ANNALES DE L'I. H. P.

GEORGE D. BIRKHOFF

Déformations analytiques et fonctions auto-équivalentes

Annales de l'I. H. P., tome 9, nº 3 (1939), p. 51-122

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1939__9_3_51_0>

Déformations analytiques et fonctions auto-équivalentes [1]

par

George D. BIRKHOFF.

INTRODUCTION.

Dans ce qui suit, nous étudierons certaines fonctions $f(x)$ d'une variable complexe x dans le voisinage d'un point isolé particulier, tel que $x = \infty$, à savoir les fonctions qui sont multipliées par un facteur analytique ou méromorphe à $x = \infty$, quand on remplace x par des fonctions $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = qx + \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{x} + \ldots \qquad (q \neq 0). \tag{1}$$

Nous aurons donc à considérer une équation, ou plusieurs équations compatibles, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} f[\varphi(x)] = a(x) f(x) \\ \left[a(x) = x^k \left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots \right) \qquad (k, \text{ entier}; \ a_0 \neq 0) \right]. \end{array} \right. \tag{2}$$

Nous ne pouvons que mentionner ici l'extension aux matrices carrées analogues d'ordre n, $F(x)$, telles que

$$F[\varphi(x)] = A(x) F(x), \tag{2'}$$

---

(1) J'ai eu l'honneur de présenter une partie de ce Mémoire dans une conférence faite à l'Institut Henri Poincaré, le 4 juin 1937, sous le titre *Sur une classe étendue de fonctions analytiques*. Dans trois conférences à la Edinburgh Mathematical Society à Saint-Andrews (7-14 juin 1938), intitulées *Analytic Deformations and Auto-equivalent Functions*, j'ai ajouté quelques compléments importants.

les éléments de la matrice $A(x)$ étant analytiques ou méromorphes à $x = \infty$ et le déterminant $|A(x)|$ ne s'évanouissant pas identiquement.

Mentionnons trois exemples simples et typiques pour $n = 1$: la fonction x^k, pour laquelle on a, pour toute $\varphi(x)$

$$[\varphi(x)]^k = a(x)\,x^k \qquad \left[a(x) = \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^k\right],$$

la fonction e^x pour laquelle on a, pour toute $\varphi(x)$ avec $q = 1$

$$e^{\varphi(x)} = a(x)\,e^x \qquad [a(x) = e^{\varphi(x)-x}]$$

et la fonction $\Gamma(x)$ pour laquelle on a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Pour préciser davantage, nous allons considérer uniquement les fonctions $f(x)$ de la variable complexe x qui sont méromorphes dans le voisinage du point $x = \infty$, c'est-à-dire pour $|x|$ suffisamment grand. Nous ne supposons pas qu'elles y soient nécessairement uniformes, mais nous admettrons que le point x se trouve situé sur une surface de Riemann R, ayant un point de ramification isolé d'ordre infini à $x = \infty$ et que $f(x)$ soit uniforme sur R.

Appelons *équivalentes* (¹) deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ de cette espèce, telles que leur rapport $\frac{y}{z}$ soit une fonction uniforme, analytique ou méromorphe à $x = \infty$. Si y est équivalent en ce sens à z, z est aussi équivalent à y; et si, de plus, z est équivalent à w, y est aussi équivalent à w. Il est tout à fait évident que toutes les fonctions équivalentes entre elles possèdent le même caractère analytique à l'infini (à un facteur analytique ou méromorphe près).

Introduisons une autre définition et appelons *déformation* toute transformation biunivoque et analytique du plan des x en lui-même au voisinage du point fixe $x = \infty$. Une telle transformation s'écrit $x' = \varphi(x)$ [*voir* (1)]. Pour caractériser complètement une telle déformation de la surface de Riemann R, il faudrait donner non seulement la fonction $\varphi(x)$, qui définit la déformation du plan, mais aussi la manière topologique de

(¹) J'ai introduit cette définition, il y a longtemps déjà; *voir*, par exemple, mon Mémoire, *Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations* (*Trans. Am. Math. Soc.*, t. X, 1909, p. 436).

passer de x à x' dans R; par exemple, l'équation $x'=x$ désigne non seulement la déformation identique de R en elle-même, mais aussi bien toute autre déformation par laquelle on passe de x à x', en faisant circuler s fois ($s=\pm 1, \pm 2, \ldots$) le point x autour de $x=0$.

Une fonction $f(x)$, méromorphe dans R, sera appelée *auto-équivalente* s'il existe au moins une déformation, autre que l'identité, qui la laisse équivalente à elle-même. En d'autres termes, ces fonctions sont précisément celles pour lesquelles au moins une équation du type (2) est satisfaite (1). Un cas particulier important d'auto-équivalence est celui de l'*invariance*

$$f[\varphi(x)]=f(x). \tag{3}$$

Évidemment, la totalité des déformations $x'=\varphi_1(x)$, $x'=\varphi_2(x), \ldots$ admises par une fonction auto-équivalente ou invariante, $f(x)$, constitue un groupe G_f qui est soit un sous-groupe du groupe continu de toutes les déformations possibles, soit ce groupe lui-même.

Une fonction $f(x)$ qui est auto-équivalente pour un certain groupe G_f restera auto-équivalente quand on fait un changement quelconque de variable x en $x^\star$ du type

$$x=\psi(x^\star)=rx^\star+\psi_0+\frac{\psi_1}{x^\star}+\ldots \qquad (r\neq 0).$$

Si T désigne cette transformation, le groupe G sera alors remplacé par $G^\star=TGT^{-1}$, et chaque équation (2) prendra une forme correspondante ($2^\star$) avec

$$f^\star(x^\star)=f[\psi(x^\star)], \qquad \varphi^\star(x^\star)=\psi^{(-1)}\{\varphi[\psi(x^\star)]\}, \qquad a^\star(x^\star)=a[\psi(x^\star)].$$

Tous les groupes $G^\star$ et les fonctions $f^\star(x)$ sont de la *même classe*.

Les exemples précédents montrent immédiatement que les deux fonctions auto-équivalentes x^k et e^{cx} admettent respectivement les groupes

---

(1) Dans le cas où l'on a seulement $\varphi(x)=x$, le point x' ne coïncidant pas avec le point x dans R, on démontre sans difficulté que $f(x)$ est toujours de la forme particulière

$$f(x)=a(x)^{\frac{\log x}{2\pi i s}}\left(g x^{\frac{1}{2}}\right),$$

où $g(z)$ est méromorphe dans le voisinage de $z=\infty$. En général, nous laisserons de côté dans ce qui suit ce cas banal.

$x' = \varphi(x)$, φ quelconque, et $x' = \varphi(x)$, $q = 1$, φ_0, $\varphi_1, \ldots$, arbitraires. Ces groupes sont continus à un nombre infini de paramètres.

La fonction auto-équivalente $\Gamma(x)$, admettra, au contraire, le groupe discret

$$x' = x + n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ne contenant que $x' = x + 1$ et ses puissances. Pour démontrer ce fait simple nous pouvons raisonner comme suit.

En premier lieu, rappelons le fait bien connu que la fonction $\Gamma(x)$ admet la forme asymptotique

$$\Gamma(x) \sim x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12x} + \ldots\right)$$

de Stirling pour $|x|$ grand, sauf dans la direction de l'axe des valeurs réelles négatives. Nous voyons donc que le terme le plus important dans $\log \Gamma(x)$ est $x \log x$, quand x tend vers ∞ par la droite. Mais après une déformation arbitraire $x' = \varphi(x)$ ce terme est remplacé par $qx \log x$; on en conclut que l'on doit avoir $q = 1$ pour une déformation du groupe de $\Gamma(x)$. Ainsi, nous pouvons écrire toute déformation du groupe de $\Gamma(x)$ sous la forme

$$x' = x + \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{x} + \ldots.$$

Or, nous avons toujours [*voir* (2)]

$$\Gamma[\varphi(x)] = a(x)\Gamma(x).$$

Si donc x est grand en valeur absolue et tel que $\Gamma(x) = \infty$, on doit avoir également $\Gamma[\varphi(x)] = \infty$. Puisque les pôles de $\Gamma(x)$ se trouvent à $x = 0$, $-1, -2, \ldots$, il s'ensuit que si x est un nombre entier négatif suffisamment grand, la série

$$\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{x} + \ldots$$

représentera aussi un nombre entier. Par conséquent, φ_0 doit être entier et la série

$$\frac{\varphi_1}{x} + \frac{\varphi_2}{x} + \ldots$$

doit s'évanouir, ce qui n'est possible que dans le cas $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = 0$. Donc, la déformation aura nécesairement la forme énoncée.

Il est intéressant de voir jusqu'à quel point la fonction x^k est caractérisée par la propriété d'admettre une déformation quelconque. Démontrons le fait suivant :

Une fonction auto-équivalente $f(x)$ qui admet une déformation arbitraire est nécessairement de la forme

$$x^k\left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right) \qquad (f_0 \neq 0).$$

Remarquons en premier lieu que si $y(x)$ désigne une telle fonction, nous aurons pour un choix quelconque de $\varphi(x)$, l'équation (2)

$$y[\varphi(x)] = a(x)y(x).$$

Supposons maintenant que le point x décrive dans le sens positif un cercle de centre $x = 0$; la fonction $y(x)$ devient $\tilde{y}$, et en même temps $y[\varphi(x)]$ deviendra $\tilde{y}[\varphi(x)]$. De plus

$$\tilde{y}[\varphi(x)] = a(x)\tilde{y}(x).$$

Donc, en posant $\dfrac{\tilde{y}(x)}{y(x)} = p(x)$, nous voyons que $p[\varphi(x)] = p(x)$, c'est-à-dire que $p(x)$ reste invariant pour toute déformation et par conséquent doit être constant $\dfrac{\tilde{y}(x)}{y(x)} = p \neq 0$. Nous pouvons donc écrire

$$y(x) = x^{\varkappa} z(x) \, (p = e^{2\pi i \varkappa})$$

et définir ainsi une fonction $z(x)$ qui, non seulement admet une déformation arbitraire, mais qui est aussi uniforme dans le plan de x. Nous aurons en particulier

$$z(qx) = b(x)\,z(x) \qquad (q \text{ réel} > 1), \tag{4}$$

où $b(x)$ est analytique ou méromorphe en $x = \infty$. De plus, $z(x)$ n'aura qu'un nombre fini de zéros et de pôles dans la région annulaire fondamentale

$$r \leqq |x| \leqq qr,$$

où r est positif et grand. Donc tous les zéros et pôles de $z(x)$ auront la forme $q^n \theta$ où θ est un zéro ou pôle quelconque dans cette région annulaire. En modifiant q convenablement, nous voyons que $z(x)$ ne peut avoir ni zéros ni pôles pour $|x|$ grand.

Or, la solution générale explicite de (4) est la fonction

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& q^{\frac{l}{2}(t^2-t)} \frac{b_0^t}{\prod\limits_{m=0}^{\infty} c(q^m x)},\\
& \left[t = \frac{\log x}{\log q},\ b(x) = x^l b_0 c(x),\ c(x) = 1 + \frac{c_1}{x} + \ldots\right]
\end{aligned}
\right.
$$

multipliée par une fonction $\sigma(x)$ telle que $\sigma(qx) = \sigma(x)$. De plus, pour la solution particulière $z(x)$, $\sigma(x)$ doit être bornée pour x réel et grand; remarquons que le dénominateur de droite dans (5) est analytique au point $x = \infty$ et se réduit à 1 pour cette valeur. Par conséquent, pour x réel, $z(x)$ croît essentiellement de la même manière que

$$
e^{\frac{l}{2}\frac{(\log x)^2}{\log q}} x^{-\frac{l}{2} + \frac{\log h_0}{\log q}} \sigma(x)
$$

pour n'importe quelle valeur réelle de q (l entier). Il s'ensuit que l doit être zéro. Ainsi l'on trouve que $z(x)$ est égale à $x^{\frac{\log b}{\log q}} \sigma(x)$ multipliée par un facteur $\alpha(x)$ analytique en $x = \infty$ et y égal à 1. Évidemment l'exposant $\frac{\log b_0}{\log q} = k$ ne peut pas dépendre du choix particulier de q. En variant q d'une façon continue et en laissant x tendre vers l'infini on voit que $\sigma(x)$ doit se réduire à une constante. Donc nous obtenons essentiellement $y(x) = x^k \alpha(x)$ où $\alpha(x)$ est analytique au point $x = \infty$ avec $\alpha(\infty) \neq 0$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Presque de la même manière nous pouvons démontrer le fait analogue :

Une fonction auto-équivalente $f(x)$ qui admet une déformation arbitraire $x' = \varphi(x)$ avec $q = 1$, aura nécessairement la forme

$$
e^{cx} x^k \left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right).
$$

Cherchons maintenant quels sont les *invariants de classe* pour les fonctions

$$
x^k \left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right) \quad \text{et} \quad e^{cx} x^k \left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right) \qquad (f_0 \neq 0)
$$

ainsi caractérisées par leurs groupes respectifs. Évidemment, en écrivant

$$
x^* = x\left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right)^{\frac{1}{k}},
$$

la première fonction devient $x^{\star k}$, et nous voyons tout de suite que k est le seul invariant caractéristique correspondant. En écrivant, d'une façon analogue,

$$e^{x^\star} x^{\star k} = e^{cx} x^k \left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right)$$

et en posant

$$x^\star = c(x + u),$$

nous obtenons

$$e^{cu}\left(1 + \frac{u}{x}\right)^k = f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots$$

et

$$cu + k \log\left(1 + \frac{u}{x} + \ldots\right) = \log\left(f_0 + \frac{f_1}{x} + \ldots\right).$$

On voit donc que l'on peut prendre u analytique

$$u = \frac{1}{c} \log f_0 + \left(\frac{f_1}{cf_0} - \frac{k \log f_0}{c^2}\right) \frac{1}{x} + \ldots$$

tel que $x^\star$ ait la propriété indiquée. En ce cas, la deuxième fonction devient $e^{x^\star} x^{\star k}$, et il y a un seul invariant c et k de cette classe.

Pour conclure la discussion, remarquons que les fonctions de ces deux classes sont respectivement identiques à celles qui satisfont à une équation linéaire différentielle du premier ordre, avec point régulier à l'infini $x = \infty$

$$xy' = \left(k + \frac{\Theta_1}{x} + \ldots\right) y$$

et à

$$xy' = \left(x + k\frac{\Theta_1}{x} + \ldots\right) y,$$

avec un point singulier irrégulier de rang o à $x = \infty$, tandis que les formes normales de ces fonctions satisfont aux équations « canoniques » respectives

$$xy' = ky \qquad \text{et} \qquad xy' = (x + k)y.$$

Ces propriétés sont caractéristiques pour les fonctions et les matrices auto-équivalentes, qui admettent un groupe G du type continu : dans ces cas, on obtient précisément les fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire ou à un système d'équations différentielles linéaires avec des coefficients analytiques ou méromorphes au point singulier $x = \infty$.

Il existe aussi des fonctions auto-équivalentes, comme $\Gamma(x)$, pour lesquelles le groupe discret G ne contient qu'une seule déformation et ses puissances. Pour ces groupes, on peut distinguer deux cas : les cas convergents comme celui de $\Gamma(x)$ où les déformations de G sont $x' = x + n$; et les cas correspondants divergents, où l'on peut écrire le groupe *formellement* de la même manière, mais où le changement de variable se trouve défini par des séries divergentes.

Le nouveau cas convergent le plus intéressant est celui où $\varphi(x) = \varphi_c(x)$ se trouve défini (dans sa forme normale) par l'équation suivante

$$\varphi_c(x) - c \log \varphi(x) = x - c \log x + 1 \qquad (c \neq 0). \tag{6}$$

Nous appellerons les équations correspondantes les *équations aux différences* φ; nous esquisserons ici la théorie générale $n = 1$ dont l'existence d'une solution formelle sert de point de départ. M. A. D. Hestenes, de l'Université de Harvard, a étudié la théorie générale des équations aux différences φ, d'ordre n

$$Y[\varphi_c(x)] = A(x) Y(x). \tag{7}$$

En dehors des deux possibilités extrêmes d'un groupe continu G_c et d'un groupe discret G_1 contenant une seule déformation et ses puissances, la seule autre possibilité est celle de certains groupes G_2 définis par deux déformations quasi-commutatives, données par des formes normales simples telles que

$$x' = x + \omega, \qquad x' = x + \omega' \qquad \left(\frac{\omega'}{\omega} \neq \text{réel}\right).$$

Nous voyons ainsi que la classe des fonctions auto-équivalentes contient les fonctions définies par les équations linéaires différentielles ordinaires (cas de G_c), les équations linéaires aux différences finies, aux différences q, et aux différences φ, ... (cas de G_1 convergent); autres types analogues correspondants où G_1 rentre dans le cas divergent (cas de G_1 divergent), et enfin le cas intermédiaire d'un groupe G_2 dans lequel les fonctions auto-équivalentes correspondantes sont liées à certaines fonctions doublement périodiques. Il est évident, par exemple, que la fonction doublement périodique $p(x)$ de Weierstrass est auto-équivalente et même invariante pour un tel groupe G_2

$$x' = \pm x + m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des nombres entiers.

Notre première tâche sera d'étudier les déformations $x' = \varphi(x)$ du plan. Nous constaterons qu'on peut construire une théorie assez complète, et, en particulier, nous serons conduits à formuler un problème fondamental inverse analogue à certains problèmes inverses de Riemann dans d'autres domaines, mais *non* linéaire. En employant cette théorie des déformations analytiques, nous étudierons les fonctions auto-équivalentes générales, et enfin les types possibles de groupes de déformations.

Je ne doute pas qu'on puisse obtenir une généralisation satisfaisante de la théorie décrite ici pour $n = 1$. C'est précisément le but que poursuit M. Hestenes. A vrai dire, il semble certain qu'on puisse développer, avec les moyens qu'on possède déjà, une théorie des systèmes matriciels (2') pour $n > 1$.

La théorie développée dans ce travail n'envisage que le voisinage d'un point isolé $x = \infty$; il est cependant possible d'étudier les matrices $Y(x)$ à éléments méromorphes, sauf en un nombre fini k de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_k = \infty$, telles que une ou plusieurs équations matricielles (2') soient satisfaites en chaque point a_i. Ces matrices sont des matrices auto-équivalentes *partout*. Deux cas particuliers importants $k = 1$ sont les solutions des équations linéaires aux différences finies et des équations différentielles ordinaires linéaires, à éléments $a_{ij}(x)$ de $A(x)$ rationnels en x.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES DÉFORMATIONS ANALYTIQUES.

1. Classification formelle des déformations. — Nous classons les déformations $x' = \varphi(x)$ possibles en cinq *types* :

$$(\mathrm{I}_q) \quad x' = qx + \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{x} + \ldots \qquad (q \neq 0;\ q^\nu \neq 1,\ \nu = 1, 2, \ldots),$$

$$(\mathrm{II}) \quad x' = x + \varphi_0 + \star\,\frac{\varphi_2}{x^2} + \ldots \qquad (\varphi_0 \neq 0),$$

$$(\mathrm{III}_c) \quad x' = x + \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{x} + \ldots \qquad \left(\varphi_0 \neq 0;\ \varphi_1 \neq 0;\ c = \frac{\varphi_1}{\varphi_0^2}\right),$$

$$(\mathrm{IV}_l) \quad x' = x + \star + \frac{\varphi_l}{x^l} + \frac{\varphi_{l+1}}{x^{l+1}} + \ldots \qquad (l > 0;\ \varphi_l \neq 0),$$

$$(\mathrm{V}_n) \quad x' = \omega x + \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{x} + \ldots \qquad (n > 1;\ \omega^n = 1).$$

On vérifie immédiatement que le type d'une déformation ne change jamais quand on remplace la variable x par une autre variable quelconque.

On peut donc espérer trouver des variables « normales » réduisant les déformations d'un type donné à une forme simple. Démontrons le résultat suivant :

Par l'emploi d'une variable formelle convenable

$$x^\star = \Omega(x) = \Omega_{-1}x + \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{x} + \ldots \qquad (\Omega_{-1} \neq 0), \tag{8}$$

on peut ramener une déformation quelconque à une et à une seule des formes normales suivantes :

$$(\mathrm{I}_q) \qquad x^{\star\prime} = q x^\star \qquad (q^\nu \neq 1;\ \nu = 1, 2, \ldots),$$

$$(\mathrm{II}) \qquad x^{\star\prime} = x^\star + 1,$$

$$(\mathrm{III}_c) \qquad x^{\star\prime} - c\log x^{\star\prime} = x^\star - c\log x^\star + 1 \qquad (c \neq 0),$$

$$(\mathrm{IV}_{l,\mathrm{II}}) \qquad \frac{(x^{\star\prime})^{l+1}}{l+1} = \frac{(x^\star)^{l+1}}{l+1} + 1 \qquad (l > 0),$$

$$(\mathrm{IV}_{l,\mathrm{III}_c}) \quad \frac{(x^{\star\prime})^{l+1}}{l+1} - c\log x^{\star\prime} = \frac{(x^\star)^{l+1}}{l+1} - c\log x^\star + 1 \qquad (l > 0;\ c \neq 0),$$

$(\mathrm{V}_{n,\mathrm{F}})$ $\qquad x^{\star\prime} = \omega x^{\star} \qquad (n > 1;\ \omega^n = 1),$

$(\mathrm{V}_{n,\mathrm{II}})$ $\qquad (x^{\star\prime})^n = (x^{\star})^n + 1,$

$(\mathrm{V}_{n,\mathrm{III}_c})$ $\qquad (x^{\star\prime})^n - c\log(x^{\star\prime})^n = (x^{\star})^n - c\log(x^{\star})^n + 1 \qquad (c \neq 0;\ n > 0),$

$(\mathrm{V}_{n,\mathrm{III}_{l,\mathrm{II}}})$ $\qquad \dfrac{(x^{\star\prime})^{n(l+1)}}{l+1} = \dfrac{(x^{\star})^{n(l+1)}}{l+1} + 1 \qquad (n > 0;\ l > 0),$

$(\mathrm{V}_{n,\mathrm{IV}_{l,\mathrm{III}_c}})$ $\qquad \dfrac{(x^{\star\prime})^{n(l+1)}}{l+1} - c\log(x^{\star\prime})^n = \dfrac{(x^{\star})^{n(l+1)}}{l+1} - c\log(x^{\star})^n + 1.$

Nous ne supposons pas naturellement que la série $\Omega(x)$ de (8) soit convergente.

Traitons successivement les cas $\mathrm{I}_q, \ldots, \mathrm{V}_n$.

Cas I_q. — Cherchons à déterminer $\Omega(x)$ avec $\Omega_{-1} = 1$ telle que l'on ait formellement

$$(9) \qquad \Omega(x') \equiv q\,\Omega(x).$$

Les termes en x à droite et à gauche sont les mêmes, à savoir qx. En comparant les termes en x^0, x^{-1}, x^{-2}; ..., on obtient une suite infinie d'équations

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \Omega_0 &= q\,\Omega_0, \\ \varphi_1 + \frac{\Omega_1}{q} &= q\,\Omega_1, \\ \varphi_2 + c_{21}\,\Omega_1 + \frac{\Omega_2}{q^2} &= q\,\Omega_2, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \end{aligned}$$

Les constantes c_{21}, c_{31}, c_{32}, ..., qui apparaissent ici à gauche, sont connues explicitement. Par conséquent, on peut déterminer successivement les coefficients $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$, et l'on obtient ainsi un changement formel de x à $x^{\star}$, à savoir $x^{\star} = \Omega(x)$, avec $x^{\star\prime} = qx^{\star}$.

La variable normale la plus générale ayant cette propriété est $\overline{x}^{\star} = \Theta x^{\star}$ (Θ arbitraire). En effet, on peut commencer avec la variable normale particulière $x^{\star}$ et chercher la série formelle la plus générale,

$$\overline{\Omega}(x^{\star}) = \overline{\Omega}_{-1}x^{\star} + \overline{\Omega}_0 + \frac{\overline{\Omega}_1}{x^{\star}} + \ldots \qquad (\overline{\Omega}_{-1} \neq 0)$$

telle que $\overline{\Omega}(qx^{\star}) = q\overline{\Omega}(x^{\star})$; on trouve immédiatement

$$\overline{\Omega}(x^{\star}) = \Omega_{-1}x^{\star}.$$

Cas II. — Dans ce cas, nous ferons préalablement un changement de variable, $x = \varphi_0 \bar{x}$ afin d'obtenir la déformation sous la forme

$$x' = x + 1 + \star + \frac{\varphi_2}{x^2} + \frac{\varphi_3}{x^3} + \ldots.$$

En prenant $\Omega(x)$ de la forme (8), avec $\Omega_{-1} = 1$, $\Omega_0 = 0$, cherchons à satisfaire à l'équation

$$(10) \qquad \Omega(x') \equiv \Omega(x) + 1.$$

Les termes en x^1, x^0, x^{-1} des deux côtés se réduisent à $x + 1 + \left(\frac{\Omega_1}{x}\right)$. En comparant les coefficients des termes en x^{-2}, x^{-3}, ..., nous obtenons une suite infinie d'équations

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \Omega_1 &= 0, \\ \varphi_3 + c_{31}\Omega_1 - 2\Omega_2 &= 0, \\ \varphi_4 + c_{41}\Omega_1 + c_{42}\Omega_2 - 3\Omega_3 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \end{aligned}$$

qui déterminent successivement Ω_1, Ω_2, ... Il existe donc une série formelle $\Omega(x)$ qui satisfait à (10). En posant $x^\star = \Omega(x)$, on obtient la variable normale.

La variable normale $\bar{x}^\star$ la plus générale est évidemment $\bar{x}^\star = x^\star + \Theta$ (Θ arbitraire).

Cas III. — Ce cas doit être considéré comme une généralisation du précédent. Comme auparavant nous commençons par écrire $x = \varphi_0 \bar{x}$, ce qui réduit la déformation à la forme préparée

$$x' = x + 1 + \frac{c}{x} + \frac{\varphi_2}{x^2} + \ldots.$$

Cherchons cette fois à déterminer $\Omega(x)$, sous la forme (8), avec de plus les conditions $\Omega_{-1} = 1$, $\Omega_0 = 0$, de façon que

$$(11) \qquad \Omega(x') - c \log \Omega(x') \equiv \Omega(x) - c \log \Omega(x) + 1,$$

c'est-à-dire

$$\Omega(x') - c \log \frac{\Omega(x')}{x'} \equiv \Omega(x) - c \log \frac{\Omega(x)}{x} + c \log \frac{x'}{x} + 1$$

ou, plus explicitement,

$$\begin{aligned} &\Omega(x') - c \left\{ \frac{\Omega(x') - x'}{x'} - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega(x') - x'}{x'}\right]^2 + \ldots \right\} \\ &\equiv \Omega(x) - c \left\{ \frac{\Omega(x) - x}{x} - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega(x) - x}{x}\right]^2 + \ldots \right\} + c\left[\frac{1}{x} + \frac{2c - 1}{2x^2} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

En comparant les termes en x^1, x^0 et x^{-1} des deux côtés, on obtient dans les deux cas $x+1+(\Omega_1+c)x^{-1}$; et en comparant les termes en x^{-2}, x^{-3}, ... on trouve les équations successives

$$\left[\varphi_2 - \frac{1}{2}c(2c-1)\right] - \Omega_1 = 0,$$
$$P_2(\Omega_1) - 2\Omega_2 = 0,$$
$$P_3(\Omega_1, \Omega_2) - 3\Omega_3 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

où $P_2(\Omega_1)$, $P_3(\Omega_1\,\Omega_2)$, ... sont des polynomes connus des variables indiquées. On voit encore que les coefficients Ω_1, Ω_2, ... sont déterminés univoquement. La variable normale $x^\star = \Omega(x)$ ainsi obtenue aura la propriété énoncée ci-dessus.

Il est évident que la variable normale $\overline{x}^\star$, la plus générale de cette espèce, s'obtient à partir d'un $x^\star$ particulier en écrivant

$$\overline{x}^\star - c\log\overline{x}^\star = x^\star - c\log x^\star + \Theta,$$

où Θ est arbitraire. En effet, si l'on commence avec la variable normale $x^\star$, on obtient l'équation suivante

$$\overline{\Omega}(x^{\star\prime}) - c\log\left[1 + \frac{\overline{\Omega}(x^{\star\prime})}{x^{\star\prime}}\right] = \tilde{\Omega}(x^\star) - c\log\left[1 + \frac{\overline{\Omega}(x^\star)}{x^\star}\right],$$

où

$$\overline{\Omega}(x^\star) = \overline{\Omega}(x^\star) - x.$$

De cette équation on déduit que les deux membres doivent se réduire à une constante Θ, ce qui donne le résultat énoncé.

Cas IV. — Passons maintenant au cas IV, où l'on peut écrire

$$x' = x + \frac{1}{x^l} + \frac{\varphi_{l+1}}{x^{l+1}} + \dots,$$

avec la variable $\overline{x} = \varphi_l^{\frac{1}{(l+1)}} x$. En comparant cette forme avec les formes préparées dans les cas II, III, on voit que ce cas est une généralisation du cas $l=1$.

Cherchons donc à trouver une série $\Omega(x)$ telle que l'on ait

$$(12)\qquad \frac{\Omega^{l+1}(x')}{l+1} - c\log\Omega(x') = \frac{\Omega^{l+1}(x)}{l+1} - c\log\Omega(x) + 1.$$

Ici, nous ne supposons pas que c soit différent de o. En comparant les deux membres de cette égalité, on constate que les termes en x^{l+1}, x^l, ..., x et $\log x$ sont les mêmes. De plus, pour obtenir les mêmes termes en x^0, il faut prendre $\Omega_{-1}=1$. En égalant les autres termes en x^{-1}, x^{-2}, ..., successivement, on obtient une suite infinie d'équations

$$\begin{aligned}
\varphi_{l+1}+l\Omega_0&=0,\\
P_1(\Omega_0)+(l-1)\Omega_1&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
P_{l-1}(\Omega_0,\ldots,\Omega_{l-2})+\Omega_{l-1}&=0,\\
P_l(\Omega_0,\ldots,\Omega_{l-1})+\star-c&=0,\\
P_{l+1}(\Omega_0)\ldots,\Omega_l,c)-\Omega_{l+1}&=0,\\
P_{l+2}(\Omega_0,\ldots,\Omega_{l+1},c)-2\Omega_{l+2}&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans ces équations, P_1, ..., P_{l-1} sont des polynomes explicitement connus, qui ne contiennent pas la constante c. Les l premières équations déterminent uniquement Ω_0, ..., Ω_{l-1}. L'équation suivante détermine c. Dans les autres équations, les P_{l+1}, P_{l+2}, ... sont des polynomes analogues qui peuvent, en outre, contenir c. Ainsi, il existe une série $\Omega(x)$ unique pour un choix arbitraire de Ω_l.

Il est donc évident que la variable normale la plus générale $\overline{x}^\star$ s'obtient à partir d'un $x^\star$, en posant

$$\frac{(\overline{x}^\star)^{l+1}}{l+1}-c\log\overline{x}^\star=\frac{(x^\star)^{l+1}}{l+1}-c\log x^\star+\Theta.$$

Suivant que $c=0$ ou $c\neq 0$, nous avons donc respectivement le cas $\mathrm{IV}_{l,\mathrm{V}}$ ou le cas $\mathrm{IV}_{l,\mathrm{III}_c}$.

Pour achever cette comparaison, la méthode la plus simple semble être la recherche dans l'équation (12) de la puissance la plus élevée de x qui contient un coefficient $\Omega_\mu\,(\mu\geqq 0)$ particulier. Cette équation peut être écrite de la manière suivante

$$\frac{\Omega^{l+1}(x')-\Omega^{l+1}(x)}{l+1}-c\left[\log\frac{\Omega(x')}{x'}-\log\frac{\Omega(x)}{x}\right]-c\log\frac{x'}{x}-1=0.$$

La puissance la plus élevée dans le premier terme qui contient Ω_μ peut être obtenue en écrivant ce terme de la manière suivante :

$$\frac{1}{1}\Omega^l(x)[\Omega(x')-\Omega(x)]+\frac{l}{1.2}\Omega^{l-1}(x)[\Omega(x')-\Omega(x)]^2+\ldots],$$

ce qui donne pour cette puissance l'expression $\frac{(l-\mu)\Omega_\mu}{x^{\mu+1}}$. Le second terme s'écrit

$$-c\left\{\frac{\left[\frac{\Omega(x')}{x'}-\frac{\Omega(x)}{x}\right]}{\left[\frac{\Omega(x)}{x}\right]}-\frac{1}{2}\frac{\left[\frac{\Omega(x')}{x}-\frac{\Omega(x)}{x}\right]^2}{\left[\frac{\Omega(x)}{x}\right]^2}+\ldots\right\},$$

ce qui donne une puissance moins élevée

$$\frac{c(\mu+1)\Omega_\mu}{x^{\mu+l+1}}.$$

Il ne faut pas perdre de vue que la série du troisième terme commencera avec $\frac{c}{x^{l+1}}$.

Cas V. — Dans le cas V_n, commençons par chercher une variable

$$\bar{x}=x+\sigma_0+\frac{\sigma_1}{x}+\ldots,$$

telle que

$$\bar{x}'=\omega\bar{x}\left(1+\frac{l_1}{\bar{x}^n}+\frac{l_2}{\bar{x}^{2n}}+\ldots\right), \tag{13}$$

où l_2, l_n, ... restent pour le moment arbitraires. En substituant, nous trouvons les équations

$$\begin{aligned}
&\varphi_0+(1-\omega)\,\sigma_0=0,\\
&\varphi_1+\left(\frac{1}{\omega}-\omega\right)\sigma_1=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n-2}+P_{n-2}(\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-3})+\left(\frac{1}{\omega^{n-2}}-\omega\right)\sigma_{n-2}=0,\\
&\varphi_{n-1}+P_{n-1}(\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-2})=l_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut satisfaire à toutes ces équations, en déterminant successivement

$$\sigma_0,\quad \sigma_1,\quad \ldots,\quad \sigma_{n-1},\quad l_n,\quad \sigma_{n+1},\quad \ldots,\quad \sigma_{2n-1},\quad l_{2n},\quad \ldots$$

et en choisissant σ_n, σ_{2n}, ... d'une manière arbitraire.

La déformation formelle (13) s'écrit aussi

$$z'=z\left(1+\frac{l_n}{z}+\frac{l_{2n}}{z^2}+\ldots\right)^n \qquad (z=\bar{x}^n),$$

qui est l'une des formes déjà considérées, II, III_c, IV_l, à moins que $z' \not\equiv z$. Exception faite du cas $V_{n,F}$, on peut donc trouver une variable normale correspondante $z^\star$, et l'on parvient ainsi aux trois cas $V_{n,II}$, V_{n,III_c}, $V_{n,IV_{l,II}}$, $V_{n,IV_{l,III_c}}$, avec les variables normales $x^\star$ indiquées. Dans tous ces cas, la variable normale la plus générale peut être obtenue comme auparavant moyennant une constante additive Θ.

Le cas exclu $V_{n,F}$ est visiblement le seul où la déformation donnée ait une période finie.

Dans ce cas, la variable normale la plus générale $\overline{x}^\star$ a une forme beaucoup plus générale. En effet, écrivons

$$\overline{x}^\star = r x^\star + \psi_0 + \frac{\psi_1}{x^\star} + \ldots .$$

Si l'on pose $\overline{x}^{\star 1} = \omega \overline{x}^\star$, on voit immédiatement que cette série aura nécessairement la forme

$$\overline{x}^\star = x^\star \left(r + \frac{\psi_{n-1}}{x^{\star n}} + \frac{\psi_{2n-1}}{x^{\star 2n}} + \ldots \right).$$

Inversement, si $\overline{x}^\star$ a cette forme, elle correspondra à une variable normale.

Remarquons maintenant qu'une transformation telle que

$$\overline{x} - c \log \overline{x} = x - c \log x + \Theta$$

est nécessairement biunivoque et analytique. En effet, en écrivant

$$\overline{x} = x + u,$$

nous obtenons

$$u - c \log\left(1 + \frac{u}{x} \right) = \Theta,$$

ce qui nous montre que pour x grand, nous aurons

$$u = \Theta + \frac{c\Theta}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \ldots .$$

Par conséquent, sauf dans le cas $V_{n,F}$, les séries normales pour une déformation donnée sont, ou bien toutes convergentes ou toutes divergentes. Nous allons voir que dans le cas $V_{n,F}$, on peut toujours choisir une série normale convergente. Malheureusement, nous verrons que parmi les autres cas, seul I_q, $|q| \neq 1$ donne toujours la convergence.

2. Les déformations de période finie [*cas* $V_{n,F}$]. — Le cas le plus simple est celui d'une déformation de période finie. Considérons donc le cas

$$n = 2 \quad \text{ou} \quad \varphi^{(2)}(x) \equiv \varphi[\varphi(x)] \equiv x, \quad \text{mais } \varphi(x) \not\equiv x.$$

En posant

$$x^\star = \frac{[x - \varphi(x)]}{2}$$

on obtient immédiatement $x^{\star\prime} = -x^\star$. D'autre part, on voit que l'on doit avoir $q = \pm 1$ dans (1). Mais si $q = 1$, on trouve que

$$\varphi^{(2)}(x) = x + \frac{2\varphi_k}{x^k} + \ldots,$$

où φ_k est le premier coefficient non nul. Donc, il faut que $q = -1$ et, par conséquent, $x^\star = x + c. + \ldots$. On voit ainsi qu'en introduisant $x^\star$ comme variable normale, la déformation se réduit effectivement à $x^\star = -x$.

Pour $n > 2$, un raisonnement analogue nous montre que la variable

$$x^\star = x + \frac{\varphi(x)}{\omega} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\omega^{n-1}}$$

servira toujours de variable normale.

Donc, dans le cas de période finie $V_{n,F}$, *on peut toujours choisir une variable normale effective* $x^\star$, *telle que la déformation s'écrive*

$$x^{\star\prime} = \omega x^\star.$$

3. Les déformations dans le cas convergent I_q, $|q| \neq 1$. — Il est bien connu depuis longtemps que la série $x^\star = \Omega(x)$ converge dans le cas I_q pour $|q| \neq 1$ (¹). Cependant, nous allons donner une brève démonstration de ce fait.

Évidemment, nous pouvons supposer que q soit plus grand que 1 en valeur absolue, parce que nous pourrions aussi bien considérer la déformation inverse. En ce cas, il est évident géométriquement que pour $|x| > L$ suffisamment grand, les points successifs itérés x', x'', ..., $x^{(k)}$... tendent uniformément vers l'infini avec $\lim \frac{x^{(k)}}{x^{(k-1)}} = q$.

(¹) *Voir*, par exemple, E. Picard et S. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Note I.

Définissons maintenant Ω_μ comme la somme des $\mu+2 \geqq 4$ premiers termes de la série $\Omega(x)$. Nous voyons alors que

$$\Omega_\mu(x') = q\,\Omega_\mu(x)\left[1+\frac{M_\mu(x)}{x^{\mu+1}}\right],$$

où

$$|M_\mu(x)| < M_\mu \qquad \text{pour} \quad |x| \geqq L_\mu \geqq L.$$

Considérons la fonction

$$\Omega_\mu^\star(x) = \lim \frac{\Omega_\mu[x^{(k)}]}{q^k} = \Omega_\mu(x)\left[1+\frac{M_\mu(x)}{x^{\mu+1}}\right]\left[1+\frac{M_\mu(x')}{(x')^{\mu+1}}\right]\cdots,$$

où l'on a la convergence uniforme. D'après sa définition même, cette fonction aura les deux propriétés suivantes :

$$\Omega_\mu^\star(x') = q\,\Omega_\mu^\star(x), \qquad \Omega_\mu^\star(x) = \Omega_\mu(x)\left[1+\frac{N_\mu(x)}{x^\mu}\right],$$

où $N_\mu(x)$ est bornée en valeur absolue pour $|x|$ suffisamment grand.

D'autre part, la fonction

$$\Theta_\mu(x) = \frac{\Omega_{\mu+1}^\star(x)}{\Omega_\mu^\star(x)}$$

aura les propriétés

$$\Theta_\mu(x') = \Theta_\mu(x); \qquad \lim_{k=\infty} \Theta_\mu[x^{(k)}] = 1,$$

d'où il s'ensuit que $\Theta_\mu(x) \equiv 1$, $\mu = 2, 3, \ldots$. Ainsi, la fonction $\Omega^\star(x) = \Omega_2^\star(x) = \Omega_3^\star(x) = \ldots$ est représentée asymptotiquement par $\Omega(x)$ pour $|x|$ grand, mais quelconque; par conséquent la série $\Omega(x)$ doit converger.

En posant alors $x^\star = \Omega(x)$, nous obtenons une variable normale effective pour laquelle $x^{\star\prime} = qx^\star$.

Ainsi, dans le cas I_q, $|q| \neq 1$, *la série* $\Omega(x)$ *doit converger, et il existe une variable normale effective* $x^\star = \Omega(x)$ *telle que la déformation puisse s'écrire*

$$x^{\star\prime} = q\,x^\star.$$

Le cas exclu $|q| = 1$ ($q^\nu \neq 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$) nous échappe complètement dans cette manière de raisonner, quoique, du point de vue purement formel, il soit de même nature que le cas $|q| \neq 1$. J'appellerai ce cas I le *cas exceptionnel*. En effet, tandis que les méthodes de la théorie des fonctions analytiques suffisent pour analyser tous les autres cas, celui-ci semble nécessiter l'introduction des conceptions de la théorie des fonctions réelles. Malgré son grand intérêt je le laisserai cependant de côté dans ce qui suit.

4. Sur la possibilité de divergence. — Dans les autres cas, il y a en général divergence.

Pour le voir, prenons le cas II, qui est le plus simple de tous, et considérons la famille linéaire analytique de déformations du type II

$$x' = \varphi(x) = x + 1 + \frac{c}{x^2},$$

où c est un paramètre arbitraire. D'après ce qui précède, il existera donc une série unique

$$\Omega(x, c) = x + \bigstar + \frac{\Omega_1(c)}{x} + \ldots$$

telle que

$$\Omega(x', c) \equiv \Omega(x, c) + 1.$$

Nous trouvons sans difficulté que

$$\Omega_1(c) = c, \qquad \Omega_2(c) = \frac{1}{2}c, \qquad \Omega_3(c) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}c - c^2\right), \qquad \ldots.$$

Si cette série convergeait pour toute valeur de $c \neq 0$ elle semblerait devoir converger uniformément dans le voisinage de $c = 0$, où elle se réduit à x. Mais, dans ce cas, la série $\frac{\partial\Omega(x, c)}{\partial c}$ convergerait aussi pour $c = 0$. *Démontrons que cette série est divergente.* En effet, on a identiquement

$$\Omega\left(x + 1 + \frac{c}{x^2}, c\right) \equiv \Omega(x, c) + 1,$$

et donc, en différentiant par rapport à c et puis posant $c = 0$,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{\partial\Omega(x+1, 0)}{\partial c} = \frac{\partial\Omega(x, 0)}{\partial c}.$$

Or, il est bien connu que la série asymptotique divergente de Stirling pour $\Gamma(x)$ nous conduit à une série analogue

$$\log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \ldots$$

pour $\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$, qui satisfait formellement à l'équation

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, la série dérivée

$$\chi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx},$$

à savoir

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \ldots,$$

diverge aussi et satisfait formellement à

$$\chi(x+1) = \chi(x) \quad \frac{1}{x^2}.$$

Nous voyons donc que la série $\frac{\partial \Omega(x, 0)}{\partial c}$ doit coïncider avec la série divergente $\chi(x)$, puisque l'équation fonctionelle détermine cette série à une constante près.

Ce résultat rend déjà presque certaine la généralité de la divergence de la série $\Omega(x)$ dans le cas simple II. Nous donnerons plus loin un exemple particulier où la divergence a lieu (*voir* la 11^e section).

5. **Théorie des déformations du type** II. — Dans ce cas, la série formelle $\Omega(x)$ satisfait à l'équation (10). Donc, considérons comme solution approximative de cette équation la fonction

$$\Omega_\mu(x) = x + \frac{\Omega_1}{x} + \ldots + \frac{\Omega_{\mu+1}}{x^{\mu+1}} \qquad (\mu \geqq 0),$$

qui doit avoir la propriété

$$\Omega_\mu(x') \equiv \Omega_\mu(x) + 1 + \frac{M_\mu(x)}{x^{\mu+2}},$$

où $|M_\mu(x)|$ est bornée pour chaque μ et pour $|x| \geqq L_\mu$. De plus, en employant comme nouvelle variable $\overline{x} = \Omega_0(x)$, nous obtenons un cas préparé avec $\Omega_1 = 0$.

Commençons avec le cas $\mu = 0$, $\Omega_0(x) = x$, où l'équation que nous venons d'écrire devient tout simplement

$$x' = x + 1 + \frac{M_0(x)}{x^2} \qquad [\,|M_0(x)| \leqq M_0 \qquad \text{pour} \quad |x| \geqq L_0\,].$$

Nous pouvons supposer ici que $|M_0| \geqq 1$.

Admettons maintenant que $x = u + iv$ soit un point à droite de l'axe des imaginaires ($u \geqq 0$) pour lequel

$$|u| + |v| \geqq 4M_0 \quad \text{et donc} \quad |x| > 2M_0.$$

Nous aurons

$$|x' - x - 1| \leqq \frac{1}{4}, \qquad u' \geqq 0, \qquad |u'| + |v'| \geqq 4M_0.$$

Par conséquent, x' se trouve aussi à la droite de cet axe avec

$$|u'| + |v'| \geqq 4M_0.$$

De la même manière, tous les autres points successifs $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... auront les mêmes propriétés.

Donc, pour tout entier positif k on aura

$$|x^{(k)} - x - k| \leqq \frac{k}{4} \quad \text{d'ou} \quad x^{(k)} = x + k\left(1 + \frac{\theta_k}{4}\right) \qquad (|\theta_k| \leqq 1).$$

Il devient évident ainsi que les points x', $x^{(2)}$, ... tendent indéfiniment vers la droite. De plus, puisque

$$x^{(k)} = x + k + \frac{M_0(x)}{x^2} + \ldots + \frac{M_0(x^{(k-1)})}{(x^{(k-1)})^2},$$

il est visible que l'on a pour $k \geqq 0$

$$x^{(k)} - x - k = \frac{N_k(x)}{x} \qquad [|N_k(x)| \leqq N_0]^*.$$

D'une manière semblable, on démontre sans difficulté que, pour $u \leqq 0$, on a

$$\left|\frac{N_0(x)}{x}\right| \leqq \frac{N_0^*}{|v|},$$

au moins si $|v|$ est suffisamment grand (¹).

Considérons maintenant la fonction

$$\Omega_{0+}(x) = \lim(x^{(k)} - k) = x + \frac{M_0(x)}{x^2} + \frac{M_0(x')}{(x')^2} + \ldots = x + \frac{N_{0+}(x)}{x}.$$

Cette fonction $\Omega_{0+}(x)$ sera analytique en x pour $u \geqq 0$ et $|x|$ suffisamment grand ainsi que pour $u \leqq 0$ et $|v|$ suffisamment grand. D'après sa définition, elle aura la propriété de satisfaire à l'équation (10). La fonc-

---

(¹) *Voir*, par exemple, P. M. Batchelder, *An Introduction to Linear Difference Equations*, Chap. I, où l'on considère des inégalités analogues.

tion $N_{0+}(x) = \lim N_{0k}(x)$ qui paraît à droite, aura le même caractère que la suite des fonctions $N_{0k}(x)$ dont elle est la limite.

De la même manière, en partant de $\Omega_1(x)$, et en écrivant

$$\Omega_{1+}(x) = \lim[\Omega_1(x^{(k)}) - k],$$

on obtient une fonction $\Omega_{1+}(x)$ qui satisfait à la même équation, qui est analytique dans la même région, et qui s'écrit

$$\Omega_{1+}(x) = x + \frac{\Omega_1}{x} + \frac{N_{1+}(x)}{x^2},$$

où

$$|N_{1+}(x)| \leqq N_1, \qquad \text{pour} \quad u \geqq 0$$

et

$$\left|\frac{N_1(x)}{x^2}\right| \leqq \frac{N_1}{|v|^2} \qquad \text{pour} \quad u < 0.$$

Je dis que $\Omega_{0+}(x)$ et $\Omega_{1+}(x)$ doivent être identiques. En effet, en posant

$$\Delta(x) = \Omega_{1+}(x) - \Omega_{0+}(x),$$

on déduit immédiatement que

$$\Delta(x') = \Delta(x), \qquad \lim_{k \to \infty} \Delta(x^{(k)}) = 0,$$

d'où il s'ensuit que

$$\Delta(x) \equiv 0.$$

En procédant ainsi, on obtient ce qu'on appelle la solution principale à droite de l'équation (10)

$$\Omega_+(x) = \Omega_{0+}(x) = \Omega_{1+}(x) = \ldots \qquad \left\{ \Omega_{\mu+}(x) = \lim_{k \to \infty} [\Omega_\mu(x^{(k)}) - k] \right\},$$

qui est analytique sauf à une distance finie de l'axe réel négatif $v = 0$ et qui est asymptotiquement représentée par $\Omega(x)$ par rapport à x à droite, et par rapport à v à gauche de l'axe des imaginaires $u = 0$.

Pareillement, on obtient $\Omega_-(x)$, la solution principale à gauche, en posant

$$\Omega_-(x) = \lim [\Omega_\mu(x^{(-k)}) + k - 1).$$

Remarquons ici le fait évident que $\Omega_+(x)$ et $\Omega_-(x)$ sont complètement caractérisées par l'équation fonctionelle et leur forme asymptotique $\Omega(x)$ respectivement à droite et à gauche.

Supposons maintenant que l'on modifie la variable x, en écrivant

$$x = \overline{x} + \star + \frac{c_1}{\overline{x}} + \frac{c^2}{\overline{x}^2} + \ldots, \tag{14}$$

où la série à droite est convergente pour $|x|$ très grand, mais autrement quelconque. Nous obtenons alors formellement

$$\Omega[x(\overline{x})] = \overline{x} + \frac{\Omega_{1+}c_1}{\overline{x}} + \ldots = \overline{\Omega}(\overline{x}).$$

En effet, la relation (10) nous donne également

$$\overline{\Omega}(\overline{x}') = \overline{\Omega}(\overline{x}) + 1,$$

et il existe une seule série en $\overline{x}$ de cette espèce. On voit ainsi que

$$\overline{\Omega}_+(x) = \Omega_+(x), \qquad \overline{\Omega}_-(\overline{x}) = \Omega_-(x),$$

puisque les relations asymptotiques $\Omega_+ \sim \Omega$, $\Omega_- \sim \Omega$ subsistent encore pour la nouvelle variable $\overline{x}$.

Introduisons maintenant les variables auxiliaires

$$z_+ = e^{2\pi i \Omega_+(x)}, \qquad z_- = e^{2\pi i \Omega_-(x)} \tag{15}$$

qui jouissent des propriétés,

$$\begin{cases} z_+(x') = z_+(x), & z_-(x') = z_-(x), \\ z_+(x) \sim e^{2\pi i \Omega(x)}, & z_-(x) \sim e^{2\pi i \Omega(x)}, \end{cases} \tag{16}$$

où les relations asymptotiques sont valables dans les mêmes régions qu'auparavant.

Considérons l'image, dans le plan de z_+, de la région Σ située entre l'axe imaginaire positif $u = 0$ et la courbe $x' = \varphi(v)$ obtenue à partir de cet axe par la déformation $x' = \varphi(x)$ (*voir* la figure 1).

La forme asymptotique de z_+ et l'équation $z_+(x') = z_+(x)$ nous montrent que cette image remplit une fois et une seule le voisinage de $z_+ = 0$. Autrement dit, la fonction $x(z_+)$ se trouve définie sur une surface de Riemann avec point de ramification d'ordre infini pour $z_+ = 0$. En faisant circuler le point z_+ k fois autour de l'origine $z_+ = 0$, $x(z_+)$ devient précisément $x^{(k)}(z_+)$.

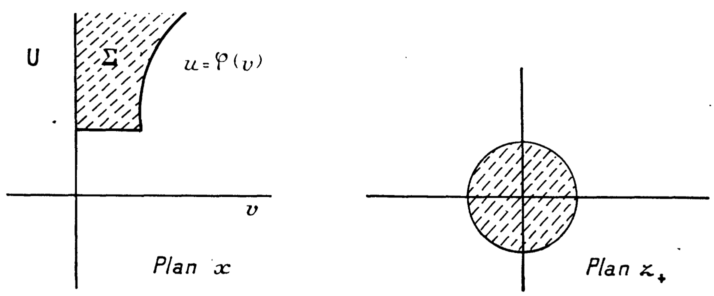
Pour des raisons analogues, l'image de Σ dans le plan de $z_-(x)$ aura la même propriété.

On voit donc, en éliminant la variable x, qu'il y a correspondance biunivoque et analytique entre z_+ et z_- au voisinage de $z_+ = z_- = 0$ avec $\lim \frac{z_-}{z_+} = 1$, c'est-à-dire que

$$z_- = g(z_+) = z_+ + g_2 z_+^2 + g_3 z_+^3 + \ldots. \tag{17}$$

Puisque $\Omega_+(x)$ et $\Omega_-(x)$ sont des fonctions qui ne dépendent pas de la variable $\overline{x}$ définie par (14), il est évident que les coefficients $g_2, g_3, \ldots,$ dans $g(z)$ ne dépendent plus du choix de x.

Fig. 1.



Il faut remarquer que nous avons supposé dans (17) que la transformation était de la forme (14) au lieu d'être de la forme vraiment générale

$$\overline{x} = x + c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots. \tag{14'}$$

Dans ce dernier cas, nous trouvons plus généralement que

$$\overline{\Omega}_+(\overline{x}) = \Omega_+(x) - c_0, \qquad \overline{\Omega}_-(\overline{x}) = \Omega_-(x) - c_0,$$

c'est-à-dire que

$$\overline{z}_+ = e^{-2\pi i c_0} z_+, \qquad \overline{z}_- = e^{-2\pi i c_0} z_-.$$

Ainsi, nous aurons pour *toutes les déformations de la même classe*

$$e^{-2\pi i c_0}\overline{z}_- = g\left(e^{-2\pi i c_0}\overline{z}_+\right),$$

d'où

$$\overline{z}_- = \overline{z}_+ + g_2 e^{-2\pi i c_0}\overline{z}_+^2 + g_3 e^{-4\pi i c_0}\overline{z}_+^3 + \ldots.$$

Donc, les rapports des $(n-1)^{ième}$ *racines des coefficients* z^n *dans* $g(z)$

$$g_2, \quad g_3^{\frac{1}{2}}, \quad g_4^{\frac{1}{3}}, \quad \ldots$$

sont des invariants absolus de la classe donnée.

Puisque $\Omega_-(x)$ et $\Omega_+(x)$ ont été définis par des séries uniformément convergentes, il est évident que ces fonctions sont des fonctionnelles analytiques de $\varphi(x)$. Par conséquent,

$$z_-(x), \quad z_+(x), \quad x(z_-), \quad x(z_+) \qquad \text{et} \qquad z_- = g(z_+)$$

auront également cette propriété.

En comparant $\Omega_+(x)$ et $\Omega_-(x)$ dans la direction de l'axe imaginaire négatif, on voit d'une manière analogue que l'on doit avoir

$$z_+ = h(z_-) = z_- + h_0 + \frac{h_1}{z_-} + \frac{h_2}{z_-^2} + \ldots, \tag{18}$$

pour $|z_-|$ et $|z_+|$ grands. Évidemment, $h(z_-)$ sera aussi une fonctionnelle analytique de $\varphi(x)$.

Appelons $g(z_+)$ et $h(z_-)$ les *fonctions de connexion*. Elles sont liées de manière invariante à la classe des déformations, au moins si l'on suppose que la déformation donnée est exprimée sous la forme « préparée »

$$x' = x + 1 + \bigstar + \frac{\varphi^2}{x^2} + \ldots$$

et si l'on n'admet que des variables $\bar{x}$ de la forme (14).

Démontrons inversement qu'il ne peut exister qu'une seule classe de déformations du type II conduisant aux mêmes fonctions de connexion $g(z_+)$ *et* $h(z_-)$.

Supposons qu'il puisse exister deux déformations $x' = \varphi(z)$ et $\bar{x}' = \bar{\varphi}(x)$ qui conduisent toutes les deux aux fonctions de connexion $g(z_+)$ et $h(z_-)$. En écrivant

$$x = \Omega_+^{-1}(x_+), \qquad \bar{x} = \bar{\Omega}_+^{-1}(x_+)$$

définissons une correspondance analytique entre x et $\bar{x}$ telle que [1]

$$x \sim \bar{x} + \frac{\theta_1}{x} + \frac{\theta_2}{x^2} + \ldots \qquad \text{(à droite).}$$

Ici, la série asymptotique est donnée formellement par $\Omega^{-1}(\bar{\Omega})$. Or, la relation entre x et $\bar{x}$ est précisément

$$e^{2\pi i \Omega_+(x)} = e^{2\pi i \bar{\Omega}_+(\bar{x})}$$

---

[1] La relation $a \sim b$ signifie que a est représentée asymptotiquement par b dans le sens ordinaire.

ce qui donne immédiatement, en passant à gauche

$$e^{2\pi i \Omega_-(x)} = e^{2\pi i \overline{\Omega}_-(\overline{x})},$$

puisque les deux fonctions de connexion sont les mêmes. Donc x doit avoir la même forme asymptotique en $\overline{x}$ à gauche qu'à droite, et la série asymptotique doit converger

$$x = \overline{x} + \frac{\Theta_1}{\overline{x}} + \frac{\Theta_2}{\overline{x}^2} + \ldots.$$

Ce résultat démontre que les deux déformations $x' = \varphi(x)$ et $\overline{x}' = \overline{\varphi}(\overline{x})$ appartiennent à la même classe, ce que nous voulions démontrer.

Ainsi, la caractérisation géométrique de la déformation du type II doit être considérée comme réalisée, puisqu'on a pu obtenir les invariants de sa classe (essentiellement les coefficients g_n et h_n dans les séries g et h).

Remarquons aussi le fait suivant :

Pour qu'un cas II soit convergent, il faut et il suffit que

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = z_-.$$

En effet, dans le cas convergent on peut introduire une variable normale x^* telle que $x^{*\prime} = x + 1$. Avec cette variable $x_+ = x_- = x$. D'autre part, d'après le résultat déjà démontré, si l'on a

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = z_-,$$

la déformation devra être de la même classe que la déformation normale $x' = x + 1$.

6. Théorie des déformations du type III$_c$. — Commençons par préparer la variable x de façon que le coefficient Ω_1 s'évanouisse dans la série formelle $\Omega(x)$ [1].

En définissant encore $\Omega_\mu(x)$ comme la somme des $\mu + 2$ premiers termes de la série $\Omega(x)$, nous obtenons immédiatement

$$(19) \qquad \Omega_\mu(x') - c\log\Omega_\mu(x') = \Omega_\mu(x) - c\log\Omega_\mu(x) + 1 + \frac{M_\mu(x)}{x^{\mu+1}}$$

[1] Pour cela, il suffit de remplacer x par

$$\overline{x} = x + \frac{\Omega_1}{x}.$$

où $|M_\mu|(x)$ est bornée pour $|x|$ suffisamment grand. Pour $\mu = 1$, cela donne

$$x' - c\log x' = x - c\log x + 1 + \frac{M_1(x)}{x^2}.$$

Or $\frac{x'}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini. Donc pour x à droite de l'axe des imaginaires cette équation nous montre que $\lim x^{(k)} = \infty$ si $|x|$ est assez grand et $u \geqq 0$; plus précisément

$$x^{(k)} - c\log x^{(k)} = x - c\log x + k + \frac{N_1(x)}{x} \qquad [|N_1(x)| \leqq N_1],$$

pour x à droite de l'axe des imaginaires. Si x est à gauche de cet axe, on ne peut conclure que

$$\left|\frac{N_1(x)}{x}\right| \leqq \frac{N_1}{|v|}.$$

Pour la partie imaginaire de $x - c\log x$ suffisamment grande, définissons maintenant $\Omega_{\mu+}(x)$ par

$$(20) \qquad \Omega_{\mu+}(x) - c\log\Omega_{\mu+}(x) = \lim_{k=\infty}[\Omega_\mu(x^{(k)}) - c\log\Omega_\mu(x^{(k)}) - k].$$

Nous démontrons sans difficulté que l'on obtient ainsi une fonction

$$\Omega_+(x) = \Omega_{1+}(x) = \Omega_{2+}(x) = \ldots$$

avec

$$(21) \qquad \begin{cases} \Omega_+(x') - c\log\Omega_+(x') = \Omega_+(x) - c\log\Omega_+(x) + 1. \\ \Omega_+(x) \sim \Omega(x). \end{cases}$$

Ici encore la relation asymptotique est valable par rapport à x à droite de l'axe des imaginaires, mais seulement par rapport à la partie imaginaire de $x - c\log x$ à gauche.

En cherchant à obtenir d'une manière analogue une fonction $\Omega_-(x)$, commençons par considérer la limite

$$\lim_{k=\infty}[\Omega_\mu(x^{(-k)}) - c\log\Omega_\mu(x^{(-k)}) + k - 1].$$

Dans ce cas, il faut choisir une détermination particulière de $\log\Omega_\mu(x)$. Supposons que nous choisissions celle qui est obtenue de $\log\Omega(x)$ en passant à gauche au-dessus de l'axe des imaginaires. Nous obtenons ainsi une fonction $\Omega_-(x)$ particulière telle que

$$(22) \qquad \begin{cases} \Omega_-(x') - c\log\Omega_-(x') = \Omega_-(x) - c\log\Omega_-(x) + 1, \\ \qquad \Omega_-(x) \sim \Omega(x) \end{cases}$$

où la relation asymptotique est valable par rapport à x à gauche et par rapport à la partie réelle de $x - c\log x$ à droite. De plus, la comparaison des équations (21) et (22) nous donne

$$(23)\qquad \Delta\{\Omega_-(x) - c\log\Omega_-(x) - [\Omega_+(x) - c\log\Omega_+(x)]\} = 0,$$

où le symbole $\Delta U(x)$ signifie $U(x+1) - U(x)$. Ainsi, la fonction entre parenthèses doit être périodique de période 1 et tendre vers zéro quand x tend vers l'infini dans la direction de l'axe imaginaire *positif*.

Posons donc

$$z_+(x) = e^{2\pi i[\Omega_+(x) - c\log\Omega_+(x)]}, \qquad z_-(x) = e^{2\pi i[\Omega_-(x) - c\log\Omega_-(x)]}.$$

Nous aurons

$$z_+(x') = z_+(x), \qquad z_-(x') = z_-(x),$$
$$z_+(x) \sim e^{2\pi i[\Omega(x) - c\log\Omega(x)]}, \qquad z_-(x) \sim e^{2\pi i[\Omega(x) - c\log\Omega(x)]},$$

où les relations asymptotiques sont toutes les deux valables au-dessus de l'axe réel. Nous concluons, comme dans le cas II, que

$$(24)\qquad z_-(x) = g(z_+) = z_+ + g_2 z_+^2 + \ldots.$$

Qu'arrive-t-il dans la direction de l'axe imaginaire négatif? En premier lieu, en passant de gauche à droite en dessous de l'axe réel, on obtient $\Omega_+(x) + 2\pi i c$ au lieu de $\Omega_+(x)$, parce que le terme $c\log x$ dans la série asymptotique augmenté de $2\pi i c$ pendant un tour complet autour de l'origine. Donc, z_+ sera remplacée par $e^{2\pi i c} z_+$ et nous aurons

$$(25)\qquad e^{-2\pi i c} z_+ = h(z_-) = z_- + h_0 + \frac{h_1}{z_-} + \ldots.$$

Naturellement, comme dans le cas II, nous appellerons $g(z_+)$ et $h(z_-)$ les fonctions de connexion, puisqu'elles jouent exactement le même rôle, dans le cas III_c, que dans le cas II déjà traité.

7. Théorie des déformations du type $\mathrm{IV}_{l,\mathrm{II}}$ et $\mathrm{IV}_{l,\mathrm{III}_c}$. — Commençons avec le cas typique $\mathrm{IV}_{l,\mathrm{II}}$ pour $l = 2$, et remarquons que si nous introduisons la variable auxiliaire $z = \frac{x^3}{3}$, la déformation [avec une variable x convenablement préparée [1]] sera à peu près $z' = z + 1$. Ici il est utile

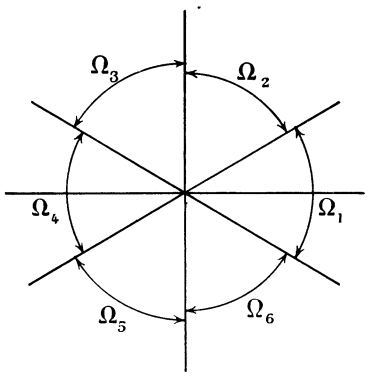
(1) Par exemple

$$\bar{x} = x + \frac{\Omega_1}{x} + \ldots + \frac{\Omega^5}{x_5}.$$

de diviser le plan des x en six secteurs d'une ouverture de $\frac{2\pi}{6}$ (*voir* la figure 2). Aux secteurs successifs nous rattachons les six fonctions correspondantes

$$\Omega_1(x),\quad \Omega_2(x),\quad \Omega_3(x),\quad \Omega_4(x),\quad \Omega_5(x),\quad \Omega_6(x)\qquad [\Omega_7(x)\equiv\Omega_1(x)].$$

Fig. 2.



Chaque $\Omega_j(x)$ est analytique à l'intérieur du $j^{\text{ième}}$ secteur pour $|x|$ suffisamment grand, et telle que

$$\frac{\Omega_j^3(x')}{3}=\frac{\Omega_j^3(x)}{3}+1\qquad[\Omega_j(x)\sim\Omega(x)] \tag{26}$$

dans ce secteur. Près des bords communs à deux secteurs voisins cette forme asymptotique de $\Omega_j(x)$ et $\Omega_{j+1}(x)$ reste encore valable. La méthode de démonstration est tout à fait analogue à celle que nous avons employée dans le cas II.

En écrivant maintenant

$$z_j=e^{2\pi i\frac{\Omega_j^3(x)}{3}}$$

on voit que

$$z_j(x')=z_j(x),\qquad z_j(x)\sim e^{2\pi i\frac{\Omega^3(x)}{3}}.$$

Ainsi l'on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} z_2=g_1(z_1)=z_1+g_2z_1^2+\ldots, & z_3=h_2(z_2)=z_2+h_{10}+\dfrac{h_{11}}{z_2}+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & z_1=h_6(z_6)=z_6+h_{30}+\dfrac{h_{31}}{z_6}+\ldots \end{array}\right. \tag{27}$$

et les six fonctions de connexion $g_1(z)$, $h_2(z)$, $g_3(z)$, $h_4(z)$, $g_5(z)$, $h_6(z)$ caractérisent encore la classe de la déformation donnée. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence est

$$g_1(z) = z_1, \qquad \ldots, \qquad h_6(z) = z_6.$$

Dans le cas de l quelconque, quelques modifications évidentes suffisent. En effet, dans ce cas on aurait $2l$ secteurs successifs et $2l$ fonctions $g_1(z), \ldots, h_{2l}(z_{2l})$ avec des propriétés complètement analogues.

Comme auparavant, les fonctions de connexion caractérisent complètement la classe, de sorte que les coefficients de leurs développements en série donnent tous les invariants. De plus, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence est la réduction de toutes ces séries à leur premier terme.

Passons maintenant au cas un peu plus compliqué IV_{l,III_c} en prenant encore $l=2$ comme exemple typique. Il faut dans ce cas considérer les mêmes six secteurs du plan de z, les équations (26) étant cependant remplacées par

$$(26') \qquad \frac{\Omega_j^3(x')}{3} - c\log\Omega_j(x') = \frac{\Omega_j^3(x)}{3} - c\log\Omega_j(x) + 1 \qquad [\Omega_j(x) \sim \Omega(x)].$$

En définissant z_j comme dans le cas $IV_{l,II}$, nous obtenons les équations analogues

$$(27') \qquad z_2 = g_1(z_1) = z_1 + g_{12}z_1^2 + \ldots, \qquad e^{-2\pi i c}z_1 = h_6(z_6),$$

où $g_1(z_1), \ldots, h_6(z_6)$ ont encore la même forme.

La généralisation au cas IV_{l,III_c}, l quelconque est immédiate.

8. Autres cas. — Considérons maintenant les cas $V_{n,II}$, V_{n,III_c}, $V_{n,IV_{l,II}}$ et $V_{n,IV_{l,III_c}}$.

En préparant convenablement la variable x et en écrivant $\xi = x^n$, la déformation prendra les formes « préparées » correspondantes

$$(V_{n,II}) \qquad \xi' = \xi + 1 + \frac{\psi_p}{\xi^{\frac{p}{n}}} + \ldots,$$

$$(V_{n,III_c}) \qquad \xi' - c\log\xi' = \xi - c\log\xi + 1 + \frac{\psi_p}{\xi^{\frac{p}{n}}} + \ldots,$$

$$(V_{n,IV_{l,II}}) \qquad \frac{(\xi')^{l+1}}{l+1} = \frac{\xi^{l+1}}{l+1} + 1 + \frac{\psi_p}{\xi^{\frac{p}{n}}} + \ldots,$$

$$(V_{n,IV_{l,III_c}}) \qquad \frac{(\xi')^{l+1}}{l+1} - c\log\xi' = \frac{\xi^{l+1}}{l+1} - c\log\xi + 1 + \frac{\psi_p}{\xi^{\frac{p}{n}}} + \ldots,$$

où l'entier p est arbitrairement grand.

Le premier cas $V_{n,\text{II}}$ est analogue au cas II déjà traité, avec la seule différence que z doit circuler n fois autour de l'origine avant que la déformation ne reprenne sa forme initiale. On obtiendra donc ici une suite de fonctions

$$\Omega_{1+}(x), \quad \Omega_{1-}(x), \quad \ldots, \quad \Omega_{n+}(x), \quad \Omega_{n-}(x)$$

telles que

$$\Omega^n_{j\pm}(x') = \Omega^n_{j\pm}(x) + 1, \qquad \Omega_{j\pm}(x) \sim \Omega(x);$$

les relations asymptotiques ont lieu dans les secteurs respectifs

$$j\pi - \frac{\pi}{2n} \leqq \arg x \leqq j\pi + \frac{\pi}{2n} \qquad (j = 0, 2, \ldots, 2n-1).$$

En posant

$$\xi_{j\pm} = e^{2\pi i \Omega^n_{j\pm}(x)}$$

on trouve

$$\xi_{j\pm}(x') = \xi_{j\pm}(x), \qquad \xi_{j\pm}(x) \sim e^{2\pi i \Omega^n(x)}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_{j-} &= g_j(\xi_{j+}) = \xi_{j+} + g_{j2}\xi^2_{j+} + \ldots \\ \xi_{j+} &= h_j(\xi_{j-}) = \xi_{j-} + h_{j0} + \frac{h_{j1}}{\xi_{j-}} + \ldots \end{aligned} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Les $2n$ fonctions de connexion $g_i(\xi_{i+})$, $h_i(\xi_{i-})$ ainsi obtenues suffisent encore à caractériser la classe de la déformation $V_{n,\text{II}}$.

De la même manière, le cas V_{n,III_c} est analogue au cas III_c, à cela près que l'on a ici $2n$ fonctions $g_1, h_1, \ldots, g_n, \hbar_n$ au lieu des deux fonctions g, h.

Il y a également une analogie étroite entre les cas $V_{n,\text{IV}_{l,\text{II}}}$ et $V_{n,\text{IV}_{l,\text{III}_c}}$, et les cas $\text{IV}_{l,\text{II}}$ et $\text{IV}_{l,\text{III}_c}$ déjà traités. La seule différence est qu'au lieu de l fonctions de connexion, il y en a nl

$$g_1, \quad h, \quad \ldots, \quad g_{nl}, \quad h_{nl}.$$

En effet, dans ce cas, il y a $2nl$ secteurs successifs au lieu de $2l$. Il va sans dire que dans ces cas les fonctions de connexion jouent toujours le même rôle.

9. Remarque sur le calcul des fonctions de connexion. — Le calcul des fonctions de connexion semble assez difficile. Néanmoins, en partant d'une déformation particulière (convergente ou divergente) pour laquelle les fonctions de connexion soit connues, on peut calculer de proche en proche les fonctions de connexion pour une déformation voisine, par l'emploi convenable des séries. Démontrons-le dans un cas très particulier, à savoir celui de la déformation

$$x' = \varphi(x, c) = x + 1 + \frac{c}{x^2}$$

déjà discutée (*voir* le paragraphe 6 ci-dessus).

Comme nous l'avons déjà vu, il existe une seule solution $\Omega_+(x, c)$ de l'équation fonctionnelle

$$\Omega_+[\varphi(x, c), c] = \Omega_+(x, c) + 1,$$

telle que $\lim \frac{\Omega(x, c)}{x} = 1$ pour $\lim u = +\infty$, et cette solution est analytique en c pour $c = 0$ avec $\Omega_+(x, 0) = x$.

Or, en différentiant l'équation précédente par rapport à c et en prenant c égal à zéro, on a

$$\frac{\partial\Omega_+(x+1, 0)}{\partial c} + \frac{1}{x^2} = \frac{\partial\Omega_+(x, 0)}{\partial c}.$$

De cette équation, nous obtenons l'équation asymptotique

$$\frac{\partial\Omega_+(x, 0)}{\partial c} \sim \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \ldots.$$

En nous souvenant des propriétés des fonctions $\psi_\pm(x) = \frac{d\log\Gamma_\pm(x)}{dx}$ (¹), nous concluons que

$$\frac{\partial\Omega_\pm(x, 0)}{\partial c} = \frac{d\psi_\pm(x)}{dx}.$$

Par conséquent, on aura

$$\Omega_\pm(x, c) = x + c\,\frac{d\psi_\pm(x)}{dx} + \ldots;$$

et

$$z_+ = e^{2\pi i\left(x + c\frac{d\psi_+(x)}{dx} + \ldots\right)}, \qquad z_- = e^{2\pi i\left(x + c\frac{d\psi_-(x)}{dx} + \ldots\right)}.$$

Donc

$$\frac{z_-}{z_+} = e^{c\left(\frac{d\psi_+(x)}{dx} - \frac{d\psi_-(x)}{dx}\right) + \ldots}.$$

(¹) On a

$$\Gamma_+(x) = \Gamma(x) \qquad \Gamma_-(x) = \frac{-2\pi i e^{\pi i x}}{\Gamma_1(-x)}.$$

Voir Batchelder, *loc. cit.*, p. 41.

Mais on a

$$\frac{\Gamma_-(x)}{\Gamma_+(x)} = 1 - e^{2\pi i x},$$

et donc

$$\frac{d\psi_+(x)}{dx} - \frac{d\psi_-(x)}{dx} = \frac{4\pi^2 e^{2\pi i x}}{(1 - e^{2\pi i x})^2}.$$

Nous concluons ainsi qu'on peut écrire le développement ci-dessous, suivant les puissances de c :

$$z_- = z_+ + \frac{4\pi^2 z_+}{(1 - z_+)^2} c + \ldots.$$

Le calcul analogue des termes en c^2, c^3, ... ne présente aucune difficulté théorique.

Cette méthode de calcul est au fond assez générale.

10. **Le problème inverse.** — Le problème inverse se présente immédiatement à l'esprit : Étant données deux fonctions arbitraires $g(z_+)$ et $h(z_-)$, existe-t-il une déformation correspondante du type II, pour laquelle $g(z_+)$ et $h(z_-)$ représentent les deux fonctions de connexion [1]? Je crois que la réponse doit être affirmative, mais pour le moment, je ne suis en mesure de démontrer qu'un résultat partiel :

Étant donnée une déformation $x' = \varphi_0(x)$ du type II *avec deux fonctions de connexion $g_0(z_+)$ et $h_0(z_-)$, on peut trouver une famille analytique de déformations*

$$x' = \varphi(x, c) = \varphi_0(x) + c\varphi_1(x) + \ldots + c^{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \ldots \tag{28}$$

avec des coefficients $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \ldots$ (n quelconque), telle que les fonctions $g_1(z_+), \ldots, g_{n-1}(z_+)$ et $h_1(z_-), \ldots, h_{n-1}(z_-)$ dans les développements correspondants

$$\begin{cases} g(z_+, c) = g_0(z_+) + cg_1(z_+) + \ldots + c^{n-1}g_{n-1}(z_+) + \ldots, \\ h(z_-, c) = h_0(z_-) + ch_1(z_-) + \ldots + c^{n-1}h_{n-1}(z_-) + \ldots \end{cases} \tag{29}$$

soient arbitraires, à cela près que $g_i(z_+)$ et $h_i(z_-) - z_-$ sont analytiques respectivement en $z_+ = 0$ et $z_- = \infty$ et ne contiennent pas de termes linéaires ou constants.

---

[1] Dans ce qui suit, nous ne considérons que le cas II (convergent ou divergent). L'extension nécessaire aux autres cas est presque immédiate.

Ce résultat me semble rendre extrêmement probable l'existence d'une classe de déformations du type II correspondant à des fonctions arbitraires $g(z_+)$ et $h(z_-)$.

Pour démontrer ce résultat particulier, raisonnons de la manière suivante :

Supposons en premier lieu que nous partions d'une famille (28) quelconque, où seulement $\varphi_0(x)$ soit donnée à l'avance. Nous obtenons ainsi des fonctions

$$\Omega_\pm(x, c) = \Omega_{0\pm}(x) + \Omega_{1\pm}(x)\, c + \ldots,$$

où les coefficients successifs $\Omega_{1\pm}(x)$, $\Omega_{2\pm}(x)$, ... ont des formes asymptotiques

$$\Omega_1(x) = \frac{\Omega_{11}}{x} + \frac{\Omega_{12}}{x^2} + \ldots, \qquad \Omega_2(x) = \frac{\Omega_{21}}{x} + \frac{\Omega_{22}}{x^2} + \ldots,$$

respectivement à droite et à gauche. Posons donc

$$z_\pm = z_\pm(x, c) = e^{2\pi i \Omega_\pm(x,c)} = e^{2\pi i \Omega_{0\pm}(x)}(1 + 2\pi i \Omega_{1\pm}(x)\, c + \ldots).$$

Écrivons la seconde relation de connexion des deux équations (29) ci-dessus sous la même forme que la première. La fonction nouvelle $g(z_+, c)$ ainsi introduite sera donc la fonction inverse de $h(z_-, c)$. Il est à remarquer que les fonctions $g(z_+, c)$ et aussi $g_0(z_+)$, $g_1(z_+)$, ..., sont respectivement définies dans le voisinage de $z_+ = 0$ et $z_+ = \infty$; on peut donc employer ce symbolisme sans ambiguïté.

En différentiant une fois les relations de connexion, on obtient, pour $c = 0$,

$$(29') \qquad \frac{\partial z_-(x, 0)}{\partial c} = \frac{dg_0(z_+)}{dz_+} \frac{\partial z_+(x, 0)}{\partial c} + g_1(z_+),$$

ce qui équivaut à

$$(30) \quad e^{2\pi i \Omega_{0-}(x)}\, \Omega_{1-}(x) = \frac{d, g_0(e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)})}{dz_+} e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)}\, \Omega_{1+}(x) + \frac{1}{2\pi i} g_1(e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)}).$$

Remarquons maintenant que, de la relation $z_{0-} = g_0(z_{0+})$, on obtient, en différentiant par rapport à x

$$e^{2\pi i \Omega_{0-}(x)} \frac{d\Omega_{0-}(x)}{dx} = \frac{d, g_0(e^{2\pi i_{0+}(x)})}{dz_+} e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)} \frac{d\Omega_{0+}(x)}{dx}.$$

En employant cette équation et en écrivant

$$(31) \qquad \Omega_{1\pm}(x) = \frac{d\Omega_{0\pm}(x)}{dx} u_{1\pm}(x)$$

l'équation (29) se réduit à

$$(32) \qquad u_{1-}(x) - u_{1+}(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{g_1(e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)})}{\dfrac{d_1 g_0(e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)})}{dz_+} e^{2\pi i \Omega_{0+}(x)} \dfrac{d\Omega_{0+}(x)}{dx}}.$$

Naturellement, le second membre peut être écrit sous une forme tout à fait analogue, dans laquelle la fonction $\Omega_{0-}(x)$ remplacerait la fonction $\Omega_{0+}(x)$; pour l'obtenir, il suffit d'employer la relation qui lie $\Omega_{0-}(x)$ et $\Omega_{0+}(x)$.

L'équation précédente aura lieu séparément dans les deux directions de l'axe des imaginaires, où $u_{1+}(x)$ et $u_{1-}(x)$ sont définies simultanément.

Cherchons maintenant à suivre la route inverse. Supposons que la fonction $g_1(z_+)$ soit donnée à l'avance. Dans ce cas, la fonction du second membre de l'équation précédente est une fonction connue, qui, pour $\lim \nu = +\infty$, est de l'ordre de $e^{2\pi i x}$, et pour $\lim \nu = -\infty$ de l'ordre de $e^{-2\pi i x}$. Pour $|\nu|$ suffisamment grand, cette fonction est analytique et possède des dérivées qui tendent uniformément vers o pour $\lim \nu = \pm\infty$. On déduit de certains résultats bien connus ([1]) qu'il existe deux fonctions analytiques particulières $\overline{u}_-(x)$ et $\overline{u}_+(x)$ qui satisfont à cette équation, qui sont définies respectivement à gauche et à droite et qui, de plus, ont la même forme asymptotique dans ces deux régions :

$$\overline{u}_-(x) \sim \overline{u}(x), \qquad \overline{u}_+(x) \sim \overline{u}(x), \qquad \overline{u}(x) = u_0 + \frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \ldots.$$

Pour obtenir une formule explicite donnant de telles fonctions $\overline{u}_-(x)$ et $\overline{u}_+(x)$, il suffit de compléter, pour $|\nu| \leqq k$, la définition de l'expression de $g_1(x)$ dans (32), le long de l'axe des imaginaires, d'une manière quelconque, à certaines conditions de continuité près, le long de cet axe. Ce fait nous indique déjà que le choix de $u_-(x)$ et $u_+(x)$ n'est pas unique. Remarquons à cet égard que la solution générale de (32) est donnée par

$$u_+(x) = \overline{u}_+(x) + \alpha(x), \qquad u_-(x) = \overline{u}_-(x) + \alpha(x),$$

([1]) *Voir* mon article de 1915, *On the Riemann Problem for Ordinary Linear Differential Equations and the Allied Problem for Ordinary Linear Difference and q-Difference Equations* (*Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences*, vol. 49, 1913 p. 521-568).

où $\alpha(x)$ est une fonction quelconque, analytique en $x = \infty$. En effet, en écrivant

$$u_+(x) = \overline{u}_+(x) + \alpha_+(x), \qquad u_-(x) = \overline{u}_-(x) + \alpha_-(x),$$

il devient évident que les fonctions $\alpha_+(x)$ et $\alpha_-(x)$ coïncident et se réduisent à une seule fonction analytique $\alpha(x)$, puisque l'on a

$$\alpha_+(x) = \alpha_-(x).$$

Ce fait nous montre que l'on peut choisir d'une manière quelconque les coefficients u_0, u_1, ..., u_k (k arbitraire) dans la série formelle de $\overline{u}(x)$. Nous choisirons $\overline{u}_-(x)$ et $\overline{u}_+(x)$ de façon que $u_0 = u_1 = 0$.

Avec un tel choix de $u_-(x)$ et $u_+(x)$, nous pouvons définir $\overline{\Omega}_{1-}(x)$ et $\overline{\Omega}_{1+}(x)$ en employant deux équations analogues aux équations (31). Ces fonctions auront une forme asymptotique commune

$$\overline{\Omega}_1(x) = \frac{\overline{\Omega}_{11}}{x} + \frac{\overline{\Omega}_{12}}{x^2} + \ldots$$

et satisferont à deux équations analogues à (30).

Souvenons-nous maintenant du fait que les équations

$$\Omega_\pm[\varphi(x, c), c] = \Omega_\pm(x, c) + 1 \tag{33}$$

doivent être vérifiées quel que soit le choix de $\varphi(x, c)$. En différentiant par rapport à c, et en posant $c = 0$, on trouve les équations

$$\frac{d\Omega_{0\pm}[\varphi_0(x)]}{dx} \varphi_1(x) + \Omega_{1\pm}[\varphi_0(x)] = \Omega_{1\pm}(x). \tag{33}$$

Celles-ci nous suggèrent deux autres conditions analogues pour que les deux fonctions $\overline{\Omega}_{1-}(x)$ et $\overline{\Omega}_{1+}(x)$, que nous venons de définir, puissent avoir les propriétés nécessaires. Elles nous suggèrent, de plus, d'étudier les différences $\overline{\Omega}_{1\pm}[\varphi_0(x)] - \overline{\Omega}_{1\pm}(x)$.

L'équation (32) donne

$$\{u_-[(\varphi_0(x)] - u_+[\varphi_0(x)]\} \frac{d\varphi_0}{dx} = u_-(x) - u_+(x),$$

puisque des équations (33) pour $c = 0$, l'on déduit

$$\frac{d\overline{\Omega}_{0\pm}[\varphi(x)]}{dx} \frac{d\varphi_0}{dx} = \frac{d\overline{\Omega}_{\pm 0}(x)}{dx}.$$

Ainsi, nous voyons que les deux membres de l'équation

$$u_-[\varphi(x)]\frac{d\varphi}{dx} - u_-(x) = u_+[\varphi(x)]\frac{d\varphi}{dx} - u_+(x)$$

doivent coïncider et se réduire à une seule fonction $\varphi_1(x)$ analytique à $x = \infty$. Par conséquent, on a

$$(34) \qquad \overline{\Omega}_{1\pm}[\varphi_0(x)] - \overline{\Omega}_{1\pm}(x) = \frac{\partial\Omega_{0\pm}[\varphi_0(x)]}{\partial x}\varphi_1(x),$$

où $\varphi_1(x) = \beta(x)$ est analytique et s'évanouit à $x = \infty$.

Nous sommes maintenant arrivés à une certaine fonction $\varphi_1(x)$ analytique à $x = \infty$. Je dis qu'avec le choix particulier suivant de $\varphi(x, c)$

$$\varphi(x, c) = \varphi_0(x) + c\,\varphi_1(x) + \ldots.$$

les deux fonctions $g_1(z_+)$ et $h_1(z_-)$ sont les fonctions données au début. En effet, soient $g_1(z_+)$ et $h_1(z_-)$ les fonctions de connexion ainsi obtenues, et $\Omega_{1-}(x)$ et $\Omega_{1+}(x)$ les fonctions correspondantes, pour lesquelles on a, d'après les équations (30),

$$(35) \qquad \Omega_{1\pm}[\varphi_0(x)] - \Omega_{1\pm}(x) = -\frac{\partial\Omega_{0\pm}[\varphi(x)]}{\partial x}\varphi_1(x).$$

En soustrayant les deux équations (34) et (35) l'une de l'autre, on voit que

$$\Omega_{1-}[\varphi(x)] - \overline{\Omega}_{1-}[\varphi(x)] - [\Omega_{1-}(x) - \overline{\Omega}_{1-}(x)] = 0.$$

Cette équation montre que la différence

$$\Omega_{1-}(x) - \overline{\Omega}_{1-}(x)$$

reste invariante par rapport à la déformation $x' = \varphi(x)$. En même temps, cette fonction possède une forme asymptotique

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots$$

à droite. Il s'ensuit que la différence se réduit identiquement à 0, ce que nous voulions démontrer.

Nous ne donnerons pas la démonstration pour les termes d'ordre supérieur à un. A vrai dire, pour traiter le cas $k = 2$, on n'a qu'à choisir $\varphi_1(x)$ de la manière indiquée. En différentiant deux fois par rapport à c et en posant $c = 0$, on obtient une équation analogue à (30), qui, moyennant l'introduction des variables $u_{2+}(x)$, $u_{2-}(x)$ définies par

$$\overline{\Omega}_{2\pm}(x) = \frac{\partial \Omega_{0\pm}(x)}{dx} u_{2\pm}(x),$$

se réduit à une équation analogue à (32), ce qui nous permet de déterminer $u_{2\pm}(x)$. En recommençant avec ces fonctions $u_{2\pm}(x)$, on définit la fonction $\varphi_2(x)$ avec les propriétés nécessaires. Exactement la même espèce de raisonnement est valable pour $k = 3, 4, \ldots$.

11. Solution du problème dans un cas divergent particulier. — Du point de vue analytique, le cas divergent le plus simple de tous semble être celui du type II pour lequel

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = z_- + \varkappa \qquad (\varkappa \neq 0).$$

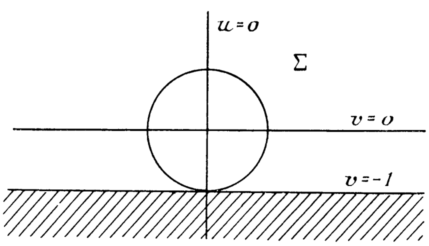
Il est donc très intéressant de pousser l'étude du problème inverse aussi loin que possible dans ce cas particulier. Nous allons voir que l'on peut résoudre explicitement ce problème dans le sens affirmatif. Ce faisant, nous obtiendrons en même temps un cas divergent particulier.

S'il existe une déformation correspondante à ce cas, nous pourrons poser

$$\Omega_+(x) = \Omega_-(x) = \Omega^\star(x)$$

à cause de la forme spéciale de $g(z_+)$. Ici, la fonction $\Omega^\star(x)$ sera analytique dans une région Σ: $|x| \geqq \rho$ du plan des x (*voir* la figure 3) qui couvre deux fois la partie du plan $v \leqq -\rho$.

Fig. 3.



Dans cette région, $\Omega^\star(x)$ sera représentée asymptotiquement partout par $\Omega(x)$. Désignons par $\widetilde{\Omega}^\star(x)$ ce que devient $\Omega^\star(x)$ après que l'on a fait circuler x une fois autour de l'origine, dans le sens positif. A cause de la forme de $h(z_-)$, nous aurons

$$e^{2\pi i \tilde{\Omega}^\star(x)} = e^{2\pi i \dot{\Omega}^\star(x)} + \varkappa. \tag{36}$$

Cette équation nous donne par dérivation

$$e^{2\pi i \tilde{\Omega}^\star(x)} \frac{d\tilde{\Omega}^\star(x)}{dx} = e^{2\pi i \Omega^\star(x)} \frac{d\Omega^\star(x)}{dx}.$$

En prenant les logarithmes des deux membres et en différentiant encore une fois, on voit que la fonction

$$2\pi i \frac{d\Omega^\star}{dx} + \left(\frac{\dfrac{d^2\Omega^\star}{dx^2}}{\dfrac{d\Omega^\star}{dx}} \right)$$

revient à sa valeur initiale quand on fait circuler x autour de l'origine dans le sens positif; mais on voit aussi que cette fonction sera asymptotiquement représentée partout par

$$2\pi i \left(1 - \frac{\Omega_1}{x^2} + \ldots \right).$$

On en conclut que cette série est convergente, et que

$$e^{2\pi i \Omega^\star(x)} \frac{d\Omega^\star(x)}{dx} = e^{2\pi i x} m(x) \qquad \left[m(x) = 1 + \frac{2\pi i \Omega_1}{x} + \ldots \right].$$

En intégrant encore une fois, nous obtenons la forme nécessaire explicite de $\Omega^\star(x)$

$$e^{2\pi i \Omega^\star(x)} = \int_{+i\infty}^{x} e^{2\pi i t} m(t)\, dt, \tag{37}$$

où $m(x)$ est analytique en $x = \infty$ avec $m(\infty) = 1$.

De cette équation, on trouve immédiatement

$$e^{2\pi i \tilde{\Omega}^\star(x)} - e^{2\pi i \Omega^\star(x)} = \int_C e^{2\pi i t} m(t)\, dt,$$

où la courbe d'intégration C simple et fermée contient l'origine.

Donc, l'équation (36) sera valable si l'on a

$$\int_c e^{2\pi i t} m(t)\, dt = \varkappa. \tag{38}$$

On peut satisfaire à cette condition en choisissant $\Omega_1 = -\varkappa/4\pi^2$ dans le développement de $m(x)$.

Je dis maintenant que *quelle que soit la fonction* $m(x)$ *analytique en* $x=\infty$, *telle que* $m(\infty)=1$, *et que* (38) *soit satisfaite, l'équation*

$$\Omega^\star(x') = \Omega^\star(x) + 1, \tag{38'}$$

où $\Omega^\star(x)$ *est défini par l'équation* (37), *donnera une déformation*

$$x' = \varphi(x) = x + 1 + \frac{\Omega_1}{x^2} + \ldots$$

représentant précisément un membre quelconque de la classe générale des déformations ayant comme fonctions de connexion

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = z_- + \varkappa.$$

Pour le démontrer, commençons par remarquer que, ainsi que nous l'avons déjà vu, s'il existe de telles déformations, toutes les déformations de la même classe auront nécessairement la forme précitée. Donc, il suffit de démontrer que la transformation définie par (37) possède les propriétés indiquées.

La forme asymptotique de $\Omega^\star(x)$ et de $\widetilde{\Omega}^\star(x)$ découle immédiatement de l'équation (37) en intégrant successivement par parties. En employant cette forme asymptotique nous pouvons montrer en premier lieu que l'on a

$$\varphi(x) \sim x + 1 + \frac{\Omega_1}{x^2} + \frac{\varphi_3}{x^3} + \ldots$$

dans la région Σ de la figure précédente.

D'autre part, si l'on fait parcourir à x l'origine dans le sens positif, on aura

$$\widetilde{\Omega}^\star(x') = \widetilde{\Omega}^\star(x) + \varkappa$$

c'est-à-dire

$$\Omega^\star(x') = \Omega^\star(x) + \varkappa \tag{39}$$

à cause de la forme de $\widetilde{\Omega}^\star(x)$. Remarquons que x' parcourt aussi l'origine dans le sens positif.

Ainsi, quand x revient à sa valeur primitive, x' revient à la même valeur correspondante. Donc la fonction $\tilde{\varphi}(x)$ sera identique à $\varphi(x)$, et il s'ensuit que $\varphi(x)$ est analytique en $x=\infty$ avec

$$\varphi(x) = x + 1 + \frac{\Omega_1}{x^2} + \frac{\varphi_2}{x^2} + \ldots, \tag{40}$$

Si maintenant nous recommençons le raisonnement avec cette déformation particulière $x' = \varphi(x)$, tout en remarquant que les équations (38) et (39) ont lieu, il est évident que $\Omega_+(x) = \Omega^*(x)$ et $\Omega_-(x) = \Omega^*(x)$, et que les deux fonctions de connexion seront précisément $g(z_+) = z_+$, $h(z_-) = z_- + \varkappa$.

Il y a un certain intérêt à choisir une forme normale en prenant $m(x)$ aussi simple que possible. Le choix particulier

$$m(x) = 1 + \frac{\varkappa}{2\pi i x}$$

nous donne une *variable normale* x de cette classe définie par l'équation suivante

$$e^{2\pi i x'} - e^{2\pi i x} - \frac{\varkappa}{2\pi i} \int_x^{x'} \frac{e^{2\pi i t}}{t}\, dt = 0. \tag{41}$$

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DES FONCTIONS AUTO-ÉQUIVALENTES CORRESPONDANTES.

1. **Le cas des différences** q. — Ayant construit une théorie des déformations de tous les types, autres que celui du cas exceptionnel $|q| = 1$, $q^\nu \neq 1$, nous allons étudier les types correspondants de fonctions auto-équivalentes. Parmi ces types, un des plus simples est le type I pour lequel $|q| \neq 1$. Comme nous l'avons remarqué, nous pouvons supposer toujours que $|q| > 1$, puisque nous pouvons considérer aussi bien la déformation inverse que la déformation donnée.

De plus, puisque la variable normale intervient elle-même dans le cas I, nous pouvons commencer par employer cette variable normale, qui est telle que $x' = qx$. Les fonctions auto-équivalentes invariantes par rapport à $x' = qx$ ne sont alors que les fonctions *q-périodiques* $p(x)$, c'est-à-dire telles que $p(qx) = p(x)$ où $p(x)$ est méromorphe pour $x \neq 0, \infty$. Une telle fonction peut aussi être exprimée comme fonction de $z = x^{\frac{2\pi i}{\log q}}$, qui est uniforme et méromorphe pour $z \neq 0, \infty$, mais autrement quelconque.

Les fonctions auto-équivalentes de ce type satisfont à une équation linéaire aux différences q

$$z(qx) = a(x)y(x). \tag{1}$$

Esquissons la théorie bien connue des solutions analytiques d'une telle équation.

Supposons en premier lieu que $a(x)$ ait la forme particulière

$$a(x) = 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots.$$

Le produit infini

$$a(x)\, a(qx)\, a(q^2 x)\dots$$

convergera uniformément, pour $|x| > L$ suffisamment grand, vers une fonction analytique dont la réciproque est une solution particulière $y_\infty(x)$

analytique en $x = \infty$ avec $y_\infty(x) = 1$. En posant

$$y(x) = y_\infty(x)\, z(x) \tag{2}$$

on trouve que $z(x)$ doit être q-périodique. Inversement si $z(x)$ est une fonction quelconque ayant cette propriété, $y(x)$ sera une fonction auto-équivalente du type I.

Passons maintenant au cas général, que nous pouvons immédiatement réduire au cas déjà traité. En effet, remarquons que les deux fonctions

$$y_1 = q^{\frac{(t^2-t)}{2}}, \qquad y_2 = a^t \qquad \left[t = \frac{\log x}{\log q}\right]$$

satisfont respectivement aux équations

$$y_1(qx) = xy(x), \qquad y_2(qx) = ay(x).$$

Par conséquent, si nous avons

$$a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right)$$

et si nous posons

$$y(x) = y_1^k(x)\, y_2(x)\, \overline{y}(x),$$

la fonction $\overline{y}(x)$ satisfera à une équation

$$\overline{y}(qx) = \overline{a}(x)\, \overline{y}(x),$$

où $\overline{a}(x)$ aura la forme de $a(x)$ dans le cas particulier. D'où la conclusion suivante :

Dans le cas d'une déformation du type I, *que nous pouvons toujours écrire $x' = qx$, $|q| > 1$, la fonction auto-équivalente la plus générale sera simplement une fonction quelconque de la forme*

$$e^{k\frac{(t^2-t)}{2}} a^t \alpha(x)\, p(x) \qquad \left(t = \frac{\log x}{\log q},\ k \text{ entier}\right),$$

où $p(x)$ est méromorphe pour $x \neq 0, \infty$ et telle que $p(qx) = p(x)$ [q-périodique], et $\alpha(x)$ analytique en $x = \infty$ avec $\alpha(\infty) = 1$.

2. Le cas de différences ω. — Il est naturel de considérer, en même temps que le cas I, le cas $V_{n,F}$ où la forme normale est presque la même, à savoir $x' = \omega x$ où $\omega^n = 1$. Ici encore, ainsi que nous l'avons déjà démontré, la variable normale peut être regardée comme la variable effective.

Nous avons donc à considérer une équation

$$y(\omega x) = a(x)\,y(x). \tag{3}$$

Prenons en premier lieu le cas $a(x) = 1$ où cette équation se réduit à l'équation $y(\omega x) = y(x)$. En ce cas, y est évidemment une fonction ω-périodique quelconque.

Pour réduire le cas général à ce cas particulier, il suffit de trouver une solution particulière, puisque la solution générale s'obtient en multipliant la solution particulière par une fonction ω-périodique quelconque. Nous aboutissons ainsi à la conclusion suivante :

Dans le cas d'une déformation du type $V_{n,F}$ *que nous pouvons écrire* $x' = \omega x$ $(\omega^n = 1)$, *la fonction auto-équivalente la plus générale aura la forme*

$$a(x)a(\omega x)\ldots a({}^{n+1}x)^{\frac{\log x}{2\pi i}\frac{1}{n}}a(\omega x)\ldots a^{\frac{n-1}{n}}(\omega^{n-1}x)\,p(x),$$

où $p(x)$ *est une fonction quelconque, méromorphe pour* $x \neq 0, \infty$ *et telle que* $p(\omega x) = p(x)$ [ω-*périodique*].

3. **Le cas des différences ordinaires.** — Passons maintenant au cas II, en supposant que la convergence ait lieu. Dans ce cas, il existe une variable normale telle que $x' = x + 1$, que nous allons employer. Évidemment une fonction invariante quelconque $p(x)$ doit être une fonction méromorphe pour $x \neq \infty$ et de période 1. Elle peut être exprimée sous la forme $f(e^{2\pi i x})$, où $f(z)$ est uniforme et méromorphe pour $z \neq 0, \infty$.

Nous avons donc à considérer l'équation aux différences ordinaires

$$y(x+1) = a(x)\,y(x), \tag{4}$$

où

$$a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right).$$

Dans ce cas la théorie bien connue [1] d'une telle équation (4) nous conduit à deux solutions principales $y_+(x)$ et $y_-(x)$ telles que

$$\begin{aligned} y_+(x) &\sim s(x) \qquad \text{(à droite)},\\ y_-(x) &\sim s(x) \qquad \text{(à gauche)}, \end{aligned}$$

[1] *Voir*, par exemple, l'ouvrage de BATCHELDER déjà cité.

où

$$s(x) = x^{kx}(a_0 e^{-k})^x x^b \left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \ldots\right) \qquad \left(s_0 \neq 0;\ b = \frac{a_1}{a_0} - \frac{k}{2}\right)$$

désigne la solution formelle de (4). La forme asymptotique de $y_+(x)$ et de $y_-(x)$ reste encore valable respectivement à gauche et à droite en v.

De plus, le rapport

$$\frac{y_-(x)}{y_+(x)} = p(x)$$

est évidemment périodique de période 1 et analytique pour $|v|$ suffisamment grand. Il n'y a aucun rapport nécessaire entre la fonction $p(x)$ pour v grand et positif et pour v grand et négatif.

Pour $\lim v = +\infty$, la fonction $p(x)$ tend vers 1; pour $\lim v = -\infty$, la fonction $\frac{p(x)}{e^{2\pi i k x}}$ tend vers $e^{2\pi i b}$; en d'autres termes $p(x)$ est analytique en $t = e^{2\pi i x}$ à $t = 0$ avec la valeur 1 en ce point, tandis que $\frac{p(x)}{e^{2\pi i k x}}$ est analytique pour $t = \infty$ avec la valeur $e^{2\pi i b}$ en ce point. Ces faits sont des conséquences immédiates des formes asymptotiques de $y_+(x)$ et $y_-(x)$; à cet égard il faut seulement remarquer que $s(x)$ devient $e^{2\pi i k x}\, e^{2\pi i b}\, s(x)$ quand on fait circuler x autour de l'origine dans le sens positif.

Selon la théorie générale du problème de Riemann pour les équations linéaires à différences finies, les deux parties de $p(x)$ peuvent être choisies absolument arbitraires, sauf en ce qui concerne les conditions que nous venons d'énoncer (¹).

Remarquons aussi que les deux solutions principales $y_+(x)$ et $y_-(x)$ peuvent s'écrire explicitement sous forme de produits infinis et doivent donc être considérées comme des fonctions connues (¹).

En posant maintenant

$$y(x) = y_+(x)\, z(x),$$

nous trouvons que $z(x)$ est méromorphe pour x fini et périodique de période 1. Ainsi, nous obtenons la solution la plus générale méromorphe à droite.

Supposons maintenant que $y(x)$ soit, de plus, auto-équivalente. En faisant varier x à gauche de l'axe des v et au-dessus de l'axe des u,

(¹) *Voir* l'ouvrage de BATCHELDER, par exemple.

$y(x)$ devient

$$y(x) = \frac{y_-(x)\,z(x)}{p_1(x)},$$

où $p_1(x)$ désigne la fonction $p(x)$ d'au-dessus de l'axe réel. Par conséquent, puisque $y(x)$, $y_-(x)$ et $z(x)$ sont définis partout pour u grand et négatif, on voit que dans le cas d'une fonction auto-équivalente $y(x)$, $p_1(x)$ doit être méromorphe dans la partie finie du plan. Un raisonnement analogue nous montre que la fonction $p(x)$ au-dessous de l'axe réel aura une propriété analogue. Désignons la réciproque de cette fonction par $p_2(x)$.

Si l'on fait circuler x autour de l'origine $y_+(x)$ deviendra successivement à chaque traversée de l'axe des imaginaires

$$\frac{y_-(x)}{p_1(x)}, \quad \frac{y_+(x)}{p_1(x)\,p_2(x)}, \quad \ldots,$$

tandis qu'en sens inverse $y(x)$ deviendra

$$y_-(x)\,p_2(x), \quad y_+(x)\,p_1(x)\,p_2(x), \quad \ldots.$$

Si donc $p_1(x)$ et $p_2(x)$ possèdent ce caractère particulier, $y(x)$ sera vraiment auto-équivalente.

Par conséquent, on peut conclure que :

Pour que l'équation linéaire aux différences finies

$$y(x+1) = a(x)\,y(x), \qquad a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right)$$

corresponde à des fonctions auto-équivalentes, il faut et il suffit que les deux fonctions périodiques fondamentales $p_1(x)$ et $p_2(x)$ associées à cette équation soient méromorphes pour x fini. En ce cas, la solution principale à droite $y_+(x)$ sera auto-équivalente, ainsi que toutes les fonctions que l'on en obtient en multipliant $y_+(x)$ par une fonction quelconque, méromorphe pour x fini et de période 1.

4. Les fonctions invariantes dans le cas des différences formelles. — Le cas II où la variable normale correspond à une série divergente sera appelé le cas de *différences formelles*.

Cherchons à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions invariantes d'une telle déformation $x' = \varphi(x)$

à différences formelles. Supposons, en effet, que $p(x)$ soit une telle fonction dans R, et écrivons

$$p(x) = q_0(z_+) \qquad (z_+ = e^{2\pi i \Omega_+(x)}) \quad (^1),$$

où l'on choisit une branche particulière de $p(x)$ à la droite. Il est clair que $q_0(z_+)$ sera uniforme en z_+ et méromorphe pour z_+ fini, sauf pour $z_+ = 0, \infty$. En passant à gauche, au-dessus de l'axe des x, on obtiendra une détermination correspondante de $p(x)$, et l'on pourra écrire

$$p(x) = r_0(z_-) \qquad (z_- = e^{2\pi i \Omega_-(x)}),$$

où $r_0(z_-)$ est également une fonction uniforme et méromorphe de z_- pour $z_- \neq 0, \infty$. En procédant ainsi à droite et au-dessous de l'axe réel, on obtient

$$\tilde{p}(x) = q_1(z_+).$$

D'autre part, on peut faire circuler la variable x autour de l'origine dans le sens inverse et obtenir ainsi une relation analogue. Évidemment, en continuant, on définit deux suites de fonctions

$$q_n(z_+) \text{ et } r_n(z_+),\ n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

A cause des relations de connexion, nous trouvons

$$\ldots, \quad r_0[g(z_+)] = q_0(z_+), \quad q_1[h(z_-)] = r_0(z_-), \quad r_1[g(z_+)] = q_1(z_+), \quad \ldots.$$

Par conséquent, la suite indéfinie des fonctions

$$\ldots, \quad q_0(z_+), \quad q_0[g^{-1}(z_-)], \quad q_0\{[g(h)]^{-1}(z_+)\}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire la suite

$$(5) \quad q_0\{[g(h)]^{(n)}(z_+)\}, \quad q_0\{g^{-1}[g(h)]^{(n)}(z_-)\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

sera composée des fonctions du même type que $q_0(z)$. Nous sommes donc conduit à la conclusion suivante :

Pour qu'il existe des fonctions auto-équivalentes invariantes, non identiquement constantes lorsqu'on leur fait subir une déformation donnée à différences formelles (*type divergent* II), *il faut et il suffit qu'il existe une fonction* $q_0(z)$, *uniforme et méromorphe pour* $z \neq 0, \infty$ *telle que la suite doublement infinie* (5) *soit composée de fonctions ayant la même propriété.*

(¹) *Voir* la Partie I de ce Mémoire.

Il est à remarquer ici que nous désignons par $g^{-1}(z)$ la branche particulière de $g(z)$ obtenue en partant du point $z=0$ avec $g^{-1}(0)=0$, et par $h^{-1}(z)$ la branche correspondante à $z=\infty$ avec $h^{-1}(\infty)=\infty$.

Nous pouvons également exprimer ces conditions d'une manière un peu différente. En effet, nous voyons que, d'après ces conditions, nous devons avoir symboliquement

$$(6) \qquad h(hg)^{-n} = r_n^{-1}\,q_0, \qquad (hg)^{-n} = q_n^{-1}\,q_0 \qquad (n=0, \pm 1, \ldots).$$

Donc, la condition énoncée équivaut à la condition que chaque fonction symboliquement désignée par

$$(hg)^n \quad \text{et} \quad h(hg)^n \qquad (n \text{ entier})$$

puisse être exprimée sous la forme $\sigma^{-1}q_0$ où q_0 est une fonction particulière, méromorphe partout pour $z \neq 0, \infty$, et où σ est fonction arbitraire du même type qui varie avec n.

Évidemment, à cause de cette condition, g et h s'étendent analytiquement partout. Par conséquent, pour une déformation II à différences formelles, il n'existe pas en général de fonctions invariantes.

Malheureusement, la condition énoncée est une condition théorique qui ne peut être utilisée qu'après la détermination effective des fonctions g et h de connexion. Une fois ces fonctions connues, on peut décider si de telles fonctions invariantes existent ou non. Par exemple, dans le cas déjà discuté où

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = z_- + \varkappa,$$

nous avons

$$(hg)^n = z_+ + n\varkappa.$$

Ici, l'on peut choisir $q_0(z)=z$, et les fonctions correspondantes σ seront toutes de la forme $z+c$ avec un choix convenable de la constante c. On voit, dans ce cas particulier, que la fonction invariante la plus générale n'est qu'une fonction quelconque de z_+, méromorphe pour $z_+ \neq 0, \infty$.

5. Les fonctions auto-équivalentes dans le cas des différences formelles. — Dans ce cas, il existe une équation fonctionnelle

$$y[\varphi(x)] = a(x)\,y(x) \qquad \left[a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right)\right],$$

la déformation $x' = \varphi(x)$ étant du type divergent II.

Si nous introduisons la variable normale formelle $x^\star$, l'équation prendra la forme

$$\bar{y}(x^\star + 1) = \bar{a}(x^\star)\,\bar{y}(x) \qquad \left[\bar{a}(x^\star) = x^{\star k}\left(\bar{a}_0 + \frac{\bar{a}_1}{x^\star} + \ldots\right)\right].$$

Dans ce cas, la série formelle de $\bar{a}(x^\star)$ doit diverger (¹), et cette équation aura une solution formelle essentiellement unique :

$$s^\star(x^\star) = (x^\star)^{kx^\star}(\bar{a}_0 e^{-k})^{x^\star}(x^\star)^r\left[\bar{s}_0 + \frac{\bar{s}_1}{x^\star} + \ldots\right],$$

qu'on écrira sous la forme

$$s(x) = x^{kx^\star}(a_0 e^{-k})^x x^r\left[s_0 + \frac{s_1}{x} + \ldots\right], \tag{7}$$

en revenant à la variable x. Il faut remarquer cependant qu'on ne peut pas remplacer, $x^\star$ dans l'exposant de x, par x lui-même.

Essayons maintenant d'obtenir une solution principale $y_+(x)$ à droite. Pour cela, introduisons la variable effective $\bar{x} = \Omega_+(x)$. Avec cette variable, l'équation donnée prend la forme

$$\bar{y}(\bar{x} + 1) = \bar{a}(\bar{x})\,\bar{y}(x),$$

où l'on a

$$\bar{a}(\bar{x}) \sim \bar{a}_0 + \frac{\bar{a}_1}{x} + \frac{\bar{a}_2}{x^2} + \ldots.$$

La représentation asymptotique indiquée ici est valable à droite par rapport à $\bar{x}$ et à gauche par rapport à la partie imaginaire de $\bar{x}$.

On voit ainsi que, précisément, le même procédé qui nous a donné $y_+(x)$ dans le cas des différences ordinaires, nous donnera ici une solution principale à droite, à savoir $\bar{y}_+(\bar{x}) = y_+(x)$. Cette solution aura la forme asymptotique $r(x)$ qui est valable dans le même sens que dans le cas convergent II.

Par conséquent, l'équation aux différences formelles (cas divergent II)

$$\left\{\begin{aligned} &y[\varphi(x)] = a(x)\,y(x), \qquad \varphi(x) = x + 1 + \frac{\varphi_2}{x^2} + \ldots,\\ &\qquad a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right)\end{aligned}\right. \tag{8}$$

admet une solution formelle S(x) *de la forme particulière* (7).

(¹) Autrement, la déformation satisfait à $\bar{a}(x^\star) = a(x)$ et doit être du type convergent II.

De plus, elle admet deux solutions analytiques principales $y_+(x)$ *et* $y_-(x)$ *telles que l'on ait*

$$y_+(x) \sim S(x), \qquad y_-(x) \sim S(x),$$

où la représentation asymptotique est valable respectivement à droite et à gauche par rapport à x *et par rapport à* v *dans les parties complémentaires du plan. Au-dessus de l'axe des imaginaires, le rapport* $\frac{y_-(x)}{y_+(x)}$ *définit une première fonction invariante fondamentale* $p_1(x)$ *qui n'a d'autres singularités que des pôles pour* v *grand et positif, et qui tend vers* 1 *pour* $\lim v = +\infty$. *D'une manière analogue, au-dessous de l'axe, le rapport* $\frac{y_+(x)}{y_-(x)}$ *définit une seconde fonction invariante fondamentale* $p_2(x)$ *qui n'a d'autres singularités que des pôles pour* v *grand et négatif, et pour laquelle*

$$p_2(x)\, e^{2\pi i k x} e^{2\pi i r}$$

tend vers 1 *pour* $\lim v = -\infty$.

Remarquons en passant que, d'un certain point de vue, on peut regarder les fonctions $y_-(x)$ et $y_+(x)$ comme des fonctions auto-équivalentes dans une région plus restreinte que R, à savoir dans la partie où la représentation asymptotique reste valable.

Pour remplacer la fonction invariante $p_1(x)$ par une fonction périodique ordinaire, écrivons

$$p_1(x) = q_1(z_+) \qquad (z_+ = e^{2\pi i \Omega_+(x)}).$$

Il est évident que $q_1(z_+)$ sera analytique en $z_+ = 0$ et prendra la valeur 1 en ce point. D'une manière analogue, introduisons $q_2(z_-)$ par l'équation

$$p_2(x) = q_2(z_-) \qquad (z_- = e^{2\pi i \Omega_-(x)}).$$

La fonction

$$q_2(z_-)\, z_-^k e^{2\pi i r}$$

sera analytique pour $z_- = \infty$ et y prendra la valeur 1.

Supposons maintenant que nous ayons une fonction auto-équivalente correspondante

$$y(x) = y_+(x)\, q(z_+).$$

où $q(z_+)$ est une fonction uniforme et méromorphe pour $z_+ \neq 0, \infty$. En effet, le rapport $\frac{y(x)}{y_+(x)}$ doit être méromorphe partout dans le plan de x pour u suffisamment grand et positif. Si x varie à gauche au-dessus de l'axe de u, $y(x)$ peut aussi être exprimée sous la forme

$$\frac{y_-(x)}{q_1(z_-)}\, q[g^{-1}(z_-)].$$

Ceci nous montre que $\frac{q[g^{-1}(z_-)]}{q_1(z_-)}$ doit être uniforme et méromorphe en z_- pour $z_- \neq 0, \infty$.

En laissant x revenir à droite par en dessous, $y(x)$ devient

$$\tilde{y}(x) = \frac{y_+(x)}{q_1[h^{-1}(z_+)]\, q_2(z_+)}\, q[g^{-1} h^{-1}(z_+)],$$

où le coefficient de $y_+(x)$ doit être uniforme et méromorphe partout pour $z_+ \neq 0, \infty$.

On peut aller plus loin encore, puisque l'on a

$$\tilde{y}[\varphi(x)] = a(x)\, \tilde{y}(x),$$

ce qui nous montre que $\frac{\tilde{y}(x)}{y(x)}$ sera une fonction invariante partout dans R (pouvant se réduire à une constante). D'autre part, si ce coefficient est invariant de cette façon, une telle fonction $y(x)$ sera évidemment une fonction auto-équivalente. Donc, nous obtenons la conclusion générale suivante :

Pour qu'il existe des fonctions auto-équivalentes correspondant à une équation aux différences formelles donnée (cas divergent II), *il faut et il suffit qu'il existe une fonction $q(z)$ uniforme et méromorphe pour $z \neq 0$, ∞ telle que les deux fonctions*

$$\frac{q[g^{-1}(z_-)]}{q_1(z_-)} \quad \text{et} \quad \frac{q\{g^{-1}[h^{-1}(z_+)]\}}{q_1[h^{-1}(z_+)]\, q_2(z_+)} \tag{9}$$

soient uniformes et méromorphes pour $z_\pm \neq 0$, ∞, la seconde fonction étant aussi invariante dans R. *Ici, g et h désignent les deux fonctions de connexion pour la déformation donnée, et $q_1(z_1)$ et $q_2(z_-)$ les deux fonctions invariantes corresvondant à l'équation donnée* (8).

On voit en particulier qu'il ne peut pas exister des fonctions auto-équivalentes sans qu'il existe de telles fonctions invariantes, sauf dans le cas où $\frac{\bar{y}(x)}{y(x)}$ se réduit à une constante.

7. **Le cas des différences** φ. — Nous allons maintenant considérer le cas convergent III_c, où l'on peut introduire une variable normale x telle que

$$x' - c\log x' = x - c\log x + 1 \tag{10}$$

d'où

$$x' = \varphi(x) = x + 1 + \frac{c}{x^2} - \frac{c(2c-1)}{2x^2} + \ldots. \tag{11}$$

Remarquons le fait important que la fonction invariante la plus générale aura la forme

$$q(e^{2\pi i x} x^{-c})$$

où $q(z)$ est une fonction quelconque uniforme et méromorphe pour $z \neq 0, \infty$.

L'équation fonctionnelle correspondante prendra alors la forme

$$y[\varphi(x)] = a(x)\,y(x), \qquad a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right), \tag{12}$$

où $\varphi(x)$ a la forme explicite (11)

Considérons en premier lieu la question fondamentale de l'existence d'une solution formelle $S(x)$ d'une telle équation. Si $a(x)$ a la forme spéciale

$$a(x) = 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

on peut obtenir sans difficulté une solution formelle

$$\bar{s}(x) = x^\rho\left(\bar{s}_0 + \frac{\bar{s}_1}{x} + \ldots\right) \qquad (\bar{s}_0 \neq 0).$$

En effet, on obtient immédiatement les conditions déterminant ρ, $(\rho = a_1)$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, ..., en substituant la série et en égalant les coefficients des deux membres

$$\bar{s}_0 x^\rho + (\bar{s}_1 + \rho\bar{s}_0)x^{\rho-1} + \ldots = \bar{s}_0 x^\rho + (^-{}_1 + a_1\bar{s}_0)^{\rho-1} + \ldots.$$

Par conséquent, il suffit de trouver des solutions formelles $t_1(x)$ et $t_2(x)$ des équations

$$y[\varphi(x)] = xy(x), \qquad y[(\varphi(x)] = a_0 y(x).$$

En effet, en introduisant une nouvelle variable z,

$$y = t_1^k(x)\, t_2(x)\, z,$$

on voit que z satisfait à une équation de la première forme considérée avec une solution formelle $\bar{s}(x)$ du type indiqué. Ainsi, nous aurons

$$s(x) = t_1(x)\, t_2(x)\, \bar{s}(x).$$

Mais, évidemment, nous pouvons prendre

$$t_2(x) = a_0^{x - c\log x}.$$

Il ne nous reste donc à considérer que l'équation particulière

$$y[\varphi(x)] = xy(x). \tag{13}$$

En différentiant une fois, on déduit de (13)

$$u[\varphi(x)]\,\varphi'(x) = \frac{1}{x} + u(x), \tag{14}$$

où $u(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$, et où l'accent indique la différentiation. Mais, de l'identité qui définit $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) - c\log\varphi(x) = x - c\log x + 1,$$

on obtient, en différentiant

$$\varphi'(x) = \frac{\left(1 - \dfrac{c}{x}\right)}{\left(1 - \dfrac{c}{\varphi(x)}\right)}.$$

Donc, (14) prend la forme

$$v[\varphi(x)] = \frac{1}{x - c} + v(x), \tag{15}$$

où $v(x) = \dfrac{xu(x)}{x-c}$. Or, (15) possède une solution formelle unique de la forme

$$\log x + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots,$$

comme on le vérifie immédiatement. Donc, l'équation (14) en u aura une solution formelle

$$\frac{(x-c)\log x}{x}+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\ldots.$$

En intégrant formellement, nous obtenons

$$\log y = x\log x - x - \frac{c}{2}(\log x)^2 + \alpha_1 \log x + \ldots,$$

d'où

$$y = x^{x-\frac{c}{2}\log x} e^{-x} x^{\alpha}\left[1+\frac{\beta_1}{x}+\ldots\right].$$

De cette manière, nous sommes amenés à une solution formelle de (13)

$$(16) \qquad s(x) = x^{x-\frac{c}{2}\log x}\rho^x x^r\left(s_0+\frac{s_1}{x}+\ldots\right).$$

En partant directement de cette forme de $s(x)$, on peut démontrer que l'équation (13) admet toujours une solution formelle de cette espèce, déterminée à un facteur constant près. Nous omettons la démonstration détaillée de ce fait; soulignons-en cependant la conclusion :

Dans le cas convergent III_c, *l'équation fonctionnelle* (13) *admet toujours une solution formelle* $s(x)$ *du type* (16) *où* x *désigne la variable normale. Cette solution est unique à un facteur constant près.*

Employons maintenant le même procédé qui nous a donné les solutions $y_+(x)$ et $y_-(x)$ dans le cas convergent II (¹), en le modifiant convenablement. En effet, désignons par $s_\mu x$ la somme des μ premiers termes de $s(x)$, et définissons

$$y_+(x) = \lim_{k=\infty} 1/[a(x)\,s(x^{(1)})\ldots a(x^{(k-1)})\,s_\mu(x^{(k)})],$$

où nous avons posé

$$x^{(1)} = \varphi(x), \qquad x^{(2)} = \varphi[\varphi(x)], \qquad \ldots.$$

Ensuite, en répétant presque mot pour mot la démonstration valable dans le cas convergent II, nous parvenons à la conclusion suivante :

(¹) *Voir* l'ouvrage de BATCHELDER déjà cité.

Dans le cas d'une équation (12) *aux différences* φ, *il existe une solution formelle* $s(x)$ *donnée par* (16) *et deux solutions analytiques principales* $y_+(x)$ *et* $y_-(x)$ *telles que les relations asymptotiques*

$$y_+(x) \sim s(x), \qquad y_-(x) \sim s(x)$$

sont valables, dans le même sens que dans le cas convergent II *des différences ordinaires. Ainsi, on définit encore deux fonctions invariantes fondamentales*

$$\frac{y_-(x)}{y_+(x)} = p_1(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{y_+(x)}{y_-(x)} = p_2(x)$$

respectivement dans les directions de l'axe positif et de l'axe négatif des imaginaires, au moins respectivement pour v *grand et positif et pour* v *grand et négatif.*

En posant

$$p_1(x) = q_1(z_+) \qquad (z_+ = e^{2\pi i \Omega_+(x)}),$$
$$p_2(x) = q_2(z_-) \qquad (z_- = e^{2\pi i \Omega_-(x)}),$$

on définit les deux fonctions $q_1(z_+)$ *el* $q_2(z_-)$ *telles que* $q_1(z_+)$ *est analytique en* $z_+ = 0$ *et y prend la valeur* 1, *et que* $q_2(z_-)\, z_-^k e^{2\pi i r}$ *est analytique en* $z_- = \infty$ *et y prend la valeur* 1.

La théorie du problème de Riemann correspondant se généralise immédiatement et nous montre qu'inversement, pour un choix quelconque de $q_1(z_+)$ et $q_2(z_-)$ jouissant de ces propriétés, il existe une classe et une seule d'équations (12).

Nous voyons donc que les conditions d'existence des fonctions auto-équivalentes (invariantes ou non) dans le cas des différences φ *sont précisément analogues à celles que nous avons obtenues dans le cas de différences ordinaires.*

8. **Le cas des différences φ formelles.** — Pour commencer, considérons le problème de l'existence des fonctions invariantes $p(x)$ sur la surface de Riemann R. En introduisant les variables z_+ et z_-, nous sommes conduits aux mêmes équations (6), où g et h désignent encore les deux fonctions de connexion, exprimées respectivement au moyen des variables z_+ et z_-.

Donc, les conditions d'existence des fonctions auto-équivalentes invariantes, énoncées ci-dessus pour le cas des différences formelles, sont encore valables pour le cas des différences φ formelles.

L'emploi d'une variable normale étant impossible, la solution formelle doit être écrite sous la forme

$$s(x) = (x^\star)^{k\left(x^\star - \frac{c}{2}\log x^\star\right)} \rho^x x^r \left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \dots\right), \tag{16'}$$

où $s(x)$ ne représente pas une véritable fonction puisque $x^\star$ est une série divergente. Pour cette raison définissons une fonction $s_\mu(x)$ modifiée, au moyen de l'équation suivante

$$s_\mu(x) = (x_\mu^\star)^{k\left(x_\mu^\star - \frac{c}{2}\log x_\mu^\star\right)} \rho^x x^r \left[s_0 + \frac{s_1}{x} + \dots + \frac{s_\mu}{x^\mu}\right], \tag{17}$$

où $x_\mu^\star$ désigne la somme des $\mu + 2$ premiers termes de la série formelle $x^\star = \Omega(x)$.

Pour traiter les équations fonctionnelles aux différences φ formelles, commençons par introduire la variable $\overline{x} = \Omega_+(x)$ au lieu de x. L'équation prendra la forme

$$\overline{y}[\varphi_c(x)] = \overline{a}(x)\overline{y}(\overline{x}),$$

$\varphi_c(x)$ ayant la forme (11), avec

$$\overline{a}(x) \sim x^k\left(\overline{a}_0 + \frac{\overline{a}_1}{x} + \dots\right),$$

où la représentation asymptotique s'entend par rapport à x à droite et par rapport à la partie imaginaire de $x - c\log x$ à gauche. On voit donc qu'on peut déduire l'existence d'une solution $y_+(x) \sim s(x)$ dans le même sens, en employant exactement le même procédé que celui employé dans le cas convergent III_c. De la même manière, nous obtenons une solution analogue $y_-(x)$.

En posant

$$\frac{y_-(x)}{y_+(x)} = p_1(x) = q_1(z_+), \qquad \frac{y_+(x)}{y_-(x)} = p_2(x) = q_2(z_-)$$

respectivement sur l'axe positif et négatif de v, nous concluons que $q_1(z_+)$ et $q_2(z_-)z_-^k e^{2\pi i r}$ sont des fonctions analytiques aux points $z_+ = 0$ et $z_- = \infty$, où elles prennent la valeur 1.

Avec des définitions analogues, les conditions d'existence des fonctions auto-équivalentes prennent, dans le cas des différences φ *formelles [cas divergent* III_c*], exactement la même forme que dans le cas de différences formelles ordinaires.*

9. **Cas** IV_l. — Dans ce cas nous n'avons qu'à introduire une nouvelle variable $\overline{x} = \dfrac{x^{l+1}}{l+1}$ pour réduire l'équation fonctionnelle à la forme

$$\begin{gathered} y[\overline{\varphi}(x)] = \overline{a}(\overline{x})\, y(\overline{x}), \\ \overline{a}(\overline{x}) = \overline{x}^{\frac{k}{l+1}}\left(a_0 + \frac{a_1}{\overline{x}^{\frac{1}{l+1}}} + \ldots\right), \\ \left[\overline{\varphi}(\overline{x}) = \overline{x} + \varphi_l + \frac{l+2}{2}\,\frac{\varphi_{l+1}}{\overline{x}^{\frac{1}{l+1}}} + \ldots\right]. \end{gathered}$$

La déformation se réduit donc à des cas tout à fait analogues aux cas II ou III_c, ainsi que nous l'avons déjà vu (première partie).

En introduisant la variable $x = \dfrac{x^{l+1}}{l+1}$, *le cas* IV_l *se réduit à des cas analogues aux cas* II *et* III_c *(convergents ou divergents) avec la seule différence que la fonction* $\overline{a}(\overline{x})$ *prend la forme d'une série convergente en* $x^{\frac{1}{l+1}}$. *Par conséquent,* $\overline{a}(\overline{x})$ *ne reprend sa valeur initiale qu'après* $l+1$ *circulations de la variable* x *autour de l'origine. Ainsi, nous obtiendrons non seulement* $2(l+1)$ *fonctions de connexion*

$$g_i,\ h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l+1)$$

comme nous l'avons déjà remarqué, mais aussi $2(l+1)$ *fonctions invariantes fondamentales*

$$q_1(z_{1+}),\quad q_2(z_{1-}),\quad q_3(z_{3+}),\quad \ldots,\quad q_{2l}(z_{l-}),$$

telles que

$$\frac{y_{1-}(x)}{y_{1+}(x)} = q_1(z_+), \qquad \ldots, \qquad \frac{y_{l+}(x)}{y_{l-}(x)} = q_{2l}(z_{l-}).$$

Après ces remarques préliminaires, il n'y a aucune difficulté d'obtenir dans le cas IV_l *des conditions analogues à celles déjà obtenues dans le cas* II *et* III_c *pour l'existence de fonctions auto-équivalentes (invariantes ou non), moyennant les fonctions de connexion et les fonctions invariantes fondamentales.*

10. Cas V_n. — Pour réduire ce cas à ceux déjà traités, rappelons-nous le fait suivant : par une modification de la variable x on peut donner à la déformation la forme « préparée »

$$x' = \omega x\left(1 + \frac{\varphi_n}{x^n} + \frac{\varphi_{2n}}{x^{2n}} + \frac{\varphi_{\lambda n}}{x^{\lambda n}} + \dots\right),$$

où λ est arbitrairement grand. En remplaçant x par $\overline{x} = x^n$, la déformation prend la forme

$$\overline{x}' = \overline{x}\left(1 + \frac{\overline{\varphi}_n}{\overline{x}} + \dots + \frac{\varphi_{\lambda n+1}}{\overline{x}^{\lambda + \frac{1}{n}}} + \dots\right)^n$$

qui est à peu près de l'une des formes II, III_c ou IV_l déjà traitées.

Donc, le cas V_n *peut être regardé comme analogue aux cas* II, III_l, IV_l *déjà traités, mais plus compliqué, puisqu'il existe* $2(n+1)$ *fonctions de connexion dans les cas analogues aux* II *et* III_c, *et* $2l(n+1)$ *fonctions de connexion dans les cas analogues à* IV_l, *avec un nombre égal de fonctions périodiques fondamentales dans chaque cas.*

On voit maintenant pourquoi les deux cas II *et* III_c, *convergents ou divergents, doivent être regardés comme tout à fait typiques, quoique moins compliqués que* IV_l *et* V_n.

11. Sur les familles de fonctions auto-équivalentes invariantes. — Dans ce qui précède, nous avons donné les conditions pour qu'il existe au moins une fonction invariante dans R. Considérons maintenant d'un peu plus près la famille de ces fonctions pour une déformation donnée. Naturellement, cette question n'est intéressante que dans le cas divergent, puisque dans tout cas convergent nous avons déjà vu comment on peut exprimer les fonctions auto-équivalentes invariantes. Il est évident que si $f_1, f_2, \dots, f_k \dots$ sont de telles fonctions, toute fonction rationnelle de $f_1, f_2, \dots, f_k$ ainsi que la limite uniforme (dans toutes les parties finies de R) d'une suite infinie $f_1, f_2, \dots$ nous donnent de telles fonctions. Il en sera de même de toutes les fonctions obtenues en laissant x circuler autour de l'origine une ou plusieurs fois, ou en prenant le rapport des deux dérivées de deux fonctions semblables $\dfrac{f_i'}{f_j'}$.

Comme premier exemple divergent II (section 12, 1^re partie), souvenons-nous du cas où

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = z_- + \varkappa.$$

Ici, la classe des fonctions uniformes et méromorphes pour z_+ fini nous donne les fonctions invariantes les plus générales. Dans ce cas, les fonctions de connexion et leurs inverses sont monogènes.

Considérons un exemple particulier où cela n'est pas vrai, par exemple le cas divergent II où

$$g(z_+) = z_+, \qquad h(z_-) = \sqrt{z_-^2 + 1}.$$

Dans ce cas, il faut choisir la détermination $h(z_-)$ telle que $h(z_-) = z_- + \frac{1}{2 z_-^2} + \ldots$. Pour des raisons que nous avons indiquées antérieurement, il paraît très probable qu'il existe une déformation (d'une classe unique) $x' = \varphi(x)$ qui correspond aux fonctions de connexion $g(z_+)$ et $h(z_-)$. Si l'on introduit les variables $w_\pm = z_\pm^2$, on obtient

$$\omega_- = g_2(\omega_+) = \omega_+ \quad \text{et} \quad \omega_+ = h^2(\omega_-) = \omega_- + 1.$$

Par conséquent, en exprimant une fonction invariante Θ quelconque au moyen des variables $\omega_\pm$, on voit qu'une telle fonction sera donnée par $\Theta(\omega_+)$ où $\Theta(\omega_+)$ est uniforme et méromorphe partout pour $\omega_+ \neq 0, \infty$. Quand l'angle de la variable x augmente de 2π, ω_+ est remplacée par $\omega_+ + 1$, et la fonction invariante $\Theta(\omega_+)$ devient $\Theta(\omega_+ - 1)$ qui doit également être uniforme et méromorphe pour $\omega_+ \neq 0$, ∞. Cela n'est possible que si $\Theta(\omega_+)$ est méromorphe au point $\omega_+ = 0$. De cette manière, on voit que ces fonctions invariantes ont la forme $\Theta(z_+^2)$ où $\Theta(w)$ est méromorphe en w pour $w \neq \infty$.

Remarquons maintenant le fait suivant. Dans le cas convergent II, il n'y a qu'une seule valeur de z_+ qui conduise à des valeurs de x pour lesquelles les valeurs d'une fonction invariante quelconque de la famille sont nécessairement égales. Mais, dans le premier cas divergent cela arrive pour toutes les valeurs de x qui correspondent à une suite infinie $z_+ + n$ (n entier), et dans le deuxième cas, pour toutes les valeurs de x qui correspondent à une suite infinie $\pm z_+ + n$. De plus, dans chacun de ces cas divergents, ce sont précisément les fonctions méromorphes de z_+ ayant ces propriétés qui nous donnent la classe cherchée de fonctions invariantes.

Nous allons voir qu'une situation analogue se retrouve dans le cas général de divergence. Pour ne pas compliquer les raisonnements, nous nous limiterons au cas divergent II, la généralisation aux autres cas étant presque évidente.

Considérons donc une telle déformation du type divergent II et la famille de fonctions invariantes correspondantes, qui renferme toujours au moins les fonctions constantes.

Ces fonctions $p(x)$ auront toutes la forme $q(z_+)$, où cette fonction $q(z_+)$ est uniforme et méromorphe sauf pour $z_+ = 0, \infty$. Supposons donc que $z_- = g^{-1}(z_+)$ ne soit pas une fonction uniforme de z_+. En laissant z_+ parcourir une courbe fermée, z_- ne reviendra pas nécessairement à sa valeur initiale. Donc, les valeurs de la fonction invariante sont égales pour les deux suites des points ainsi obtenues. En effet, on a toujours

$$p(x) = q(z_+) = q[g^{-1}(z_-)].$$

Cela signifie que $p(x)$ doit avoir les mêmes valeurs aux points correspondants du plan des x.

En laissant x varier librement de cette manière, on obtient *l'ensemble total des relations de connexion*

$$\Sigma_x : p(x) = p(x_1) = p(x_2) = \ldots$$

de cette espèce, qui ont lieu pour toute fonction invariante. L'ensemble Σ_x contient toujours, parmi d'autres, les points $\varphi^{(\gamma)}(x)$ ($\gamma = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Dans les plans de $z_\pm$ on obtient des ensembles correspondants $\Sigma_{z\pm}$.

Je crois que, inversement, s'il existe une fonction uniforme non constante $\Theta(z_\pm)$ dont la valeur soit la même en tout point de $\Sigma_{z\pm}$ de $z_\pm$, cette fonction correspondra à une fonction auto-équivalente invariante.

En tout cas, il est évident que pour pousser ces recherches plus loin, il faudra considérer les divisions possibles du plan ou de z_+ ou de z_-, et le groupe automorphe correspondant, défini par l'ensemble des équations

$$\Theta(\bar{z}) = \Theta(z).$$

Il semble très probable aussi que, sauf dans des cas assez rares, tous les couples de points seront connexes l'un à l'autre. En ce cas, il n'existerait pas d'autres fonctions auto-équivalentes invariantes que les constantes. Il serait très intéressant de pousser plus loin l'étude de ces questions.

TROISIÈME PARTIE.

SUR LES GROUPES DE DÉFORMATIONS ET LEURS FONCTIONS INVARIANTES.

---

1. Deux lemmes sur les groupes formels. — Nous dirons qu'un ensemble de déformations formelles constitue *un groupe formel* si l'ensemble contient la déformation inverse de chaque déformation de l'ensemble, ainsi que le produit de deux quelconques de ces déformations. Dans un tel groupe, il existe toujours un sous-groupe de déformations données par des séries convergentes, quoique ce groupe puisse ne contenir que la déformation identique $x' = x$.

Remarquons que si un groupe convergent admet une fonction auto-équivalente $y(x)$ qui n'est pas égale à une fonction *uniforme* méromorphe de x (pour $|x|$ grand) multipliée par une puissance de x, il admettra une telle fonction invariante. En effet, nous concluons immédiatement que, pour toute déformation $x' = \varphi(x)$ du groupe

$$\frac{\tilde{y}[\varphi(x)]}{y[\varphi(x)]} = \frac{\tilde{y}(x)}{y(x)},$$

où $\tilde{y}(x)$ représente la fonction $y(x)$ après que l'on a fait circuler le point x autour de l'origine.

Donc $\frac{\tilde{y}}{y}$ est invariant et s'il n'existe pas une telle fonction (non constante) nous devons conclure que $\widetilde{y} = cy$ et par conséquent que

$$y(x) x^{\frac{-\log c}{\lambda \pi i}}$$

est uniforme aussi bien que auto-équivalente.

Dans ce qui suit, nous considérons avant tout les groupes convergents *réguliers*, c'est-à-dire tels qu'il n'y ait pas de déformations du type V dans le groupe donné et en même temps tels qu'il existe au moins une fonction auto-équivalente invariante qui ne soit pas une constante.

Convenons maintenant de dire qu'un groupe quelconque admet une *déformation quasi-infinitésimale* s'il contient des déformations de la forme

$$x' = (1 + \varepsilon_1)x + \varepsilon_2 + \ldots + \frac{\varphi_k}{x^k} + \frac{\varphi_{k+1}}{x^{k+1}} + \ldots,$$

où ε_1, ε_2, ... sont arbitrairement petits et l'entier k est aussi grand que l'on veut. Notre premier lemme sera le suivant :

Lemme I. — Si deux déformations formelles S et T commutent et ne sont pas du type V, elles seront toutes les deux du même type et pourront s'écrire formellement de la manière suivante :

(I) $\qquad \mathrm{S} : x' = qx, \qquad \mathrm{T} : x' = rx;$

(II) $\qquad \mathrm{S} : x' = x + \alpha, \qquad \mathrm{T} : x' = x + \beta;$

(III_c) $\qquad \mathrm{S} : x' - c\log x' = x - c\log x + \alpha, \qquad \mathrm{T} : x' - c\log x' = x\, c\log x + \beta;$

($\mathrm{IV}_{l,\mathrm{II}}$) $\qquad \mathrm{S} : \dfrac{x'^{l+1}}{l+1} = \dfrac{x^{l+1}}{l+1} + \alpha, \qquad \mathrm{T} : \dfrac{x'^{l+1}}{l+1} = \dfrac{x^{l+1}}{l+1} + \beta;$

($\mathrm{IV}_{l,\mathrm{III}_c}$)
$$\begin{cases} \mathrm{S} : \dfrac{x'^{l+1}}{l+1} - c\log x' = \dfrac{x^{l+1}}{l+1} - c\log x + \alpha, \\ \mathrm{T} : \dfrac{x'^{l+1}}{l+1} - c\log x' = \dfrac{x^{l+1}}{l+1} - c\log x + \beta. \end{cases}$$

Pour le démontrer dans le cas où S est de la forme I, raisonnons de la manière suivante. En utilisant la forme normale de S

$$x^{\star\prime} = qx^{\star},$$

S^m prend la forme

$$x^{\star(m)} = q^m x^{\star}.$$

Donc, avec la variable donnée x, on aura pour tout m

$$\mathrm{S}^m : x^{(m)} = q^m x + \mathrm{P}_0(q^m) + \frac{\mathrm{P}_1(q^m)}{x} + \ldots,$$

où $\mathrm{P}_k(q^m)$ est un polynome en q^m de degré $k + 1$ au plus. D'une manière analogue, si T est du type II, par exemple, on obtiendra

$$\mathrm{T}^n : x^{(n)} = x + n + \frac{\mathrm{Q}_1(n)}{x} + \frac{\mathrm{Q}_2(n)}{x^2},$$

où $\mathrm{Q}_k(n)$ est un polynome de degré k au plus en n. Donc, la relation

$$\mathrm{S}^m\mathrm{T}^n = \mathrm{T}^m\mathrm{S}^n$$

donnera lieu à une série d'identités entre certains polynomes en q^m

et n, *qui devraient avoir lieu pour m et n quelconques*. Ainsi les déformations infinitésimales

$$S^{\varepsilon} : x' = x + \varepsilon\, U(x),$$
$$T^{\eta} : x' = x + \eta V(x)$$

(ε, η petits, et U et V des séries en x, $1.\, x^{-1}$, ...) doivent être commutatives, ce qui exige que

$$UV' = VU',$$

c'est-à-dire que $U = \varkappa V$. Or, cela est évidemment impossible puisque

$$U = x \log q + \ldots, \qquad V = 1 + \ldots.$$

En poussant plus loin cette manière de raisonner, on conclut non seulement que S et T sont du même type, mais encore qu'ils appartiennent au même groupe, puisqu'on a toujours une équation analogue à $U = \varkappa V$. Cela nous conduit immédiatement à notre premier lemme.

Passons maintenant au deuxième lemme :

Lemme II. — Tout groupe formel infini qui n'admet pas des déformations quasi-infinitésimales doit être un ensemble de déformations S, T, commutables et d'un des types indiqués dans notre premier lemme.

Pour en achever la démonstration, employons encore les déformations infinitésimales du groupe. Soit $p_1(x)$, $p_2(x)$,... des séries en x, 1, x^{-1},... telles que

$$x' = x + \varepsilon_i p_i(x)$$

soit une déformation infinitésimale du groupe. Nous avons donc un ensemble linéaire de ces séries puisque

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 + \ldots$$

donne lieu aussi à une des déformations infinitésimales. De plus, en formant $STS^{-1}T^{-1}$ on aboutit au fait bien connu que toute combinaison $p_1 p'_2 - p_2 p'_1$ est aussi un membre de l'ensemble linéaire.

Appelons *rang* d'un tel p, l'exposant le plus grand de x que l'on trouve dans p. Ainsi, α étant le rang du p, nous aurons

$$p = p_\alpha x^\alpha + p_{\alpha+1} x^{\alpha-1} + \ldots \qquad (p_\alpha \neq 0,\ \alpha \leqq 1).$$

Par conséquent,

$$p_1 p'_2 - p_2 p'_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} x^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} + \ldots$$

donc le rang est plus petit que p_1 ou p_2, sauf dans le cas $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1 = 1$ ou $\alpha_2 = 1$. Demandons donc quel est le rang minimum dans le groupe. Nous pouvons supposer que ce rang minimum existe, parce que dans le cas contraire il existerait des déformations quasi infinitésimales.

Il est évident que ce rang minimum α est plus petit que 1. Il ne peut exister qu'un seul p (à un facteur constant près) de ce rang minimum, puisque en combinant linéairement deux du même rang on obtient toujours un autre d'un rang inférieur. Mais si $\overline{p}$ est une autre déformation infinitésimale quelconque, la déformation

$$p^\star = \overline{p}p' - p\overline{p}' \qquad (1 \geqq \overline{\alpha} > \alpha)$$

ne peut s'évanouir identiquement que si les deux déformations finies sont commutatives. Si cela arrive pour tout $\overline{p}$, le groupe sera commutatif, et le lemme sera vrai. Donc, nous pouvons supposer que $p^\star \neq 0$. Mais le rang de $p^\star$ est α au plus, puisque $\overline{\alpha} \leqq 1$. Nous concluons donc que $\overline{\alpha}$ doit être 1, pour toute déformation infinitésimale $\overline{p}$ qui ne dépend pas linéairement de p. Donc le groupe ne contient qu'un seul p de rang minimum α et un seul $\overline{p}$ de rang 1, et cela est vrai quel que soit le choix de la variable x. En prenant une variable normale nous aurons

$$\overline{p} = x \log q \qquad (\log q \neq 0),$$
$$p^\star \equiv x(\log q)\,p' - p \log q = cp,$$

ce qui nous donnerait

$$c = -\log q, \qquad p = d.$$

Donc, le groupe doit contenir

$$\mathrm{S} : x' = qx \qquad (q^\nu \neq 1,\ \nu = 3, 2, \ldots); \qquad \mathrm{T} : x' = x + \alpha \qquad (\alpha \pm 0).$$

Mais, en ce cas, si $|q| = 1$, S^n donnerait lieu à des déformations quasi infinitésimales pour n grand; et si $|q| \neq 1$, il en serait de même des $\mathrm{S}^n\mathrm{S}\mathrm{T}^{-n}$.

Cela complète la démonstration du lemme II.

2. Sur les types de groupes réguliers et leurs fonctions invariantes. — Cherchons maintenant à déterminer en premier lieu tous les groupes réguliers G et leurs fonctions auto-équivalentes invariantes.

Si le groupe G contient une déformation du type II, nous pourrons écrire

$$y(x) = q(z_+) \qquad (z_+ = e^{2\pi i \Omega_+(x)}),$$

où la fonction invariante du groupe $q(z_+)$ est uniforme et méromorphe pour $z_+ \neq 0, \infty$. Si G admet une déformation quasi infinitésimale, cela exige que l'on ait $\omega(z_+ + \varepsilon) = \omega(z_+)$ pour ε petit quel que soit z_+, ce qui est impossible. Donc, le groupe G ne contient que des déformations commutant avec la déformation donnée du type II, et l'on peut écrire, en utilisant la variable normale,

$$x' = x + \alpha, \qquad x' = x + \beta, \qquad x' = x + \gamma, \qquad \ldots.$$

Ainsi qu'il est bien connu, cela donnera lieu à des déformations de la forme

$$(1) \qquad x' = x + \varepsilon,$$

ε petit, sauf dans deux cas, à savoir, si

1° il n'y a qu'une seule constante α;

2° il n'y a que deux constantes α et β où $\frac{\alpha}{\beta}$ n'est pas réel.

Mais d'une telle déformation (1) nous déduirions encore

$$q(z_+ + \bar{\varepsilon}) = q(z_+)$$

pour $\bar{\varepsilon}$ petit, ce qui n'est pas possible.

Le cas 1° a déjà été considéré : c'est celui d'une seule déformation II et de ses puissances; dans ce cas, nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions auto-équivalentes invariantes. Il ne reste donc à considérer que le cas 2°.

Dans ce cas, la fonction invariante peut s'exprimer également sous la forme $\Theta_+(x_+)$ où Θ est uniforme et méromorphe pour x_+ fini, et de période 1, si l'on prend $\alpha = 1$, x_+ appartenant à la déformation $x' = \varphi(x)$.

Mais, en laissant x tendre indéfiniment vers la droite, la déformation $x' = \varphi(x)$ qui commute avec la déformation $x' = \varphi(x)$ prend la forme limite $x' = x + \beta$. Donc, $\Theta_+(x_+)$ sera doublement périodique et sans autres singularités que des pôles pour x_+ fini. De la même manière, cette fonction invariante s'écrira $\Theta_-(x_-)$, et il saute aux yeux qu'il existe une correspondance analytique et biunivoque entre x_+ et x_-, en vertu de l'équation

$$\Theta_-(x_-) = \Theta_+(x_+).$$

Donc, on doit avoir

$$x_- = x_+ + k,$$

et en même temps lim $x_- - y_+ = 0$ pour lim $v = \infty$.

Par conséquent, x_- et x_+ coïncident. Ce raisonnement est valable aussi bien au-dessus de l'axe réel qu'en dessous. Donc $g(z_+) = z_+$ et $h(z_-) = z_-$. Nous devons avoir le cas convergent et il existe une variable telle que les deux déformations s'écrivent

$$x' = x + 1, \qquad x' = x + \beta \quad (\beta, \text{ non réel}).$$

Il s'ensuit que $\Theta = \Theta_- = \Theta_+$ est une fonction doublement périodique ordinaire.

Il n'y a aucune difficulté pour modifier le raisonnement dans les autres cas, comme par exemple lorsqu'il existe une déformation du type I, mais non du type II. Nous obtenons ainsi le résultat général suivant :

Soit G *un groupe régulier quelconque; ou bien* G *ne contiendra qu'une seule déformation d'un des types* I_q, II, III (*type* G_1) *et les fonctions auto-équivalentes invariantes auront les formes déjà discutées, sauf dans le cas exceptionnel* I_q *avec*

$$|q| = 1, \qquad q^\nu \neq 1 \qquad (\nu = \pm 1, \pm 2 \ldots);$$

ou bien G *se réduira à l'un des cinq cas suivants* (*type* G_2)

(I) $$x' = e^\alpha x, \qquad x' = e^\beta x,$$

(II) $$x' = x + \alpha \text{ (ou } \beta),$$

(III_c) $$x' - c\log x' = x - c\log x + \alpha \text{ (ou } \beta),$$

($IV_{l,II}$) $$\frac{x'^{(l+1)}}{l+1} = \frac{x^{l+1}}{l+1} + \alpha \text{ (ou } \beta),$$

(IV_{l,III_c}) $$\frac{x'^{(l+1)}}{l+1} - c\log x' = \frac{x^{l+1}}{l+1} - c\log x + \alpha \text{ (ou } \beta),$$

où $\frac{\alpha}{\beta}$ *n'est pas réel. Avec cette variable normale* x, *la fonction auto-équivalente invariante la plus générale aura respectivement les formes*

$$q(\log x), \quad q(x), \quad q(x - c\log x), \quad q\left(\frac{x^{l+1}}{l+1}\right), \quad q\left(\frac{x^{l+1}}{l+1} - c\log x\right),$$

où q *est une fonction doublement périodique, de périodes* α *et* β, *méromorphe dans le plan fini.*

3. Sur les groupes irréguliers et leurs fonctions invariantes. — Étudions maintenant les types de groupes irréguliers G qui admettent une fonction auto-équivalente invariante (non constante). Un tel groupe (qui ne contient pas de déformations quasi infinitésimales) a toujours un sous-groupe régulier, sauf dans le cas où la seule déformation $x' = \varphi(x)$ avec $q = 1$ est l'identité. Toute déformation $\mathrm{ST\,S^{-1}T^{-1}}$ est de cette forme.

Donc, dans ce cas exceptionnel, toutes les déformations du groupe G autres que l'identité sont commutatives et du type V. Mais en analysant la partie linéaire du groupe, on s'aperçoit qu'elle doit aussi être commutative. On en conclut que seules existent les déformations de la forme

$$x' = \omega^{\alpha} x + \ldots, \qquad \omega^{n} = 1,$$

dont toutes les $n^{\text{ièmes}}$ puissances se réduisent à l'identité. On voit donc que le seul cas exceptionnel est le cas $\mathrm{V}_{n,\mathrm{F}}$ déjà traité, qui présente d'ailleurs peu d'intérêt.

Un raisonnement analogue, ayant comme point de départ la partie régulière du groupe G, nous montre qu'il n'existe que deux types irréguliers, à savoir : (1) celui qui par un choix convenable de la variable normale (convergente ou non) donne une des 7 divisions régulières du plan, dont le groupe est linéaire et n'admet comme déformations $q = 1$ de période infinie que $x' = x + \alpha$ et ses puissances; et (2) celui qui, par un choix convenable d'une variable normale convergente, donne une des 17 autres divisions régulières du plan, dont le groupe est linéaire et n'admet comme déformations $q = 1$ de période infinie que

$$x' = x + \alpha \quad \text{et} \quad x' = x + \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \neq \text{réel}\right)$$

ainsi que leurs combinaisons.

Donc, essentiellement, le cas d'un groupe irrégulier quelconque admettant une fonction auto-équivalente invariante se réduit, soit au cas $\mathrm{V}_{n,\mathrm{F}}$ discuté au commencement, soit au cas d'un groupe régulier que nous venons de traiter. Dans ce dernier cas, on n'a que les fonctions invariantes par une seule déformation, déjà considérées dans la Deuxième Partie, et les fonctions doublement périodiques par rapport à une variable convenable, que nous avons étudiées dans le paragraphe précédent.

4. Sur les fonctions auto-équivalentes. — Divisons les cas possibles (¹) en trois catégories :

I. Le groupe G est essentiellement du type G_1.
II. Le groupe G est essentiellement du type G_2.
III. Le groupe G contient des déformations quasi infinitésimales.

Cas I. — Le cas I a été déjà discuté dans la Première Partie de ce Mémoire.

Cas II. — Si G_2 est régulier, il existe toujours des variables normales effectives. Prenons le cas typique où l'on a

$$x' = x + \alpha, \qquad x' = x + \beta \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta} \neq \text{réelle}\right).$$

Une fonction auto-équivalente $y(x)$ satisfera donc à deux équations à différences finies

$$y(x+\alpha) = a(x)\,y(x), \qquad a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right),$$
$$y(x+\beta) = b(x)\,y(x), \qquad b(x) = x^l\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots\right)$$

qui doivent remplir la condition de compatibilité

$$a(x+\beta)\,b(x) = b(x+\alpha)\,a(x).$$

En ce cas, on peut montrer que les solutions formelles des deux équations doivent coïncider, ce qui exige que $k\beta = l\alpha$ et donc $k = l = 0$. La série $s(x)$ aura donc la forme

$$s(x) = \rho^x x^r\left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \ldots\right).$$

Désignons par $y_{\pm\alpha}(x)$ et $y_{\pm\beta}(x)$ les deux solutions principales de ces deux équations aux différences finies. Alors le rapport $\dfrac{y_{+\alpha}(x)}{y_{+\beta}(x)}$ tendra vers *un* quand les parties réelles de $\dfrac{x}{\alpha}$ et de $\dfrac{x}{\beta}$ croissent ensemble (*voir* la région 1 de la figure 4).

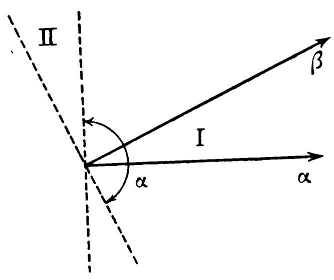
Pour une solution auto-équivalente $y(x)$ commune, nous aurons

$$y(x) = y_{+\alpha}(x)\,p_\alpha(x) = y_{+\beta}(x)\,p_\beta(x),$$

(¹) Nous omettons le cas V_n.F.

où $p_\alpha(x)$ et $p_\beta(x)$ sont méromorphes pour x fini et ont comme périodes respectives α et β. Donc, $\frac{p_\alpha(x)}{p_\beta(x)}$ tendra uniformément vers 1 tout comme $\frac{p_\alpha(x+\beta)}{p_\alpha(x)}$, ce qui montre que $p_\alpha(x)$ a une période β en dehors de α. Par conséquent, $p_\alpha(x)$ et $p_\beta(x)$ sont doublement périodiques et doivent se fondre en une seule fonction $p(x)$. Donc, $y_{+\alpha}(x)$ et $y_{+\beta}(x)$ coïncident aussi.

Fig. 4.



Nous avons démontré ainsi que $y_{+\alpha}(x) = y_{+\beta}(x)$. De la même manière, nous démontrons que $y_{+\beta}(x) = y_{-\alpha}(x)$ (*voir* la région II de la même figure). En continuant nous obtenons

$$y_{+\alpha}(x) = y_{+\beta}(x) = y_{-\alpha}(x) = y_{-\beta}(x) = e^{2\pi i r} y_{+\alpha}$$

successivement, quand x circule autour de l'origine; donc la série $s(x)$ doit converger.

Une méthode presque identique reste valable dans tous les cas d'un groupe régulier ou même irrégulier G_2. En effet, on peut toujours employer les variables normales, pour démontrer l'existence de la forme spéciale de $s(x)$.

Dans le cas II *d'un groupe* G *qui contient un groupe du type* G_2, *les seules fonctions auto-équivalentes sont celles données par une série formelle convergente des types respectivement admis, multipliée par une fonction auto-équivalente invariante d'un des types doublement périodiques indiqués plus haut, s'il en existe.*

Cas III. — Supposons maintenant qu'une fonction auto-équivalente $y(x)$ existe dans le cas III et que ce cas soit différent du cas banal où $y(x)$ est équivalente à x^k. Puisque $\frac{\bar{y}(x)}{y(x)}$ est toujours une fonction auto-équivalente invariante, elle doit se réduire à une constante, sinon le groupe aura un sous-groupe G_2. En posant

$$\bar{y} = \frac{y(x)}{x^{\varkappa}}, \qquad c = e^{2\pi i \varkappa}$$

on voit que $\bar{y}$ sera une fonction auto-équivalente uniforme et méromorphe pour $|x|$ grand et possédant un point singulier essentiel à $x = \infty$.

Par conséquent, dans le cas III, nous pouvons supposer que la fonction auto-équivalente $y(x)$ est uniforme.

Admettons maintenant que le groupe G contienne une déformation du type II, par exemple, $x' = x + 1 + \ldots$. Supposons, de plus, que G contienne des déformations quasi infinitésimales. On a donc

$$y[\varphi(x)] = a(x)y(x) \qquad a(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right),$$

et l'on peut écrire

$$y(x) = y_+(x)\,p(x),$$

et

$$y(x) \sim s(x) = x^k \rho^x x^r\left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \ldots\right),$$

où $p(x_+)$ est uniforme et méromorphe pour x fini et de période 1. Si l'on a une déformation infinitésimale du groupe de la forme $\bar{x} = \bar{\varphi}(x)$, on devra avoir

$$\frac{y(\bar{x})}{y(x)} = \frac{y_+(\bar{x})}{y_+(x)}\,\frac{p(\bar{x}_+)}{p(x_+)} = b(x); \qquad b(x) = x^\rho\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots\right).$$

Ceci nous donne, pour (x) grand,

$$1 + \left(\frac{s'(x)}{s(x)} + \frac{p'(x_+)}{p(x_+)}\right)(\bar{x}_+ - x_+) \sim b(x);$$

la signification de cette équation approximative est évidente [1].

Or,

$$\frac{s'(x)}{s(x)} \sim k(\log x + 1) + \log\rho + \ldots.$$

---

[1] Remarquons, en particulier, que $\dfrac{(\bar{x} - x)}{(\bar{x}_+ - \bar{x}_+)} \sim 1$.

On voit donc que $b(x) = 1 + \ldots$, $k = 0$, et que la fonction $\frac{p'(x_+)}{p(x_+)}$ doit être constante puisqu'elle est périodique de période 1. Par conséquent,

$$p(x_+) = e^{2k\pi i x_+},$$

et nous pouvons écrire

$$y(x) = y_+(x),$$

en changeant l'exposant ρ dans $s(x)$. De la même manière, on démontre que $y(x) = y_-(x)$. Ainsi, on trouve que $y(x) \sim s(x)$ partout, donc que

$$y(x) = \rho^x x^r \left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \ldots\right).$$

Dans le cas irrégulier III *où* G *contient une déformation du type* II', *y doit être équivalente à* $\rho^x x^r$.

En considérant de la même manière tous les autres cas, on trouve toujours qu'une certaine fonction invariante doit se réduire à une constante, $\frac{s'(x)}{s(x)}$ étant une série de la forme

$$t_{-k} x^k + t_{-k+1} x^{k-1} + \ldots.$$

Il s'ensuit que $\log y$ doit être représentée asymptotiquement partout par une série convergente

$$t_{-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + t_{-k+1} \frac{x^k}{k} + \ldots.$$

Par conséquent, nous aurons toujours

$$(2) \qquad y' = c(x) y, \qquad c(x) = x^m \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots\right).$$

Donc nous pouvons dire :

Dans le cas III, *où il existe des déformations quasi infinitésimales, toute fonction auto-équivalente sera équivalente à une fonction*

$$e^{p(x)} x^{\varkappa},$$

où $p(x)$ *est un polynome en* x *de degré* λ. En d'autres termes, dans ce cas, *les fonctions auto-équivalentes sont alors précisément celles qui satisfont à une équation*

$$y' = a(x) y,$$

où $a(x)$ *est méromorphe pour* $x = \infty$.

Si G ne contient pas des déformations quasi infinitésimales, nous aurons formellement ou bien un groupe fini, ou bien un groupe infini parmi les sept types G_1 ou les 17 types G_2'. Ces cas ont déjà été discutés.

Remarquons en conclusion que, dans le cas III, *le groupe* G *des fonctions auto-équivalentes admet toujours un sous-groupe continu*

$$x' = x + \frac{\varphi_{\lambda-1}}{x^{\lambda-1}} + \frac{\varphi_\lambda}{x^\lambda} + \ldots$$

où $\varphi_{\lambda-1}, \varphi_\lambda, \ldots$ *sont arbitraires.*

Remarquons en même temps que cette conclusion subsiste aussi pour les matrices auto-équivalentes $Y(x)$ *d'ordre* n, *qui admettent un groupe du type* III, *c'est-à-dire que*

$$Y'(x) = A(x)\,Y(x),$$

où les éléments de $A(x)$ *sont méromorphes à* $x = \infty$. *De plus,* G *sera nécessairement d'un type continu* (¹).

Je ne doute pas que tous les résultats obtenus ci-dessus n'admettent des généralisations satisfaisantes dans le cas $n > 1$. Ainsi que nous l'avons déjà dit, M. Hestenes poursuit précisément l'étude de ces généralisations pour les équations aux différences φ, $Y[\varphi_c(x)] = A(x)Y(x)$.

(¹) *Voir* mon article *A Theorem Concerning the Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations* (*Proc. Nat. Acad. Sciences*, vol. 1, 1915, p. 578-581).

FIN DU VOLUME IX.