, les rencontres d'une particule avec les molécules du fluide ont lieu à des instants (d'ailleurs aléatoires) formant une suite discrète; de même les émissions spontanées d'électrons dans un circuit se font d'une façon discontinue; et par suite le mouvement brownien réel comporte *un libre parcours moyen non nul*, et, c'est un autre aspect de la même chose, des *vitesse finies*; or les schémas continus E. S. comportent un libre parcours moyen nul et corrélativement des vitesses infinies [c'est-à-dire que $X(t)$ n'est pas dérivable, ni p. s., ni même en p.]; on retrouverait évidemment un libre parcours moyen non nul et une vitesse presque toujours finie en adoptant, au lieu du schéma E. S., un schéma discret, mais on donnerait encore prise à l'objection suivante :

b. Dans le choc d'une particule et d'une molécule intervient non seulement la position actuelle de la particule, mais aussi sa vitesse actuelle, et par conséquent $X(t)$ ne peut être rigoureusement markoffienne; on ne pourra obtenir un schéma correct qu'en acceptant de caractériser l'état, à chaque instant, de la particule, non seulement par sa position, mais encore par sa vitesse; on évitera par là même d'aboutir à des vitesses infinies ou inexistantes; d'importants travaux ont été récemment publiés dans cette voie, notamment par Ornstein, Uhlenbeck, Chandrasekhar, M^{lle} Wang, du point de vue physique, et par Doob du point de vue mathématique, aboutissant à un type nouveau de schémas, que nous appellerons les schémas O. U. (1); c'est à un exposé de certains de ces travaux qu'est consacrée la deuxième partie de cette rédaction.

(1) Initiales de Ornstein et Uhlenbeck.

PREMIÈRE PARTIE.

Un problème posé par M. Lévy. — Dans son Mémoire : *Sur le mouvement brownien plan* [15], où il se place dans le cas de l'équation (1), avec $D = \frac{1}{2}$ (1), ce qui correspond à

$$U(t, x; \tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2(\tau-t)}},$$

M. P. Lévy envisage le problème suivant : la projection, sur le plan xoy de la particule est un point aléatoire M_t de coordonnées $X(t)$, $Y(t)$ [rappelons que $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux fonctions indépendantes] qui, de l'instant 0 à l'instant τ , parcourt un certain arc de courbe aléatoire C ; nous appellerons L_τ la longueur aléatoire de la corde M_0M_τ de cet arc C , et S_τ l'aire algébrique comprise entre C et cette corde. La définition de L_τ ne présente aucune difficulté; celle de S_τ est plus délicate; pour l'obtenir, l'idée la plus naturelle est de partager l'intervalle $(0, \tau)$ en intervalles partiels par des points de division croissants $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \tau$ et de considérer l'aire S_τ^n comprise entre la corde M_0M_τ et la ligne polygonale inscrite Γ^n ayant pour sommets les points $M_{t_0}, M_{t_1}, M_{t_2}, \dots, M_{t_{n-1}}, M_{t_n}$; l'existence de la v. a. S_τ^n ne soulevant pas de question, on posera *par définition* que S_τ est la limite stochastique de S_τ^n lorsque n tend vers $+\infty$, de telle sorte que les différences $(t_{i+1} - t_i)$ tendent vers zéro uniformément en i . Encore faut-il que cette limite existe; il faut aussi préciser de quelle sorte de convergence stochastique il s'agit; *a priori* l'existence et la nature de la limite peuvent dépendre de la manière dont on choisit les points de partage (t_i) ; M. P. Lévy a parfaitement élucidé cette question, montrant qu'on peut même envisager de choisir les (t_i) au hasard dans certaines conditions; nous renvoyons pour cela à son Mémoire, il nous suffira ici

(1) Étant donnée une équation du type (1), on peut toujours la ramener au cas $D = \frac{1}{2}$ par un choix convenable des unités.

d'établir rapidement que, en prenant $n = 2^k$ (k entier); $t_i = \frac{i}{2^k} \tau$, et en faisant tendre k vers $+\infty$, la limite S_τ existe en m. q. et même p. s.

On peut en effet écrire que

$$(2) \quad S_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \Sigma^k,$$

en appelant Σ^1 l'aire comprise entre Γ^1 et la corde $M_0 M_\tau$ et Σ^k l'aire comprise entre Γ^{2^k} et $\Gamma^{2^{k-1}}$, et tout revient à étudier la convergence de la série (2); or Σ^k est la somme de 2^{k-1} triangles dont les aires sont des v. a. indépendantes les unes des autres, d'e. m. nulle et d'écart moyen quadratique égal à $\frac{\tau}{2^{\frac{k+1}{2}}}$; de sorte que

$$E[\Sigma^k] = 0, \quad E[(\Sigma^k)^2] = \frac{\tau^2}{2^{k+2}}.$$

Il est donc clair que (2) converge en m. q.; mais elle converge aussi p. s.; en effet, on a, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff,

$$\Pr \left[|\Sigma^k| > \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \right] < \frac{\tau^2}{2^{\frac{k}{2}+2}},$$

et $\frac{\tau^2}{2^{\frac{k}{2}+2}}$ est le terme général d'une série convergente; la convergence p. s. de (2) en résulte.

Ceci étant, une question toute naturelle, et dont M. P. Lévy s'est préoccupé, est de déterminer la loi de probabilité de S_τ pour une valeur donnée quelconque de τ (mais comme la loi de $\frac{S_\tau}{\tau}$ est visiblement indépendante de τ , on peut se borner à la valeur $\tau = 1$); M. P. Lévy a pu faire une étude assez poussée de cette loi; cependant il n'en a pas donné une expression explicite, de sorte que le problème d'obtenir une telle expression restait ouvert; les indications données par M. P. Lévy faisaient d'ailleurs penser (comme il l'a dit lui-même), qu'une expression explicite *simple* n'existait pas; nous verrons que les travaux ultérieurs de Kac confirment cette opinion (à cet égard les points de vue peuvent différer suivant le but poursuivi : application avec calcul numérique

ou problème théorique); pour le moment, il est intéressant de retenir, parmi les points signalés par M. P. Lévy, le suivant :

S_1 étant limite p. s. de $S_1^{2^k}$, la loi de probabilité de S_1 est la limite de la loi de probabilité de $S_1^{2^k}$ (pour $k \rightarrow +\infty$); or $S_1^{2^k}$ peut être considérée comme la somme des aires des triangles $M_0 M_{t_i} M_{t_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^k$), ($t_i = \frac{i}{2^k}$), ces aires étant à compter comme positives ou comme négatives selon les cas; si l'on appelle $\eta_i \sqrt{\Delta t}$, avec $\Delta t = \frac{1}{2^k}$, la projection du vecteur $\overrightarrow{M_{t_i} M_{t_{i+1}}}$ sur la direction perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{M_0 M_{t_i}}$, l'aire de $M_0 M_{t_i} M_{t_{i+1}}$ est égale, arithmétiquement, à $\frac{1}{2} L_{t_i} |\eta_i| \sqrt{\Delta t}$, de sorte que

$$S_1^{2^k} = \frac{1}{2} \sum \pm L_{t_i} |\eta_i| \sqrt{\Delta t},$$

η_i est une v. a. laplacienne d'é. m. q. égal à 1; cherchons la loi conditionnelle de S_1 , lorsque les η_i sont tous donnés, ce qui implique la donnée de tous les L_{t_i} ; cette loi est la limite de la loi de $S_1^{2^k}$ conditionnelle dans les mêmes conditions; or lorsque les η_i et les L_{t_i} sont tous donnés, il n'y a, dans $S_1^{2^k}$, que le signe + ou - devant chaque terme qui est aléatoire; ces signes sont d'ailleurs indépendants entre eux, et + et - sont équiprobables; à la limite (pour $k \rightarrow +\infty$) la loi conditionnelle de S_1 est donc une loi de Laplace, autrement dit on peut poser

$$S_1 = \Sigma A,$$

où Σ est l'é. q. m. conditionnel de S_1 et A une v. a. laplacienne d'é. m. q. égal à 1, ce qui implique que A est indépendante de Σ ; de sorte que tout revient à chercher la loi (*a priori*) de Σ ; or on a

$$\Sigma^2 = \frac{1}{4} \lim \sum_i L_{t_i}^2 \eta_i^2 \Delta t \quad (\text{en p.}).$$

Je dis que

$$\Sigma^2 = \text{en p.} \frac{1}{4} \int_0^1 L_\tau^2 d\tau.$$

En effet, l'intégrale $\int_0^1 L_\tau^2 d\tau$ existe, et peut être définie comme limite p. de $\sum_i L_{t_i}^2 \Delta t$; or la v. a.

$$B_k = \sum_i L_{t_i}^2 \eta_i^2 \Delta t - \sum_i L_{t_i}^2 \Delta t$$

tend vers zéro en p. (et même en m. q.); on peut écrire en effet, en posant

$$\eta_i^2 = C_i,$$

$$B_k = \sum_i L_{i_i}^2 C_i \Delta t;$$

donc $E[B_k] = 0$; calculons $E[B_k^2]$;

$$B_k^2 = \sum_i L_{i_i}^4 C_i^2 \Delta t^2 + 2 \sum_{i < j} L_{i_i}^2 L_{j_j}^2 C_i C_j \Delta t^2,$$

il est clair que $E\left[\sum_i L_{i_i}^4 C_i^2 \Delta t^2\right] \rightarrow 0$; et comme C_j est indépendant

de $L_{i_i}^2$, de $L_{j_j}^2$ et de C_i , et que $E(C_j) = 0$, il en résulte bien que $E[B_k^2] \rightarrow 0$; ce qui établit le résultat annoncé; or, si $X(0) = Y(0) = 0$,

$$L_{\tau}^2 = X^2(\tau) + Y^2(\tau).$$

Les fonctions $X(\tau)$ et $Y(\tau)$ étant indépendantes; de sorte que la loi de S_t se déduit de celle de la v. a.

$$I_2 = \int_0^1 X^2(\tau) d\tau$$

dans l'hypothèse où $X(0) = 0$.

Ainsi se trouve posé le problème de déterminer la loi de probabilité de I_2 , et plus généralement les lois de probabilité pour $X(0) = 0$ des v. a. telles que

$$I_m = \int_0^1 X^m(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad J_m = \int_0^1 |X(\tau)|^m d\tau,$$

dont nous désignerons par $F_m(\alpha)$ et $G_m(\alpha)$ les fonctions de répartition, c'est-à-dire que

$$F_m(\alpha) = \Pr[I_m < \alpha], \quad G_m(\alpha) = \Pr[J_m < \alpha].$$

En ce qui concerne I_2 , M. P. Lévy a étudié la loi à deux dimensions [toujours dans l'hypothèse $X(0) = 0$]

$$H(\alpha, \beta) = \Pr[X(t) < \alpha, I_2 < \beta]$$

et montré que $K(\alpha, \beta) = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$ satisfait à l'équation parabolique

$$(4) \quad K + \alpha \frac{\partial K}{\partial \alpha} + (4\beta - 2\alpha^2) \frac{\partial K}{\partial \beta} + \frac{\partial K^2}{\partial \alpha^2} = 0,$$

ce qui, compte tenu de ce que H est une fonction de répartition, détermine complètement H ; mais on n'a pas jusqu'à présent, croyons-nous, résolu l'équation (4).

Fondamentalement, la difficulté de trouver les lois de probabilité des I_m ou J_m tient à ce que I_m et J_m sont des fonctionnelles non linéaires de $X(\tau)$ (sauf I_1).

6. **Solution du cas particulier de I_2 .** — En ce qui concerne I_2 , Kac et Erdős ont pu donner [19], après Cameron et Martin [20], une solution relativement directe; si l'on partage $(0, 1)$ en n intervalles égaux par les valeurs

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad t_i = \frac{i}{n}, \quad \dots, \quad t_n = \frac{n}{n} = 1,$$

et en se plaçant dans l'hypothèse où $X(0) = 0$, I_2 est la limite p. de

$$I_2^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j \Delta X_k \right)^2$$

en posant

$$\Delta X_j = X(t_j) - X(t_{j-1});$$

les ΔX_i sont des v. a. indépendantes, laplaciennes, d'e. m. nulles et d'é. m. q. $\frac{1}{\sqrt{n}}$; il suffit donc d'évaluer la l. de p. de I_2^n et de passer à la limite pour $n \rightarrow +\infty$; en posant $\Delta X_j = \frac{R_j}{\sqrt{n}}$, on est ramené au problème suivant; en posant

$$F_2^n(\alpha) = \Pr \left[\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j R_k \right)^2 < \alpha \right] \quad [\alpha > 0]$$

déterminer $F_2^n(\alpha)$; les R_i étant des v. a. laplaciennes indépendantes d'e. m. nulle, d'e. q. m. égal à 1; la caractéristique

$$\varphi^n(v) = \int_0^{+\infty} e^{iv\alpha} dF_2^n(\alpha) = E \left[\frac{iv}{n^2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j R_k \right)^2 \right]$$

de $F_2^n(\alpha)$ est définie par l'intégrale n -uple

$$\varphi^n(v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ fois}} \exp \left\{ \frac{iv}{n^2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j x_k \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_j x_j^2 \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

dont le calcul est d'un type classique dans l'étude des lois de Laplace à n dimensions.

En faisant le changement de variable

$$y_j = \sum_{k=1}^j x_k \quad \text{ou} \quad x_j = y_j - y_{j-1}, \quad x_1 = y_1,$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi^n(v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{iv}{n^2} \sum_{j=2}^n y_j^2 \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{y_1^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (y_j - y_{j-1})^2 \right\} dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Soit $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ la forme quadratique (définie positive)

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \sum_{j=2}^n (y_j - y_{j-1})^2$$

et A sa matrice; soient s_1, s_2, \dots, s_n les valeurs propres de A ; en opérant le changement de variable qui correspond à se rapporter aux axes de l'ellipsoïde $\Phi = \text{const.}$, l'intégrale devient

$$\varphi^n(v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{iv}{n^2} \sum_j z_j^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_j s_j z_j^2 \right\} dz_1 \dots dz_n$$

et sous cette forme elle est immédiatement calculable et donne

$$\varphi^n(v) = \prod_{j=1}^n \left(s_j - \frac{2iv}{n^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

ou encore

$$\varphi^n(v) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{2iv}{n^2 s_j} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

car $\prod_j s_j = 1$.

Il reste alors à calculer les s_j , ce qui peut se faire élémentairement; mais si l'on ne s'intéresse qu'à la limite pour $n \rightarrow +\infty$, on peut se dispenser de ce calcul ennuyeux; on vérifie assez facilement que les éléments $b_{r,s}$ ($r, s = 1, 2, \dots, n$) de la matrice $B = A^{-1}$ sont donnés par les formules

$$b_{r,s} = \min[r, s].$$

D'autre part les quantités $\frac{1}{s_j}$ sont les valeurs propres de A^{-1} ; un passage à la limite justifié par une théorie de Hilbert ⁽¹⁾ permet alors de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 s_j} = \lambda_j$$

est valeur propre de l'équation intégrale

$$(5) \quad \int_0^1 \min(x, y) f(y) dy = \lambda f(x),$$

qu'on peut écrire

$$\int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy = \lambda f(x),$$

d'où l'on tire

$$(6) \quad \lambda f'(x) = \int_x^1 f(y) dy,$$

puis

$$\lambda f''(x) + f(x) = 0.$$

(5) et (6) montrant que $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que

$$\lambda_j = \left[\frac{\pi}{2} (1 + 2j) \right]^{-2} \quad (j = 0, 1, \dots, +\infty).$$

On en déduit que $\varphi^n(v)$ tend (uniformément sur tout intervalle fini) vers

$$\varphi_2(v) = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{2iv}{\left[(2j+1) \frac{\pi}{2} \right]^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On reconnaît au second membre le développement en produit infini de

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\sqrt{2}iv)}} \quad (2).$$

On peut considérer que ce résultat résout d'une façon satisfaisante le

⁽¹⁾ HILBERT, *Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen* (référence indiquée par M. Kac).

⁽²⁾ Où il conviendrait de préciser les déterminations des radicaux, ce qui se fait facilement en suivant le calcul de près.

problème de déterminer la loi de probabilité de I_2 ; cependant il ne fournit pas directement $F_2(\alpha)$; mais Cameron et Martin [20] ont montré que la fonction $F_2(\alpha)$ de caractéristique $\varphi_2(v)$ peut être représentée par la formule

$$F_2(\alpha) = \frac{\pi^{-\frac{3}{2}}}{4} \int_0^\alpha \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{\theta}{2}, e^{-\frac{1}{4}u} \right) d\theta \right] u^{-\frac{3}{2}} du,$$

où $\psi(a, b)$ est la dérivée partielle par rapport à a de la fonction

$$\psi(a, b) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k b^{\frac{(2k+1)^2}{4}} \sin(2k+1)a,$$

résultat compliqué, mais permettant cependant assez facilement un calcul numérique.

7. Méthode de solution générale. — De la méthode précédente, il convient de dégager et de retenir deux points, car ils seront évidemment d'application générale : considérer l'intégrale étudiée (ici I_2) comme limite d'une somme riemannienne, dont la caractéristique est calculée exactement; obtention, à la limite, d'une équation intégrale, dont les valeurs propres jouent un rôle et doivent être calculées.

Mais le premier point donne tout de suite lieu à une difficulté, si au lieu de I_2 , on prend J_1 , ou I_m ou J_m en général pour $m \neq 2$: le calcul de $\varphi^n(v) = E \left[\frac{iv}{n^2} \sum_j \left(\sum_k R_k \right)^2 \right]$, les R_k étant laplaciens, est facile; celui de $E \left[\frac{iv}{n^2} \sum_j \left| \sum_k R_k \right| \right]$ par exemple ne l'est pas : mais on peut penser qu'il deviendrait plus facile si les R_k , au lieu d'être laplaciens, suivaient une autre loi convenablement choisie; de fait c'est ce qui arriverait, comme nous le verrons par la suite, si les R_k obéissaient à la première loi de Laplace, de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|u|}{\sqrt{2}}}.$$

Cette remarque a conduit tout naturellement Kac et Erdős [19] à établir le théorème suivant :

THÉOREME. — $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, étant une suite indéfinie de v. a. indépendantes obéissant à une même loi quelconque de moyenne nulle et d'e. m. q. égal à 1, les lois de probabilité des sommes riemanniennes

$$I_m^n = \frac{1}{n^{\frac{m}{2}+1}} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i T_k \right)^m, \quad J_m^n = \frac{1}{n^{\frac{m}{2}+1}} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^i T_k \right|^m,$$

tendent, lorsque $n \rightarrow +\infty$, respectivement vers les lois de I_m, J_m .
C'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr[I_m^n < \alpha] = F_m(\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr[J_m^n < \alpha] = G_m(\alpha).$$

Nous ferons la démonstration en supposant que si m^* est le plus petit entier pair $\geq m$, $E\{(T_k)^{m^*}\}$ existe, mais le théorème est certainement valable sous des hypothèses beaucoup plus générales (1).

Nous poserons

$$W_j = \sum_{k=1}^j T_k$$

et $\varphi(v)$ désignera la caractéristique des T_n ; d'autre part, R_1, \dots, R_n, \dots désignera toujours une suite de v. a. laplacienne de moyenne nulle et d'e. m. q. égal à 1; nous poserons

$$V_j = \sum_{k=1}^j R_k;$$

et nous traiterons en premier lieu le cas de I_m^n .

De l'existence de $E(T_k^{m^*})$ on déduit qu'il existe une constante C indépendante de μ et de ν telle que l'on ait, quels que soient μ et ν ($\mu < \nu$),

$$\sqrt{m} \left\{ E \left\{ \left| \sum_{k=\mu}^{\nu} T_k \right|^m \right\} \right\} \leq C \sqrt{\nu - \mu} \quad \text{pour } m \leq m^*.$$

(1) Kac et Erdős n'ont donné explicitement la démonstration que pour $m=1$ et $m=2$; l'existence de l'e. m. q. des T_n est alors suffisante.

Ceci rappelé, k désignant un entier > 0 quelconque, posons

$$r_i = \left[i \frac{n}{k} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

et, en supposant $n > k$,

$$A_n = I_m^n - \frac{1}{n^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{i=1}^k (r_i - r_{i-1}) W_{r_i}^m.$$

a. Nous allons montrer que $\Pr[|A_n| > \varepsilon]$ tend vers zéro quel que soit ε , uniformément par rapport à n , si $k \rightarrow +\infty$; en effet

$$E[|A_n|] \leq \frac{1}{n^{\frac{m}{2}+1}} \sum_{i=1}^k \sum_{r=r_{i-1}+1}^{r_i} E|W_{r_i}^m - W_r^m|.$$

En posant $S_{r,i} = W_{r_i} - W_r$, et en remarquant que $S_{r,i}$ est indépendante de W_r , on trouve

$$E[|W_{r_i}^m - W_r^m|] \leq \sum_{\lambda=0}^{m-1} C_m^\lambda E[|W_r^\lambda|] E[|S_{r,i}^{m-\lambda}|].$$

On sait que

$$E[|W_r|^\lambda] \leq \left\{ \sqrt{E|W_r|^m} \right\}^\lambda \leq C_\lambda r^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$E[|S_{r,i}|^{m-\lambda}] \leq \left\{ \sqrt{E[|S_{r,i}|^m]} \right\}^{m-\lambda} \leq C^{m-\lambda} (r_i - r)^{\frac{m-\lambda}{2}},$$

comme $r \leq n$ et $r_i - r < n$.

Il existe donc une constante C_1 telle que

$$E|W_{r_i}^m - W_r^m| \leq C_1 n^{\frac{m-1}{2}} (r_i - r)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{r=r_{i-1}+1}^{r_i} E|W_{r_i}^m - W_r^m| \leq C_1 n^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{r_i - r_{i-1}} \sqrt{j} \leq \frac{2}{3} C_1 n^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{n}{k} + 1 \right)^{\frac{3}{2}},$$

car $r_i - r_{i-1} \leq \frac{n}{k} + 1$; il existe donc une constante C_2 telle que l'on ait, quel que soit $n > k$,

$$(7) \quad E|A_n| < \frac{C_2}{K^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui établit le résultat annoncé.

b. Posons

$$U_i = \frac{\sqrt{r_i - r_{i-1}}}{n} W_{r_i} \quad (i = 1, \dots, k),$$

et cherchons la loi-limite lorsque, k restant fixe, $n \rightarrow +\infty$, de la v. a. à k dimension (U_1, U_2, \dots, U_k) ; pour cela nous prenons sa caractéristique, c'est-à-dire l'e. m. de $\exp\left\{i \sum_{j=1}^k v_j U_j\right\}$; on trouve immédiatement que c'est

$$(8) \quad \prod_{l=1}^k \varphi^{r_l - r_{l-1}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=l}^k v_j \sqrt{r_j - r_{j-1}} \right);$$

comme $\frac{r_l - r_{l-1}}{n} \rightarrow \frac{1}{k}$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, la quantité (8) tend (uniformément dans toute région bornée de l'espace à k dimensions des v_j) vers

$$\exp\left\{-\frac{1}{2k^2} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{l=j}^k v_l\right)^2\right\},$$

qui est la caractéristique de la l. de p. à k dimensions de $\left(\frac{V_1}{k}, \frac{V_2}{k}, \dots, \frac{V_k}{k}\right)$: la l. de p. des (U_j) tend donc vers celles des $\left(\frac{V_j}{k}\right)$; il en résulte que la l. de p. de

$$\frac{1}{n^{\frac{m}{2}+1}} \sum_{i=1}^k (r_i - r_{i-1}) W_{r_i}^m = \sum_{i=1}^k \frac{n^{\frac{m}{2}-1}}{(r_i - r_{i-1})^{\frac{m}{2}-1}} U_i^m,$$

tend vers celle de

$$\frac{1}{k^{\frac{m}{2}+1}} \sum_{i=1}^k V_i^m.$$

Or, si k a été pris assez grand, cette dernière l. de p. est aussi proche qu'on le veut de la l. de p. de I_m ; en tenant compte de (7) le théorème en résulte pour les I_m .

c. Pour les J_m , la méthode est exactement la même : le rôle de A_n est joué par la quantité

$$B_n = J_n^n - \frac{1}{n^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{i=1}^k (r_i - r_{i-1}) |W_{r_i}|^m,$$

et l'on évalue $E|B_n|$ comme on évalue $E|A_n|$, à de très légères modifications près (utiliser les inégalités de Hölder).

Remarque. — La même méthode à peu près permet également de prouver [Kac et Erdős, 19] que :

a. la l. de p. de $I_0^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} W_j$ tend lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers la l. de p. de $I_0 = \max_{0 \leq \tau \leq 1} X(\tau)$;

b. la l. de p. de $J_0^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} |W_j|$ tend dans les mêmes conditions vers la l. de p. de $J_0 = \max_{0 \leq \tau \leq 1} |X(\tau)|$.

8. Le théorème qui vient d'être établi est d'abord un théorème-limite intéressant en lui-même; et il serait souhaitable d'en fournir une démonstration affranchie de l'hypothèse très probablement trop restrictive que $E(|T_k^{m*}|) < +\infty$, et de l'étendre à des fonctionnelles plus générales que I_m et J_m . Et quant à notre objet actuel de déterminer les lois de probabilité des I_m et des J_m , il permet la méthode suivante :

Raisonnons par exemple sur J_m ; nous allons déterminer la l. de p. de J_m^n , par sa caractéristique; d'une façon générale, il semble plus commode d'utiliser la caractéristique réelle (fonction génératrice de Laplace), c'est-à-dire

$$g^n(v) = E[\exp\{-v J_m^n\}] \quad (v > 0).$$

Nous pouvons pour cela nous donner pour les T_k une loi arbitraire (sous réserve qu'elle satisfasse aux conditions du théorème, bien entendu); comme il s'agit de calculer la moyenne d'une exponentielle, il semble indiqué de choisir une loi ayant une densité de la forme

$$(9) \quad h e^{-\mu|x|^\nu} \quad (h, \mu, \nu > 0),$$

ce qui donne

$$g^n(v) = h^n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ fois}} \exp\left\{-\frac{v}{n^{1+\frac{m}{2}}}\right. \\ \left. \times \left[\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^j x_k \right|^m \right] - \mu \sum_{j=1}^n |x_j|^\nu \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

en posant $u = \frac{v}{n^{1+\frac{m}{2}}}$ et en faisant le changement de variable

$$y_1 = x_1, \dots, y_j = \sum_{k=1}^j x_k, \dots, y_n = \sum_{k=1}^n x_k,$$

puis en considérant le noyau

$$K(s, t) = h e^{-u|t|^m} e^{-\mu|t-s|^\nu} e^{-u|s|^m},$$

dont on désignera par $K_p(s, t)$ le $p^{\text{ième}}$ itéré, on voit que

$$(10) \quad g^n(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(0, t) e^{-u|t|^m} dt;$$

donc si l'on considère l'équation intégrale à noyau symétrique

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t) f(t) dt = \lambda f(s)$$

et si l'on désigne par λ_l ses valeurs propres, par $f_l(t)$ ses fonctions propres normalisées, on voit que

$$g^n(v) = \sum_l f_l(0) \lambda_l^n \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(t) e^{-u|t|^m} dt.$$

De sorte que le problème est ramené à la détermination (explicite) des valeurs et des fonctions propres de l'équation intégrale (9); c'est à vrai dire un problème extrêmement difficile, et pour le moment non résolu d'une façon générale; mais il faut remarquer :

1° Qu'il est en tout cas fort intéressant d'avoir mis en évidence la relation existant entre les lois des probabilités cherchées et les équations intégrales (11); nous verrons plus loin qu'on est ainsi conduit à de curieuses propriétés de certaines équations intégrales.

2° Le choix d'une loi du type (9), a semblé le plus indiqué a priori; cependant il pourrait se faire qu'un autre choix conduise en définitive à une équation intégrale plus simple; de même que s'il semble plus indiqué de déterminer la l. de p. par sa caractéristique, il vaudrait la peine de tenter de la déterminer directement, ce qui donnerait lieu sans doute à faire appel à des lois d'un autre type que (9). En particulier, on peut songer à prendre pour les T_k une loi discontinue simple, par exemple

$$\Pr(T_k = 1) = \frac{1}{2}, \quad \Pr(T_k = -1) = \frac{1}{2},$$

on sera alors conduit à un système d'équations linéaires algébriques

homogènes, au lieu de l'équation intégrale (11). Nous donnerons plus loin une application de cette idée (§ 9).

Application au cas de J_1 . — Dans le cas où $m = 1$, si l'on prend $\mu = \sqrt{2}$, $\nu = 1$, d'où $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (soit la première loi de Laplace), on aboutit (en remplaçant $t\sqrt{2}$ par t , $s\sqrt{2}$ par s) à l'équation intégrale

$$(12) \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}|s|} e^{-|t-s|} e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}|t|} f(t) dt = \lambda f(s),$$

que Kac [21] a pu étudier ⁽¹⁾, en s'inspirant de la méthode suivie par Juncosa ⁽²⁾ pour faire une étude analogue. Nous nous bornerons ici à indiquer ses résultats :

Soient $r_1, r_2, \dots, r_l, \dots$ les racines positives de $J_{\frac{\sqrt{2}}{u}}(x) = 0$, et $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \dots$ les racines positives de $J'_{\frac{\sqrt{2}}{u}}(x) = 0$; les valeurs propres de (10) sont les nombres

$$\frac{2}{(r_l u)^2} \quad (l = 1, 2, \dots, \infty)$$

et aussi les nombres $\frac{2}{(\rho_l u)^2}$.

Les fonctions propres correspondantes sont resp., à un coefficient constant près,

$$\text{sign} J_{\frac{\sqrt{2}}{u}} \left[r_l e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}|t|} \right] e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}|t|} \quad \text{et} \quad J_{\frac{\sqrt{2}}{u}} \left[\rho_l e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}|t|} \right] e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}|t|},$$

d'où résulte pour $g^n(v)$ l'expression

$$g^n(v) = 2 \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{\rho_l} \right)^{2n} \frac{\int_0^1 x J_{\tau}(\rho_l x) dx}{\left(1 - \frac{\tau^2}{\rho_l^2} \right) J_{\tau}(\rho_l)}, \quad \lambda = \frac{(2n)^{\frac{n}{2}}}{v}.$$

Il reste à passer à la limite ($n \rightarrow +\infty$) pour aboutir à $G_1(\alpha)$; ce passage à la limite est complexe, il s'appuie sur des propriétés des fonctions de

⁽¹⁾ Des équations intégrales très voisines interviennent dans certaines questions de « bruits de fond ».

⁽²⁾ JUNCOSA, *Duke Math. Journal*, vol. 12, 1945, p. 465.

Bessel, dont certaines, encore inconnues, ont dû être établies par Kac; nous n'entrerons pas dans ce calcul, pour lequel nous renvoyons au Mémoire original [21], nous bornant à en donner le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(v) = \int_0^{+\infty} e^{-v\alpha} dG_1(\alpha) = \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \exp\left\{-b_l v^{\frac{2}{3}}\right\},$$

où les b_l sont les racines positives de la dérivée $P'(x)$ de la fonction

$$P(x) = \frac{\sqrt{2x}}{3} \left\{ J_{-\frac{1}{3}} \left[\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] + J_{\frac{1}{3}} \left[\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] \right\}$$

et où

$$a_l = \frac{1 + 3 \int_0^{b_l} P(x) dx}{3 b_l P(b_l)}.$$

On pourrait, d'après ce résultat, faire assez facilement un calcul numérique de la génératrice de $G_1(\alpha)$; mais Kac n'a pu indiquer aucune expression un peu maniable pour $G_1(\alpha)$ elle-même.

9. Cas de I_0 et de J_0 . — Les lois de p , de I_0 et de J_0 , qui sont des probabilités d'absorption, ont été déjà obtenues par divers auteurs : Bachelier [11], P. Lévy [14], Fortet [10], Furth [22]; on sait que

$$F_0(\alpha) = \Pr(I_0 < \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}} du & \text{si } \alpha \geq 0, \end{cases}$$

$$(13) \quad G_0(\alpha) = \Pr[J_0 < \alpha] = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} e^{-\frac{\pi^2(2l+1)^2}{8a^2\alpha^2}} \quad (\alpha \geq 0) \quad (1).$$

Il est cependant intéressant de reprendre la question par la méthode de Kac; nous allons le faire en ce qui concerne J_0 , qui est moins simple que I_0 ; et nous adopterons pour les T_k la l. de p .

$$\Pr(T_k = 1) = \Pr(T_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

(1) Nous avons cherché si, par la méthode d'équations intégrales exposées dans (10), il était possible d'obtenir une expression de $G_0(\alpha)$ plus simple que (13); nous n'y avons pas réussi; observons que (13) se prête aisément au calcul numérique.

Il s'agit de calculer dans ces conditions $\Pr \left[\text{Max}_{1 \leq j \leq n} |W_j| < \alpha \sqrt{n} \right]$; car il n'est pas indiqué ici de passer par l'intermédiaire des caractéristiques; nous allons calculer plus généralement, car cela est intéressant en soi,

$$P(a, b) = \Pr \left[-a \leq \max_{1 \leq j \leq n} W_j < b \right] \quad (a \text{ et } b > 0),$$

en supposant toutefois a et b entiers; on notera la parenté de ce problème de probabilités d'absorption avec certaines recherches de Wald à propos de *tests progressifs* (cf. entre autres mémoires de Wald, [23]; il rentre d'ailleurs dans le cadre de la théorie des chaînes de Markoff à une infinité dénombrable d'états possibles, cf. par exemple Fortet, [24]).

En appelant $\delta(s)$ la fonction de s qui vaut $\frac{1}{2}$ si $s = \pm 1$, et 0 si $s \neq \pm 1$, on peut écrire

$$P(a, b) = \Pr \left[-a \leq T_1 \leq b, -a \leq T_1 + T_2 \leq b, \dots, -a \leq T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq b \right] = \sum \delta(s_1) \delta(s_2) \dots \delta(s_n),$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes de n entiers (s_1, \dots, s_n) tels que

$$-a \leq s_1 \leq b, \quad -a \leq s_1 + s_2 \leq b, \quad \dots, \quad -a \leq s_1 + \dots + s_n \leq b,$$

soit, en posant

$$t_j = a + s_1 + s_2 + \dots + s_j,$$

$$P(a, b) = \sum_{t_1, \dots, t_n=0}^{a+b} \delta(t_1 - a) \delta(t_2 - t_1) \dots \delta(t_n - t_{n-1}),$$

qui est analogue de (10); en appelant A la matrice d'ordre $(a + b + 1)$ dont les éléments a_{ik} sont les nombres $a_{ik} = \delta(i - k)$, soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

on voit que $P(a, b)$ est la somme des éléments de la $(a + 1)^{\text{ième}}$ colonne de A^n ; il va donc être possible d'exprimer $P(a, b)$ en fonction

des valeurs propres λ_l et des solutions fondamentales $[x_1^l, x_2^l, \dots, x_{a+b+1}^l]$ du système symbolisé par

$$(14) \quad \Lambda(x) = \lambda x.$$

Ici le calcul des λ_l et des x_k^l se fait facilement, Λ étant une matrice d'un type classique ⁽¹⁾; on trouve

$$\lambda_l = \cos \frac{\pi l}{a+b+2}, \quad x_k^l = \frac{\sqrt{2}}{a+b+2} \sin \frac{\pi lk}{a+b+2},$$

ce qui donne

$$(15) \quad P(a, b) = \frac{a+b+2}{2} \sum_{l=1}^{a+b+1} \cos^n \frac{\pi l}{a+b+2} \sin \frac{\pi l(a+1)}{a+b+2} \cot \frac{\pi l}{2(a+b+2)},$$

l'astérisque indiquant que la sommation ne s'étend qu'aux impairs; si l'on fait maintenant $a = b \sim \alpha \sqrt{n}$, un passage à la limite élémentaire conduit bien à l'expression ci-dessus de $G_0(\alpha)$ [en remplaçant l par $(2l+1)$].

Au lieu de partir pour les T_k avec la l. de p. discontinue ci-dessus, on aurait pu évidemment leur attribuer une loi continue, par exemple à densité symétrique continue $\rho(x)$ avec

$$(16) \quad \rho(x) = \rho(-x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \rho(x) dx = 1.$$

On aurait été conduit, au lieu du système (14), à l'équation intégrale à noyau symétrique

$$\int_0^{a+b} \rho(t-s) f(t) dt = \lambda f(s)$$

(où il n'est plus de raisons de supposer a et b entiers); soit, dans le cas où $a = b = \alpha \sqrt{n}$,

$$(17) \quad \int_0^{2\alpha\sqrt{n}} \rho(t-s) f(t) dt = \lambda f(s).$$

En appelant λ_l les valeurs propres de (17), $f_l(t)$ les fonctions propres normalisées correspondantes, on en déduirait, pour la probabilité correspondant actuellement à $P(\alpha\sqrt{n}, \alpha\sqrt{n})$, l'expression

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \lambda_l^n f_l(\alpha\sqrt{n}) \int_0^{2\alpha\sqrt{n}} f_l(t) dt$$

(1) Celui que nous avons appelé *homogène fini* dans notre Thèse.

(où les λ_l et les f_l dépendent de n); or ceci doit tendre, pour $n \rightarrow +\infty$, vers l'expression ci-dessus de $G_0(x)$; cela donne à penser, surtout si l'on se réfère à l'analogie (15) et au cas où $\rho(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, pour lequel les λ_l et les f_l peuvent être calculés élémentairement, que quelle que soit la fonction continue $\rho(x)$ satisfaisant aux conditions (16) (et peut être en plus à quelque condition faiblement restrictive), on doit avoir

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_l = e^{-\frac{\pi^2 l^2}{8\alpha^2}}$$

(en supposant les λ_l rangés par ordre de valeurs absolues décroissantes) et ce fait que les λ_l ont des limites indépendantes de $\rho(x)$ est assez curieux. Nous devons à M. Kac, cette intéressante remarque, mais ni lui ni nous n'avons pu établir une démonstration générale de (18).

DEUXIÈME PARTIE.

10. L'équation de Langevin et les schémas O. U. — Nous avons indiqué dans l'Introduction qu'il y avait lieu de rechercher, pour représenter le mouvement brownien, des schémas qui approchent la réalité de plus près que les schémas E. S.; une solution satisfaisante de ce problème semble être fournie par les schémas O. U., dont nous allons exposer la théorie.

Limitons-nous toujours au mouvement brownien projeté sur OX, en supposant qu'il n'y a pas de champ de force et en négligeant l'action des parois (ce qui revient à supposer le fluide indéfini); nous désignerons par $V(t)$ la vitesse à l'instant t d'une particule P d'abscisse $X(t)$ et de masse m ⁽¹⁾; le fluide, isotrope, est supposé en équilibre mécanique et thermique (macroscopiquement); de sorte que l'agitation de ses molécules est un processus stationnaire; dans ces conditions, son action sur P, durant un intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$, action qui s'opère par une succession de chocs, est conditionnée par la vitesse de P à l'instant t , mais ne dépend ni des vitesses antérieures de P, ni de ses abscisses aux instants $\tau \leq t$; autrement dit, $V(t)$ est un processus de Markoff, qui sera parfaitement défini si l'on détermine la probabilité de passage $Q(t, v; \tau, \lambda)$ que $V(\tau) < \lambda$ quand $V(t) = v (t < \tau)$, et si, en outre, on se donne la fonction de répartition $Q_0(v)$ de la vitesse à l'instant initial, que nous supposerons être l'instant $t = 0$, $Q_t(v)$ désignera la fonction de répartition de la vitesse à l'instant t .

En outre, la stationnarité de l'agitation moléculaire dans le fluide entraîne que $Q(t, v; \tau, \lambda)$ ne dépend que de $\tau - t$ ⁽²⁾.

D'autre part, la loi d'équirépartition de l'énergie de Maxwell relative à l'agitation moléculaire entraîne pour le mouvement brownien de P, qui n'est qu'un reflet de cette agitation moléculaire, des conséquences

⁽¹⁾ Nous prendrons $m = 1$ dans les calculs suivants.

⁽²⁾ Ceci suppose que le jet, dans le fluide, des particules, ne trouble pas sensiblement le mouvement d'agitation moléculaire.

qui peuvent s'exprimer, en désignant par k la constante de Boltzmann et par T la température absolue du fluide, par l'énoncé suivant, que nous appellerons la loi (M) :

Loi (M). — $Q(t, v; \tau, \lambda)$ doit être telle que, quelle que soit $Q_0(v)$, $Q_t(v)$ tende, lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers la loi de Laplace d'e. m. nulle et d'e. m. q. $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \sigma$.

Enfin, les Physiciens ont été conduits à admettre que l'action du fluide sur P est en moyenne une résistance proportionnelle à la vitesse de P, le coefficient de proportionnalité f (appelé coefficient de friction) étant une constante (indépendante du temps, de X et de V) ⁽¹⁾. On peut préciser cela de la façon suivante : plaçons-nous dans l'hypothèse où la vitesse de P a une valeur initiale (pour $t = 0$) déterminée quelconque v_0 ; soit $F(t)$ la force que le fluide appliqué à P à l'instant t ; dans la catégorie des épreuves C où $V(0) = v_0$, $F(t)$ est une f. a. bien déterminée; on peut toujours poser

$$F(t) = -fV(t) + A(t),$$

$A(t)$ est alors aussi sur C une f. a. bien déterminée; ceci dit, la loi physique précédente signifie que quel que soit v :

$$E_C[A(t)/V(t) = v] = 0$$

E_C désignant une e. m. prise sur C.

Telles sont les conditions imposées par la Physique à $Q(t, v; \tau, \lambda)$: il s'agit donc de trouver les probabilités de passage $Q(t, v; \tau, \lambda)$ qui y satisfont, s'il y en a, car, en dehors de l'interprétation physique, il n'est pas évident que ces conditions sont compatibles.

Nous allons d'abord indiquer rapidement la méthode de Ornstein et Uhlenbeck [1] pour répondre à cette question. Si, assimilant P à un point matériel, on lui applique les principes de la Mécanique Classique, on obtient

$$(19) \quad \frac{dv}{dt} + fv = A(t).$$

(1) La constante D de (1) est égale à $\frac{kT}{f}$.

C'est ce que l'on appelle l'équation de Langevin. Or Uhlenbeck et Ornstein ont montré que l'on peut, à partir de l'équation de Langevin; calculer tous les moments conditionnels de $V(\tau)$ quand $V(t) = v$, et en déduire, compte tenu de la loi (M) que $Q(t, v; \tau, \lambda)$ a par rapport à λ une dérivée partielle $q(t, v; \tau, \lambda)$ donnée par la formule

$$(20) \quad q(t, v; \tau, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[1-\rho^2(\tau-t)]}\sigma} \exp\left\{-\frac{[\lambda - \rho(\tau-t)v]^2}{2\sigma^2[1-\rho^2(\tau-t)]}\right\},$$

où l'on a posé

$$\rho(\alpha) = e^{-f|\alpha|},$$

(rappelons que nous supposons $m = 1$).

On vérifie immédiatement que la fonction $Q(t, v; \tau, \lambda)$ correspondante satisfait à toutes les conditions voulues, autrement dit le problème posé admet une solution; mais il faut signaler que Uhlenbeck et Ornstein, dont nous ne reproduisons pas ici le calcul, n'utilisent pas le fait que $V(t)$ doit être un processus de Markoff; ils remplacent cette condition par une hypothèse sur $A(t)$ qu'on peut exprimer en gros ainsi : sur la catégorie C, si $|t - \tau| \rightarrow \infty$, les v. a. $A(t)$ et $A(\tau)$ tendent à être indépendantes, ce qui du point de vue physique est évidemment admissible; mais dans ces conditions, le calcul de Ornstein et Uhlenbeck ne permet pas d'affirmer que la probabilité de passage définie par la formule (20) est la seule solution du problème tel que nous l'avons posé.

Nous appellerons schémas O. U. les processus de Markoff dont la probabilité de passage est donnée par la formule (20); qui exprime que, quand $V(t) = v$, la v. a. $V(\tau) - \rho(\tau-t)v$ est laplacienne, d'e. m. nulle et d'e. m. q. $\sigma\sqrt{1-\rho^2(\tau-t)}$; dans le cas particulier où l'on prendrait comme loi initiale $Q_0(v)$ la loi de densité

$$(21) \quad q_0(v) = \frac{e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma},$$

$V(t)$ sera en outre stationnaire, strictement et d'ordre 2, avec pour f. c. la fonction $r(\tau) = \sigma^2 \exp[-f|\tau|]$; elle aura alors une f. s. absolument continue et de densité

$$f(\omega) = \frac{\sigma f}{\pi} \frac{1}{f^2 + \omega^2}.$$

(Il est en effet bien connu que la caractéristique de la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi}(1+x^2)$ est $e^{-|v|}$); enfin si l'on se rappelle que l'on dit qu'une f. a. $H(t)$ stationnaire d'ordre 2 est laplacienne lorsque, quels que soient $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la loi de la v. a. à n dimensions $[H(t_1), H(t_2), \dots, H(t_n)]$ est laplacienne, on voit que l'on peut, toujours dans le cas où $q_0(v)$ est de la forme (21), dire que V est une f. a. stationnaire laplacienne.

L'étude de $V(t)$, pour un schéma O. U., dans le cas général où $q_0(v)$ est quelconque, se fait très facilement en remarquant que la f. a. $V^*(t)$ définie par

$$V^*(t) = \sqrt{t} V \left[\frac{\log t}{2f} \right] \quad (\text{pour } t > 0),$$

est un schéma de Wiener-Lévy, c'est-à-dire une f. a. à accroissements laplaciens et indépendants, l'e. m. q. de $V^*(t + \tau) - V^*(t)$ étant $\sigma\sqrt{\tau}$: les propriétés des schémas de Wiener-Lévy, bien connues depuis les travaux de ces deux Auteurs (1) donnent lieu immédiatement à une propriété corrélatrice pour $V(t)$; on voit par exemple que :

a. $V(t)$ est p. s. une fonction continue;

b. on a p. s.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{2\sigma\sqrt{f\Delta t \log \log \left(\frac{1}{\Delta t} \right)}} = 1$$

... etc...

Étude de $X(t)$ pour un schéma O. U. — Mais nous n'avons avec ce qui précède qu'une étude des vitesses; pour obtenir le déplacement lui-même $X(t)$, il suffit de remarquer que

$$(22) \quad X(t) = X(0) + \int_0^t V(\tau) d\tau,$$

par définition même de la vitesse; en effet, l'intégrale (22) existe p. s., puisque $V(t)$ est p. s. une fonction continue, (il s'agit d'une intégrale de Riemann); on en déduit aisément la loi de probabilité de $X(t)$: si par exemple $Q_0(v)$ est donnée par (21), la somme riemanienne

$$\sum V\left(\frac{t_i}{n}\right) \frac{t}{n},$$

(1) Cf. LÉVY, [13, 14, 15].

(par exemple) qui tend vers $X(t) - X(o)$, étant sur C laplacienne, il en est de même de $X(t) - X(o)$, dont il suffit de déterminer l'e. m. et l'e. m. q. : des calculs élémentaires donnent

$$E_c[X(t) - X(o)] = E_c \left[\int_0^t V(\tau) d\tau \right] = \int_0^t E_c[V(\tau)] d\tau = 0,$$

(l'inversion des signes E et \int étant justifiée par le théorème de Fubini) et de même,

$$E_c[\{X(t) - X(o)\}^2] = \frac{2\sigma^2}{f^2} [e^{-ft} - 1 + ft].$$

On constate ainsi que $|X(t) - X(o)|$ est, pour t petit, de l'ordre de $|t|$. On peut ainsi déterminer les lois des couples $[X(t) - X(o), V(t)]$ ou $[X(t_1) - X(t_2), X(\tau_1) - X(\tau_2)]$ pour $t_2 < t_1 < \tau_2 < \tau_1$ [lois conditionnelles pour $V(o) = v_0$, où lois *a priori* en se donnant $q_0(v)$, etc.]. Il est pour la suite plus intéressant de remarquer que si l'on pose

$$B(t) = f[X(t) - X(o)] + [V(t) - V(o)],$$

$B(t)$ est un schéma de Wiener-Lévy.

11. Objection à la méthode de Ornstein et Uhlenbeck. — La solution de Doob. — La façon d'opérer d'Ornstein et Uhlenbeck, pour déterminer $Q(t, v; \tau, \lambda)$, prête à une assez grave objection : l'utilisation de l'équation de Langevin suppose l'existence, à chaque instant, de la dérivée $\frac{dV}{dt}$, au moins en p. : il semble même que l'application brutale des principes de la Mécanique newtonienne à un mouvement aléatoire exige l'existence non seulement en p., mais presque certaine des accélérations (et donc des forces); nous avons au paragraphe 10 fait intervenir la force F , sans soulever cette discussion, mais en réalité aux instants des chocs et si l'on admet la théorie classique des chocs, il faut considérer qu'il se développe des forces infinies : ce qui garde un sens et reste fini; ce sont alors les *percussions*; de ce fait la f. a. $V(t)$ des schémas O. U. n'est pas dérivable, même pas en p. : il apparaît une contradiction entre les prémisses de Ornstein et Uhlenbeck et leurs résultats; comme cependant l'intérêt physique des schémas O. U. en tant que représentatifs d'un mouvement brownien, est hors de doute, il était opportun de les justifier par une méthode plus satisfaisante:

Deux procédés ont été proposés, tous les deux reposant au fond sur l'idée de substituer la notion de percussion à celle de force; l'un est de Bernstein [26] qui remplace l'équation différentielle de Langevin par une équation aux différences finies; alors évidemment l'existence de la dérivée $\frac{dV}{dt}$ n'est plus postulée, et l'on est ramené à la méthode bien connue des *équations différentielles stochastiques* (Bernstein, [9]); l'autre est de Doob [25], et c'est celui-ci que nous allons exposer. Doob remplace l'équation de Langevin par l'équation aux différentielles :

$$(23) \quad dV + fV dt = dB(t) \quad (1)$$

obtenue en multipliant (19) par dt et en remplaçant $A(t) dt$ par $dB(t)$; $B(t)$ désignant une f. a. convenable considérée comme donnée; en l'absence d'une définition des différentielles dV et $dB(t)$, l'équation (23) est d'ailleurs purement symbolique; mais Doob propose de l'interpréter de la façon suivante :

Supposons que $B(t)$ [qui n'interviendra évidemment que par les accroissements $B(\tau) - B(t)$, de sorte que $B(0)$ peut rester non défini : nous le supposons égal à 0 p. s., pour simplifier l'écriture] soit telle que, quels que soient les instants a et b et quelle que soit la fonction (certaine) continue $\varphi(t)$, l'intégrale stochastique

$$\int_a^b \varphi(t) dB(t),$$

existe, au moins en p. [comme limite en p. de sommes Stieltjes-Riemanniennes]; ce que nous exprimerons en disant que $B(t)$ satisfait à la condition (1) : par exemple, la f. a. $B(t)$ satisfait à la condition (1) si elle est à accroissements aléatoires indépendants (2). On dira alors qu'une f. a. $V(t)$ est solution de l'équation (23) si :

a. $V(t)$ est telle que, quels que soient a et b et la fonction continue $\varphi(t)$, les intégrales stochastiques Stieltjes-Riemannienne et Riemannienne

$$\int_a^b \varphi(t) dV(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \varphi(t) V(t) dt,$$

existent au moins en p.;

(1) On suppose toujours $m = 1$.

(2) Ce que Doob appelle, avec Wiener, un processus différentiel, et M. P. Lévy une intégrale à éléments aléatoires indépendants.

b. si en outre on a p. s. (quels que soient a , b et la fonction φ)

$$\int_a^b \varphi(t) dV(t) + f \int_a^b \varphi(t) V(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dB(t).$$

En ce sens il est facile de résoudre (23); en effet, en prenant $a = 0$, $b = t$, $\varphi(t) = e^{ft}$, on doit avoir

$$\int_0^t e^{f\tau} dV(\tau) = -f \int_0^t e^{f\tau} V(\tau) d\tau + \int_0^t e^{f\tau} dB(\tau),$$

d'où par une intégration par partie qui est justifiée par (a),

$$(24) \quad V(t) = e^{-ft} V(0) + e^{-ft} \int_0^t e^{f\tau} dB(\tau).$$

Mais (24) ne fournit $V(t)$ qu'autant qu'on connaît $B(t)$; et d'ailleurs nous avons aussi besoin de connaître $B(t)$ pour vérifier qu'elle satisfait bien à la condition (1), condition nécessaire pour que (24) ait un sens. Or nous ne pouvons déduire $B(t)$ que des conditions physiques du paragraphe 10; parmi celles-ci Doob n'utilise pas la condition que $V(t)$ doit être de Markoff, qui ne lui est pas commode puisqu'elle porte sur $V(t)$ et non sur $B(t)$, et lui substitue une condition que nous appellerons hypothèse (L) ⁽¹⁾; remarquons d'abord que, bien évidemment, $B(t)$ doit être considérée comme bien définie sur la catégorie C caractérisée par la valeur initiale v_0 de $V(t)$; mais les conditions du paragraphe 10 n'autorisent pas à écarter *a priori* la possibilité que $B(t)$ dépende de v_0 : l'hypothèse (L) s'exprime alors ainsi:

Hypothèse (L). — Le processus $B(t)$ est indépendant de v_0 , ce qui, combiné avec la stationnarité de l'agitation moléculaire, donne tout de suite lieu à la condition plus générale: les accroissements de $B(t)$ pour $t \geq \tau$ sont indépendants des vitesses de P aux instants antérieurs ou égaux à τ . En outre l'hypothèse (L) entraîne, toujours à cause de la stationnarité de l'agitation moléculaire, que $B(t)$ est *stationnaire*.

En admettant l'hypothèse (L), Doob démontre alors que: *si la*

⁽¹⁾ Parce qu'elle remonte à Langevin.

formule résolutoire (24) est valable, $B(t)$ est une f. a. à accroissements indépendants.

En effet, (24) montre tout de suite que l'intégrale $\int_0^t e^{f\tau} dB(\tau)$ est indépendante des accroissements de $B(\tau)$ pour $\tau \geq t$, donc que la f. a.

$$C(t) = \int_0^t e^{f\tau} dB(\tau),$$

est à accroissements aléatoires indépendants : si $t_1 < t_2 < \dots < \dots < t_n$, les intégrales $\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{f\tau} dB(\tau)$ sont donc mutuellement indépendantes, et par suite aussi les intégrales

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-f t} d\tau \int_{t_i}^t e^{f\tau} dB(\tau) = B(t_{i+1}) - B(t_i),$$

ce qu'il fallait démontrer.

En tenant compte de ce que $B(t)$ est d'autre part stationnaire, Doob démontre alors que, en vertu de la loi (M), $B(t)$ est nécessairement un processus de Wiener-Lévy; en effet la loi (M) signifie, compte tenu de (24), que la loi de probabilité de la v. a.

$$U_t = e^{-ft} \int_0^t e^{f\tau} dB(\tau)$$

tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers la loi de Laplace d'e. m. nulle et d'e. m. q. σ ; on peut écrire, pour n entier > 0 ,

$$U_{nt} = \sum_0^{n-1} e^{-ft(n-i)} K_i = \sum_0^{n-1} a^{n-i} K_i,$$

en posant

$$K_i = \int_{it}^{(i+1)t} e^{f(\tau-it)} dB(\tau), \quad a = e^{-ft}.$$

Les v. a. K_i sont mutuellement indépendantes et de même loi de p., et le nombre a est < 1 , quel que soit t ; t restant fixe et n tendant vers $+\infty$, la loi de $\sum_0^{n-1} a^{n-i} K_i$ tend vers la loi de Laplace de caractéristique $e^{-\sigma^2 v^2}$;

or, si $\varphi(v)$ est la caractéristique des K_i , la caractéristique $R(v)$ de $\sum_0^{n-1} a^{n-i} K_i$ est

$$R(v) = \varphi(av) \times \varphi(a^2v) \times \dots \times \varphi(a^nv),$$

donc

$$\varphi(av) = \varphi(a^{n+1}v) \frac{R(v)}{R(av)},$$

si

$$n \rightarrow +\infty, \quad R(v) \rightarrow e^{-\sigma^2 v^2}, \quad R(av) \rightarrow e^{-\sigma^2 a^2 v^2}, \\ \varphi(a^{n+1}v) \rightarrow \varphi(0) = 1,$$

donc

$$\varphi(v) = e^{-\sigma^2 \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) v^2}.$$

Les K_i donc sont laplaciennes et d'e. m. nulle, et comme dans K_i , t et i sont arbitraires, on voit que plus généralement, quels que soient s et t

$$\int_s^t e^{f\tau} dB(\tau)$$

est laplacienne et d'e. m. nulle; il en est donc de même de la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} e^{-f \frac{t_i}{n}} \int_{\frac{it}{n}}^{\frac{(i+1)t}{n}} e^{f\tau} dB(\tau).$$

Or, si $n \rightarrow +\infty$, cette somme tend, p. s., vers $B(t)$; $B(t)$ est donc laplacienne et d'e. m. nulle; son e. m. q., dont le calcul est immédiat, est $2fKTt$: le processus $B(t)$ est donc univoquement déterminé par les hypothèses faites, le processus $V(t)$ qui en résulte par (24) est visiblement le schéma O. U., qui se trouve ainsi justifié.

Signalons que dans le Mémoire dont il a été question ici [25], Doob envisage d'autres questions dont il ne sera pas parlé ici; en particulier il montre que l'on obtient encore les schémas O. U. comme unique solution en substituant à la loi (M) des conditions moins restrictives (mais de nature analogue), et il étudie sommairement les processus $V(t)$ fournis par (24) lorsque le processus différentiel $B(t)$ relève d'une loi stable autre que la loi de Laplace; il semble que ces processus soient susceptibles d'applications intéressantes.

12. **Observations sur la méthode de Doob et principe d'une autre méthode.** — Du travail de Doob, il faut croyons-nous retenir d'abord son très ingénieux procédé d'interprétation de l'équation stochastique (23), qui est susceptible d'être appliqué à de multiples problèmes; pour la question même du mouvement brownien, telle qu'elle a été posée au paragraphe 10, sa méthode a l'inconvénient de substituer à la condition que $V(t)$ est de Markoff, condition dont la signification est très claire et dont l'admissibilité ne soulève pas de question, l'hypothèse (L), dont il n'est pas démontré qu'elle lui est équivalente, qui est beaucoup moins claire et qui, de fait, a donné lieu à controverses; il est à remarquer que Ornstein et Uhlenbeck admettent explicitement au départ la possibilité pour $A(t)$, donc pour $B(t)$ de dépendre de v_0 et que s'ils n'ont pas eux-mêmes utilisé la condition que $V(t)$ est de Markoff, du moins l'hypothèse par laquelle ils l'ont remplacée, si elle n'est pas du point de vue mathématique exprimée avec toute la rigueur peut-être désirable, est du moins au point de vue physique plus immédiatement acceptable que l'hypothèse (L).

Il nous semble possible d'établir une méthode échappant à l'inconvénient précédent, et dont le principe serait le suivant : posons

$$b(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (\lambda - v) d_\lambda Q(t, v; t + \Delta t, \lambda),$$

$$2a(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (\lambda - v)^2 d_\lambda Q(t, v; t + \Delta t, \lambda).$$

Nous postulons l'existence de ces limites, mais, du point de vue physique, ce postulat ne soulève pas de difficultés, croyons-nous; le fait que a et b ne dépendent que de v , et non de t , résulte de ce que $Q(t, v; \tau, \lambda)$ ne dépend de t et τ que par leur différence $\tau - t$; nous savons d'ailleurs que

$$b(v) = -fv.$$

L'hypothèse (L) se traduirait par le fait que a est une constante indépendante de v ; mais n'utilisons pas l'hypothèse (L); on sait depuis Kolmogoroff et Feller que, $V(t)$ étant de Markoff

$$\frac{d_\lambda}{d} Q(t, v; \tau, \lambda) = q(t, v; \tau, \lambda)$$

existe et satisfait, en τ et λ , et quels que soient t et v ($t < \tau$), à l'équation

$$(25) \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [a(\lambda)q] - \frac{\partial}{\partial \lambda} [b(\lambda)q].$$

Toutefois ce résultat n'a été établi que moyennant certaines conditions de régularité, qu'on peut postuler sans inconvénients, et aussi sous la condition que $b(v)$ reste borné lorsque $|v| \rightarrow +\infty$, ce qui justement n'est pas le cas ici; mais il ne serait pas difficile, croyons-nous, de montrer que (25) est bien valable dans le cas actuel où $b(v) = -fv$ (1).

Tenons alors compte de la loi (M), qui implique que lorsque $(\tau - t) \rightarrow +\infty$, $Q(t, v; \tau, \lambda)$ tend vers

$$Q^*(t, v; \tau, \lambda) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du,$$

si l'on suppose en outre que cette convergence est telle qu'elle entraîne les convergences de

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^3 Q}{\partial \lambda^3},$$

respectivement vers

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \lambda \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^3 Q^*}{\partial \lambda^3},$$

(25) doit alors admettre la solution $q = e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$, pour laquelle $\frac{\partial q}{\partial \tau} = 0$; cela exige visiblement que a soit égal à la constante $f\sigma^2$, et il est alors facile de montrer que $Q(t, v; \tau, \lambda)$ est nécessairement de la forme (20).

Évidemment, l'hypothèse que

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^3 Q}{\partial \lambda^3}$$

tendent vers

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \lambda \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^3 Q^*}{\partial \lambda^3},$$

dépasse la loi (M); il s'agirait donc de montrer que l'on peut se passer de cette hypothèse supplémentaire pour établir que l'égalité

$$a = f\sigma^2$$

(1) Bernstein [9] et Doeblin [16] ont abordé l'étude de tels cas.

est une conséquence nécessaire de la loi (M); cela ne nous semble pas impossible.

Il est en tous cas intéressant de faire la remarque suivante : j'ai montré [10] que pour une f. a. de Markoff $V(t)$ liée à une équation parabolique du type (25) où a est une constante, si l'on pose

$$B(t) = V(t) - V(0) - \int_0^t b[V(\tau)] d\tau$$

dans l'hypothèse où $V(0)$ a une valeur v_0 donnée quelconque, $B(t)$ est un schéma de Wiener-Lévy (indépendant de v_0); on rejoint ainsi le point de vue de Doob; mais ma démonstration suppose $|b|$ borné, ce qui n'est pas le cas ici où $b(v) = -fv$; le travail de Doob donne donc à penser que mon résultat peut s'étendre au cas où $|b| = o(|v|)$ pour $|v| \rightarrow +\infty$.

13. Énoncé d'un problème; sa résolution dans un cas simple. — La considération du mouvement brownien tel qu'il a été défini au paragraphe 10 et de sa solution par les schémas O. U. conduit naturellement à se poser le problème suivant :

Les f. c. des f. a. s., strictement et d'ordre 2, qui sont aussi de Markoff, ont-elles, par rapport à la classe générale des f. c. de f. a. s. d'ordre 2, des propriétés spéciales et peuvent-elles être caractérisées?

Ce problème, qui ne semble pas avoir été encore envisagé dans son ensemble; mais l'étude des schémas (O. U.) a conduit Doob [p. 353] à se poser un problème plus restreint, mais qui est une première approche du problème général, et dont l'énoncé et la solution se trouvent dans le théorème suivant, qui a en outre l'avantage de fournir une caractérisation des schémas O. U.

THÉORÈME. — Soit $V(t)$ une f. a. stationnaire, strictement et d'ordre 2, et posons $m = E[V(t)]$, $\sigma^2 = E\{[V(t) - m]^2\}$ (m et σ sont alors des constantes); supposons en outre que $V(t)$ soit de Markoff, et que, quels que soient t et τ le couple $[V(t), V(\tau)]$ obéisse à une loi de Laplace (non dégénérée) à deux dimensions; alors

Ou bien (cas exceptionnel), quels que soient $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $V(t_1), V(t_2), \dots, V(t_n)$ sont des v. a. laplaciennes indépendantes d'e. m. m et d'e. m. $q. \sigma$.

Ou bien (cas général) $V(t)$ est une f. a. s. laplacienne et il existe une constante > 0 , f telle que la f. c. $r(t)$ de $V(t)$ soit égale à

$$r(\tau) = \sigma^2 e^{-f(\tau)},$$

c'est-à-dire que $V(t)$ est un schéma O. U. stationnaire [obtenu donc en prenant $Q_0(v)$ selon (21)].

La démonstration est très simple : d'abord, on ne restreint pas la généralité en supposant $m = 0$, $\sigma = 1$; soit alors $r(\tau)$ la f. c. de $V(t)$; la densité conditionnelle de $V(t + \tau)$, quand $V(t) = v$, ($\tau > 0$), est

$$* \frac{1}{\sqrt{2\pi[1-r^2(\tau)]}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[\lambda - r(\tau)v]^2}{1-r^2(\tau)} \right\},$$

la densité à trois dimensions de $[V(t_1), V(t_2), V(t_3)]$, pour $t_1 < t_2 < t_3$, est donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi[1-r^2(t_2-t_1)][1-r^2(t_3-t_2)]}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[x_1^2 - 2r(t_2-t_1)x_1x_2 + x_2^2]}{1-r^2(t_2-t_1)} - \frac{1}{2} \frac{[x_3 - r(t_3-t_2)x_2]^2}{1-r^2(t_3-t_2)} \right\}.$$

Un calcul classique permet d'en déduire $r(t_3 - t_1)$, on trouve

$$r(t_3 - t_1) = r(t_3 - t_2) \times r(t_2 - t_1).$$

Cette équation fonctionnelle, compte tenu de ce que $r(\tau)$ est une fonction paire et bornée [$|r(\tau)| \leq 1$] n'admet que la solution $r(\tau) \equiv 0$, qui conduit au cas exceptionnel, et la solution $r(\tau) = e^{-f(\tau)}$ avec $f \geq 0$; mais $f = 0$ est à rejeter, puisque l'on a supposé que la loi du couple $[V(t), V(\tau)]$ n'était pas dégénérée. Ceci établit le théorème.

14. Extension du problème précédent aux schémas à plusieurs dimensions. — Un certain nombre d'applications, par exemple la théorie des bruits de fond dans le cas de plusieurs circuits couplés (cf. Rice [2], Blanc-Lapierre [3]; Wang, *Thèse*, 1941, [1] et [2]), exige l'intervention de processus aléatoires à un nombre fini mais > 1 de dimensions; ceci a amené Doob [27] à étendre le problème défini au paragraphe 13, sous sa forme restreinte, à ces schémas plus généraux; il a envisagé le cas de schémas discrets et le cas de schémas continus; nous n'exposerons ici que la partie de son travail relative au cas continu, le cas discret se traitant à peu près de la même façon et conduisant à des résultats analogues.

Nous ne nous référerons plus dorénavant systématiquement au mouvement brownien proprement dit et nous modifierons nos notations. Soit \mathcal{E}_n un espace euclidien réel à n dimensions rapporté à des axes d'origine O , $X_1(t), \dots, X_n(t)$ les coordonnées dans cet espace d'un point aléatoire $X(t)$ de \mathcal{E}_n , fonction du temps t ; $X(t)$ constitue un processus à n dimensions dont nous supposons :

a. qu'il est de Markoff;

b. qu'il est stationnaire, strictement et d'ordre 2; on supposera $E[X_i(t)] = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ et l'on posera

$$r_{ij}(\tau) = E[X_i(t)X_j(t + \tau)]$$

et l'on désignera par R^τ la matrice de corrélation, c'est-à-dire la matrice des $r_{ij}(\tau)$; R^τ désignera aussi l'opération linéaire définie dans \mathcal{E}_n par la matrice des $r_{ij}(\tau)$; on supposera d'ailleurs que R^τ est fonction continue de τ [il suffit pour cela que R^τ soit continue pour $\tau = 0$, et c'est la condition nécessaire et suffisante pour que $X(t)$ soit continue en t en m. q.];

c. qu'il est laplacien, la loi de probabilité de l'ensemble des $m \times n$ v. a.

$$\{X_{i_1}(t_1), X_{i_2}(t_2), \dots, X_{i_m}(t_m)\} \quad (i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n)$$

est donc, quels que soient t_1, t_2, \dots, t_m , une loi de Laplace, pouvant être dégénérée, à $m \times n$ dimensions.

De tels schémas $X(t)$ seront dits du type M. S. L.

$E[X(t)]$ désignera symboliquement le point de \mathcal{E}_n qui a pour coordonnées les nombres $E[X_i(t)] (i = 1, 2, \dots, n)$, $E[X(t)^2]$ celui qui a pour coordonnées les nombres $E[X_i(t)^2]$, $E\left[\frac{X(t+\tau)}{X(t)}\right]$ celui qui a pour coordonnées les nombres $E[X_i(t+\tau), X_1(t), \dots, X_n(t)]$; $Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ et $Z(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ étant deux points aléatoires de \mathcal{E}_n , $Y - Z$ désignera le point qui a pour coordonnées les nombres $Y_i - Z_i$; $E[Y - Z]$ désignera la matrice d'éléments $E[Y_i Z_j]$. I désignera l'opération identique (ou la matrice unité) dans \mathcal{E}_n .

Étant donné un processus M. S. L. $X(t)$ dans \mathcal{E}_n , il est clair qu'il existe une opération linéaire A^τ , dite de transition, telle que

$$E\left[\frac{X(t+\tau)}{X(t)}\right] = A^\tau[X(t)] \quad (\tau > 0)$$

et l'on voit aisément que

$$R^\tau = R^0 A^\tau \quad (\tau > 0).$$

Ceci dit, il s'agit d'étudier la structure des processus $X(t)$ du type M. S. L.; à ce sujet, quelques remarques se présentent immédiatement :

a. Soit U une opération linéaire dans \mathcal{E}_n , admettant une réciproque U^{-1} ; le processus

$$Y(t) = U[X(t)]$$

est du type M. S. L., si $X(t)$ est de ce type, et réciproquement; $X(t)$ et $Y(t)$ seront dits *équivalents*, pour des raisons évidentes ⁽¹⁾; il revient au même d'étudier $X(t)$ ou $Y(t)$, et cette remarque sera constamment utilisée par la suite, un choix convenable de U permettant de remplacer $X(t)$ par un processus $Y(t)$ de forme plus accessible. On remarquera que la matrice de corrélation de $Y(t)$ est $UR^\tau U^*$, en désignant par U^* la transposée de U , tandis que sa matrice de transition est $UA^\tau U^{-1}$.

b. Soient \mathcal{E}_{n_1} et \mathcal{E}_{n_2} deux espaces euclidiens ayant respectivement n_1 et n_2 dimensions, avec $n_1 + n_2 = n$, et tels que \mathcal{E}_n soit leur *produit*, soit $Y(t)$ un point de \mathcal{E}_{n_1} , de coordonnées $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_{n_1}(t)$ dans \mathcal{E}_{n_1} , aléatoire et fonction du temps, et formant dans \mathcal{E}_{n_1} un processus M. S. L., soit de même $Z(t)$ un point de \mathcal{E}_{n_2} de coordonnées $Z_1(t), \dots, Z_{n_2}(t)$ dans \mathcal{E}_{n_2} , aléatoire et fonction du temps et formant dans \mathcal{E}_{n_2} un processus M. S. L.; soit enfin $X(t)$ le point de \mathcal{E}_n de coordonnées $[Y_1(t), \dots, Y_{n_1}(t), Z_1(t), \dots, Z_{n_2}(t)]$; si les processus $Y(t)$ et $Z(t)$ sont *indépendants*, $X(t)$ est lui-même du type M. S. L. dans \mathcal{E}_n et tout processus équivalent à $X(t)$ sera dit être le *produit des facteurs* $Y(t)$ et $Z(t)$ ou encore sera dit *décomposable* en le produit $Y(t) \times Z(t)$; ces définitions s'étendent immédiatement aux produits de plus de deux facteurs; il sera évidemment intéressant de savoir reconnaître si un processus M. S. L. est décomposable ou non, et, s'il est décomposable, de savoir en effectuer la décomposition en facteurs indécomposables.

⁽¹⁾ Cette notion de processus équivalents semble avoir été introduite pour la première fois par Kolmogoroff [28].

c. Un type particulier de processus M. S. L. sont ceux pour lesquels on a

$$X(t + \tau) = A^\tau[X(t)] \quad \text{p. s. pour tout } t \quad (\tau > 0).$$

On les appellera *déterministes*, pour des raisons évidentes. Des classes particulières, auxquelles nous allons donner des noms, se découvrent tout de suite :

Processus du type T. — Ce sont les processus déterministes à une dimension $X(t)$ tels que

$$X(t) = 0 \quad \text{p. s. pour tout } t.$$

Processus du type T_0 . — Ce sont les processus déterministes à une dimension $X(t)$ tels que

$$E[X(t)] = 0, \quad E[X(t)^2] \neq 0, \quad X(t) = X(0).$$

Processus du type T_θ . — Ce sont les processus déterministes à deux dimensions $X(t)[X_1(t), X_2(t)]$, de la forme

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0) \cos t\theta - X_2(0) \sin t\theta, \\ X_2(t) &= X_1(0) \sin t\theta + X_2(0) \cos t\theta, \end{aligned}$$

où θ est une constante, avec

$$\begin{aligned} E[X_1(0)] &= E[X_2(0)] = E[X_1(0)X_2(0)] = 0, \\ E[X_1^2(0)] &= E[X_2^2(0)] > 0, \end{aligned}$$

[$X_1(0)$ et $X_2(0)$ étant laplaciennes].

d. Étant donné un processus M. S. L., $X(t)[X_1(t), \dots, X_n(t)]$, s'il existe des constantes non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(t) = 0 \quad \text{p. s. pour tout } t.$$

$X(t)$ sera dit *dégénéré*, cela revient en somme à dire que $X(t)$ n'a pas réellement n dimensions, mais seulement un nombre moindre de dimensions; en effet, d'une part les processus du type T sont dégénérés, et ils sont les seuls à l'être parmi les processus M. S. L. à une dimension, d'autre part la condition $\sum_i \lambda_i X_i(t) = 0$ revient à dire que

$$E \left\{ \left| \sum \lambda_i X_i(t) \right|^2 \right\} = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j r_{ij}(0) = 0,$$

autrement dit R^0 est singulière (à déterminant nul); Doob démontre alors facilement que

THÉORÈME. — *Tout processus M. S. L. dégénéré est le produit de processus du type T et, éventuellement, d'un processus M. S. L. non dégénéré.*

Cette remarque faite, nous écartérons pour la suite le cas des processus dégénérés.

e. Il y a une catégorie de processus M. S. L. que nous appellerons du type \mathfrak{C} dont la structure est immédiate; pour les définir, remarquons d'abord que la définition des processus de Wiener-Lévy s'étend tout naturellement au cas de n dimensions; si $G(t)$ est un tel processus (c'est donc un point de \mathfrak{E}_n) quels que soient $t_1, t_2, \dots, t_m, G(t_2) - G(t_1), G(t_3) - G(t_2), \dots, G(t_m) - G(t_{m-1})$ sont m . v. a., laplaciennes à n dimensions chacune, indépendantes, et l'on a quels que soient t et τ

$$E[G(t+\tau) - G(t)] = 0, \quad E\{[G(t+\tau) - G(t)], [G(t+\tau) - G(t)]\} = \tau I.$$

Nous aurons besoin aussi de considérer des processus de Wiener-Lévy généralisés; $H(t)$ est un tel processus si :

$$a. \quad H(t_2) - H(t_1), \quad \dots, \quad H(t_m) - H(t_{m-1})$$

sont laplaciennes et indépendantes, comme pour un processus de Wiener-Lévy ordinaire;

$$b. \quad E[H(t) - H(0)] = 0, \quad E\{[H(t) - H(0)], [H(t) - H(0)]\} = D^t,$$

où D^t est une matrice dite de dispersion, nécessairement symétrique et définie positive; on a nécessairement

$$E\{[H(t+\tau) - H(t)], [H(t+\tau) - H(t)]\} = D^{t+\tau} - D^t.$$

Si $D^t = tI$, on retombe sur un processus de Wiener-Lévy ordinaire.

Ceci dit, soit Q une matrice quelconque, S une matrice symétrique définie positive, $G(t)$ un processus de Wiener-Lévy; soit $X(t)$ le processus défini par

$$(26) \quad X(t) = - \int_0^{+\infty} e^{sQ} S dG(t-s) = + \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)Q} S dG(\tau) \quad (1).$$

(1) Rappelons que, étant donnée une matrice U , la matrice e^U se définit comme somme de la série convergente

$$e^U = I + \frac{U}{1!} + \dots + \frac{U^n}{n!} + \dots$$

On suppose évidemment que ces intégrales de Stieltjes stochastiques convergent p. s. pour tout t , ce qui a lieu par exemple si les valeurs propres de Q ont toutes leur partie réelle négative : e^{sQ} tend alors vers zéro exponentiellement lorsque $s \rightarrow +\infty$; il est clair que $X(t)$ est stationnaire et laplacien, mais on voit aussi que

$$X(t) - e^{(t-u)Q} X(u) = e^{tQ} \int_0^t e^{-sQ} S dG(s) \quad (u < t)$$

est indépendant de $X(v)$ pour $v < u$: $X(t)$ est donc de Markoff. On appellera *processus du type* \mathfrak{G} un processus M. S. L. de la forme (26), dont la matrice de transition est évidemment $A^\tau = e^{\tau Q}$, sa matrice de corrélation étant

$$R^\tau = R^0 e^{-\tau Q^*} \quad \text{avec} \quad R^0 = \int_0^{+\infty} e^{sQ} S^2 e^{sQ^*} ds.$$

Un processus \mathfrak{G} non dégénéré n'est pas déterministe.

15. **Théorèmes de structure.** — Étant donné un processus non dégénéré M. S. L. $X(t)$ dans \mathcal{E}_n , Doob remarque d'abord que l'égalité

$$R^\tau = R^0 A^{\tau^*}$$

définit A^τ de façon univoque; en prenant l'espérance mathématique des deux membres de l'égalité

$$E[X(t+\tau)/X(t)] = A^\tau[X(t)]$$

pour une valeur donnée quelconque de $X(0)$, on trouve

$$A^{t+\tau}[X(0)] = A^\tau \{ A^t[X(0)] \}.$$

donc A^τ satisfait à l'équation *fonctionnelle*

$$A^{t+\tau} = A^t A^\tau \quad (t, \tau > 0).$$

En outre

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} R^\tau = \lim_{\tau \rightarrow +0} R^0 A^{\tau^*} = R^0$$

montre que

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} A^\tau = I.$$

Dans ces conditions, et en vertu de théorèmes connus, la matrice

$$Q = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{A^\tau - I}{\tau}$$

existe et est unique, et l'on a

$$A^\tau = e^{\tau Q}.$$

Remarquons aussi que, en remplaçant au besoin $X(t)$ par un processus équivalent, on peut toujours supposer $R^0 = I$: alors $A^{\tau*}$, et par suite A^τ , reste bornée lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, puisqu'il en est ainsi de R^τ ; donc les valeurs propres de A^1 sont de module ≤ 1 ; les valeurs propres de Q ont donc des parties réelles négatives ou nulles.

Doob établit alors le théorème suivant, qui règle le cas particulier des processus déterministes :

THÉORÈME 1. — *Si $X(t)$ est un processus M. S. L. non dégénéré déterministe, on a*

$$QR^0 + R^0Q^* = 0 \quad \text{et} \quad X(t) = e^{tQ}X(0),$$

et $X(t)$ est le produit de facteur du type T_0 et T_0 .

En effet, compte tenu de ce que $X(t)$ est déterministe, on peut écrire

$$\begin{aligned} R_0 &= E[X(s+t), X(s+t)] \\ &= E\{A^t[X(s)], X(s+t)\} = A^t E\{X(s), X(s+t)\} = A^t R^0 A^{t*}. \end{aligned}$$

Or si dans l'égalité $R^0 = A^t R^0 A^{t*}$, on remplace A^t par e^{tQ} , et si l'on développe en série de puissance de t , le coefficient de t au deuxième membre doit être nul et cela donne $QR^0 + R^0Q^* = 0$; l'égalité $X(t) = e^{tQ}X(0)$ ne fait qu'exprimer la définition des processus déterministes.

Reste à prouver que $X(t)$ est produit de facteur des types T_0 et T_0 . Il est pour cela loisible de remplacer $X(t)$ par un processus équivalent : on peut ainsi s'arranger pour que $R^0 = I$, ce qui entraîne $Q + Q^* = 0$, autrement dit Q est une matrice symétrique gauche; plus particulièrement en choisissant convenablement le processus équivalent, il sera possible d'avoir Q sous la forme canonique réelle des matrices symétriques gauches : tous les éléments nuls, sauf peut-être des matrices du deuxième ordre du type

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix},$$

disposées sur la diagonale principale; le résultat s'en déduit alors

facilement, les facteurs du type T_θ correspondant aux matrices du deuxième ordre ci-dessus; on remarque que si, dans le cas général [avant remplacement de $X(t)$ par un processus équivalent], Q n'est pas symétrique gauche, elle est en tout cas de la forme $UQ'U^{-1}$, où Q est symétrique gauche.

Doob prouve d'ailleurs que, réciproquement :

Réciproque. — Si R^0 est une matrice définie positive quelconque et Q une matrice telle que $QR^0 + R^0Q^* = 0$, il existe un processus M. S. L. déterministe $X(t)$ tel que $X(t) = e^{tQ}X(0)$ et dont la matrice de corrélation R^τ est donnée par $R^\tau = R^0 e^{t\tau Q^*}$.

En effet R^0 et Q étant données conformément à l'énoncé de cette réciproque, prenons un point aléatoire $X(0)$ dans \mathcal{E}_n , laplacien et de matrice de corrélation R^0 , et soit le processus $X(t)$ défini par $X(t) = e^{tQ}X(0)$; il est laplacien et de Markoff, et pour prouver qu'il est stationnaire, il suffit alors de montrer que $E[X(t), X(t + \tau)]$ ne dépend que de τ ; or

$$\begin{aligned} E[X(t), X(t + \tau)] &= E[e^{tQ}X(0), e^{(t+\tau)Q}X(0)] \\ &= e^{tQ}E[X(0), e^{(t+\tau)Q}X(0)] = e^{tQ}R^0 e^{(t+\tau)Q^*}. \end{aligned}$$

En développant le second membre par rapport à t et en tenant compte de $QR^0 + R^0Q^* = 0$, il reste seulement $R^0 e^{\tau Q^*}$, matrice indépendante de t , ce qui prouve que $X(t)$ est aussi stationnaire, et que sa matrice de corrélation R^τ est bien égale à $R^0 e^{\tau Q^*}$.

On remarque que les conditions imposées à R^0 et à Q par l'énoncé de cette réciproque sont très larges.

Mais ce théorème 1 n'englobe pas le cas, en somme général, des processus non déterministes; aussi Doob établit-il le théorème 2 suivant plus large :

THÉORÈME 2. — *Si $X(t)$ est un processus M. S. L. non dégénéré dans \mathcal{E}_n , il existe deux matrices symétriques définies positives S et T , un processus de Wiener-Lévy $G(t)$, un point aléatoire laplacien G , indépendant de t et de $G(t)$, tels que*

- a. $E(G) = 0, \quad E(G^2) = I.$
- b. $QR^0 + R^0Q^* = -S^2, \quad QT^2 + T^2Q^* = 0, \quad R^0 = \int_0^{+\infty} e^{sQ}S^2 e^{sQ^*} ds + T^2.$
- c. $X(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)Q}S dG(s) + e^{tQ}T[G] = \int_0^t e^{(t-s)Q}S dG(s) + e^{tQ}X(0).$

d. $X(t)$ est déterministe si et seulement si $S = 0$, et dans le cas général $X(t)$ est le produit d'un processus \mathcal{C} et d'un processus déterministe.

Démonstration. — Je n'indiquerai que le principe de la démonstration, qui est assez longue et délicate. Si l'on pose

$$H(t) = e^{-tQ}X(t),$$

on vérifie aisément que $H(t)$ est un processus de Wiener-Lévy généralisé, dont la matrice de dispersion D^τ est égale à

$$D^\tau = e^{-\tau Q}R^0 e^{-\tau Q^*} - R^0.$$

La matrice $QR^0 + R^0Q^*$ est symétrique et définie positive; on peut le voir par exemple en remarquant que D^τ a une dérivée D'^τ égale à

$$D'^\tau = -e^{-\tau Q}[R^0Q^* + QR^0]e^{\tau Q^*}.$$

Or on montre que D'^τ est nécessairement, comme D^τ , définie positive et symétrique : il en est donc de même de $QR^0 + R^0Q^*$.

On peut donc trouver une matrice non singulière S_1 telle que la matrice

$$U = -S_1(QR^0 + R^0Q^*)S_1^*,$$

soit sous une forme diagonale (des 0 partout sauf sur la diagonale principale dont les éléments sont des 0 ou des 1); le processus $H_1(t)$ défini par

$$H_1(t) = \int_0^t S_1 e^{sQ} dH(s),$$

est alors un processus de Wiener-Lévy généralisé dont la matrice de dispersion est tU ; il existe donc un processus de Wiener-Lévy $G(t)$ défini par

$$U[G(t)] = \int_0^t S_1 e^{sQ} dH(s),$$

d'où l'on tire

$$H(t) - H(0) = \int_0^t e^{-sQ} S_1^{-1} U dG(s).$$

Comme $H(0) = X(0)$, il en résulte bien

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)Q} S_1^{-1} U dG(s) + e^{tQ} X(0).$$

On montre que, U étant une matrice symétrique et définie positive, on peut trouver une matrice S symétrique et définie-positive et une matrice orthogonale K telle que $S^{-1}U = SK$; en écrivant alors $G(t)$ au lieu de $KG(t)$ [$KG(t)$ est encore un processus de Wiener-Lévy], on obtient l'une des formes annoncée pour $X(t)$.

D'ailleurs, on a

$$E \{ [X(t) - e^{tQ}X(0)]^2 \} = R^0 - e^{tQ}R^0 e^{tQ^*},$$

et aussi, pour $t \rightarrow +0$

$$E \{ [X(t) - e^{tQ}X(0)]^2 \} \sim tS^2.$$

Il en résulte bien que $QR^0 + R^0Q^* = -S^2$.

Le fait que $X(t)$ est déterministe et seulement si $S = 0$ s'obtient par référence au théorème I; pour abrégé, nous n'indiquons pas la démonstration des autres points du théorème, qui s'appuie sur certains lemmes : signalons cependant que le facteur déterministe de $X(t)$ est lié aux valeurs propres à partie réelle nulle de Q , et n'existe pas si de telles valeurs propres n'existent pas.

Exemple. — $G(t)$ désignant un processus de Wiener-Lévy à une dimension, et $Y(t)$ une f. a. inconnue, admettant des dérivées stochastiques des $(n-1)$ premiers ordres : $Y^1(t), Y^2(t), \dots, Y^{n-1}(t)$, considérons l'équation aux différentielles

$$dY^{n-1}(t) - a_1 Y^{n-1}(t) dt - \dots - a_n Y(t) dt = b dG(t),$$

où a_1, \dots, a_n, b sont des constantes ($b > 0$). En appliquant à cette équation l'interprétation indiquée par Doob pour l'équation $dV + fV = dB(t)$ au paragraphe 11, on est amené à la résoudre par la formule

$$Y(t) = \frac{b}{\Delta} \int_0^t \sum_{j=1}^n \Delta_{nj} e^{\lambda_j(t-s)} dG(s) + \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^n \Delta_{kj} e^{\lambda_j t} Y^{k-1}(0),$$

où l'on appelle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n racines, supposées distinctes et à parties réelles négatives, de l'équation

$$\lambda^n - (a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n) = 0,$$

où Δ est le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

et où enfin Δ_{jk} est le coefficient de λ_j^{k-1} dans le développement de Δ .

Si alors on appelle $X(t)$ le point aléatoire de \mathcal{E}_n de coordonnées $[Y(t), Y^1(t), \dots, Y^{n-1}(t)]$, on voit immédiatement que $X(t)$ est un processus M. S. L. non dégénéré; les matrices Q, S, T se calculent aisément

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \quad T = 0.$$

16. Processus composantes d'un processus M. S. L. — Les considérations précédentes suggèrent un nouveau problème, qui se rattache d'ailleurs à la remarque *b* de la page 212: soit $X(t)[X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]$ un processus M. S. L. dans \mathcal{E}_n , et soit \mathcal{E}_{n_1} un espace euclidien à $n_1 < n$ dimensions; soit $Y(t)$ le point de coordonnées $X_1(t), X_2(t), \dots, X_{n_1}(t)$: $Y(t)$ est dans \mathcal{E}_{n_1} un processus stationnaire et laplacien, mais ce n'est pas en général un processus de Markoff: c'est cependant un processus possédant la propriété particulière qu'en le complétant par $X_{n_1+1}(t), X_{n_1+2}(t), \dots, X_n(t)$, on forme un processus (à plus de n_1 dimensions) M. S. L.: ce que nous exprimerons en disant que $Y(t)$ est une composante d'un processus M. S. L.; ceci pose alors le problème suivant: parmi les processus stationnaires et laplaciens à n_1 dimensions, caractériser ceux qui sont composantes d'un processus M. S. L. à n dimensions ($n > n_1$) (1).

Doob a résolu le problème, dans le cas particulier où $n_1 = 1$, par le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Soit $Y(t)$ un processus stationnaire et laplacien à une dimension; pour qu'il soit composante d'un processus M. S. L. à n dimensions, il faut et il suffit que sa fonction spectrale $F(\omega)$ soit de la forme*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} \frac{|\beta_0(iu)^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}|^2}{|(iu)^n + \alpha_1(iu)^{n-1} + \dots + \alpha_n|^2} du + F^*(\omega),$$

où: $a. F^*(\omega)$ est une fonction non décroissante purement discontinue, possédant au plus n discontinuités;

(1) Ce problème semble avoir été abordé par Kolmogoroff [28] dans le langage des suites stationnaires Hilbertiennes.

b. le dénominateur $(iu)^n + \alpha_1(iu)^{n-1} + \dots + \alpha_n$ s'annule en tout point de discontinuité de $F^*(\omega)$, et le numérateur $\beta_0(iu)^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}$ possède tous les zéros du dénominateur précédent, au moins au même ordre : les zéros de l'un et de l'autre sont réels, ou à partie imaginaire positive; les coefficients α, β sont réels.

La condition nécessaire et suffisante pour que $Y(t)$ soit composante d'un processus déterministe est que les β soient tous nuls; la condition nécessaire et suffisante pour que $Y(t)$ soit composante d'un processus M. S. L. sans facteur déterministe est que $F^*(\omega)$ soit identiquement nulle.

Démonstration. — Supposons donc que $Y(t)$ soit la première coordonnée d'un processus M. S. L. $X(t) [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]$ à n dimensions, c'est-à-dire que $Y(t) = X_1(t)$; on a, en utilisant relativement à $X(t)$ les notations habituelles,

$$R^t = R^0 e^{tQ^*} \quad (t \geq 0), \quad R^t = e^{-tQ} R^0 \quad (t \leq 0).$$

Rappelons qu'il existe des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ telles que

$$(27) \quad Q^n - \alpha_1 Q^{n-1} - \alpha_2 Q^{n-2} \dots - \alpha_n = 0,$$

l'équation précédente s'appelant l'équation caractéristique de Q .

La dérivée $\nu^{\text{ième}} R^t_{(\nu)}$ de R^t existe pour tous les ordres ν ; on a

$$R^t_{(\nu)} = R^0 Q^{*\nu} e^{tQ^*} \quad (t \geq 0), \quad R^t_{(\nu)} = (-1)^\nu Q^\nu e^{-tQ} R^0 \quad (t < 0).$$

Il résulte alors de (27) que l'on a

$$\begin{aligned} R^t_{(n)} - \alpha_1 R^t_{(n-1)} - \alpha_2 R^t_{(n-2)} - \dots - \alpha_n R^t &= 0 & (t > 0), \\ R^t_{(n)} + \alpha_1 R^t_{(n-1)} - \dots + (-1)^{n-1} R^t &= 0 & (t < 0). \end{aligned}$$

Si donc Φ désigne l'opérateur $\frac{d}{dt}$, on a

$$\begin{aligned} &[\Phi^n - \alpha_1 \Phi^{n-1} - \alpha_2 \Phi^{n-2} - \dots - \alpha_n \Phi^0] \\ \times &[\Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} - \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n \Phi^0] R^t = 0 \quad (t \text{ q c q.}), \end{aligned}$$

et en particulier

$$(28) \quad \begin{aligned} &[\Phi^n - \alpha_1 \Phi^{n-1} - \alpha_2 \Phi^{n-2} - \dots - \alpha_n \Phi^0] \\ \times &[\Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} - \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n \Phi^0] r_{11}(t) = 0. \end{aligned}$$

Or on sait que

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} - 1}{it} r_{11}(t) dt,$$

[du moins aux points de continuité de $F(\omega)$]. Supposons d'abord que $X(t)$ n'ait pas de facteur déterministe : les valeurs caractéristiques de Q ont toutes leur partie réelle négative, et R^t , donc $r_{11}(t)$ tend vers 0 exponentiellement lorsque $[t] \rightarrow +\infty$; il en résulte que $F(\omega)$ a une dérivée continue $f(\omega)$ donnée par

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} r_{11}(t) dt,$$

et d'une façon générale, par intégrations par parties, et en tenant compte des discontinuités possibles des dérivées de $r_{11}(t)$ pour $t = 0$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \Phi^1[r_{11}(t)] dt \\ &= -\frac{r'_{11}(+0) - r'_{11}(-0)}{2\pi(i\omega)^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^2} r''_{11}(t) dt \\ &= -\frac{r'_{11}(+0) - r'_{11}(-0)}{2\pi(i\omega)^2} + \frac{r''_{11}(+0) - r''_{11}(-0)}{2\pi(i\omega)^3} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^3} r'''_{11}(t) dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

(28) montre alors que

$$\begin{aligned} &[(i\omega)^n - \alpha_1(i\omega)^{n-1} - \dots - \alpha_n] \\ \times [(i\omega)^n + \alpha_1(i\omega)^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n] f(\omega) &= |(i\omega)^n - \alpha_1(i\omega)^{n-1} - \dots - \alpha_n|^2 f(\omega) \end{aligned}$$

est un polynôme en $i\omega$ de degré $(2n - 2)$, réel et ≥ 0 (quand ω est réel) et qui peut par conséquent se mettre sous la forme

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j (i\omega)^{n-j-1} \right|^2,$$

où les racines du polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_j (i\omega)^{n-j-1}$ sont toutes réelles ou à partie imaginaire > 0 .

Si $X(t)$ possède des facteurs déterministes, on peut voir que $F(\omega)$ possède en correspondance des discontinuités; la démonstration précédente continue à s'appliquer à la partie continue de $F(\omega)$; si $Y(t)$ est purement déterministe, $r_{11}(t)$ est une somme de fonctions trigonométriques et $F(\omega)$ se réduit à sa partie discontinue $F^*(\omega)$.

De ces considérations, on déduit aisément la partie directe (il faut que...) du théorème; Doob établit également la partie réciproque (et il

suffit...), en s'appuyant sur des propriétés préalablement établies des processus M. S. L. discrets; pour abrégé, nous n'exposons pas cette partie.

Conclusion. — Nous espérons que les résultats précédents, que nous avons extraits parmi bien d'autres du Mémoire de Doob, suffiront à donner une juste idée du contenu de ce Mémoire, à faire comprendre son intérêt pour de nombreuses applications, et comment il suggère certaines recherches nouvelles.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ÜHLÉNBECK et ORNSTEIN, *On the theory of the Brownian motion* (*Physical Review*, vol. 36, 1930, p. 823).
- [2] ÜHLENBERK et WANG, *On the theory of the Brownian motion* (*Reviews of modern Physics*, vol. 17, n^{os} 2 et 3, 1945, p. 323); voir aussi RICE, *Bell System Technical J.*, 23, 1944, p. 282; 25, 1945, p. 46.
- [3] BLANC-LAPIERRE, *Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires* (Thèse, Paris, 1945, Masson édit.).
- [4] FELLER, *Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes um Dasein* (*Acta biotheoretica*, vol. V, 1939).
- [5] EINSTEIN, *Ann. d. Physik*, 17, 1905, p. 549.
- [6] SMOLUKOWSKI, *Drei Vorträge über Diffusion* (*Phys. Zeits.*, 17, 1916, p. 557 et 585).
- [7] KOLMOGOROFF, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Math. Ann.*, 104, 1931).
- [8] FELLER, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse* (*Math. Ann.*, 113, 1936).
- [9] BERNSTEIN, *Les équations différentielles stochastiques* (*Act. Scient.*, n^o 738, p. 7, Paris, Hermann, édit.).
- [10] FORTET, *Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique* (*Journ. de Math.*, t. XXII, 3, 1943, p. 177).
- [11] BACHELIER, *Calcul des probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1912; *les Lois des grands nombres du calcul des Probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.
- [12] N. WIENER, *Differential Space* (*Publ. of the Massach. Institute of Technology* série II, n^o 60, 1923).
- [13] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1936, Gauthier-Villars, éditeur.
- [14] P. LÉVY, *Sur quelques processus stochastiques homogènes* (*Comp. Math.*, vol. 7, 1939, p. 283).
- [15] LÉVY, *Le mouvement brownien plan* (*American Journ. of Mathematics*, vol. LXII, n^o 3, 1940, p. 487).
- [16] DÖBLIN, *Sur certains mouvements aléatoires* (*C. R. Acad. Sc.*, 208, 1939, p. 249).
- [17] DOOB, *Stochastic processes depending on a continuous parameter* (*Trans. of the American Math. Society*), 42, 1937, p. 107).
- [18] POLYA, *Sur la promenade au hasard dans un réseau de rues* (*Actual. Scient.*, n^o 734, p. 25, Hermann, édit.).
- [19] ERDÖS et KAC, *On certain limit theorems of the theory of Probability* (*Bull. of the American Mathematical Society*, vol. 52, n^o 4, 1946, p. 292-302).
- [20] CAMERON et MARTIN, *The Wiener measure of Hilbert neighborhoods in the space of real continuous functions* (*Journ. of Math. and Physics*, vol. 23, 1944, p. 195).
- [21] KAC, *On the average on certain Wiener functional* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 59, 1946, p. 401).
- [22] FÜRTH, *Ann. de Phys.*, 53, 1917, p. 177.

- [23] WALD, *On cumulative sums of random variables* (*Ann. of Math. Statistics*, vol. 15, 1944, p. 283-296).
- [24] FORTET, *Thèse*, 1938, Lima (Pérou).
- [25] DOOB, *The brownian movement and stochastic equations* (*Annals of Mathematics*, 43, 1942, p. 351).
- [26] BERNSTEIN, *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1934, p. 361.
- [27] DOOB, *The elementary Gaussian processes* (*Annals of Math. Statis.*, vol. XV, n° 3, 1944, p. 229-282).
- [28] KOLMOGOROFF, *Les Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert* (*Bull. de l'Univ. de Moscou*, II, 6, 1941).
-