ANNALES DE L'I. H. P.

MARCEL BRILLOUIN

Qu'apprend-on de l'intérieur du Globe par les mesures faites à sa surface ? Pesanteur. Magnétisme

Annales de l'I. H. P., tome 8, nº 4 (1938), p. 151-192
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1938__8_4_151_0>

© Gauthier-Villars, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Qu'apprend-on de l'intérieur du Globe par les mesures faites à sa surface? Pesanteur. Magnétisme

par

Marcel BRILLOUIN.

CHAPITRE I.

CHAMP EXTÉRIEUR ET PROPRIÉTÉS INTERNES.

1. La distribution de plusieurs propriétés importantes de l'intérieur des corps solides échappe à nos mesures directes; quelquefois on a de bonnes raisons d'admettre que cette distribution est très peu modifiée par le morcellement du corps — la densité, par exemple — et l'on peut alors la connaître, mais au prix de la destruction du corps étudié, ce qui n'est pas toujours possible; un tel procédé est évidemment illusoire s'il s'agit de l'ensemble du globe terrestre, ou même d'une très petite fraction de celui-ci, telle que celles qui intéressent la prospection de minerais divers.

Presque toujours la difficulté est pire, par exemple dans la recherche de la distribution du magnétisme dans nos aimants artificiels de laboratoire. Si l'on fractionne un aimant, même sans employer aucun outil d'acier, et si l'on remet les morceaux côte à côte, on est sûr de ne pas reconstituer l'aimant primitif; il faudrait pouvoir étudier l'aimant complet. La difficulté de principe n'est pas moindre pour les propriétés magnétiques du globe terrestre, pris dans son ensemble. Mêmes remarques pour les propriétés électriques, la conductibilité électrique, la conductibilité thermique, etc.

On est donc réduit à faire des observations extérieures, et à chercher quels renseignements, à coup sûr incomplets, on en peut tirer, d'abord sans y ajouter aucune hypothèse suggérée par d'autres études, principalement géologiques, ensuite en utilisant les moins aventureuses de ces hypothèses. C'est à la discussion de ces questions, que j'ai déjà abordées il y a 11 ou 12 ans ([1]), que vont être consacrées les quatre conférences de ce printemps.

2. Lorsque des masses newtoniennes sont toutes contenues à l'intérieur d'une surface fermée, on sait depuis longtemps que le champ de gravitation extérieur est entièrement déterminé si l'on connaît sur toute la surface, soit le potentiel, soit la composante normale de la force.

Cela implique que le même champ extérieur peut être obtenu par une infinité de distributions internes de la même masse totale.

Le champ de gravitation extérieur, seul accessible aux mesures, ne détermine que quelques caractères de la distribution des masses internes, mais laisse subsister une indétermination pour ainsi dire infinie.

C'est une propriété que les géodésiens, et surtout leurs lecteurs géologues, laissent un peu trop dans l'ombre, dans toutes les études modernes sur l'*isostasie*. Il en est de même des prospecteurs de mines qui utilisent les admirables appareils d'Eötvös.

En géodésie, l'intensité de la pesanteur correspond à la dérivée normale du potentiel, les déviations de la verticale équivalent à la connaissance du potentiel, sur l'ellipsoïde conventionnel de référence (partout très voisin de la surface de niveau réelle). Les dérivées secondes du potentiel, fournies par les appareils d'Eötvös et la balance de Jolly, précieuses pour les études de détail, ne sont toujours que des grandeurs caractéristiques du champ extérieur de gravitation. Seules, ou combinées aux mesures géodésiques habituelles, elles ne font toujours connaître que le champ extérieur, et fournissent seulement des équations de contrôle, quand les mesures sont surabondantes pour déterminer ce champ.

Il me paraît donc utile d'insister sur cette propriété, et de montrer, en formules précises, quels renseignements les géodésiens peuvent fournir aux géologues sur l'intérieur du globe, et quel énorme degré d'indétermination subsiste inévitablement lorsqu'on ne fait appel qu'aux mesures géodésiques.

Pour lever, au moins partiellement, cette indétermination, on ne peut

---

([1]) *C. R. Ac. Sc.*, t. 180, 1925, p. 987; t. 184, 1927, p. 1381; t. 184, 1927, p. 1609.

faire usage que de considérations en grande partie hypothétiques, soit d'ordre hydrodynamique, ou élastique, ou géologique. Il importe, à mon avis, que, au lieu de tout mêler, comme on fait dans les études d'isostasie, on sépare nettement les données précises fournies par la géodésie, des hypothèses arbitraires, non contrôlables, sur la constitution interne du globe.

3. Montrons d'abord avec évidence cette indétermination des densités internes.

On sait que le champ extérieur d'une couche sphérique uniforme est le même que si toute la masse était concentrée en son centre. Il en est de même d'une sphère pleine, dans laquelle la densité ne dépend que de la distance au centre. Si la masse totale de cette sphère est nulle, son champ extérieur est nul.

Cela rappelé, imaginons à l'intérieur d'une surface de forme quelconque, une distribution de densités quelconque. Nous pouvons, sans rien changer au champ extérieur, modifier prodigieusement la distribution des densités de la manière suivante :

Plaçons au hasard à l'intérieur de la surface un nombre quelconque de petites sphères isotropes de rayon fini, de manière qu'aucune d'elles ne déborde hors de la surface, et chacune de masse totale nulle, sous la seule réserve que les densités négatives dans ces sphères ne soient pas trop grandes.

L'addition de toutes ces sphères ne change *rien* au champ extérieur à la surface. Mais, par cette addition, la densité en chaque point, somme de la densité initiale et des densités apportées par les sphères additionnelles au même point, peut être prodigieusement changée, sans cesser d'être positive (condition nécessaire en gravitation).

Déplaçons ces sphères, ajoutons-en d'autres, aucune mesure géodésique extérieure (triangulation, pesanteur, courbures) ne permettra de s'en apercevoir, tant que les modifications sont intérieures à la surface accessible aux mesures.

Étant donnée une surface de forme quelconque, supposons, pour abréger, que l'on connaisse les valeurs *compatibles* que prennent à sa surface le potentiel V_S et sa dérivée normale extérieure $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_S$. On peut, soit les avoir observées toutes deux, soit avoir déterminé V_S et en tirer $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_S$ en s'aidant de la fonction de Green pour cette surface, soit avoir déterminé $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_S$ et en tirer V_S à l'aide de la fonction de Green-Neumann.

Lorsqu'on connaît ces deux grandeurs, qu'en peut-on déduire pour l'intérieur? Tout ce que nous apprennent les lois de Newton, c'est que V est une fonction telle que V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ soient continus à travers la surface; le densité ρ sera donnée par l'équation de Poisson

$$\rho = -\frac{1}{4\pi G}\Delta V, \tag{1}$$

en appelant G la constante de la gravitation universelle : $6{,}7.10^{-8}$ C.G.S.

Remarque préliminaire. — Les mesures faites directement sur le terrain ne fournissent presque jamais la valeur *exacte* de la grandeur principale qui figure dans les formules théoriques; par exemple, la mesure de g ne fournit par la dérivée normale du potentiel de gravitation, mais la force *totale*, résultante de la force centrifuge et de la gravitation; il faut d'abord corriger de la force centrifuge, et ensuite, prendre seulement la composante de la gravitation normale à la surface de référence adoptée, enfin ramener sa valeur depuis le lieu de l'observation jusqu'au pied de la verticale de ce lieu sur la surface de référence, de forme géométrique simple, seule utilisable dans la discussion des résultats. Tout ce travail est délicat, et soulève déjà bien des difficultés; je ne les discuterai pas dans ces conférences.

5. **Terrain plan.** — Occupons-nous d'abord d'un cas géométrique très simple, celui où la surface du terrain sur laquelle on connaît la dérivée normale du potentiel de gravitation est plane. Soient x, y deux coordonnées rectilignes orthogonales sur le plan, et z la coordonnée perpendiculaire au plan, *vers le bas*.

La fonction de Green-Neumann pour le plan

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}} \tag{2}$$

permet d'obtenir par quadrature le potentiel extérieur V_e en tout point

x, y, z ($z < 0$) à l'aide de la dérivée normale $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$ en tous les points ξ, η, quelconques, et $\zeta = 0$, du plan de référence

$$V_e = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

En particulier, sur la surface même du plan de référence

$$V_0(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \frac{2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{4}$$

6. Ayant ces deux données, *compatibles*, $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$ observé et V_0 en fonction de $x, y, 0$, sur toute la surface du plan de référence, nous pouvons chercher la forme la plus générale du potentiel V_i interne aux masses attirantes, continu ainsi que sa dérivée normale avec les mêmes grandeurs extérieures V_0, V'_0. Cette continuité est imposée, en gravitation, par l'impossibilité de densités purement superficielles et de couches doubles. Il n'y a pas d'autre condition précise; j'en déduis que l'on a

$$V_i = V_0(x, y) + z\, V'_0(x, y) + \frac{z^2}{2} f(x, y, z) \tag{I}$$

avec $f(x, y, z)$ entièrement arbitraire, mais fini pour toute valeur de z positive, sous la seule réserve que la densité qu'on en déduira soit *positive*, et *pas trop grande*, pour correspondre à des matériaux réels; une densité nulle est une cavité vide.

$$0 \leqq -\frac{1}{4\pi G} \Delta V_i < 25 \text{ (par exemple)} \tag{5}$$

(G, constante de la gravitation universelle; $G = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$ en C.G.S.)

$$\Delta V_i = \delta V_0 + z\, \delta V'_0 + \frac{z^2}{2} \delta f + 2 z f'_z + f \qquad \text{où} \quad \delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{6}$$

La forme (I) directement inspirée par les conditions de continuité à la surface, a l'inconvénient évident de donner à la pesanteur superficielle une influence, sur la densité, indéfiniment croissante avec la profondeur. Nous satisferons aussi bien à toutes les conditions en substituant à z un autre facteur quelconque, qui devienne égal à z, pour $z = 0$, et ait au loin telle allure décroissante qu'il nous plaira. Tels seraient

(7)	Allure hyperbolique..............	$\dfrac{-cz}{c+z}$
(8)	Allure exponentielle..............	$\dfrac{1-e^{-\gamma z}}{\gamma}$
(9)	Autre exponentielle..............	$z-1+e^{-cz^2}$
	....	....

où c, γ, sont des constantes arbitraires.

Adoptons, par exemple, la forme (8) et mettons aussi $e^{-\gamma z}$ en facteur de la fonction arbitraire $f(x, y, z)$, nous aurons

$$\text{(II)}\qquad V = V_0(x, y) + \frac{1}{\gamma}V'_0 + \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma}\left(-V'_0 + \frac{z^2}{2}f(x, y, z)\right)$$

avec la condition très générale

$$(10)\qquad 0 \leqq -\frac{1}{4\pi G}\left[\delta V_0 + \frac{1}{\gamma}\delta V'_0 + \frac{1}{\gamma}\Delta\, e^{-\gamma z}\left(-V'_0 + \frac{z^2}{2}f(x, y, z)\right)\right] < 25.$$

7. **Utilisation de la densité à la surface, et hypothèse de l'homogénéité asymptotique à très grande profondeur.** — Nous pouvons d'abord utiliser la distribution, directement observable, de la densité des roches qui affleurent à la surface, $\rho_0(x, y)$, pour diminuer un peu l'indétermination de $f(x, y, z)$. En outre, nous pouvons réserver pour une discussion différente la constitution du sol à très grande profondeur (plus de 100^{km}, par exemple) en adoptant pour la densité une valeur finie constante ρ_∞ pour les valeurs très grandes de z.

Il est facile de voir que l'on satisfait à ces conditions en prenant

$$\text{(III)}\qquad V = \left\{\begin{array}{l} e^{-\gamma z}\left[\begin{array}{l} V_0 + z(V'_0 + \gamma V_0) - \dfrac{z^2}{2}[4\pi G\rho_0 + \delta V_0 - 2\gamma V'_0 - \gamma^2 V_0] \\ \qquad + \dfrac{z^2}{2}\left[z\mathcal{V}_1 + \dfrac{z^2}{2}\mathcal{V}_2 + \ldots + \dfrac{z^n}{n!}\mathcal{V}_n + \ldots\right] \end{array}\right] \\ -4\pi G\rho_\infty \dfrac{2 - 2\gamma z + \gamma^2 z^2 - 2e^{-\gamma z}}{2\gamma^2}, \end{array}\right\},$$

où V'_0 et V_0 sont les deux fonctions de x et y, déterminées par les mesures de pesanteur, ρ_0 la densité observée (en x, y) des couches rocheuses superficielles.

$\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, ..., $\mathcal{V}_n$, des fonctions de x, y arbitraires sous réserve de la convergence de la série en z dont elles sont les coefficients, et de la condition

$$0 \leqq \frac{-\Delta V}{4\pi G} < 25.$$

On a alors, dans tout le sous-sol,

$$(11) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} e^{-\gamma z} \left[\begin{array}{l} V'_0 - z(4\pi G\rho_0 + \delta V_0 - \gamma V'_0) \\ \quad + \gamma \frac{z^2}{2}(4\pi G\rho_0 + \delta V_0 - 2\gamma V'_0 + \gamma^2 V_0) \\ \quad + \frac{3z^2}{2}\mathcal{V}_1 + \ldots + \frac{z^{n+1}}{n!}\left(\frac{n+2}{2}\mathcal{V}_n - \frac{n\gamma}{2}\mathcal{V}_{n-1}\right) + \ldots \end{array} \right] \\ - 4\pi G\rho_\infty \frac{-1 + \gamma z + e^{-\gamma z}}{\gamma} \end{array} \right\}$$

et (¹)

$$(12) \quad \Delta V = \left\{ \begin{array}{l} e^{-\gamma z} \left[\begin{array}{l} -4\pi G\rho_0 + z[2\gamma\, 4\pi G\rho_0 + 3\gamma\,\delta V_0 + \delta V'_0 - 3\gamma^2 V'_0 - \gamma^3 V_0] \\ \quad + \frac{z^2}{2}[-4\pi G\,\delta\rho_0 - 4\pi G\gamma^2\rho_0 - \delta\delta V_0 + 2\gamma\,\delta V'_0 + 2\gamma^3 V'_0 + \gamma^4 V_0] \\ \quad + 3z\mathcal{V}_1 + 3z^2(\mathcal{V}_2 - \gamma\mathcal{V}_1) + z^3\left(\frac{5}{3}\mathcal{V}_3 - 2\gamma\mathcal{V}_2 + \frac{\delta\mathcal{V}_1 + \gamma^2\mathcal{V}_1}{2}\right) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \frac{z^{n+2}}{2}\left[\frac{\delta\mathcal{V}_n + \gamma^2\mathcal{V}_n}{n!} - 2\gamma\frac{n+3}{(n+1)!}\mathcal{V}_{n+1} + \frac{(n+4)(n+3)}{(n+2)!}\mathcal{V}_{n+2}\right] \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right] \\ - 4\pi G\rho_\infty(1 - e^{-\gamma z}) \end{array} \right\}.$$

Les valeurs extrêmes sont bien : à la surface du sol, $z = 0$,

$$V = V_0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = V'_0, \qquad \Delta V = -4\pi G\rho_0$$

et, à très grande distance, $z = \infty$,

$$V = -4\pi G\rho_\infty \frac{\gamma^2 z^2 - 2\gamma z + 2}{2\gamma^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi G\rho_\infty\left(z - \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$\Delta V = -4\pi G\rho_\infty.$$

(¹) $\Delta\, e^{-\gamma z}\Sigma z^n\, U_n(x,y) = e^{-\gamma z}\,\Sigma z^n\,[\gamma^2 U_n - 2\gamma\,(n+1)U_{n+1} + (n+2)(n+1)\,U_{n+2} + \delta U_n]$.

8. Hypothèses diverses. — Gonflement purement radial, charriages, etc.

A la suite des observations de la pesanteur et des déviations de la verticale dans l'Hindoustan, il est devenu certain que la surface de niveau qui prolonge sous les continents la surface moyenne des Océans, diffère, dans des régions étendues, de l'ellipsoïde classique, et présente des ondulations nombreuses et assez irrégulières, qui ont donné aux géodésiens l'occasion de développer et de discuter passionnément des hypothèses variées sur la constitution de la croûte terrestre jusqu'à 100 ou 200^{km} de profondeur.

Je ne me propose pas de discuter ici ces hypothèses, mais de montrer le *néant* des considérations géodésiques et des calculs numériques par lesquels on croit les justifier. L'extrême indétermination que les lois de la gravitation laissent subsister dans la recherche de la densité à l'aide du champ extérieur, est bien caractérisée d'abord par la constante arbitraire γ de l'exponentielle, et surtout par le nombre infini de fonctions de x et y, $\mathcal{V}_1$, ..., $\mathcal{V}_n$, ..., entièrement arbitraires, sous réserve de convergence.

Grâce à ces fonctions, on peut, sans arriver à lever complètement l'indétermination, imposer à la distribution des densités, des conditions variées, suggérées par la discussion de théories géologiques, ou de géodésie générale.

9. L'une des plus simples, suggérée par les discussions modernes sur l'isostasie (voir *Ann. Long.*, Perier, 1926,) est la suivante :

On veut que chaque colonne verticale de matière, de base unité, contienne la même masse totale $\mathcal{M}$ arbitrairement choisie, indépendante de x et y.

Remarquons d'abord que les termes dépendant de ρ_∞, satisfont déjà à cette uniformité de distribution quel que soit z. Appliquons donc la condition aux termes indépendants de ρ_∞, qui fournissent des valeurs finies, grâce au facteur $e^{-\gamma z}$ introduit pour éteindre à grande profondeur l'influence des propriétés superficielles :

La condition est

$$(13)\quad \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} -4\pi G\rho_0 + z(\delta V'_0 + \gamma\, 8\pi G\rho_0 + 3\gamma\,\delta V_0 - 3\gamma^2 V'_0 - \gamma^3 V_0) \\ -\dfrac{z^2}{2}[\delta\delta V_0 + 4\pi G\,\delta\rho_0 + 4\pi G\gamma^2\rho_0 - 2\gamma\,\delta V'_0 - 2\gamma^3 V'_0 - \gamma^4 V_0] \\ +3z\mathcal{V}_1 + 3z^2(\mathcal{V}_2 - \gamma\mathcal{V}_1) + \dfrac{z^3}{2}\left(\dfrac{10}{3}\mathcal{V}_3 - 4\gamma\mathcal{V}_2 + \delta\mathcal{V}_1 + \gamma\mathcal{V}_1\right) \\ +\dfrac{z^{n+2}}{2(n+2)!}\left[\begin{array}{l}(n+2)(n+1)(\delta\mathcal{V}_n + \gamma^2\mathcal{V}_n) \\ -2(n+3)(n+2)\gamma\mathcal{V}_{n+1} + (n+4)(n+3)\mathcal{V}_{n+2}\end{array}\right] \end{array} \right\} \times e^{-\gamma z}\,dz$$
$$= -4\pi G\mathfrak{M}_0,$$

en désignant par $\mathfrak{M}_0$ la masse indépendante de x, y, de chaque colonne unitaire.

Effectuant les intégrations, il vient, en se souvenant que l'on a, quel que soit n entier,

$$(14)\qquad \int_0^\infty z^n e^{-\gamma z}\,dz = \frac{n!}{\gamma^{n+1}},$$

$$(15)\quad \begin{aligned} -4\pi G\mathfrak{M}_0 = &-\frac{4\pi G}{\gamma}\rho_0 + \frac{1}{\gamma^2}[\delta V'_0 + 8\pi G\gamma\rho_0 + 3\gamma\,\delta V_0 - 3\gamma^2 V'_0 - \gamma^3 V_0] \\ &-\frac{1}{\gamma^3}[\delta\delta V_0 + 4\pi G\,\delta\rho_0 + 4\pi G\gamma^2\rho_0 - 2\gamma\,\delta V'_0 - 2\gamma^3 V'_0 - \gamma^4 V_0] \\ &+\frac{3}{\gamma^2}\mathcal{V}_1 + \frac{6}{\gamma^3}(\mathcal{V}_2 - \gamma\mathcal{V}_1) + \frac{1}{\gamma^4}(10\mathcal{V}_3 - 12\gamma\mathcal{V}_2 + 3\delta\mathcal{V}_1 + 3\gamma^2\mathcal{V}_1) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^{n+3}}\left[\begin{array}{l}(n+2)(n+1)(\delta\mathcal{V}_n + \gamma^2\mathcal{V}_n) \\ -2(n+3)(n+2)\gamma\mathcal{V}_{n+1} + (n+4)(n+3)\mathcal{V}_{n+2}\end{array}\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette équation déterminera *une seulement* des fonctions $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$, après qu'on aura choisi *arbitrairement* toutes les autres, et cela sans apporter aucune modification ou correction aux valeurs $V_0(x, y)$, $V'_0(x, y)$ $\rho_0(x, y)$ directement fournies par les observations superficielles. Cette condition ne peut donc pas être invoquée pour justifier l'adoption de tel ou tel type de corrections apportées aux valeurs observées de g.

Prenons par exemple $\mathcal{V}_2 = \ldots = \mathcal{V}_n = \ldots \equiv 0$, et

$$(16)\quad \frac{3}{\gamma^4}\delta\mathcal{V}_1 = -4\pi G\mathfrak{M}_0 + \frac{4\pi G}{\gamma^3}\delta\rho_0 + \frac{1}{\gamma^3}\delta\delta V_0 - \frac{3}{\gamma}\delta V_0 + V'_0 - \frac{3}{\gamma^2}\delta V'_0.$$

10. Les théories géologiques qui attribuent un rôle capital à des charriages horizontaux dans la surrexion des massifs montagneux, ne s'accommodent pas de la condition précédente. Elles conduisent au contraire à supposer que chaque prisme vertical unitaire actuel a reçu dans ses parties soulevées des masses importantes provenant des régions voisines ou éloignées, restituées d'ailleurs en partie par érosion aqueuse ou aérienne. En un mot, la géologie conduit à admettre que chaque prisme unitaire a une masse totale $\mathcal{M}(x, y)$ qui dépend de ses coordonnées horizontales x, y. Les mêmes données d'observation V_0, V'_0, ρ_0 à la surface restent compatibles avec cette nouvelle condition; il suffit de déterminer la fonction arbitraire $\mathcal{V}_1(x, y)$ par les équations (15) ou (16), en y remplaçant $\mathcal{M}_0$ par $\mathcal{M}(x, y)$.

Les mesures de pesanteur superficielle ne peuvent donc fournir aucun critérium de contrôle tiré de la géodésie au sujet des hypothèses géologiques de charriage.

Pour avoir des raisons de préférence, non pas mathématiques, mais quasi sentimentales, il faudrait traduire en nombres les densités obtenues par chacune des conditions, $\mathcal{M}_0$ constante, ou $\mathcal{M}(x, y)$ proposé par telle ou telle école géologique, et examiner en détail si ces distributions de densités sont acceptables, ou présentent des singularités excessives, qu'aucun choix des fonctions $\mathcal{V}_n(x, y)$, provisoirement annulées, ne puisse compenser.

11. Des subtilités de discussion analogues surgiraient si l'on était conduit, par des raisons étrangères à la théorie de l'attraction, à proposer d'autres conditions globales (*voir* § 24, p. 172) en nombre fini quelconque, au lieu d'une seule.

Les mesures de pesanteur à la surface ne peuvent pas fournir de critérium pour donner la préférenceà telle ou telle hypothèse géologique, orogénique ou autre sur la distribution des densités internes.

CHAPITRE II.

APPLICATION A LA PROSPECTION GRAVIMÉTRIQUE.

12. On voit par ce qui précède combien seraient incomplets les résultats fournis par la méthode de prospection gravimétrique (Eötvös), même en supposant le réseau des stations beaucoup mieux réparti en surface qu'il ne l'est ordinairement, si les prospecteurs ne faisaient appel aux observations géologiques locales, et n'utilisaient habilement toutes les indications suggérées par leurs observations antérieures. La prospection est un art.

On peut toutefois apporter à la partie scientifique du travail un peu plus de méthode qu'il n'est habituel, autant que je sache, en examinant attentivement la formule qui donne les densités (12) (§ 7), que je reproduis ici; en y conservant seulement les premiers termes arbitraires.

$$(17)\quad -4\pi G\rho = \left\{\begin{array}{l} e^{-\gamma z}\left[\begin{array}{l} -4\pi G\rho_0 + z[8\pi G\gamma\rho_0 + \delta V'_0 - 3\gamma^2 V'_0 + 3\gamma\,\delta V_0 - \gamma^3 V_0] \\ + \dfrac{z^2}{2}\left[\begin{array}{l} -4\pi G\gamma^2\rho_0 + 4\pi G\,\delta\rho_0 \\ -\delta\,\delta V_0 + \gamma^4 V_0 + 2\gamma\,\delta V'_0 + 2\gamma^3 V'_0 \end{array}\right] \\ + 3z\mathcal{V}_1 + 3z^2(\mathcal{V}_2 - \gamma\mathcal{V}_1) \\ + \dfrac{z^3}{6}(10\mathcal{V}_3 - 12\gamma\mathcal{V}_2 + 3\,\delta\mathcal{V}_1 + 3\gamma^2\mathcal{V}_1) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] \\ -4\pi G\rho_\infty(1 - e^{-\gamma z}). \end{array}\right\}.$$

γ est l'inverse d'une longueur d'au moins 1000^{km}; dans les couches que la prospection cherche à définir, les termes qui ont γ^2, γ^3, ... en facteur sont certainement très petits; le terme en ρ_∞ est négligeable; les termes importants pour les premiers hectomètres du sous-sol, sont donc seulement

$$(18)\quad 4\pi G\rho \approx e^{-\gamma z}\left[\begin{array}{l} 4\pi G\rho_0 - z[\delta V'_0 + 3\gamma\,\delta V_0 + 8\pi G\gamma\rho_0 + \ldots] \\ - \dfrac{z^2}{2}[-4\pi G\,\delta\rho_0 - \delta\,\delta V_0 + 2\gamma\,\delta V'_0 \ldots] \\ -3z\mathcal{V}_1 - 3z^2(\mathcal{V}_2 - \gamma\mathcal{V}_1) - \dfrac{z^3}{6}(3\,\delta\mathcal{V}_1 + 10\mathcal{V}_3 - 12\gamma\mathcal{V}_2 \ldots) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right].$$

En profondeur, les termes déterminés par la surface sont, au plus, du deuxième degré en z; ils peuvent donc indiquer seulement si la densité commence par croître ou par décroître, quand on s'enfonce dans le sous-sol, et si un maximum ou un minimum de densité le long de la verticale est probable aux profondeurs accessibles. Mais l'étude de la surface ne peut donner aucune indication sur la probabilité d'un point d'inflexion de la courbe des densités le long de la verticale, puisque les termes en z^3 et au delà ont des coefficients arbitraires.

13. Insistons pour savoir ce qu'il est important d'observer à la surface. Les termes les plus importants du coefficient de z sont $-(\delta V'_0 + 3\mathcal{V}_1)$; il faudrait donc d'abord avoir observé *en tous sens* sur le terrain plan avec assez de précision pour connaître

$$\frac{\partial^2 V'_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'_0}{\partial y^2} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right]. \tag{19}$$

Je crois que les observations à l'appareil Eötvös, qui donnent $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$, sont rarement assez régulièrement distribuées en surface (et non en ligne) pour que ce terme soit bien connu; supposons toutefois qu'il le soit, et qu'on en puisse tracer la carte. On peut chercher à se faire une idée approximative du début de la variation de la densité avec la profondeur, c'est-à-dire du total $(\delta V'_0 + 3\mathcal{V}_1)$ sur l'aire étudiée, en associant l'ensemble des observations géologiques aux renseignements fournis par des sondages à faible profondeur, souvent effectués en plusieurs points avant la prospection gravimétrique. S'il arrive que ces renseignements auxiliaires permettent de tracer une carte cotée pas trop arbitraire, du total $(\delta V'_0 + 3\mathcal{V}_1)$, on pourra, par différence, tracer une carte de $3\mathcal{V}_1$, assez grossière à la vérité, et en tirer quelque parti. Cette carte, donnant une idée, encore plus incertaine, de $\delta\mathcal{V}_1$, pourra quelquefois faire soupçonner, sur le terrain, des points ou des lignes le long desquelles $\delta\mathcal{V}_1$ devient très grand, et faire soupçonner le long de ces lignes, l'ordre de grandeur et le signe du terme en z^3.

Raisonnant de même, on peut essayer, sans beaucoup de chances de succès, de deviner l'allure du terme en z^2, et d'en déduire quelque chose sur l'allure et la grandeur de la fonction inconnue $\mathcal{V}_2$.

Tout cela ne peut donner que des indications bien incertaines sur le terme en z^3.

Ainsi, les observations faites à la surface ne donnent même pas complètement le terme en z; pour avoir quelque idée du terme en z^2, et peut-être du terme en z^3, il faut y adjoindre tout ce que la géologie et les premiers sondages autorisent à imaginer relativement au sous-sol.

Ce sont là des résultats bien éloignés de ce que croit le public, même instruit.

14. **Succession de couches de densité uniforme.** — Jusqu'ici, j'ai traité le potentiel et la densité comme des grandeurs qui peuvent varier d'une manière continue en tous sens dans le sol; cela masque les sauts brusques d'une couche à une autre couche, d'âge géologique différent. Il est à propos d'attaquer le problème de l'intérieur du globe un peu autrement, en attribuant à chaque couche une homogénéité parfaite, et une densité constante, en grandes masses, bien entendu. C'est là une hypothèse certainement exagérée; il n'y a guère de couche qui, même en grandes masses, ne présente de notables variations de densité moyenne, ne fût-ce que par suite des infiltrations d'eau, et des cavités qui en sont souvent la conséquence. Quoi qu'il en soit, admettons que le sous-sol est constitué par des couches superposées qui se distinguent par des densités différentes [1] quoique fort peu, et qu'on cherche la forme des surfaces de séparation, où la densité est discontinue.

15. Je désigne par des indices supérieurs pairs les surfaces de séparation; et par des indices impairs les couches elles-mêmes.

S^0 terrain plan; V^0, V'^0 observés (sous réserve de la remarque du § 4).

ρ^{I} densité constante dela première couche; $V^{\mathrm{I}}(x, y, z)$ potentiel dans cette première couche, soumis à la condition

$$\Delta V^{\mathrm{I}} = -4\pi G \rho^{\mathrm{I}}$$

jusqu'à la surface inconnue

$$z - S^{\mathrm{II}}(x, y) = 0, \tag{20}$$

---

(1)

Roches acides	2,5	à	2,7
Roches basiques	2,9	à	3,1

avec tous les intermédiaires.

dont la normale, vers la deuxième couche, a pour cosinus

$$(21)\qquad -\frac{1}{\sigma^{\mathrm{II}}}\frac{\partial S^{\mathrm{II}}}{\partial x}, \quad -\frac{1}{\sigma^{\mathrm{II}}}\frac{\partial S^{\mathrm{II}}}{\partial y}, \quad +\frac{1}{\sigma^{\mathrm{II}}},$$

en posant

$$(22)\qquad \sigma^{\mathrm{II}} = +\sqrt{1+\left(\frac{\partial S^{\mathrm{II}}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S^{\mathrm{II}}}{\partial y}\right)^2}.$$

Dans la deuxième couche, ρ^{III} est constant et

$$\Delta V^{\mathrm{III}} = -4\pi G \rho^{\mathrm{III}}.$$

A la surface de séparation, V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ sont continus, et par conséquent $\frac{\partial V}{\partial z}$.

Terrain plan,

$$(23)\qquad V^{\mathrm{I}}(x, y, 0) = V^0, \qquad \frac{\partial V^{\mathrm{I}}}{\partial z}(x, y, 0) = V'^0.$$

Surface S^{II},

$$(24)\qquad \begin{cases} V^{\mathrm{III}}[x, y, S^{\mathrm{II}}(x, y)] = V^{\mathrm{I}}[x, y, S^{\mathrm{II}}(x, y)], \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}V^{\mathrm{III}}\right)(x, y, S^{\mathrm{II}}) = \left(\frac{\partial}{\partial z}V^{\mathrm{I}}\right)(x, y, S^{\mathrm{II}}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les lois de la gravitation n'imposent pas d'autres conditions.

Dans la masse pesante, il n'y a pas, aux très grandes distances, de limite imposée par la théorie générale.

Mais il importe d'écrire explicitement les V sous une forme qui impose la constance de la densité de chaque couche.

16. Il faut d'abord écrire le potentiel V d'une couche homogène, de densité ρ, sous une forme adaptée aux conditions frontières. Pour cela, je prends

$$(25)\qquad V = -4\pi G \rho \frac{z^2}{2} + \mathcal{V} \qquad \text{avec} \quad \Delta \mathcal{V} = 0,$$

en adoptant pour $\mathcal{V}$ la forme

$$(\mathrm{IV})\qquad \mathcal{V} = \sum_0^\infty [z - S(x, y)]^n \mathcal{V}_n(x, y),$$

où les $\mathcal{V}_n$ successifs sont liés aux deux premiers $\mathcal{V}_0(x, y)$ et $\mathcal{V}_1(x, y)$

par la formule de récurrence

$$(26)\quad \mathcal{V}_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{\sigma^2}\times \times\left[(n+1)\mathcal{V}_{n+1}\,\delta S + 2(n+1)\left(\frac{\partial \mathcal{V}_{n+1}}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}_{n+1}}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y}\right) - \delta\mathcal{V}_n\right],$$

conséquence immédiate de l'équation de Laplace.

Partons du terrain plan ($S^0 \equiv 0$), $\mathcal{V}_0^{\mathrm{I}}$ et $\mathcal{V}_1^{\mathrm{I}}$ sont donnés, par les formules (23); d'où

$$(\mathrm{IV}^{\mathrm{I}})\quad V^{\mathrm{I}} = -2\pi G\rho^{\mathrm{I}} z^2 + V_0(x,y) + z\,V'_0(x,y) + \sum_{2}^{\infty}\left[\frac{z^{2n}}{(2n)!}\delta^n V_0 + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\delta^n V'_0\right],$$

où δ^n est une notation symbolique pour l'opérateur à dérivées partielles d'ordre $2n$ en x et y,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdots\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ n \text{ fois.}$$

A la surface de la seconde couche $z = S^{\mathrm{II}}(x, y)$, la formule précédente donne

$$(27)\quad (V^{\mathrm{I}})_{S^{\mathrm{II}}} = -2\pi G\rho^{\mathrm{I}}(S^{\mathrm{II}})^2 + V_0 + S^{\mathrm{II}} V'_0 + \sum_{1}^{\infty}\left[(S^{\mathrm{II}})^{2n}\frac{\delta^n V_0}{(2n)!} + (S^{\mathrm{II}})^{2n+1}\frac{\delta^n V'_0}{(2n+1)!}\right]$$

et

$$(28)\quad \left(\frac{\partial V^{\mathrm{I}}}{\partial z}\right)_{S^{\mathrm{II}}} = -4\pi G\rho^{\mathrm{I}} S^{\mathrm{II}} + V'_0 + \sum_{1}^{\infty}\left[(S^{\mathrm{II}})^{2n-1}\frac{\delta^n V_0}{(2n-1)!} + (S^{\mathrm{II}})^{2n}\frac{\delta^n V'_0}{(2n)!}\right].$$

Ce sont deux fonctions compliquées, mais connues de x, y, si la forme de la surface $S^{\mathrm{II}}(x, y)$ est connue.

17. J'aurai donc dans la seconde couche, de densité ρ^{III}, à l'aide de (27) et (28),

$$(\mathrm{IV}^{\mathrm{III}})\quad V^{\mathrm{III}} = -2\pi G\rho^{\mathrm{III}} z^2 + 2\pi G\rho^{\mathrm{III}}(S^{\mathrm{II}})^2 + (V^{\mathrm{I}})_{S^{\mathrm{II}}} + (z - S^{\mathrm{II}})\left[4\pi G\rho^{\mathrm{III}} S^{\mathrm{II}} + \left(\frac{\partial V^{\mathrm{I}}}{\partial z}\right)_{S^{\mathrm{II}}}\right] + \sum_{0}^{\infty}(z - S^{\mathrm{II}})^{n+2}\mathcal{V}_{n+2}^{\mathrm{III}},$$

où les $\mathcal{V}_{n+2}^{\mathrm{III}}$ sont déterminés par les formules générales de récurrence

(26) en partant de

$$(29)\qquad \mathcal{V}_0^{\rm III} = 2\pi G \rho^{\rm III}(S^{\rm II})^2 + (V^{\rm I})_{S^{\rm II}}$$

et

$$(30)\qquad \mathcal{V}_1^{\rm III} = 4\pi G \rho^{\rm III} S^{\rm II} + \left(\frac{\partial V^{\rm I}}{\partial z}\right)_{S^{\rm II}}.$$

Écrivons encore les formules de passage, de la deuxième couche à la suivante, pour

$$z = S^{\rm IIII}(x, y).$$

A cette limite, j'ai

$$(31)\qquad \begin{aligned}(V^{\rm III})_{S^{\rm IIII}} = &- 2\pi G \rho^{\rm III}(S^{\rm IIII})^2 \\ &+ 2\pi G \rho^{\rm III}(S^{\rm II})^2 + (V^{\rm I})_{S^{\rm II}} \\ &+ (S^{\rm IIII} - S^{\rm II})\left[4\pi G \rho^{\rm III} S^{\rm II} + \left(\frac{\partial V^{\rm I}}{\partial z}\right)_{S^{\rm II}}\right] + \sum_0^\infty (S^{\rm IIII} - S^{\rm II})^{n+2} \mathcal{V}_{n+2}^{\rm III},\end{aligned}$$

et

$$(32)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{\partial V^{\rm III}}{\partial z}\right)_{S^{\rm IIII}} = &- 4\pi G \rho^{\rm III} S^{\rm IIII} \\ &+ 4\pi G \rho^{\rm III} S^{\rm II} + \left(\frac{\partial V^{\rm I}}{\partial z}\right)_{S^{\rm II}} + \sum_0^\infty (n+2)(S^{\rm IIII} - S^{\rm II})^{n+1} \mathcal{V}_{n+2}^{\rm III}.\end{aligned}$$

18. Uutilisant ces valeurs, connues si la forme $S^{\rm IIII}$ de la surface de séparation est connue, je puis écrire le potentiel $V^{\rm V}$ dans toute la couche $\rho^{\rm V}$:

$$({\rm IV^V})\qquad \begin{aligned}V^{\rm V} = &- 2\pi G \rho^{\rm V} z^2 + 2\pi G \rho^{\rm V}(S^{\rm IIII})^2 + (V^{\rm III})_{S^{\rm IIII}} \\ &+ (z - S^{\rm IIII})\left[4\pi G \rho^{\rm V} S^{\rm IIII} + \left(\frac{\partial V^{\rm III}}{\partial z}\right)_{S^{\rm IIII}}\right] + \sum_0^\infty (z - S^{\rm IIII})^{n+2} \mathcal{V}_{n+2}^{\rm V},\end{aligned}$$

où les $\mathcal{V}_{n+2}^{\rm V}$ sont déterminés par les formules générales de récurrence (26) en partant de

$$(33)\qquad \mathcal{V}_0^{\rm V} = 2\pi G \rho^{\rm V}(S^{\rm IIII})^2 + (V^{\rm III})_{S^{\rm IIII}}$$

et

$$(34)\qquad \mathcal{V}_1^{\rm V} = 4\pi G \rho^{\rm V} S^{\rm IIII} + \left(\frac{\partial V^{\rm III}}{\partial z}\right)_{S^{\rm IIII}}.$$

Inutile de continuer. La forme ($\rm IV^V$), avec (33), (34), est du type général.

On obtiendra $V^{\rm VII}$ de la couche suivante en augmentant de deux unités tous les indices supérieurs.

Les surfaces S^{II}, S^{IIII}, S^{VI}, ... restent toutes arbitraires, ainsi que les densités, tant qu'on ne fait appel qu'aux lois générales de l'attraction newtonienne et aux mesures faites sur le terrain.

19. Avant d'aller plus loin, il est utile de faire une remarque. J'ai écrit des développements en série; mais, jamais les mesures faites sur le terrain ne permettront d'écrire avec quelque exactitude les $\mathcal{V}_6$, $\mathcal{V}_7$, ..., et même les $\mathcal{V}_4$, $\mathcal{V}_5$; ces deux termes, dans toutes les couches, contiennent déjà les $\delta\delta$, c'est-à-dire des dérivées *quatrièmes* des grandeurs mesurées à la surface dans la première couche, et en outre les S et leurs dérivées dans les couches suivantes.

Le dernier terme que l'on pourra écrire sans une énorme incertitude sera tout au plus le terme en $(z - S)^3$ donné par (26)

$$\mathcal{V}_3 = \frac{1}{2.3}\frac{1}{\sigma^2}\left[2\mathcal{V}_2\delta S + 4\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + 4\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y} - \delta\mathcal{V}_1\right]. \tag{35}$$

Précisons comment y figurent les dérivées de $S(x, y)$:

Dans $\mathcal{V}_0^{III}$ et $\mathcal{V}_1^{III}$ aucune dérivée de S^{II}.

Dans $\mathcal{V}_2^{III}$ et $\mathcal{V}_3^{III}$ les dérivées premières et secondes de S^{II}.

Toutes ces dérivées de S^{II} figurent dans $\mathcal{V}_0^{V}$ et $\mathcal{V}_1^{V}$, mais aucune dérivée de S^{IIII}. Dans $\mathcal{V}_2^{V}$ et $\mathcal{V}_3^{V}$ figureront alors, outre les dérivées premières et secondes de S^{IIII}, les dérivées quatrièmes et cinquièmes de S^{II}. En général, en passant d'une couche à la suivante, toutes les dérivées des S précédentes seront de deux rangs plus élevées.

Comme il serait évidemment illusoire de chercher les dérivées quatrièmes et cinquièmes de S, on devra, en écrivant les formules destinées au calcul numérique dans chaque prospection particulière s'arrêter aux dérivées troisièmes de S.

Même avec ces simplifications, les équations des V laissent apparaître toute l'intermination des surfaces de séparation successives.

20. États hypothétiques du sous-sol à très grande profondeur. — Dans le problème actuel, avec le sous-sol indéfiniment étendu en largeur horizontale et en profondeur, aucune condition nette aux très grandes distances ne s'impose à l'esprit; pour en trouver, il faut revenir au problème général d'un globe limité par une surface fermée, dont notre problème plan est destiné à donner une image appropriée à un domaine de faible étendue horizontale. Dans les régions centrales du globe, sphérique ou non, on doit prévoir des surfaces de niveau qui s'enveloppent les unes les autres, pour se réduire à un point (ou une ligne finie, ou une surface d'aire finie) où le potentiel atteint une valeur maximum, et où la force de gravitation devient nulle, en même temps que la densité y est grande.

Dans le problème actuel, on obtiendra des conditions analogues, quoique certainement plus restrictives, en supposant que les surfaces de niveau deviennent, asymptotiquement, pour z très grand, des plans parallèles à la surface libre, de plus en plus espacés, si l'on veut que la force s'annule asymptotiquement; mais alors la densité tendrait vers zéro, ce qui d'ailleurs n'est pas choquant, puisque aux grandes profondeurs, le problème fait correspondre des couches planes d'étendue horizontale infinie aux couches sphériques de moins en moins volumineuses du centre du globe. Une analogie complète est irréalisable.

21. Une autre forme de condition lointaine, suggérée par des considérations d'équilibre hydrostatique en profondeur est la suivante.

Au-dessous d'une certaine profondeur Z, pas très grande (quelques centaines de kilomètres), le potentiel et la force deviennent indépendants de x et de y, et ne dépendent plus que de z.

La dernière couche à étudier ($z < Z$) a une densité constante ρ^{2q+1}, et est limitée à sa base ($z = Z$) par un potentiel déterminé constant C et une force constante F.

Le potentiel dans toute cette dernière couche est déterminé par ces conditions extrêmes, qui lui donnent la forme très simple

$$V^{2q+1} = C + F(z - Z) - 2\pi G \rho^{2q+1}(z - Z)^2, \tag{36}$$

à laquelle on ne peut rien ajouter, vu l'uniformité admise de ρ^{2q+1} dans toute la couche [1].

Cette condition profonde impose deux conditions aux formes des surfaces de séparation et aux densités des couches successives, pour que le potentiel final et la force prennent bien des valeurs finales constantes à la base de la dernière couche.

---

[1] En haut de ρ, S, V, les lettres $2q-1$, $2q-2$, ... sont des *indices*; ce ne sont pas des puissances.

Je suppose les fonctions nécessaires déterminées de proche en proche, comme il a été dit paragraphes **16** à **19**, et j'ajoute les accroissements de potentiels obtenus en traversant chaque couche, j'obtiens sur l'avant-dernière surface S^{2q+2} (la dernière est $z = Z$)

$$(37) \qquad \begin{aligned} &2\pi G \rho^{2q-1}(S^{2q-2})^2 + (V^{2q-1})_{S_{2q-2}} \\ &= C + F(S^{2q-2} - Z) - 2\pi G \rho^{2q+1}(S^{2q+2} - Z)^2, \end{aligned}$$

$$(38) \qquad 4\pi G \rho^{2q-1} S^{2q-2} + \left(\frac{\partial V^{2q-1}}{\partial z}\right)_{S^{2q-2}} = F - 4\pi G \rho^{2q+1}(S^{2q-2} - Z).$$

22. Si l'on a essayé une seule surface de séparation ($z = S^{II}$) entre deux couches ρ^I ρ^{III}, dont la seconde descend jusqu'au plan profond $z = Z$, cela fait deux équations de condition imposées à une seule fonction de x, y, S^{II}, et à des constantes, $\rho^I \rho^{III}$ C, F, Z.

Écrivons leur forme développée, en mettant en évidence les grandeurs observées

$$(V^I) \qquad \begin{aligned} &V_0 + SV'_0 - 2\pi G \rho^I S^2 + \sum \left(\frac{S^{2n}}{(2n)!} \delta^n V_0 + \frac{S^{2n+1}}{(2n+1)!} \delta^n V'_0 \right) \\ &= C + F(S - Z) - 2\pi G \rho^{III}(S - Z)^2 \end{aligned}$$

et

$$(V^{II}) \qquad V'_0 - 4\pi G \rho^I S + \sum \left(\frac{S^{2n-1}}{(2n-1)!} \delta^n V_0 + \frac{S^{2n}}{(2n)!} \delta^n V'_0 \right) = F - 4\pi G \rho^{III}(S - Z).$$

Ainsi, l'uniformité de la couche profonde n'est pas, en général, compatible avec la superposition de deux couches homogènes seulement, puisqu'elle aboutit à deux équations pour déterminer une seule fonction $S(x, y)$ qui représente la profondeur de la surface de séparation des deux couches.

Réduisons ces équations aux seuls termes réellement utilisables, suivant la remarque du paragraphe 19

$$(V^{III}) \qquad \begin{aligned} &V_0 + SV'_0 - 2\pi G \rho^I S^2 + S^2 \frac{1}{2} \delta V_0 + S^3 \frac{1}{6} \delta V'_0 \\ &= C + F(S - Z) - 2\pi G \rho^{III}(S - Z)^2, \end{aligned}$$

$$(V^{IIII}) \qquad V'_0 - 4\pi G \rho^I S + S\, \delta V_0 + S^2 \frac{1}{2} \delta V'_0 = F - 4\pi G \rho^{III}(S - Z).$$

Comme il n'entre, dans les équations ainsi réduites, que la fonction S sans ses dérivées, le problème, purement algébrique, peut alors être complètement discuté.

Multiplions la deuxième équation par $\frac{S}{3}$ et retranchons de la première, il reste

$$V_0 + \frac{2}{3} SV'_0 - 2\pi G \rho^I S^2 + \frac{1}{6} S^2 \delta V_0 = C - FZ + \frac{2}{3} FS - 2\pi G \rho^{III} \left(\frac{1}{3} S^2 - \frac{4}{3} ZS + Z^2 \right).$$

Éliminant S^2 entre cette équation et l'équation (V^{IIII}), nous obtiendrons enfin

S par une équation linéaire

$$(39)\quad [S(4\pi G\rho^{III}-4\pi G\rho^{I}+\delta V_0)+V'_0-F-4\pi G\rho^{III}Z]\left[\frac{2}{3}\pi G\rho^{III}-2\pi G\rho^{I}+\frac{1}{6}\delta V_0\right]$$
$$-\left[S\left(\frac{2}{3}V'_0-\frac{2}{3}F-\frac{8}{3}\pi G\rho^{III}Z\right)+V_0-C+FZ+2\pi G\rho^{III}Z^2\right]\times\frac{1}{2}\delta V'_0=0.$$

V_0, V'_0 sont les fonctions de x et y mesurées à la surface; ρ^{I}, ρ^{III} sont des constantes observées, ou à peu près; C, F, Z sont les seules trois constantes largement arbitraires dont on pourrait disposer pour rendre cette valeur de S compatible avec V^{III}. Cette équation, après substitution de S, contiendra les fonctions V_0, V'_0 d'une manière bien trop compliquée pour qu'on ait la moindre chance de la réduire à une identité par le choix de trois constantes seulement.

Ce résultat décevant surprendra peut-être les géodésiens, qui, avec deux couches analogues à celles de ce paragraphe déterminent la surface S et la profondeur Z par une seule condition, et croient y trouver une confirmation de leurs vues sur l'isostasie. *Mais, les géodésiens oublient d'écrire les conditions qu'impose d'abord la théorie générale de l'attraction newtonienne, celles de la continuité du potentiel et de son gradient à travers chacune des surfaces de séparation* $z=0$, $z=S(x,y)$, $z=Z$.

23. Cette difficulté de principe disparaît si l'on essaie trois couches homogènes, avec deux surfaces de séparation.

A la première surface de séparation, nous avons obtenu $V^{III}_{S^{II}}$ et $\left(\frac{\partial V^{III}}{\partial z}\right)_{S^{II}}$ par (27) et (28), que je récris

$$V^{III}_{S^{II}}=V_0+S^{II}V'_0-2\pi G\rho^{I}(S^{II})^2+\sum\left[\frac{(S^{II})^{2n}}{(2n)!}\delta^n V_0+\frac{(S^{II})^{2n+1}}{(2n+1)!}\delta^n V'_0\right],$$
$$(\mathcal{V}^{III}_{1})_{S^{II}}=V'_0-4\pi G\rho^{I}S^{II}+\sum\left[\frac{(S^{II})^{2n-1}}{(2n-1)!}\delta^n V_0+\frac{(S^{II})^{2n}}{(2n)!}\delta^n V'_0\right]$$

et ensuite

$$(\text{VI})\quad V^{III}=-2\pi G\rho^{I}[z^2-(S^{II})^2]+\mathcal{V}^{I}_{S^{II}}$$
$$+4\pi G\rho^{I}S^{II}(z-S^{II})+(z-S^{II})\left(\frac{\partial V^{I}}{\partial z}\right)_{S^{II}}+\sum_{0}(z-S^{II})^{n+2}\mathcal{V}^{III}_{n+2},$$

où les $\mathcal{V}^{III}_{n+2}$ se déduisent des deux premières lignes par les dérivations de la formule (26), ce qui fournit les deux équations (37) et (38) *de* *condition*

$$(40)\quad -2\pi G\rho^{III}[(S^{IIII})^2-(S^{II})^2]+V^{I}_{S^{II}}$$
$$+4\pi G\rho^{III}S^{II}(S^{IIII}-S^{II})+(S^{IIII}-S^{II})\left(\frac{\partial V^{I}}{\partial z}\right)_{S^{II}}+\sum_0 (S^{IIII}-S^{II})^{n+2}\mathfrak{V}^{III}_{n+2}$$
$$=C+F(S^{IIII}-Z)-2\pi G\rho^{V}(S^{IIII}-Z)^2$$

et

$$(41)\quad -4\pi G\rho^{III}(S^{IIII}-S^{II})+\left(\frac{\partial V^{I}}{\partial z}\right)_{S^{II}}+\sum_0 (n+2)(S^{IIII}-S^{II})^{n+1}\mathfrak{V}^{III}_{n+2}$$
$$=F-4\pi G\rho^{V}(S^{IIII}-Z).$$

Cela ne fait toujours que deux équations de condition, et nous avons deux surfaces $S^{II}(x, y)$, $S^{IIII}(x, y)$ à en tirer.

L'incompatibilité a disparu.

Mais la recherche de ces deux surfaces, dont la première figure dans les $\mathfrak{V}^{III}$ par toutes ses dérivées partielles, ne paraît ni simple, ni même déterminée, puisque l'intégration des équations aux dérivées partielles fera apparaître des conditions frontières (en x, y), assez difficiles à définir.

Avant d'aller plus loin, rappelons-nous la remarque pratique du paragraphe **19**, et mettons-la à profit. Écrites avec tous les termes qu'il convient de conserver, les deux équations de condition (40) et (41) deviennent [*voir* (27) à (32)]

$$(42)\quad -2\pi G\rho^{III}[(S^{IIII})^2-(S^{II})^2]+4\pi G\rho^{III}S^{II}(S^{IIII}-S^{II})$$
$$+\left[-2\pi G\rho^{I}(S^{II})^2+V_0+S^{II}V'_0+(S^{II})^2\,\delta V_0+(S^{II})^3\frac{1}{6}\delta V'_0\right]$$
$$+(S^{IIII}-S^{II})\left[4\pi G\rho^{III}S^{II}-4\pi G\rho^{I}S^{II}+V'_0+S^{II}\,\delta V_0+(S^{II})^2\frac{1}{2}\delta V'_0\right]$$
$$\begin{aligned}+(S^{IIII}-S^{II})^2\frac{1}{2(\sigma^{II})^2}\Big[&\delta S^{II}(4\pi G\rho^{III}S^{II}-4\pi G\rho^{I}S^{II}+V'_0)\\ &+8\pi G(\rho^{III}-\rho^{I})(\sigma_{II}^2-1)\\ &+2\frac{\partial S^{II}}{\partial x}\frac{\partial V'_0}{\partial x}+2\frac{\partial S^{II}}{\partial y}\frac{\partial V'_0}{\partial y}\\ &-2\pi G(\rho^{III}-\rho^{I})\,\delta(S^{II})^2-\delta V_0-\delta(S^{II}V'_0)\Big]\end{aligned}$$
$$+(S^{IIII}-S^{II})^3\times(\ldots)+\ldots$$
$$=C+F(S^{IIII}-Z)-2\pi G\rho^{V}(S^{IIII}-Z)^2$$

et

$$(43)\quad -4\pi G\rho^{\mathrm{III}}(S^{\mathrm{IIII}}-S^{\mathrm{II}})-4\pi G\rho^{\mathrm{I}}S^{\mathrm{II}}+V'_0+S^{\mathrm{II}}\,\delta V_0+(S^{\mathrm{II}})^2\frac{1}{2}\,\delta V'_0$$
$$+(S^{\mathrm{IIII}}-S^{\mathrm{II}})\frac{1}{2(\sigma^{\mathrm{II}})^2}\left[\begin{array}{l}\delta S^{\mathrm{II}}\times(4\pi G\rho^{\mathrm{III}}S^{\mathrm{II}}-4\pi G\rho^{\mathrm{I}}S^{\mathrm{II}}+V'_0)\\ +8\pi G(\rho^{\mathrm{III}}-\rho^{\mathrm{I}})[(\sigma^{\mathrm{II}})^2-1]\\ +2\dfrac{\partial S^{\mathrm{II}}}{\partial x}\dfrac{\partial V'_0}{\partial x}+2\dfrac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial y}\dfrac{\partial V'_0}{\partial y}\\ -2\pi G(\rho^{\mathrm{III}}-\rho^{\mathrm{I}})\,\delta(S^{\mathrm{II}})^2-\delta V_0-\delta(S^{\mathrm{II}}V'_0)\end{array}\right]$$
$$+(S^{\mathrm{IIII}}-S^{\mathrm{II}})^2\times(\ldots)+\ldots$$
$$=F-4\pi G\rho^{\mathrm{V}}(S^{\mathrm{IIII}}-Z).$$

Tels sont les termes les plus importants des deux équations qui doivent servir à déterminer les deux surfaces $S^{\mathrm{II}}(x,y)$ et $S^{\mathrm{IIII}}(x,y)$. Ces termes sont algébriques pour S^{IIII}, la surface la plus profonde, et aux différences partielles du premier et du deuxième ordre pour S^{II}. On pourra éliminer S^{IIII} par des opérations algébriques, et il restera une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre (non linéaire) en S^{II}. Dans chaque prospection particulière, on aura soin de discuter la précision des coefficients des différents termes, et d'effacer tous ceux qui sont trop mal connus.

L'intégration fera connaître la première surface S^{II}, avec deux fonctions arbitraires, dépendant des contours ou des affleurements, qu'on choisira le mieux qu'on pourra d'après l'examen du terrain. La surface plus profonde S^{IIII} se calculera ensuite par des opérations purement algébriques, qui n'introduisent pas de nouvelles fonctions arbitraires.

En somme avec trois couches homogènes on peut, quelles que soient les valeurs de V_0 et V'_0 sur le plan supérieur, *trouver deux surfaces de séparation qui donnent sur un plan profond* Z *les valeurs uniformes* C, F, *arbitrairement choisies; outre les six constantes arbitraires* Z, C, F, ρ^{I}, ρ^{III}, ρ^{V}, *l'intégration a introduit deux fonctions arbitraires d'une variable.*

Ainsi, dès que le problème est posé de manière à éviter les incompatibilités, la solution redevient en partie arbitraire.

24. Mais, la croûte superficielle est formée de beaucoup plus de trois couches différentes avant d'atteindre le niveau profond qu'on peut raisonnablement supposer de structure simple et horizontalement uniforme. Chaque couche en plus de la troisième introduit une nouvelle surface de séparation S^{VI}, S^{VIII}, ..., qu'on peut, soit laisser arbitraire, soit utiliser pour satisfaire à une ou plusieurs conditions nouvelles, inspirées, soit par la *géologie générale*, soit par des *hypothèses d'équilibre mécanique*.

Par exemple, avec quatre couches superposées (trois surfaces de séparation), on pourra ajouter aux deux conditions du paragraphe **23** telle condition de *charriage* que l'examen géologique de la région aura rendu vraisemblable

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{S^{II}} \rho^{I}\,dz + \int_{S^{II}}^{S^{IIII}} \rho^{III}\,dz + \int_{S^{IIII}}^{S^{VI}} \rho^{V}\,dz + \int_{S^{VI}}^{Z} \rho^{VII}\,dz = \mathfrak{M}(x,y) \\ \text{ou} \\ (\rho^{I} - \rho^{III})\,S^{II} + (\rho^{III} - \rho^{V})\,S^{IIII} + (\rho^{V} - \rho^{VII})\,S^{VI} + \rho^{VI} Z = \mathfrak{M}(x,y), \end{array}\right.$$

soit en se donnant la distribution $\mathfrak{M}(x,y)$ actuelle, soit en la rattachant, par une équation cinématique de déplacement horizontal que l'on se donne, à une distribution plus ancienne supposée uniforme.

25. Ayant fait appel à des conditions simples d'équilibre mécanique aux grandes profondeurs (§ **20**), il est naturel de ne pas laisser de côté les conditions d'équilibre de la croûte elle-même. On ne peut songer à les écrire que pour des compartiments de grande étendue horizontale, beaucoup plus grande que l'épaisseur totale Z. Pour de telles plaques, la surface totale des parois de contour verticales est beaucoup plus petite que la surface horizontale de base; on a d'ailleurs remarqué depuis longtemps que les actions tangentielles le long du contour vertical (efforts tranchants) sont limitées par la ténacité médiocre des roches. Pour cette double raison, petitesse des efforts tranchants, petitesse relative de l'aire latérale de la dalle, on peut regarder celle-ci comme pesant, pratiquement de tout son poids sur le fond Z.

Soit p_0 la charge moyenne que l'ensemble du terrain, plus ou moins irrégulier, exerce sur l'unité de surface du plan de référence $z = 0$, la pression transmise au fond sera la moyenne de

$$p_0 + \int_0^{S^{II}} \rho_I \left(\frac{\partial V^{II}}{\partial z}\right) dz + \int_{S^{II}}^{S^{IIII}} \rho^{III} \left(\frac{\partial V^{IV}}{\partial z}\right) dz + \int_{S^{IIII}}^{S^{VI}} \rho^{V} \left(\frac{\partial V^{VI}}{\partial z}\right) dz + \ldots = p_Z$$

ou, puisque j'ai supposé constante la densité de chaque couche,

$$(45)\qquad \begin{aligned} p_0 - \rho^{\mathrm{I}} \mathrm{V}_0 + (\rho^{\mathrm{I}} - \rho^{\mathrm{III}})(\mathrm{V})_{\mathrm{S}^{\mathrm{II}}} + (\rho^{\mathrm{III}} - \rho^{\mathrm{V}})(\mathrm{V})_{\mathrm{S}^{\mathrm{IIII}}} \\ + (\rho^{\mathrm{V}} - \rho^{\mathrm{VII}})(\mathrm{V})_{\mathrm{S}^{\mathrm{VI}}} + \ldots + \rho^{2q+1} \mathrm{V}_{\mathrm{Z}} = p_{\mathrm{Z}}, \end{aligned}$$

où p_{Z} doit être uniforme comme $(\mathrm{V})_{\mathrm{Z}} (= \mathrm{C})$ et comme $\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)_{\mathrm{Z}} (= \mathrm{F})$ sur tout le plan Z où cessent les irrégularités de la croûte.

Avec quatre couches, on peut s'imposer sans contradiction la condition (45), qui est une forme mécanique correcte d'isostasie, au lieu de la condition (44), pour déterminer la troisième surface S^{VI}.

Avec cinq couches, on pourrait s'imposer les deux conditions (44) et (45) et déterminer S^{VI} et $\mathrm{S}^{\mathrm{VIII}}$.

Mais il ne faut pas oublier que, par les restrictions auxquelles elle est soumise, l'équation (45) *n'est apte à fournir aucun détail dans les surfaces de séparation.*

26. En résumé, dans le problème de prospection gravifique sur terrain plan, quand on n'ajoute aucune hypothèse à la théorie de la gravitation, les mesures à la surface libre fournissent les deux premiers coefficients d'une série en z qui en peut contenir une infinité; tous les autres restent arbitraires (§ **12-13**).

On peut étudier une croûte composée d'un nombre quelconque de couches homogènes, dont on cherche les surfaces de séparation (§ **14-25**). Les mesures faites à la surface laissent indéterminées toutes les surfaces de séparation et toutes les densités.

Pour aller plus loin, on peut s'imposer des conditions d'uniformité aux grandes profondeurs ($z > \mathrm{Z}$) (§ **21-25**). Tant qu'on ne limite pas le nombre des couches, l'indétermination persiste. Avec deux couches, il y a incompatibilité. Avec trois couches, on peut déterminer les deux surfaces, de séparation S^{II}, $\mathrm{S}^{\mathrm{IIII}}$.

Avec quatre couches, on peut ajouter une condition de plus, par exemple de charriage, ou d'isostasie, et déterminer les trois surfaces de séparation, S^{II}, $\mathrm{S}^{\mathrm{III}}$, S^{IV}. Mais il reste plusieurs constantes arbitraires dans ces déterminations.

27. Masses métalliques. — J'ai laissé de côté un cas théoriquement intéressant, celui d'une masse métallique compacte et bien limitée, de grande densité, comme certains minerais de fer, de sulfure de cuivre, etc. La densité exceptionnelle ($\rho > 4$ par exemple) et l'extension limitée de la masse dans le sens horizontal, avec une épaisseur notable, a pour conséquence un excès marqué de pesanteur sur une aire limitée. Au point de vue de la prospection pratique une telle allure des courbes d'égale pesanteur indique nettement la région où les sondages doivent être entrepris avec un succès certain. Les questions théoriques qui s'y rattachent seront étudiées ailleurs.

Des cavernes volumineuses, plus ou moins inondées, ($0 < \rho < 1$), comme dans les causses ou les alpes dolomitiques, se révéleraient aussi par des aires fermées de faible intensité de la pesanteur, si toutefois les très grandes inégalités de relief du terrain permettaient de coordonner, sans exiger le calcul de trop de corrections topographiques locales, les mesures à la balance Eötvös.

Un autre cas particulier mériterait aussi une étude théorique particulière, c'est celui de filons métalliques lourds, de grande étendue, mais de faible épaisseur, quelques décimètres ou au plus quelques mètres, qu'il conviendrait de traiter comme des surfaces à travers lesquelles le potentiel seul, mais non sa dérivée normale, est continu ; la discontinuité, de la dérivée normale mesurerait, si la prospection permettait d'en déterminer la valeur la masse du filon par unité de surface.

Ces discussions allongeraient trop ce chapitre.

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES DENSITÉS DANS LA COUCHE SUPERFICIELLE DU GLOBE TERRESTRE, SUPPOSÉ SPHÉRIQUE.

28. Pour l'étude de l'ensemble du globe, je travaillerai en coordonnées sphériques, et je supposerai que les mesures de pesanteur effectuées à la surface réelle du globe, tel qu'il est, ont pu être, à l'aide de conventions raisonnables, transformées de manière à faire connaître sur une surface sphérique de référence (rayon R_0) la distribution du potentiel de gravitation et de la force suivant le rayon (déduction faite de la force centrifuge due à la rotation du globe. Ce travail préparatoire comporte bien des difficultés, dont quelques-unes de principe ; mais je ne veux pas les

discuter ici. Je suppose donc que le problème suivant a été substitué, avec une correspondance bien définie, au problème réel.

Étant donnée une sphère de rayon R_0 hors de laquelle il n'y a pas de matière, on demande ce que les lois de la gravitation font connaître relativement aux densités internes, quand on connaît la distribution du potentiel newtonien et l'attraction newtonienne (compatibles) sur la surface de la sphère.

La connaissance de la fonction de Green et de la fonction de Green-Neumann pour la sphère, permet de déduire l'une quelconque de ces deux fonctions de l'autre directement observée. On peut également les rattacher l'une et l'autre aux observations à la balance Eötvös.

Actuellement (1938), la meilleure manière de travailler serait de multiplier les observations continentales avec le pendule Holweg-Lejay et les observations marines avec les pendules Vening-Meinesz. Notons que le sous-marin n'est pas indispensable pour ces dernières et qu'il serait certainement possible d'aménager un laboratoire submersible de dimensions modérées, transportable à bord d'un navire d'explorations privé, tel que la *Princesse-Alice*, ou un yacht de plaisance, sans les complications administratives d'une installation à bord d'un vaisseau militaire.

29. Soient donc V_0 et V'_0 le potentiel newtonien et sa dérivée suivant le rayon r croissant, le long de la surface $r = R_0$ de la sphère de référence ; ce sont deux fonctions de la longitude α vers l'Est et du sinus de la latitude (μ) compté du pôle Sud ($\mu = -1$) vers le pôle Nord ($\mu = +1$).

Tout ce que l'on sait à l'intérieur se réduit à

$$(\mathrm{V^I}) \qquad V = V_0 + (r - R_0) V'_0 + (r - R_0)^2 f(r, \alpha, \mu),$$

qui assure la continuité de V et de $\frac{\partial V}{\partial r}$ entre l'intérieur et l'espace libre à travers la surface de référence. La fonction arbitraire f ne devient pas infinie pour $r = R_0$, ni sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial r}$.

Au centre ($r = 0$), le potentiel a une valeur déterminée, et la force doit avoir une grandeur et une direction déterminées X, Y dans l'équateur suivant le premier méridien, et en quadrature, Z suivant l'axe polaire.

Ces restrictions évidentes imposent à la fonction arbitraire f une forme assez compliquée. Quand on en tient compte, le potentiel V en tout point intérieur à la sphère ($0 \leqq r \leqq R_0$) doit être écrit (1)

$$(\mathrm{VII}) \quad V = V_0\left(1 + 2\frac{R_0 - r}{R_0}\right)\frac{r^2}{R_0^2} + V'_0(r - R_0)\frac{r^2}{R_0^2}$$
$$+ \left(\frac{R_0 - r}{R_0}\right)^2\left[\frac{R_0 + 2r}{R_0}C + \frac{r^2}{R_0^2}\mathcal{F}(x, y, z) + Xx + Yy + Zz\right].$$

On a, d'ailleurs, pour la densité, ρ :

$$(46) \qquad -4\pi G\rho = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\delta V,$$

en posant

$$(47) \qquad \delta = \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right).$$

D'où l'expression finale de la densité interne

$$(48) \quad -4\pi G\rho = V_0\frac{4r - 2R_0}{R_0^3} + \frac{3R_0 - 2r}{R_0^3}\delta V_0 + V'_0\frac{6r - 2R_0}{R_0^2} + \frac{r - R_0}{R_0^2}\delta V'_0$$
$$+ C\frac{8r - 2R_0}{R_0^3} + \frac{Xx + Yy + Zz}{r}\,\frac{6r - 4R_0}{R_0^2}$$
$$+ \frac{2}{R_0^4}(R_0^2 - 6R_0 r + 6r^2)\mathcal{F}(r, \mu, \alpha)$$
$$+ \frac{4(R_0 - r)r}{R_0^4}(R_0 - 2r)\mathcal{F}'_r + \frac{(R_0 - r)^2 r^2}{R_0^4}\mathcal{F}''_{r^2}$$
$$+ \frac{(R_0 - r)^2}{R_0^2}\,\frac{1}{r}\delta\left(X\cos\alpha\sqrt{1-\mu^2} + Y\sin\alpha\sqrt{1-\mu^2} + \mu Z\right)$$
$$+ \frac{(R_0 - r)^2}{R_0^4}\delta\mathcal{F}(r, \mu, \alpha),$$

C, X, Y, Z sont des constantes arbitraires.

$\mathcal{F}$ est une fonction arbitraire *finie* des trois coordonnées. Seules sont déterminées, par les mesures à la surface, les deux premières lignes de cette longue expression ; tout le reste représente la partie de l'expression de la densité qui n'est aucunement déterminée par les lois de la gravitation seules.

Rappelons les relations entre les coordonnées rectilignes x, y, z et les

---

(1) *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 989-991.

Au paragraphe 5, le coefficient de g_s est erroné; il laisserait un reste inacceptable près du centre (mai 1938).

coordonnées sphériques r, μ, α;

$$r\sqrt{1-\mu^2}\,c = x, \qquad r\sqrt{1-\mu^2}\,s = y, \qquad r\mu = z \qquad (c = \cos\alpha, \quad s = \sin\alpha);$$

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz,$$

$$r\sqrt{1-\mu^2}\,d\alpha = -\sin\alpha\,dx + \cos\alpha\,dy,$$

$$-r\,d\mu = \mu\sqrt{(1-\mu^2)}\cos\alpha\,dx + \mu\sqrt{(1-\mu^2)}\sin\alpha\,dy - (1-\mu^2)\,dz;$$

$$dx = c\sqrt{1-\mu^2}\,dr - r\sqrt{1-\mu^2}\,s\,d\alpha - rc\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$dy = s\sqrt{1-\mu^2}\,dr + r\sqrt{1-\mu^2}\,c\,d\alpha - rs\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$dz = \mu\,dr + r\,d\mu.$$

30. Comme au chapitre précédent, on peut imposer une grande variété de conditions additionnelles sans supprimer entièrement l'arbitraire.

On peut s'imposer la condition que chaque cône élémentaire d'angle unité [par exemple, 1 : 50 000 de la surface de la sphère, ou à peu près 10 000 (= 100 × 100) km carrés] contienne la même masse de matière ; ce qui est à peu près la condition d'isostasie des géodésiens.

On peut aussi bien s'imposer telle autre distribution en longitude et latitude :

$$\int_{r=0}^{r=R} \rho r^2\,dr = \mathfrak{M}(\alpha, \lambda), \tag{49}$$

soit suggérée par la géologie ou la séismique, soit par la pure fantaisie sans que les mesures à la surface cessent de répondre à chacune de ces distributions différentes de matière.

On peut y ajouter telle distribution globale que l'on voudra des actions mécaniques mutuelles entre ces cônes, etc.

31. Noyau isotrope hypothétique. — Sans insister davantage sur les hypothèses trop arbitraires, il est utile d'examiner la supposition très généralement adoptée d'un puissant noyau isotrope, formé de couches sphériques homogènes concentriques, et donnant, sur une sphère de rayon $R_0 - H$, un potentiel V_H et une composante normale $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_H$ csnstants.

C'est l'hypothèse la plus simple, et elle n'est pas contredite par ce que l'on sait jusqu'à présent (1938) de la propagation des séismes au loin.

Il suffit, pour représenter cette hypothèse, de prendre, dans la formule (V^{I}),

$$f(r, \mu, \alpha) = \frac{V_H - V_0}{H^2} + \frac{V'_0}{H} + (r + H - R_0)\left[\frac{V'_H + V'_0}{H^2} + 2\frac{V_H - V_0}{H^3}\right] + (r + H - R_0)^2 F(r, \mu, \alpha)$$

avec F arbitraire, finie ($R_0 - H \leqq r \leqq R_0$).

Donc

$$(V^{III}) \qquad V = V_0 + (r - R_0) V'_0 + \left(\frac{r - R_0}{H}\right)^2 (V_H - V_0 + HV'_0) + \left(\frac{r - R_0}{H}\right)^2 \frac{r + H - R_0}{H}(2V_H - 2V_0 + HV'_H + HV'_0) + (r - R_0)^2 (r + H - R_0)^2 F(r, \mu, \alpha).$$

32. Densité à la surface $\rho_1(\mu, \alpha)$. — Essayons de préciser davantage en empruntant uue donnée à l'observation géographique. On peut imaginer que l'on ait réussi à connaître suffisamment la densité des couches superficielles du globe. Pour toute la surface océanique, on peut prendre l'unité. A la surface des continents, même en laissant de côté les premiers mètres, trop remaniés, il y a une telle variété d'affleurements de niveaux géologiques différents, qu'il est impossible de se contenter d'une densité unique supposée uniforme ; il a bien fallu, en chaque point d'observation du pendule, choisir les densités les plus appropriées pour les corrections locales que nécessite le relief inégal sur une étendue de quelques décamètres autour de la station. Sans prétendre représenter dans toutes leurs variations les densités marquées par les cartes géologiques, même simplifiées, on ne peut pas se soustraire à la nécessité d'employer une densité fonction de la latitude et de la longitude $\rho(\mu, \alpha)$. Mettons-la en évidence dans V.

Il faut prendre pour cela

$$F(r, \mu, \alpha) = -\frac{4\pi G}{2H^2}\rho_0(\mu, \alpha) - \frac{1}{2R_0^2 H^2}\delta V_0 - \frac{R_0}{H^2}V'_0 - \frac{2}{H^2}[3V_H - 3V_0 + HV'_H + 2HV'_0] + (r - R_0)\mathcal{G}(r, \mu, \alpha),$$

où il reste la fonction $\mathcal{G}(r, \mu, \alpha)$ arbitraire finie.

D'où, groupant les termes,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{V^{IV}}) \quad \mathrm{V} = {} & \mathrm{V}_0 + (r - \mathrm{R}_0)\mathrm{V}'_0 + \left(\frac{r-\mathrm{R}_0}{\mathrm{H}}\right)^2 (\mathrm{V_H} - \mathrm{V}_0 + \mathrm{HV}'_0) \\
& + \left(\frac{r-\mathrm{R}_0}{\mathrm{H}}\right)^2 \left(\frac{r+\mathrm{H}-\mathrm{R}_0}{\mathrm{H}}\right) (2\mathrm{V_H} - 2\mathrm{V}_0 + \mathrm{HV'_H} + \mathrm{HV}'_0) \\
& + \left(\frac{r-\mathrm{R}_0}{\mathrm{H}}\right)^2 (r+\mathrm{H}-\mathrm{R}_0)^2 \left[\begin{array}{l} -2\pi\mathrm{G}\rho_0 - 6\mathrm{V_H} - 6\mathrm{V}_0 \\ -2\mathrm{HV'_H} - 4\mathrm{HV}'_0 - \dfrac{1}{2\mathrm{R}_0^2}\delta\mathrm{V}_0 - \mathrm{RV}'_0 \end{array}\right] \\
& + (r-\mathrm{R}_0)^3 (r+\mathrm{H}-\mathrm{R}_0)^2 \mathcal{G}(r, \mu, \alpha).
\end{aligned}
$$

33. Distribution par couches homogènes. — L'étude d'une distribution de densités par couches homogènes superposées est moins simple pour le globe sphérique entier que pour un étroit domaine plan. Un grand nombre de couches viennent affleurer jusqu'à la surface. Il faut commencer par les classer.

La première couche est la couche océanique de densité ρ^{I}, à peu près uniforme et très peu supérieure à 1. Outre les océans, elle devrait comprendre, dans une description détaillée, les fleuves qui s'y jettent, les lacs superficiels et les réservoirs souterrains qui les alimentent, etc. On devrait même commencer par la couche nullement négligeable des glaciers antarctique et arctique, et des glaciers continentaux, Sibérie, Canada, Groenland, Hymalaya et Thibet, Alpes, Caucase, etc.; mais quelle densité pourrait-on raisonnablement leur attribuer? D'ailleurs, bien que leur étendue superficielle soit considérable, il est peu probable que leur épaisseur dépasse quelques dizaines de mètres, ou tout au plus, et rarement la centaine. Dans un aperçu d'ensemble on pourra les regarder comme une pellicule superficielle, créant une discontinuité de la composante normale de l'attraction sur l'aire qu'ils recouvrent, discontinuité dont nous ignorons l'importance exacte, comme d'ailleurs nous ignorons le relief rocheux exact.

Pour l'océan, les sondages ont suffisamment décrit sa profondeur; cette première couche s'étend jusqu'à

$$r = \mathrm{R}_0 - \mathrm{S^{II}}(\mu, \alpha).$$

Dans ce domaine océanique $\mathrm{R}_0 - \mathrm{S^{II}} \leqq r \leqq \mathrm{R}_0$, j'ai donc

$$(\mathrm{V^V}) \qquad \mathrm{V} = -4\pi\mathrm{G}\rho^{\mathrm{I}}\frac{r^2}{6} + \sum_0^\infty (r-\mathrm{R})^n \mathcal{V}_n(\mu, \alpha)$$

avec

$$\mathcal{V}_0 = V_0 + 4\pi G \rho^{I} \frac{R_0^2}{6}, \qquad \mathcal{V}_1 = V'_0 + 4\pi G \rho^{I} \frac{R_0}{3},$$

— V'_0 est l'intensité de la pesanteur mesurée par la méthode et Vening-Meinez et corrigée de la force centrifuge.

$$(50) \quad 0 = \frac{1}{r^2}\sum_0^\infty \{ (r - R_0)^n [\delta V_n + n(n+1)\mathcal{V}_n] + (r + R_0)^{n-1}\, 2n^2 R_0 \mathcal{V}_n + n(n-1)(r - R_0)^{n-2} R_0^2 \mathcal{V}_n \}$$

qui détermine les V_n, à partir de V_0 et V_1 par

$$(n+2)(n-1) R_0^2 \mathcal{V}_{n+2} = -2(n+1)^2 R_0 \mathcal{V}_{n+1} - n(n+1)\mathcal{V}_n - \delta\mathcal{V}_n,$$

où S^{II} est négatif. On pourra, par exemple, prendre pour S^{II}, sur toute l'étendue du globe, le développement (1) en fonctions sphériques déterminé par M. Adalbert Prey.

V_0 est le potentiel à la surface océanique déduit de *toutes* les observations de pesanteur (corrigées de la force centrifuge) tant continentales qu'océaniques; opération dont la discussion mériterait à elle seule un chapitre entier.

Cette formule V^V nous conduit au fond de la mer, jusqu'à la surface de la *Lithosphère* et nous donne sur cette surface

$$(51) \qquad r = R_0 - S^{II}(\mu, \alpha),$$

$$(52) \qquad (V)_{S^{II}} = -4\pi G \rho \frac{(S^{II})^2}{6} + \sum_0^\infty (S^{II})^n \mathcal{V}_n$$

et

$$(53) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{S^{II}} = -4\pi G \rho^{I} \frac{S^{II}}{3} + \sum_0^\infty n (S^{II})^{n-1} \mathcal{V}_n.$$

34. La lithosphère. — La limite de la lithosphère est constituée par le fond des océans, et, pour la partie continentale, par une surface qui, suivant le mode adopté pour la réduction de la pesanteur, peut être, soit la sphère de rayon R_0, soit une surface suivant de plus près le relief

(1) *Abh. K. G. W. zu Göttingen* (*Math. Phys. Klasse Neue Folge*, Bd XI, 1). *Darstellung der Höhen und Tiefen verhätnisse der Erde*, etc.

que je désignerai encore par

$$r = \mathrm{R}_0 - \mathrm{S}^{\mathrm{II}}(\mu, \alpha).$$

De toute façon, et sans en discuter ici le mode de calcul, je suppose que l'on possède $\mathrm{V}_{\mathrm{S}^{\mathrm{II}}}$ et $\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\right)_{\mathrm{S}^{\mathrm{II}}}$ sur toute l'étendue de la lithosphère $(0 \leqq \alpha \leqq 2\pi, \ -1 \leqq \mu \leqq +1)$ marine et continentale [(52) et (53)].

Il s'agit de découper le sous-sol en couches d'égale densité, en s'aidant des cartes géologiques. Attribuant la densité ρ^{III} à la couche la plus récente, on trouvera sur la partie continentale une partie de la courbe d'intersection $\mathrm{C}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{IV}}$ de la surface S^{IV} qui la limite avec la surface externe S^{II} de la lithosphère; mais on ne connaît ni cette surface S^{IV}, ni la portion océanique $\mathrm{C}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{IV}}$ de la courbe d'intersection avec le fond des mers.

Sous cette couche ρ^{III}, la géologie conduira à en examiner une autre plus ancienne de densité suffisamment différente ρ^{V}. Pour elle aussi, on utilisera la courbe d'affleurement continentale observée, $\mathrm{C}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{VI}}$; mais on aura à chercher le reste de la courbe d'affleurement $\mathrm{C}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{VI}}$ sous-marine et la surface S^{VI} profonde; cette surface S^{VI} peut aussi être arrêtée à la surface précédente S^{IV} sur une partie de son contour.

Dans chacune de ces couches, partant d'un potentiel tel que

$$(\mathrm{V}^{\mathrm{VI}}) \qquad \mathrm{V} = -4\pi \mathrm{G} \rho^{\mathrm{VII}} \frac{r^2}{6} + \sum (r - \mathrm{S}^{\mathrm{VI}})^n \mathcal{V}_n^{\mathrm{VII}},$$

avec la condition

$$(54) \quad \mathcal{V}_{n+2}^{\mathrm{VII}} = \frac{1}{\mathrm{S}^2 + (n+2)(n+1)\dfrac{1}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}\right)^2 + (n+2)(n+1)(1-\mu^2)\left(\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mu}\right)^2} \times$$
$$\times \left[\begin{array}{l} 2(n+1)\left[\dfrac{1}{1-\mu^2}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \mathcal{V}_{n+1}}{\partial \alpha} + (1-\mu^2)\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mathcal{V}_{n+1}}{\partial \mu}\right] \\ \quad + (n+1)\mathcal{V}_{n+1}\,\delta \mathrm{S} - 2(n+1)^2 \mathrm{S}\mathcal{V}_{n+1} - \delta \mathcal{V}_n - n(n+1)\mathcal{V}_n \end{array}\right],$$

que fournit la condition

$$0 = \sum \left[\begin{array}{l} \mathcal{V}_n \left[\dfrac{2n}{r}(r-\mathrm{S})^{n-1} + n(n-1\,(r-\mathrm{S})^{n-2}\right] \\ + \dfrac{1}{r^2}\left\{\begin{array}{l} (r-\mathrm{S})^n \delta \mathcal{V}_n - 2n(r-\mathrm{S})^{n-1}\left[\dfrac{1}{1-\mu^2}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial \alpha} + (1-\mu^2)\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mathrm{V}_n}{\partial \mu}\right] \\ - n(r-\mathrm{S})^{n-1}\mathcal{V}_n\,\delta \mathrm{S} \\ + n(n-1)(r-\mathrm{S})^{n-2}\mathcal{V}_n \times \left[\dfrac{1}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}\right)^2 + (1-\mu^2)\left(\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mu}\right)^2\right] \end{array}\right\} \end{array}\right],$$

ou, mieux groupée,

$$(55)\quad 0 = \sum \frac{(r-S)^n}{r^2} \left[\begin{array}{l} n(n+1)\mathcal{V}_n + \delta\mathcal{V}_n + 2(n+1)^2 S\mathcal{V}_{n+1} - (n+1)\mathcal{V}_{n+1}\,\delta S \\ \quad - 2(n+1)\left[\dfrac{1}{1-\mu^2}\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \mathcal{V}_{n+1}}{\partial \alpha} + (1-\mu^2)\dfrac{\partial S}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mathcal{V}_{n+1}}{\partial \mu}\right] \\ \quad + \mathcal{V}_{n+2}\left[\begin{array}{l} S^2 \\ + (n+2)(n+1)\left[\dfrac{1}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 + (1-\mu^2)\left(\dfrac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2\right] \end{array}\right] \end{array} \right].$$

35. Ces formules provoquent les mêmes réflexions que celles du Chapitre II relatives au terrain plan.

Les conditions de continuité newtoniennes ne fournissent à elles seules aucune équation pour la détermination des surfaces de séparation successives S^{IV}, S^{VI}, ..., d'après les seules valeurs du potentiel et de la pesanteur observables.

Pour trouver des conditions, il faut y ajouter des hypothèses sur la distribution profonde ; par exemple, que sur une certaine sphère $r = R_0 - Z$, le potentiel et la force sont supposés uniformes, parce qu'on suppose la distribution de densité isotrope en dessous. Cela ajoute deux conditions auxquelles les surfaces extérieures sont assujetties.

Si l'on essaie de satisfaire avec deux couches géologiques de la lithosphère seulement, c'est-à-dire une seule surface inconnue S^{IV}, il y aura en général incompatibilité.

Si l'on essaie avec trois couches géologiques, c'est-à-dire deux surfaces inconnues S^{IV} et S^{VI}, les deux conditions pourront en général être satisfaites ; mais la recherche de la solution (même en arrêtant les développements en série à leurs premiers termes) semble devoir être très difficile, et la discussion sera rendue très délicate, par le fait que chaque couche est loin de s'étendre à toute la surface de la sphère.

Si l'on essaie avec quatre couches, il y aura trois surfaces à déterminer par deux conditions seulement ; on pourra donc s'imposer une condition nouvelle, par exemple, de gonflement purement radial ou de charriage latéral quelconque, ou d'équilibre statique de toute l'épaisseur de la croûte par compartiments pas trop petits, etc., quelque irrégulières que soient d'ailleurs les distributions de potentiel et de forces données par l'observation.

Avec cinq ou six, ... couches géologiques, l'arbitraire admissible reparaît complètement, comme quand on supposait la densité variable d'un point à l'autre.

Pour retrouver quelque chose qui ressemble à ce que les géodésiens cherchent à obtenir sous le nom d'*isostasie*, il faudrait entreprendre une discussion qui ne peut trouver place ici. Remarquons seulement que rien n'autorise à oublier d'écrire, comme l'oublient les géodésiens, les deux conditions de continuité du potentiel et de la force à travers la surface de séparation unique S^{IV} qu'ils cherchent à déterminer par la condition de gonflement purement radial d'un globe primitivement isotrope.

CHAPITRE IV.

LE CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE PERMANENT ET LES PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DU GLOBE [1].

36. Les mesures du champ magnétique à la surface des continents et des mers peuvent fournir, sur les propriétés magnétiques permanentes de l'intérieur de la Terre, des renseignements analogues à ceux que donne la pesanteur sur la distribution des densités, très incomplets eux aussi.

L'observation des trois composantes équivaut à la mesure de la composante normale et du potentiel magnétique. Le premier travail à faire, est, conformément aux indications classiques de Gauss, de séparer ce qui provient de sources extérieures, pour conserver seulement ce qui provient de sources intérieures à la surface de notre globe. C'est de ces mesures étendues à toute la surface du globe, océans et continents, qu'il s'agit de tirer le meilleur parti possible sans y ajouter d'hypothèses étrangères aux théories électromagnétiques de Coulomb et d'Ampère.

37. Il faut d'abord fixer les notations et rappeler les équations du champ permanent :

---

(1) Voir *C. R. Ac. Sc.*, 184, 1927, p. 1381.

E_1, E_2, E_3 composantes du champ électrique E suivant les trois directions rectangulaires x, y, z.

M_1, M_2, M_3 composantes du champ magnétique **M**.

Dans l'état permanent

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial y} = 0, \quad \ldots, \tag{56}$$

il y a un potentiel électrique V,

$$E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{57}$$

Si le champ magnétique est dû à une aimantation permanente, sans courants électriques ($j_1 = j_2 = j_3 = 0$), les équations d'Ampère

$$\frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial y} = 4\pi j_1, \ldots \quad \text{(rotation horaire, de l'Est vers l'Ouest)} \tag{58}$$

montrent qu'il y a un potentiel magnétique P.

$$M_1 = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad M_2 = -\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad M_3 = -\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{59}$$

Partant du potentiel d'un doublet, on a, comme potentiel au point x, y, z d'un champ d'intensité d'aimantation A_1, A_2, A_3 au point ξ, η, ζ (unités électromagnétiques),

$$P = \iiint \left[A_1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + A_2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + A_3 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\xi \, d\eta \, d\zeta, \tag{60}$$

où

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

qu'on transforme, en intégrant par parties, en

$$P = \iint \frac{l A_1 + m A_2 + n A_3}{r} \, d\Sigma - \iiint \operatorname{Div}(A) \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}, \tag{61}$$

où l, m, n est la normale extérieure au volume aimanté dont $d\Sigma$ est un élément de surface.

En résumé, le potentiel magnétique se calcule comme un potentiel newtonien dont la densité en volume serait $-\operatorname{Div} A$, et la densité superficielle A_n composante émergente normale de l'intensité d'aimantation.

A travers la surface libre, la dérivée normale du potentiel magnétique subit un changement brusque

$$\frac{\partial P_e}{\partial n} - \frac{\partial P_i}{\partial n} = -4\pi(A_i - A_e)_n. \tag{62}$$

Le potentiel est continu et satisfait à

$$\Delta P_i = +4\pi \,\mathrm{Div}\, A. \tag{63}$$

38. Pour former une expression utilisable du potentiel magnétique interne P_i, la mesure de $\frac{\partial P_e}{\partial n}$ et de P à la surface du corps ne suffit donc pas. Pour atteindre $\frac{\partial P_i}{\partial n}$, il faut, en outre, connaître l'intensité d'aimantation normale A_n de la couche superficielle. Rien n'est plus difficile : soit par des mesures magnétiques pures, soit par induction, ce n'est toujours que $\frac{\partial P_e}{\partial n}$ que l'on atteint; par arrachement aussi, mais cette fois en modifiant ce champ d'une manière inconnue par l'introduction de la petite masse de grande susceptibilité magnétique.

Il faudrait pouvoir détacher en chaque point de la surface un petit volume de la matière aimantée, sans que son aimantation intrinsèque soit changée par le travail mécanique de découpage; il faudrait, en outre, pouvoir évaluer le changement d'aimantation induite dans ce petit volume par le fait qu'on le sort du champ magnétique de l'ensemble du corps.

Après l'avoir étudié, il faudrait savoir le remettre en place et lui faire reprendre son aimantation avant de déboucher un autre petit volume pour le soumettre à la même étude, etc.

Pour une masse comme le globe terrestre, l'énoncé même de ces opérations montre qu'elles sont illusoires.

Pour un aimant de laboratoire, d'innombrables Mémoires expérimentaux ont été publiés au XIX^e^ siècle sans que les auteurs aient même analysé les difficultés à surmonter. Les moins incomplets sont de deux sortes : 1° ceux où l'on a constitué les masses à aimanter par superposition de lames d'acier minces, bien serrées par des brides non magnétiques, qu'on a aimantés, puis démontés pour étudier l'aimantation de chacune des lames; 2° ceux où l'on a usé à l'acide la surface d'un aimant massif et mesuré ses propriétés magnétiques à divers degrés d'usure.

Mais, jamais ces mesures n'ont été assez complètes pour que leurs résultats aient un sens, même grossier. Les lames, même serrées, ne s'aimantent pas comme de la matière magnétique continue; la seule existence d'une surface de contact équivaut à un effet de discontinuité notable, encore très mal connue maintenant. D'autre part, l'enlèvement de couches externes de plus en plus épaisses change l'aimantation de ce qui reste, d'une manière qui paraît très difficile à analyser.

La distribution des intensités d'aimantation dans un aimant artificiel de laboratoire est encore aujourd'hui à peu près inaccessible à l'expérience.

39. **Problèmes de prospection locale.** — En ce qui concerne la prospection magnétique, le problème utile est heureusement beaucoup plus simple. Les masses ferrugineuses cherchées ont toujours une aimantation supérieure de beaucoup à tout le terrain qui les entoure; elles produisent un champ magnétique qu'il est toujours facile de séparer suffisamment du champ géomagnétique général pour localiser la masse magnétique; et le mode de décroissance du champ depuis les régions les plus intenses jusqu'aux bords, à la surface du terrain, renseignera toujours avec assez de précision pour qu'on puisse indiquer une aire de trous de sonde devant rencontrer à coup sûr la masse ferrugineuse à une profondeur à peu près connue.

La partie économiquement utile de la prospection ne présente donc aucune difficulté technique sérieuse.

Il semble alors inutile de poursuivre une analyse théorique sans précision possible et assez décevante.

Je me borne à rappeler que l'indétermination est plus grande encore qu'en gravitation, puisqu'on ne sait pas mesurer l'intensité d'aimantation émergente qui reste comme une inconnue, et qu'après avoir écrit correctement, l'expression générale du potentiel magnétique, après en avoir déduit la formule qui donne Div A, il faudra encore remonter aux formules qui définiront les trois composantes A, et dans lesquelles de nouvelles indéterminées s'ajouteront à celles qui proviennent de l'expression générale du potentiel magnétique P.

Pour plus de clarté, j'écris les formules relatives au terrain plan.

Soient P_e, $(M_3)_e$ le potentiel magnétique et la composante verticale extérieure mesurés; soit $(A_3)_0$ l'intensité d'aimantation émergente, j'ai

(64) $$(M_3)_i = (M_3)_e - 4\pi(A_3)_0;$$

d'où

(VI) $$P_i = P_e - z(M_3)_e + z4\pi(A_3)_0 + \frac{z^2}{2}f(x, y, z)$$

avec f arbitraire fini. De là, je tire; d'où

(65) $$\Delta P_i = \delta P_e - z\,\delta M_e + z\,4\pi\,\delta(A_3)_0 + \frac{z^2}{2}\delta f + 2zf'_z + f.$$

Il reste à écrire $A_1 A_2 A_3$, à l'aide de

(66) $$\operatorname{Div} A = + \frac{1}{4\pi}\Delta P_i, \qquad \text{avec} \quad A_3 = (A_3)_0 \qquad \text{pour} \quad z = 0.$$

Cela conduit à

(VII) $$\begin{cases} 4\pi A_1 = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial B_2}{\partial z} - \dfrac{\partial B_3}{\partial y}, \\ 4\pi A_2 = \dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial B_3}{\partial x} - \dfrac{\partial B_1}{\partial z}, \\ 4\pi A_3 = \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial B_1}{\partial y} - \dfrac{\partial B_2}{\partial x} \end{cases}$$

avec

(VIII) $$\begin{cases} B_1 = z\,C_1(x, y, z) + \displaystyle\int_0^y (M_3)_e\,dy, \\ B_2 = z\,C_2(x, y, z), \end{cases}$$

où $B_3(x, y, z)$, C_1, C_2 sont des fonctions arbitraires finies.

Il y a donc quatre fonctions arbitraires finies $d'x$, y, z et une fonction $(A_3)_0$ arbitraire finie de x et y quand on s'assujettit uniquement aux lois générales du magnétisme.

40. Globe terrestre. Problème sphérique. — Soient θ la colatitude comptée à partir du pôle Nord, et α la longitude vers l'Est. Je rappelle les formules de la rotation d'un vecteur F ayant pour composante radiale F_r, méridienne vers le Sud F_θ, parallèle vers l'Est F_α :

(67) $$\begin{cases} \mathrm{Rot}_r = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, F_\alpha) - \dfrac{\partial}{\partial\alpha} F_\theta\right], \\ \mathrm{Rot}_\alpha = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \dfrac{\partial}{\partial\theta} F_r\right], \\ \mathrm{Rot}_\theta = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}F_r\right) - \dfrac{\partial}{\partial r}(rF_\alpha)\right] \end{cases}$$

et de la divergence

$$\text{(68)} \qquad \operatorname{Div} A = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_\theta \cot\theta\right).$$

Connaissant la partie due à des masses internes du champ magnétique extérieur mesurée à la surface de la sphère $r = R$, nous pouvons écrire pour le potentiel magnétique interne :

$$\text{(IX)} \quad P_i = (P_e)_R + (R - r)(M_r)_e - (R - r)\, 4\pi (A_r)_R + (R - r)^2 f(r, \theta, \alpha).$$

D'où

$$\text{(69)} \quad 4\pi \operatorname{Div} A = \Delta P_i = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] P_i,$$

ce qui conduit à prendre

$$\text{(X)} \quad \begin{cases} 4\pi A_r = \dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{1}{r \sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, B_\alpha) - \dfrac{\partial}{\partial \alpha} B_\theta\right], \\[2ex] 4\pi A_\alpha = \dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial P}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) - \dfrac{\partial}{\partial \theta} B_r\right], \\[2ex] 4\pi A_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{1}{\sin\theta} B_r\right) - \dfrac{\partial}{\partial r}(r B_\alpha)\right] \end{cases}$$

avec

$$\text{(XI)} \quad \begin{cases} B_\theta = (R - r)\, C_\theta(r, \theta, \alpha) - r \sin\theta \displaystyle\int_0^\alpha (M_r)_e\, d\alpha, \\[2ex] B_\alpha = (R - r)\, C_\alpha(r, \theta, \alpha), \end{cases}$$

C_α, C_θ, B_r sont des fonctions arbitraires finies des trois variables r, θ, α comme f.

C'est tout ce qu'il est permis de tirer des mesures superficielles et des lois du magnétisme.

41. On pourrait, en allongeant les formules, écrire l'existence d'un noyau central sphérique à aimantation uniforme. Mais la haute température, non douteuse, de presque tout le volume de ce noyau ne rend guère vraisemblable une aimantation uniforme de quelque intensité.

D'autre part, les roches des couches géologiques connues sont toutes bien peu magnétiques ; et une distribution d'aimantation dans la croûte de quelques centaines de kilomètres d'épaisseur semble bien insuffisante pour produire le champ magnétique permanent que nous mesurons.

Il paraît donc utile d'examiner quels courants permanents, sans accompagnement d'aucune aimantation permanente, peuvent produire le champ magnétique externe observé.

42. **Terrain plan. Courants électriques.** — Le champ magnétique externe peut aussi bien être dû à des courants internes qu'à une aimantation des roches. Écrivons donc les équations d'Ampère, pour chercher quelles peuvent être les densités j_2, j_2, j_3 de ces courants.

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi j_1 &= \frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial y},\\ 4\pi j_2 &= \frac{\partial M_3}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial z},\\ 4\pi j_3 &= \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Les trois composantes du champ magnétique sont continues à la surface du globe; donc directement connues par les mesures extérieures.

Dans l'état permanent, il n'y a pas de courant émergeant,

$$(j_3)_0 = 0.$$

Choisissons *arbitrairement* trois fonctions de x, y, z finies partout $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$; tout ce que l'on sait du champ magnétique se résume en

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} M_1 &= (M_1)_0 + z\mathfrak{M}_1,\\ M_2 &= (M_2)_0 + z\mathfrak{M}_2,\\ M_3 &= (M_3)_0 + z\mathfrak{M}_3,\end{aligned}\right.$$

qui donnent

$$(\mathrm{XII})\qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi j_1 &= \mathfrak{M}_2 + z\frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial z} - z\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial y} - \frac{\partial (M_3)_0}{\partial y},\\ 4\pi j_2 &= z\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial x} + \frac{\partial (M_3)_0}{\partial x} - \mathfrak{M}_1 - z\frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial z},\\ 4\pi j_3 &= \frac{\partial (M_1)_0}{\partial y} + z\frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial y} - \frac{\partial (M_2)_0}{\partial x} - z\frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

La condition en $(j_3)_0$, déjà satisfaite par le champ extérieur mesuré, l'est aussi par les termes complémentaires qui ont z en facteur.

C'est tout ce que fournissent les lois de l'électromagnétisme.

Pour aller plus loin, il faudrait y ajouter des hypothèses sur l'origine des courants, électrochimique, thermoélectrique, inductive, etc., et sur la distribution des conductibilités des roches, c'est-à-dire précisément ce qu'on cherche. C'est à peine si les équations tirées de l'électromagnétisme et des mesures extérieures limitent un peu le champ des hypothèses acceptables.

43. Globe terrestre. — Écrivons les mêmes conditions en coordonnées sphériques.

$$\text{(XIII)}\qquad \begin{cases} 4\pi j_\alpha = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{M}_\theta) - \dfrac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial\theta}\right], \\ 4\pi j_\theta = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\mathrm{M}_r\right) - \dfrac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{M}_\alpha)\right], \\ 4\pi j_r = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\mathrm{M}_\alpha) - \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{M}_\theta\right]. \end{cases}$$

La continuité du champ magnétique à travers la surface est assurée en prenant

$$\text{(XIV)}\qquad \begin{cases} \mathrm{M}_\alpha = (\mathrm{M}_\alpha)_\mathrm{R} + (r-\mathrm{R})\,\mathfrak{M}_\alpha, \\ \mathrm{M}_\theta = (\mathrm{M}_\theta)_\mathrm{R} + (r-\mathrm{R})\,\mathfrak{M}_\theta, \\ \mathrm{M}_r = (\mathrm{M}_r)_\mathrm{R} + (r-\mathrm{R})\,\mathfrak{M}_r, \end{cases}$$

où $(\mathrm{M}_\alpha)_\mathrm{R}$, ... sont les valeurs observées à la surface ($r = \mathrm{R}$) du champ extérieur, et les $\mathfrak{M}_\alpha$, ... trois fonctions arbitraires finies de α, θ, r.

Le courant extérieur étant nul, il en est de même du courant j_r interne émergent, à cause du facteur $(r - \mathrm{R})$ des termes arbitraires $\mathfrak{M}_\alpha$ et $\mathfrak{M}_\theta$.

La seule condition générale qui s'impose est que le champ magnétique ait au centre une grandeur et une direction définies; et aussi la densité de courant électrique. Cela introduit dans les formules générales six constantes inconnues (probablement nulles) et les complique en apparence sans ajouter rien d'utile aux renseignements qu'on en peut tirer. On peut les trouver dans la Note de 1927 aux *Comptes rendus* (**184**, p. 1381).

CONCLUSION.

44. Conclusion. — On peut résumer tout ce qui précède en peu de mots :

La connaissance d'un point et de la tangente en ce point ne détermine pas une courbe dont on ne connaît pas l'équation différentielle (du deuxième ordre).

La connaissance d'un sommet et de la direction du premier côté ne détermine pas une ligne polygonale dont on ne sait rien de plus.

De même, pour tirer des mesures superficielles, de pesanteur ou de magnétisme, des renseignements sur la distribution profonde des densités, de l'aimantation ou des courants électriques, il faudrait y joindre, soit des observations, soit des hypothèses distinctes de la théorie des attractions newtoniennes ou de la théorie des actions électromagnétiques, et équivalentes à des équations aux dérivées partielles déterminées. Les renseignements ainsi réunis se compléteraient ; ils ne se contrôleraient pas les uns les autres, contrairement à l'impression que laisse la lecture des travaux des géodésiens sur l'« isostasie ». J'aime à croire que les géodésiens n'en sont pas dupes ; mais certainement la plupart des géologues et géographes qui les lisent sont exposés à prendre pour des contrôles « mathématiques » des accords numériques entre deux manières différentes de « corriger » les données directes d'observation, par des considérations qui ne relèvent en réalité d'aucune théorie mécanique. C'est une illusion assez fréquente des bureaux de calcul.

Rien n'est plus naturel que la curiosité relative à l'état interne du globe, soit dans l'épaisseur de la croûte, soit aux grandes profondeurs. Rien n'est plus intéressant que les aperçus fournis depuis une cinquantaine d'années par l'étude des rides du géoïde (bien difficiles à définir correctement) et par celle de la durée de propagation des séismes lointains. Mais il ne faut pas confondre ces aperçus avec les conséquences directes des théories de la gravitation et de l'électromagnétisme. C'est ce que j'ai voulu rappeler, avec insistance, dans ces quelques conférences, en isolant bien le certain de l'hypothétique.

(D'après des conférences
données à l'Institut Henri Poincaré
les 11, 13, 18 et 20 mai 1938.)

FIN.