ANNALES DE L'I. H. P.

F. TRICOMI

Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss, et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique

Annales de l'I. H. P., tome 8, nº 3 (1938), p. 111-149

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1938__8_3_111_0>

Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss, et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique

par

F. TRICOMI.

---

1. **Introduction.** — On connaît le rôle fondamental qu'a joué et joue, dans le développement de l'analyse moderne, le passage du fini à l'infini, du discontinu au continu. Par exemple, prenant comme point de départ la théorie élémentaire des systèmes d'équations linéaires

$$\sum_{t=1}^{n} k_{st} x_t = c_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

on a été conduit par ce processus, d'une façon toute naturelle, à la théorie des équations intégrales linéaires

$$\int_a^b K(s, t)\, X(t)\, dt = C(s) \qquad (a \leqq s \leqq b), \tag{2}$$

qui constitue à l'heure actuelle un des outils les plus indispensables de l'analyse. Mais ce n'est pas tout. En effet, on peut considérer les égalités (1) de deux points de vue différents : soit comme des *équations*, c'est-à-dire en supposant le c_s donné et les x_t des inconnues à déterminer, soit comme des *formules de transformation* permettant de passer de certaines valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arbitrairement données, aux valeurs correspondantes de $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Le premier point de vue donne, par le passage à l'infini, la théorie des équations intégrales.

Le second conduit à la théorie plus récente des *transformations fonctionnelles linéaires*, dans laquelle une égalité du type (2), qu'on écrit maintenant de préférence sous la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, F(t)\, dt, \tag{3}$$

est envisagée comme une certaine *opération* $\mathfrak{T}$ faisant passer d'une certaine *fonction-objet* $F(t)$ à la *fonction-résultat* $f(s) = \mathfrak{T}[F(t)]$. Plus généralement, on peut envisager des transformations fonctionnelles avec une intégrale de Stieltjes, c'est-à-dire de la forme

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, d\Phi(t). \tag{4}$$

En vertu d'un théorème bien connu de M. Riesz [1], ces transformations épuisent (essentiellement) la classe des transformations fonctionnelles *distributives*, c'est-à-dire des transformations $\mathfrak{T}$ telles que

$$\mathfrak{T}[k_1 F_1(t) + k_2 F_2(t)] = k_1 \mathfrak{T}[F_1(t)] + k_2 \mathfrak{T}[F_2(t)], \tag{5}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes quelconques.

Bien que la théorie des transformations fonctionnelles linéaires soit assez récente en tant que branche autonome de l'analyse fonctionnelle, maintes transformations du type (3) ont depuis longtemps droit de cité en mathématiques. Telle, par exemple, la transformation la plus célèbre et, peut-être, la plus importante d'entre elles : la *transformation de Laplace*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}[F(t)], \tag{6}$$

déjà utilisée par Euler en 1737 [2]. De même la *transformation de Fourier*

$$f(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ist} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{F}[F(t)], \tag{7}$$

qui est implicitement contenue dans le théorème de réciprocité de

---

(1) F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, (*Comptes rendus*, 149, 1909, p. 974-977); *Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires* [*Ann. École Normale sup.*, (3), 31, 1914, p. 130-132].

(2) *Voir* page 7 du récent livre de G. Dœtsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin, Springer, 1937. Dans la suite ce livre sera souvent cité, par la seule indication du nom de son auteur.

Fourier (1822), la *transformation de Mellin*

$$f(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\,\mathrm{F}(t)\,dt \equiv \mathfrak{M}[\mathrm{F}(t)]. \tag{8}$$

qui remonte à l'année 1895 (*Voir* Doetsch, p. 114-116), et la *transformation de Gauss*

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}}\,\mathrm{F}(t)\,dt \equiv \mathcal{G}^{(m)}[\mathrm{F}(t)]. \tag{9}$$

dont le nom est récent ([3]), mais que Weierstrass avait déjà étudiée en 1885 ([4]).

Toutefois la théorie des transformations fonctionnelles linéaires doit être considérée comme très récente, parce que c'est seulement dans les travaux publiés ces dernières années (à partir de 1923 environ), qu'on commence à poser d'une façon systématique et suivie le problème suivant : *Qu'advient-il lorsqu'on transforme une certaine équation, un certain problème, etc. par une transformation fonctionnelle $\mathfrak{T}$, par exemple par la transformation $\mathfrak{L}$ de Laplace?*

Il s'agit là d'une idée tout à fait simple et naturelle mais qui s'est révélée très féconde, aussi bien du point de vue théorique que du point de vue des applications.

Dans ces conférences, après une courte esquisse des propriétés essentielles des transformations précédentes, nous examinerons surtout l'application des transformations de Laplace et de Fourier au calcul des probabilités (méthode de la fonction caractéristique), ainsi que celle de la transformation de Gauss à la statistique mathématique (décomposition d'une courbe de fréquences en ses composantes « *en cloche* »).

2. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace. — Le domaine fonctionnel le mieux adapté à l'étude de la transformation de Laplace semble être le domaine des fonctions-objet $\mathrm{F}(t)$ satisfaisant aux conditions suivantes (Dœtsch, p. 13) :

([3]) Ce nom, généralement adopté aujourd'hui, a été proposé par nous-même dans notre Mémoire : *Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione* (*Comm. Math. Helvetici*, 8, 1935, p. 70-87).

([4]) K. Weierstrass, *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente*, Sitzungsber. Berliner Akademie, 1885; *Math. Werke*, 3, p. 1-37.

1° La fonction $F(t)$ est *proprement* intégrable, *au sens de Riemann*, dans tout intervalle $0 < T_1 \leqq t \leqq T_2$ et, par conséquent, bornée dans ces intervalles.

2° Elle est absolument intégrable (proprement ou improprement) jusqu'au point $t = 0$; la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{T} |F(t)|\, dt$$

existe donc et a une valeur finie.

3° Il existe au moins une valeur s_0 de s (réelle ou complexe) pour laquelle l'intégrale (6) converge.

Lorsque la fonction-objet appartient à ce domaine (qu'on appellera brièvement *domaine* « L »), on démontre aisément (Dœtsch, p. 14-17) que, si l'intégrale (6) est *absolument* convergente en $s = s_0$, elle sera de même absolument convergente dans tout le demi-plan $\mathcal{R}s \geqq \mathcal{R}s_0$; de même, si elle converge (absolument ou non) pour $s = s_0$, elle convergera aussi (absolument ou non) dans le demi-plan $\mathcal{R}s > \mathcal{R}s_0$. Une fois ces résultats établis, il ne reste plus qu'un petit pas à faire pour arriver à la conclusion suivante :

Le champ de convergence simple de l'intégrale de Laplace (6) *est un demi-plan $\mathcal{R}s > \beta$, qui peut se confondre exceptionnellement* ($\beta = -\infty$) *avec le plan complexe s tout entier. De même le champ de convergence absolue, s'il existe, est constitué par un demi-plan $\mathcal{R}s > \alpha \geqq \beta$ et exceptionnellement par le plan tout entier.*

En d'autres termes, il existe deux *abscisses de convergence* α et β ($\alpha \geqq \beta$) qui déterminent presque complètement (c'est-à-dire à l'exception des droites $\mathcal{R}s = \alpha$ et $\mathcal{R}s = \beta$, où le comportement de l'intégrale de Laplace [5] ne peut pas être précisé à l'avance), les champs de convergence absolue ou de convergence simple de l'intégrale (6).

Ces résultats présentent une analogie frappante avec les propriétés de

---

[5] Toutefois on peut démontrer que la droite $\mathcal{R}s = \alpha$ est située soit entièrement dans le champ de convergence absolue de l'intégrale, soit entièrement en dehors de ce champ.

convergence des *séries de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}. \tag{10}$$

Cette analogie n'est pas fortuite, car la transformation de Laplace n'est autre chose que l'analogue continu d'une série de Dirichlet. En effet, considérons pour un instant la transformation de Laplace sous la forme de Stieltjes, à savoir sous la forme

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\mathrm{F}(t); \tag{11}$$

il suffit alors de prendre comme fonction-objet $\mathrm{F}(t)$ une fonction *en escalier* avec des *marches* de hauteurs a_0, a_1, a_2, ..., aux points λ_0, λ_1, λ_2, ..., pour que la fonction $f(s)$ donnée par (11) se réduise à la série (10). A ce sujet, on a même remarqué que certains résultats de la théorie des séries de Dirichlet, par exemple la formule du calcul des coefficients, restent à peu près inexplicables si l'on ne considère pas la formule (10) comme un cas particulier de (11). Remarquons aussi que la transformation de Laplace comprend même, en un certain sens, les *séries de puissances* comme cas particulier. En effet, si l'on pose

$$\lambda_n = n, \qquad e^{-t} = z,$$

la série (10) se réduit à la série de puissances

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

Cette dernière remarque est importante parce qu'elle fournit un fil conducteur précieux, pour le développement de la théorie de la transformation de Laplace, à savoir l'analogie avec les séries de puissances. Par exemple, on est ainsi tout naturellement conduit à se demander si les fonctions-résultat correspondant aux fonctions-objet « L » (qu'on peut appeler, plus brièvement, *fonctions* « *l* ») sont ou non des fonctions analytiques. La réponse (*voir* Dœtsch, p. 43-46) est affirmative en tous les cas, et l'on trouve que la fonction analytique $f(s)$, régulière au moins dans le demi-plan $\mathcal{R}s > \beta$ [6] est représentable, *dans le cas* $\beta < 0$,

---

[6] Toutefois, il existe une différence d'avec la théorie des fonctions analytiques : ici la droite-limite $\mathcal{R}s = \beta$ peut ne contenir aucun point singulier de la fonction $f(s)$.

au moyen de la série

$$f(s) = M_0 - \frac{M_1}{1!}s + \frac{M_2}{2!}s^2 - \ldots, \tag{12}$$

où

$$M_k = \int_0^\infty t^k F(t)\,dt \tag{13}$$

désigne le $k^{\text{ième}}$ *moment* ($k = 0, 1, 2, \ldots$) de la fonction $F(t)$.

3. Dérivation. Sa traduction au moyen de la transformation de Laplace. — L'analyticité de la fonction-résultat $f(s)$ implique immédiatement l'existence de toutes les dérivées $f'(s)$, $f''(s)$, ... de cette fonction, au moins dans le demi-plan de convergence $\mathcal{R}s > \beta$. De plus, on démontre (Dœtsch, p. 43) que, dans ce domaine, les dérivées sont toutes calculables au moyen des dérivations sous le signe somme, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}[F(t)] = -\mathfrak{L}[tF(t)] \tag{14}$$

et, plus généralement,

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathfrak{L}[F(t)] = (-1)^n \mathfrak{L}[t^n F(t)] \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Réciproquement, on démontre, essentiellement au moyen d'une intégration par parties (*voir* Dœtsch, p. 152-153) que *si la fonction* $F(t)$ *admet, pour* $t > 0$, *une dérivée* $F'(t)$ *appartenant à la classe* « L » *et s'il existe la valeur limite* $F(0)$ *de* $F(t)$ *pour* $t \to 0$, *les abscisses de convergence* β *et* β' *de* $\mathfrak{L}[F(t)]$ *et* $\mathfrak{L}[F'(t)]$ *satisfont à la relation* $\beta \leqq \beta'$ *et, s'il est* $\mathcal{R}s > \beta'$, *on aura*

$$\mathfrak{L}[F'(t)] = s\,\mathfrak{L}[F(t)] - F(0). \tag{16}$$

Plus généralement, dans des conditions analogues, on a

$$\mathfrak{L}[F^{(n)}(t)] = s^n \mathfrak{L}[F(t)] - F^{(n-1)}(0) - sF^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1}F(0) \tag{17}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

La transformation de Laplace traduit donc, en substance, la *dérivation* dans l'un des deux domaines « L » et « l », par la *multiplication par la variable indépendante* dans l'autre domaine.

L'importance capitale de ce fait est facile à saisir : des équations différentielles ordinaires pourront se traduire, avec l'aide de la transformation de Laplace, en équations *algébriques;* des équations aux dérivées partielles (avec deux variables indépendantes) en équations différentielles *ordinaires*, etc. En d'autres termes, la transformation de Laplace rend, dans l'intégration des équations différentielles, les mêmes services que les méthodes symboliques (de Heaviside et semblables) et avec la même simplicité, mais avec des avantages essentiels de sécurité et de généralité et avec une plus grande souplesse. Au fond, la différence entre les deux méthodes n'est plus, aujourd'hui, très grande, car les théoriciens sérieux de ce symbolisme travaillent exclusivement avec l'*intégrale de Carson* (7)

$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-px}h(x)\,dx.$$

qui ne diffère de l'intégrale de Laplace que par un facteur p; toutefois leurs travaux ne sont pas toujours exempts des insuffisances de jadis, et il serait par conséquent souhaitable de les voir enfin abandonner des méthodes périmées.

4. **Application à un problème de la théorie de la chaleur.** — Pour se faire une idée exacte de la méthode d'intégration des équations différentielles fondée sur la transformation de Laplace, il est utile de l'appliquer à un exemple concret. Nous choisirons pour cela un problème classique de la théorie de la chaleur, sur lequel nous aurons à revenir plus tard : Le problème du *refroidissement* d'un conducteur de chaleur filiforme, infiniment long dans les deux sens. Nous supposons de plus qu'il est isolé latéralement, qu'il a une conductibilité intérieure égale à 1, qu'il se trouve disposé le long de l'axe des x et que la température de ses extrémités est maintenue constante (0°).

Il s'agit donc de déterminer une fonction $U(x, t)$ (température au temps t du point d'abscisse x) connaissant ses valeurs $U(x, 0) = F(x)$ à l'origine des temps, sachant que, par toutes les valeurs de t, on a

$$\lim_{x\to-\infty} U(x, t) = \lim_{x\to\infty} U(x, t) = 0 \tag{18}$$

et sachant enfin qu'elle doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

(7) *Voir*, par exemple, P. Humbert, *Le Calcul symbolique*. Paris, Hermann, 1934 (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 147).

Appelons u la transformée de Laplace de U considérée comme fonction de t; nous posons donc

$$(20)\qquad u(x, s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{U}(x, t)\,dt = \mathcal{L}[\mathrm{U}].$$

En vertu de la formule (16), on en tire, à condition de se borner à des solutions *assez régulières* de (19),

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}\right] = su - \mathrm{F}(x)$$

et

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Par conséquent, l'équation aux dérivées partielles (19) peut se ramener, au moyen de la transformation de Laplace, à l'équation différentielle *ordinaire*

$$(21)\qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - su = -\mathrm{F}(x),$$

dans laquelle nous écrivons $d^2 u/dx^2$ au lieu de $\partial^2 u/\partial x^2$, car s ne joue maintenant que le rôle d'un paramètre. Fait digne d'être relevé : l'équation (21) tient déjà compte de la condition initiale $\mathrm{U}(x, 0) = \mathrm{F}(x)$. Il s'agit ici d'un des caractères essentiels de la méthode de la transformation de Laplace, qui montrent sa supériorité sur les méthodes symboliques.

Notre problème est ainsi ramené à l'intégration de l'équation différentielle (21) avec les conditions aux limites (18), qui deviennent maintenant

$$(22)\qquad \lim_{x \to -\infty} u(x, s) = \lim_{x \to \infty} u(x, s) = 0.$$

La meilleure méthode d'intégration dans ce cas, c'est la méthode de la fonction de Green G.

Les deux intégrales fondamentales de l'équation homogène

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - su = 0$$

correspondant à (21) sont :

$$u = e^{\sqrt{s}.x} \qquad \text{et} \qquad u = e^{-\sqrt{s}.x},$$

en supposant s et $\sqrt{s}$ positives, la première satisfait à la première condition (22) et la seconde à la deuxième. Par des considérations tout à fait classiques, on trouve ainsi que

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}|x-\xi|}.$$

Il s'ensuit que la solution de l'équation (21) satisfaisant aux conditions aux limites (22), est donnée par la formule

$$(23) \qquad u(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{s}|x-s|} F(\xi)\, d\xi.$$

Il s'agit maintenant de remonter de l'espace « l » à l'espace « L », c'est-à-dire de la fonction-résultat u à la fonction-objet U. Ce passage est souvent le plus difficile dans l'application de la méthode de Laplace; cependant, cette fois-ci il est aisé, car une des formules les plus connues sur la transformation de Laplace :

$$(24) \qquad \mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \qquad (a \geqq 0)$$

(*voir* Dœtsch, p. 25), va nous permettre d'écrire (23) sous la forme

$$u(x, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right] F(\xi)\, d\xi,$$

d'où, en interchangeant les deux symboles $\mathfrak{L}$ et $\int$, on a

$$(25) \qquad U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} F(\xi)\, d\xi.$$

Naturellement, il serait à présent nécessaire de revenir sur plusieurs des déductions précédentes, pour en discuter la légitimité. Cependant, puisque la formule (25) est une des formules classiques ([8]) de la théorie de la chaleur et que sa déduction précédente n'a qu'un intérêt méthodologique, nous croyons pouvoir nous en dispenser ici. Nous nous bornerons à rappeler seulement que dans des questions de ce genre, la

---

([8]) *Voir*, par exemple, E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1915, p. 300-301.

chose la plus délicate n'est pas la question de l'existence de la solution, mais plutôt celle de son unicité ([9]).

5. **De l'inversion de la transformation de Laplace.** — De l'exemple précédent se dégagent assez clairement les lignes essentielles de la méthode de la transformation de Laplace et de son application à l'intégration des équations différentielles ou intégrales, etc. On voit précisément que cette méthode comporte trois phases principales :

1° *Transport de l'équation* (*ou, plus généralement, du problème*) *de l'espace* « L » *des fonctions-objet à l'espace* « l » *des fonctions-résultat, ou vice versa.*

2° *Résolution du problème transformé.*

3° *Retour à l'espace fonctionnel primitif.*

De ces trois phases, la troisième est souvent la plus difficile, car l'*inversion* de la transformation de Laplace, c'est-à-dire le passage de la fonction transformée $f(s)$ à la fonction-objet $F(t)$, n'est pas toujours très aisé.

A ce sujet se pose, naturellement, la question préalable de l'*unicité* de la fonction $F(t)$. Un théorème classique de Lerch (*voir* Dœtsch, p. 35), qui remonte à 1903, fournit une réponse assez satisfaisante à cette question :

Si la fonction-résultat $f(s)$ *dans la transformation de Laplace* (6) *est identiquement nulle, ou même si l'on sait seulement que*

$$f(s_0 + mh) = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{26}$$

où s_0 *est un point quelconque du demi-plan de convergence et* h *un nombre réel quelconque, la fonction* $F(t)$ *est nulle presque partout.*

Ce beau théorème, dont la démonstration est fondée sur le théorème d'approximation de Weierstrass, a été généralisé récemment (Wintner, 1933; *voir* Dœtsch, p. 38), dans le sens que la condition (26) est remplacée par l'autre, moins restrictive :

$$f(s_0 + \nu_m) = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{26'}$$

([9]) *Voir*, à cet égard, G. Dœtsch, *Les équations aux dérivées partielles du type parabolique* (*L'Enseign. math.*, 35, 1936, p. 43-87); ou le livre cité ([2]), 20e Chap., p. 362-366.

où $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ est une suite de nombres réels et positifs, telle que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_m}$$

soit divergente. (La démonstration est basée sur la généralisation de Müntz du théorème de Weierstrass). Plus récemment encore (1937), M. Amerio (10) a démontré que, sous une condition supplémentaire et qui n'est pas trop restrictive, une transformée de Laplace non identiquement nulle, ne peut s'annuler une infinité de fois sur une parallèle quelconque à l'axe réel. Ces derniers théorèmes sont intéressants surtout parce qu'ils démontrent l'impossibilité de certaines distributions des zéros d'une transformée de Laplace.

Revenons maintenant à la question de l'inversion de la transformation de Laplace; on observera avant tout qu'en maints cas l'inversion est possible, comme au paragraphe précédent, c'est-à-dire qu'on l'obtient en cherchant la fonction-résultat donnée dans un ensemble connu de transformées de Laplace. Il y aura donc avantage à avoir à disposition une liste aussi complète que possible des transformées de Laplace de fonctions connues (11). Mais il est évident que cela ne suffit pas; il faudra donc chercher aussi d'autres méthodes d'inversion.

Dans ce but prenons comme point de départ, au lieu de (6), la transformation *bilatérale* de Laplace

$$(27) \qquad f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\, F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}_{\mathrm{II}}[F(t)],$$

qui se réduit manifestement à la transformation usuelle (6) si la fonction $F(t)$ est toujours nulle pour $t < 0$.

En posant

$$(28) \qquad s = i\sigma, \qquad f(s) = f_1(\sigma),$$

(10) L. Amerio, *Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace* [*Rend. Accad. Lincei*, (6), 25, 1937, p. 205-213].

(11) On trouvera une telle liste à la fin (p. 401-403) du livre de Dœtsch, cit. (2).

Voir aussi le livre de Campbell et Foster, *Fourier integrals for practical applications* (*Bell telephone system; technical publications*, 1931), quoiqu'il s'agit là proprement de transformés de Fourier; et la monographie de M. Humbert, cit. (7).

la transformation (27) se réduit à la transformation de Fourier

$$f_1(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma t}\,F(t)\,dt \equiv \mathcal{F}[F(t)], \tag{29}$$

dont l'inversion est un problème classique.

Avant de nous occuper de cette inversion, il convient néanmoins de nous arrêter un moment sur les propriétés essentielles de la transformation bilatérale, en observant d'abord que, avec une décomposition de l'intégrale en deux parties, (27) peut s'écrire

$$f(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{-st}\,F(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-st}\,F(t)\,dt.$$

On voit ainsi que, tandis que la deuxième intégrale sera convergente, si $\Re s$ est *plus grand* qu'une certaine quantité β, la première ne convergera que lorsque $\Re s$ sera *plus petit* qu'un certain nombre β'. Il faut donc distinguer les trois cas $\beta < \beta'$, $\beta = \beta'$ et $\beta > \beta'$. Dans le premier cas, l'intégrale (27) convergera dans la *bande verticale* $\beta < \Re s < \beta'$, dans le second elle ne *peut* converger que sur la droite $\Re s = \beta = \beta'$, et dans le troisième cas elle ne converge jamais.

Le champ de convergence de la transformation bilatérale de Laplace est donc, en général, une bande verticale; par conséquent, le domaine de convergence de la transformation de Fourier sera une bande horizontale, pouvant se réduire exceptionnellement à une droite horizontale seulement, par exemple à l'axe réel.

Remarquons enfin que la formule fondamentale (16), *sans le terme* $-F(0)$, est également valable pour la transformation bilatérale de Laplace, et que cette dernière, en posant

$$e^{-t} = \tau, \qquad F(t) = F_1(\tau), \tag{30}$$

se réduit à la transformation de Mellin (8); on a précisément que

$$\mathfrak{M}[\Phi(t)] = \mathcal{L}_{\text{II}}[\Phi(e^{-t})], \qquad \mathcal{L}_{\text{II}}[F(t)] = \mathfrak{M}[F(-\log t)]. \tag{31}$$

Revenant maintenant au problème de l'inversion, remarquons d'abord que le théorème classique d'inversion de Fourier précise qu'on obtient l'inversion de la transformation de Fourier (7), sous certaines conditions bien connues, au moyen de la formule

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \overset{\star}{\int}_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(s)\, ds, \tag{32}$$

où l'astérisque signifie que, le cas échéant, l'intégrale doit être regardée comme une intégrale principale de Cauchy et où $F(t)$ doit être remplacée par $\frac{1}{2}[F(t+0)+F(t-0)]$ aux points de discontinuité. Pour cela, il suffit par exemple (*voir* Dœtsch, p. 91), que la fonction $F(t)$ soit absolument intégrable entre $-\infty$ et $+\infty$ et à variation bornée, au moins au voisinage du point t considéré. Ce sujet, et plus particulièrement la question si importante et si actuelle des transformations fonctionnelles involutives en général ([12]), appellerait beaucoup de commentaires; nous nous bornerons cependant à rappeler ici : 1° la remarquable formule d'inversion de M. Paul Lévy ([13])

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \overset{\star}{\int}_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1}{is} f(s)\, ds, \tag{33}$$

et 2° une formule d'inversion qu'on obtient en appliquant (32) au moyen de la substitution (28), dans le domaine de la transformation bilatérale de Laplace, à savoir

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \overset{\star}{\int}_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{st} f(s)\, ds, \tag{34}$$

où $\varkappa$ désigne une abscisse quelconque de la bande de convergence de $\mathfrak{L}_{II}[F(t)]$.

La transformation bilatérale de Laplace comprenant la transformation ordinaire (6) comme cas particulier, la formule (34) peut s'appliquer même à l'inversion de cette dernière; cependant il ne faut pas oublier, comme on l'a fait trop souvent, que la convergence de l'intégrale (34) *ne suffit pas* pour en déduire que $\mathfrak{L}[F(t)] = f(s)$. Pour cela il faut, en

---

([12]) *Voir*, par exemple, ma conférence du 18 février 1937 : *Recenti ricerche sulle trasformazioni funzionali lineari* (*Conferenze di Fisica e Matematica di Torino*, 1936-37 et 1937-38, p. 13).

([13]) *Calcul des probabilités,* Paris, Gauthier-Villars, 1925, p, 166-169; *voir* aussi Dœtsch, p. 95-96.

plus, s'assurer que la formule (34) donne comme résultat *zéro* lorsque t est négatif ([14]).

6. Autres méthodes pour l'inversion de la transformation de Laplace. — La dernière observation, mais surtout le fait que dans la formule (34) figurent des valeurs imaginaires de $f(s)$, rendent souvent l'utilité de cette formule très problématique. Pour cette raison, on a cherché d'autres méthodes d'inversion parmi lesquelles celle de M. G. D. Widder est particulièrement remarquable par sa simplicité.

Cette méthode (*voir* Dœtsch, p. 130-132) peut se rattacher à la formule

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

qui donne les coefficients d'une série de puissances

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

de même que (34) peut se rattacher à la formule de Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

pour les mêmes coefficients. Elle conduit facilement au théorème suivant :

Si la fonction $f(s) = \mathfrak{L}[F(t)]$ *est convergente dans un demi-plan, c'est-à-dire si* $\beta < \infty$, *dans tous les points situés sur le demi-axe* $t > 0$ *où* $F(t)$ *a une limite à gauche* $F(t-0)$ *et une limite à droite* $F(t+0)$, *on a*

$$\frac{1}{2}[F(t-0)+F(t+0)] = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right). \tag{35}$$

Cette formule, si simple et si élégante, n'est malheureusement pas utilisable pour des calculs numériques, mais elle peut, entre autres, conduire rapidement à maintes relations de limites très importantes ([15]).

Bien plus utiles sont, au contraire, du point de vue pratique, les méthodes d'inversion de la transformation de Laplace fondées sur des

---

([14]) Cette importante remarque est due à M. Dœtsch (1931). *Voir* son livre, p. 89-90.

([15]) F. Tricomi, *Sulla formula d'inversione di Widder* [*Rend. Accad. Lincei*, (6), 25, 1937, p. 416-421].

développements en série *correspondants* des deux fonctions $F(t)$ et $f(s)$, c'est-à-dire sur l'observation que, de chaque développement en série de la fonction $F(t)$,

$$F(t) = a_0\,F_0(t) + a_1\,F_1(t) + a_2\,F_2(t) + \ldots, \tag{36}$$

se déduit, au moins formellement, un développement en série de la fonction-résultat $f(s)$ correspondante

$$f(s) = a_0\,\mathcal{L}[F_0(t)] + a_1\,\mathcal{L}[F_1(t)] + a_2\,\mathcal{L}[F_2(t)] + \ldots. \tag{37}$$

Par exemple, dans le cas d'une fonction $F(t)$ *entière, du type exponentiel*, on obtient de cette manière (*voir* Dœtsch, p. 61 et suiv.) les deux développements correspondants, très simples

$$F(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \ldots, \qquad f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \ldots \tag{38}$$

qui, entre autres, ont un rapport immédiat avec la méthode classique de sommation de M. Borel (*voir* Dœtsch, p. 77-87).

Un peu moins simples, mais plus puissants sont les deux autres développements correspondants, contenant des polynômes de Laguerre,

$$F(t) = e^{-ht}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,L_n(t), \qquad f(s) = \frac{1}{s+h}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{s+h-1}{s+h}\right)^n \tag{39}$$

(h constante réelle quelconque) que j'ai obtenus en 1935 (*voir* Dœtsch, p. 136-138), et dont on peut déduire maintes conséquences intéressantes; par exemple (*voir* Dœtsch, p. 183-145), la curieuse formule

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(t) - L_{n-1}(t)][L_n(\tau) - L_{n-1}(\tau)] = e^{\min(t,\tau)} \qquad (t, \tau \geqq 0), \tag{40}$$

qui a donné lieu à d'intéressants travaux de MM. Dœtsch et Erdélyi ([16]).

On peut d'ailleurs montrer ([17]) que, en un certain sens, la transformation de Laplace est l'outil le mieux adapté à l'étude des polynômes de Laguerre, soit ordinaires, soit généralisés; par exemple, pour la

---

([16]) A. Erdélyi, *Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi* [*Rend. Accad. Lincei*, (6). 24, 1936. p. 347-350].

([17]) F. Tricomi, *Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici* (*Boll. Unione Matem. Italiana*, Bologna, 14, 1935, p. 213-218 et 277-282).

déduction de leur *théorème d'addition*, dont il sera question plus loin, etc.

7. Le théorème de la « Faltung ». — La théorie des équations intégrales nous a familiarisés avec la notion de *composition* de deux fonctions à deux variables $H(x, y)$ et $K(x, y)$. Il est presque superflu de rappeler que, d'après M. Volterra [18], on appelle *composition* (*de première espèce*) des deux fonctions, la formation de l'intégrale

$$\int_y^x H(x, z)\, K(z, y)\, dz \equiv \overset{\star}{H}\overset{\star}{K}.$$

Dans la théorie des transformations de Laplace et de ses applications, surtout au calcul des probabilités, un cas particulier de cette opération joue un rôle fondamental, c'est le cas des *fonctions permutables avec l'unité*, c'est-à-dire telles que $\overset{\star}{F}\overset{\star}{1} \equiv \overset{\star}{1}\overset{\star}{F}$, qui ont exclusivement la forme $F(y - x)$, ainsi que l'a montré M. Volterra.

En effet, si l'on considère deux fonctions F_1 et F_2 de ce type et si l'on pose

$$\overset{\star}{F}_1\overset{\star}{F}_2 = \overset{\star}{F}_2\overset{\star}{F}_1 = \Phi(y - x),$$

on constate immédiatement (*voir* Dœtsch, p. 157-158) que

$$\Phi(t) = \int_0^t F_1(\tau)\, F_2(t - \tau)\, d\tau, \tag{41}$$

c'est-à-dire que la composition se réduit à l'opération (41), que M. Dœtsch a étudiée sous le nom de *Faltung* (le *pliage*) des deux fonctions et qu'il a désignée par le symbole $F_1 \star F_2$.

Pour saisir, sans trop de calculs, la raison première de cette importance, il suffira peut-être d'observer que l'intégrale (41) n'est autre chose que l'analogue continu de la somme

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu},$$

donnant, dans la multiplication de deux séries de puissances,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad \text{et} \qquad b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

---

(18) *Voir* V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de ligne*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, Chap. IX.

suivant Cauchy, le coefficient de z^n dans le produit. En effet, on peut ainsi entrevoir qu'à l'opération (41) entre des fonctions-objet, correspondra en général le *produit* ordinaire entre les transformées de Laplace correspondantes; en d'autres termes que, sous certaines conditions à préciser, on aura

$$\mathfrak{L}[F_1 \star F_2] = \mathfrak{L}[F_1]\,\mathfrak{L}[F_2]. \tag{42}$$

C'est dans la déduction de (42) et de ses conditions de validité, que consiste le *théorème de la « Faltung »*; on devrait même dire *les théorèmes*, car maintenant on connaît plusieurs conditions différentes de validité de la relation (42).

Parmi les divers énoncés, les trois suivants me semblent particulièrement remarquables. Leur analogie avec les théorèmes correspondants sur la multiplication des séries est frappante :

I. *Si les intégrales $\mathfrak{L}[F_1]$ et $\mathfrak{L}[F_2]$ convergent absolument toutes les deux pour $s = s_0$, $\mathfrak{L}[F_1 \star F_2]$ converge absolument elle aussi pour $s = s_0$ et (42) est valable en ce point.*

II. *Si les intégrales $\mathfrak{L}[F_1]$, $\mathfrak{L}[F_2]$ et $\mathfrak{L}[F_1 \star F_2]$ convergent toutes les trois, pour $s = s_0$, (42) est valable en ce point, même si la convergence n'est pas absolue.*

III. *Si les intégrales $\mathfrak{L}[F_1]$ et $\mathfrak{L}[F_2]$ convergent pour $s = s_0$, la convergence étant absolue pour au moins l'une des deux, $\mathfrak{L}[F_1 \star F_2]$ convergera elle aussi (absolument ou non) pour $s = s_0$ et (42) sera valable en ce point* (Amerio, 1937).

Pour les démonstrations et autres énoncés du même genre, *voir* Dœtsch, p. 161-167.

Tout cela est valable pour la transformation de Laplace *au sens restreint*, c'est-à-dire avec une intégrale prise entre 0 et ∞. Si, au contraire, on considère la transformation *bilatérale* de Laplace $\mathfrak{L}_{\text{II}}$ ou celle de Fourier $\mathfrak{F}$, il faudra remplacer la « Faltung » (41) par une autre, entre limites constantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau)\,F_2(t-\tau) = F_1 \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\star}} F_2, \tag{43}$$

qui joue un rôle tout à fait analogue. En particulier, les deux théorèmes suivants subsistent (Dœtsch, p. 162) :

IV. *Si les intégrales* $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}[F_1]$ *et* $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}[F_2]$ *convergent absolument toutes les deux pour* $s = s_0$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\left[F_1 \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\star}} F_2\right]$ *convergera elle aussi absolument pour* $s = s_0$ *et sera égale à* $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}[F_1].\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}[F_2]$.

V. S*i les deux fonctions* F_1 *et* F_2 *sont absolument intégrables entre* $-\infty$ *et* $+\infty$, *les intégrales* $\mathfrak{F}[F_1]$, $\mathfrak{F}[F_2]$ *et* $\mathfrak{F}\left[F_1 \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\star}} F_2\right]$ *convergeront toutes les trois absolument pour chaque valeur réelle de s, et la troisième sera égale au produit des deux premières.*

Remarquons enfin explicitement, bien que cela soit presque évident, que la « Faltung », soit sous la forme (41), soit sous la forme (43), jouit des trois propriétés fondamentales : commutativité, associativité et distributivité de la multiplication ordinaire.

8. **Application de la « Faltung »**. — Les théorèmes précédents sont susceptibles des applications les plus diverses, dont la plus importante est peut-être celle qui a trait aux équations intégrales; nous en donnerons un exemple plus tard. Bornons-nous maintenant aux autres applications principales, par exemple à la déduction rapide de certaines identités entre des fonctions analytiques, qu'il ne serait pas si aisé de déduire directement.

I. Des formules élémentaires (Dœtsch, p. 23 et 48) :

$$\mathfrak{L}[\sin t] = \frac{1}{1+s^2}, \qquad \mathfrak{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}},$$

où J_0 désigne la fonction de Bessel d'ordre *zéro*, on déduit immédiatement, à l'aide de la formule (42), l'élégante formule

$$J_0(t) \star J_0(t) = \sin t. \tag{44}$$

II. De ma formule (Dœtsch, p. 182)

$$\mathfrak{L}[t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)] = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\frac{1}{s^{\alpha+1}}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n \qquad (\alpha > -1,\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $L_n^{(\alpha)}$ est le symbole des polynomes de Laguerre généralisés, en posant pour plus de simplicité

$$\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n)}t^{\alpha-1}\,L_n^{(\alpha-1)}(t)=\Lambda(\alpha, n, t),$$

on déduit tout de suite mon *théorème d'addition transcendant* des polynomes de Laguerre (Dœtsch, p. 311), à savoir

$$\Lambda(\alpha, m, t) \star \Lambda(\beta, n, t)=\Lambda(\alpha+\beta, m+n, t) \qquad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{45}$$

qui, dans le cas $\alpha=\beta=1$, prend la forme

$$L_m(t)\star L_n(t)=L_{m+n}(t)\star 1. \tag{46}$$

Ces résultats sont déjà assez remarquables en eux-mêmes; toutefois pour nous l'application la plus intéressante de la « Faltung » est, sans doute, celle qui a trait au calcul des probabilités. Elle tire son origine du fait que, dans l'*addition de deux variables aléatoires indépendantes*, c'est justement la « Faltung » des deux lois de probabilité des composantes qui donne la loi de probabilité de la somme.

En effet, considérons pour plus de simplicité deux variables X et Y avec des lois de probabilités absolument continues ([19]), c'est-à-dire douées des densités de probabilités respectives $p(x)$ et $q(y)$; on sait ([20]) que la densité de probabilité $r(z)$ de leur somme $Z=X+Y$ est donnée par la formule

$$r(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,q(z-x)\,dx=p\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\star}}q. \tag{47}$$

Il s'ensuit que si, au lieu des densités de probabilité, on considère les *fonctions caractéristiques* correspondantes, c'est-à-dire leurs transformés bilatérales de Laplace (Poincaré) ou, en suivant M. Paul Lévy, leurs transformés de Fourier, à l'opération tout à fait élémentaire : *addition* de deux variables aléatoires indépendantes, correspondra (sous certaines conditions qualitatives) la *multiplication* des fonctions caractéristiques respectives.

([19]) Autrement il faudrait remplacer l'intégrale (43) par une intégrale de Stieltjes.

([20]) *Voir*, par exemple, P. Lévy, *loc. cit.* ([13]), p. 187, ou la récente *Théorie de l'addition des variables aléatoires* du même auteur. Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 76.

Du point de vue formel, l'emploi de la transformation $\mathcal{L}_{\text{II}}$ ou de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est indifférent; toutefois on préférera en général ([21]) la transformation de Fourier, voir la fonction caractéristique de M. Lévy, soit à cause de sa facilité d'inversion, soit à cause de ses propriétés de convergence, lesquelles assurent la validité, *sans conditions spéciales*, de la formule fondamentale

$$\mathcal{F}\Big[p \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\star}} q\Big] = \mathcal{F}[p]\,\mathcal{F}[q] \tag{48}$$

lorsque p et q sont effectivement des densités de probabilité, c'est-à-dire des fonctions positives satisfaisant à la *condition d'aire*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1. \tag{49}$$

(*Cf.* le théorème V du numéro précédent.)

Ces résultats sont valables dans le cas des lois de probabilité absolument continues. Dans le cas contraire il suffira de considérer, au lieu des densités de probabilité $p(x)$ et $q(y)$, les fonctions de répartition relatives $P(x)$ et $Q(x)$ et, au lieu de la transformation de Fourier (7), la transformation de Fourier-Lévy ([22])

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\,d\Phi(t) \tag{50}$$

pour parvenir à des conclusions tout à fait semblables aux précédentes.

9. Sur la méthode de la fonction caractéristique. — Du point de vue méthodologique, l'introduction de la fonction caractéristique a été l'un des progrès essentiels du calcul des probabilités dans ces dernières années. Pour en exposer une des applications les plus simples et les plus immédiates, considérons la formule élémentaire

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\,e^{-\frac{t^2}{2m}}\right] = e^{-\frac{m}{2}s^2} \tag{51}$$

([21]) Quelquefois, surtout lorsqu'il s'agit de variables aléatoires positives, il peut être plus commode de prendre comme fonction caractéristique la transformée de Laplace elle-même; en effet, on connaît davantage de formules dans ce cas, surtout après la publication du livre cité de M. Dœtsch ([2]).

([22]) *Voir* P. Lévy, *loc. cit.* ([13]), 2^e partie, Chap. II et suivants.

et observons qu'on en déduit immédiatement que

$$(52)\quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi m_1}}e^{-\frac{t^2}{2m_1}}\right]\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}}e^{-\frac{t^2}{2m_2}}\right]=\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(m_1+m_2)}}e^{-\frac{t^2}{2(m_1+m_2)}}\right].$$

Cette formule exprime une des propriétés les plus fondamentales de la *loi normale* des erreurs de Gauss, c'est-à-dire de la variable aléatoire X avec la densité de probabilité

$$(53)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{x^2}{2m}}.$$

Elle nous dit, en effet, que *la somme de deux* (*ou plusieurs*) *variables de Gauss indépendantes est*, *elle aussi*, *une variable de Gauss*, ce que M. P. Lévy exprime plus brièvement en disant que *la loi de Gauss est une loi stable* (par rapport à l'addition).

L'application précédente est toutefois un peu trop immédiate et superficielle. Bien plus intéressante et profonde serait au contraire l'application de la fonction caractéristique au théorème qu'on peut considérer comme l'inversion du précédent, c'est-à-dire à la démonstration du récent *théorème de Cramer-Lévy*, suivant lequel, *si la somme de deux variables aléatoires indépendantes est gaussienne*, *les deux variables doivent être nécessairement gaussiennes* ([23]). En effet, il s'agit là, sans doute, du plus beau théorème de calcul des probabilités qu'on ait obtenu ces derniers temps, et dont la démonstration repose d'une manière essentielle sur la conception de fonction caractéristique. Il est superflu de rappeler cela ici, à Paris; il est peut-être préférable d'aborder quelques considérations générales sur la méthode de la fonction caractéristique et les raisons de son succès.

Je crois que la raison première du succès de cette méthode doit être cherchée dans le fait que jusqu'ici, pour des raisons bien compréhensibles, on n'a fait pratiquement que de la *théorie additive* des variables aléatoires, ce qui implique la « Faltung » des lois de probabilité correspondantes : une opération dont l'*algébrisation* (c'est-à-dire sa traduction par une relation algébrique) exige l'intervention de la transformation

---

([23]) *Voir* le livre récent de M. P. Lévy déjà cité ([20]), p. 97-99, ou M. Fréchet, *Recherches théoriques sur la théorie des probabilités,* I. Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 277-285.

de Laplace ou de Fourier, à savoir la considération de la fonction caractéristique.

Mais on peut penser aussi à des problèmes d'un autre genre concernant les variables aléatoires; par exemple, l'analogie avec la théorie des nombres, qui n'est pas purement verbale ([24]), peut nous conduire à concevoir une *théorie multiplicative* des variables aléatoires, dans laquelle il serait évidemment inopportun de continuer à se servir de la fonction caractéristique ordinaire, c'est-à-dire des transformations de Fourier ou de Laplace, au lieu d'autres mieux adaptées à ce cas; en d'autres termes, aptes à *algébriser* la liaison entre les lois de probabilité qui, dans ce cas, remplace la « Faltung » précédente.

10. Sur les lois de probabilité stables par multiplication. — Pour réaliser d'une manière concrète l'application des idées générales exposées plus haut, proposons-nous de déterminer comme dans le cas du problème analogue, résolu pour l'addition par M. P. Lévy ([25]), *les lois de probabilité stables par multiplication.* Nous voulons donc déterminer les cas dans lesquels la multiplication de deux variables aléatoires indépendantes analogues X et Y donne lieu à une troisième variable aléatoire Z du même type; en supposant, pour plus de simplicité, que X et Y prennent seulement des valeurs *positives* et sont douées des densités de probabilités respectives $p(x)$ et $q(y)$.

La première chose à faire, c'est évidemment de trouver l'expression générale de la densité de probabilité $r(z)$ de Z en fonction de $p(x)$ et $q(y)$; densité qu'en faisant appel à des considérations bien connues, on voit être susceptible de l'expression suivante

$$r(z)\,dz = \iint_{\delta} p(x)\,q(y)\,dx\,dy,$$

où δ désigne, dans le plan (x, y), la partie de l'angle positif des axes comprise entre les deux demi-hyperboles

$$xy = z \qquad \text{et} \qquad xy = z + dz \qquad (x > 0, y > 0).$$

([24]) *Voir* à cet égard, F. Tricomi, *Su di una variabile casuale connessa con un notevole tipo di partizioni di un numero intero* (*Giorn. Istituto Ital. d. Attuari*, 2, 1931, p. 455-468).

([25]) *Loc. cit.* ([13]), 2e partie, Chap. VI, ou *loc. cit.* ([20]), p. 94-95.

On en déduit tout de suite la formule simple ([26]) pour $r(z)$

$$r(z) = \int_0^\infty p\left(\frac{z}{y}\right) q(y) \frac{dy}{y}, \tag{54}$$

qui nous conduit à une espèce de nouvelle « Faltung » des deux fonctions p et q.

Cette nouvelle liaison intégrale peut se réduire à la « Faltung » proprement dite en posant simplement

$$y = e^{-\tau}, \qquad z = e^{-t} \tag{55}$$

et aussi

$$p(e^{-x}) = p_1(x), \qquad q(e^{-x}) = q_1(x), \qquad r(e^{-x}) = r_1(x); \tag{56}$$

substitutions à l'aide desquelles l'égalité (54) prend la forme

$$r_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t-\tau)\, q_1(\tau)\, d\tau = p_1 \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\bigstar}} q_1. \tag{57}$$

La dernière observation est intéressante surtout par le fait que les substitutions (55)-(56) sont tout à fait analogues aux substitutions (30) avec lesquelles nous avons ramené la transformation bilatérale de Laplace à la transformation $\mathfrak{M}$ de Mellin. Il s'ensuit que la liaison intégrale (54) *s'algébrise* ou, plus exactement, se ramène au produit ordinaire, moyennant la transformation de Mellin, qui nous conduit à la formule

$$\mathfrak{M}[r] = \mathfrak{M}[p]\,\mathfrak{M}[q], \tag{58}$$

tout à fait analogue à la formule (48), valable dans le cas de l'addition de deux variables aléatoires indépendantes.

La formule (58) va nous permettre de résoudre presque sans calcul le problème que nous nous sommes proposé, c'est-à-dire la détermination des lois de probabilités stables par multiplication.

En effet, M. P. Lévy a déjà déterminé ([27]) les lois de probabilités stables par addition, c'est-à-dire les densités de probabilités $p(x, a)$,

---

([26]) Pour une formule analogue valable dans des conditions plus générales, *voir* M. Fréchet, *loc. cit.* ([23]), p. 77-78.

([27]) *Loc. cit.* ([25]).

dépendant d'un paramètre a (au moins), satisfaisant à l'équation

$$p(t, a') \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\star}} p(t, a'') = p(t, a''') \tag{59}$$

et, par conséquent, aux deux autres

$$\mathcal{F}[p(t, a')] \; \mathcal{F}[p(t, a'')] = \mathcal{F}[p(t, a''')], \tag{60}$$

$$\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a')] \, \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a'')] = \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a''')], \tag{61}$$

où a''' est une fonction *a priori* quelconque de a' et a''. Il s'ensuit que, *si $p(x, a)$ désigne une de ces lois stables de M. P. Lévy, en posant*

$$s(t, a) = \frac{p(-\log t, a)}{C(a)}, \tag{62}$$

où

$$C(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, a)\, e^{-t}\, dt = \{ \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a)] \}_{s=1}, \tag{63}$$

on obtiendra une loi « positive » stable par multiplication, et réciproquement.

En effet, en vertu des formules (31), on a

$$\mathfrak{M}[s(t, a)] = \frac{\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a)]}{C(a)} = \frac{\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a)]}{\{ \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a)] \}_{s=1}}$$

et, par conséquent, en tenant compte de la formule (61),

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[s(t, a')] \, \mathfrak{M}[s(t, a'')] &= \frac{\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a')] \, \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a'')]}{\{ \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a')] \, \mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a'')] \}_{s=1}} \\ &= \frac{\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a''')]}{\{ \mathcal{L}_{\text{II}}[p,(t, a''')] \}_{s=1}} = \mathfrak{M}[s(t, a''')], \end{aligned}$$

conformément à la formule (58).

Le dénominateur $C(a)$ dans (62) trouve son origine dans la *condition d'aire*, car on trouve que

$$\int_0^{\infty} p(-\log t, a)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau, a)\, e^{-\tau}\, d\tau = C(a).$$

Remarquons aussi que, bien que le raisonnement précédent semble soumis à la condition d'existence des trois transformées de Laplace $\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a')]$, $\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a'')]$ et $\mathcal{L}_{\text{II}}[p(t, a''')]$, il serait bien facile de se libérer de toute restriction de cette sorte en substituant la transformation de Fourier à celle de Laplace, pourvu que l'intégrale (63) converge.

En particulier si l'on part de la loi de Gauss, c'est-à-dire si l'on pose

$$p(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}},$$

on trouve de cette sorte la *loi stable par multiplication* suivante :

$$s(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{\log^2 x}{2a} - \frac{a}{2}} \qquad (a, x > 0), \tag{64}$$

avec [28] la relation paramétrique correspondante

$$a''' = a' + a''. \tag{65}$$

La figure suivante donne une idée de l'allure de la fonction $s(x, a)$ dans le cas $a = 1$. Il s'agit toujours (c'est-à-dire même pour $a \neq 1$)

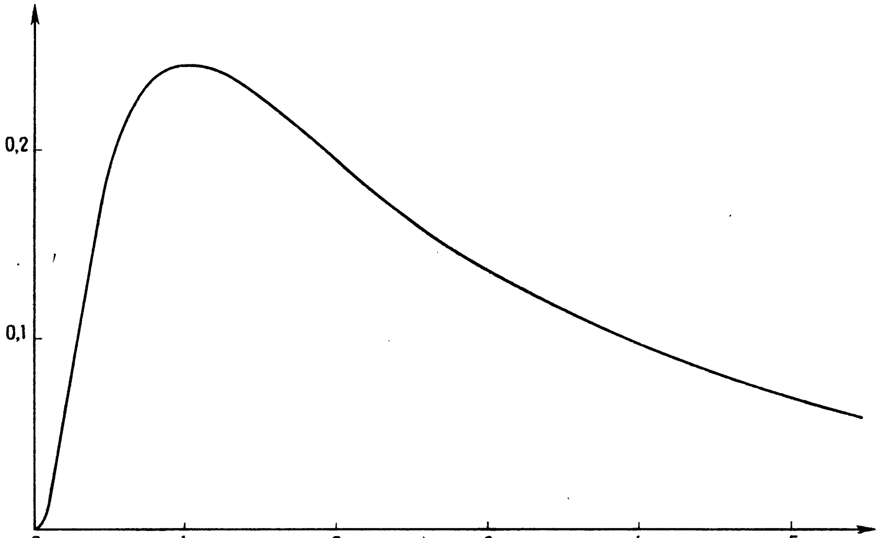

Fig. 1.

d'une fonction positive, ayant un maximum et un seul pour $t = 1$ et jouissant de la propriété

$$s(x, a) = s\left(\frac{1}{x}, a\right). \tag{66}$$

---

[28] *Cf.* la formule (52) du numéro précédent.

11. De quelques types de courbes de fréquence et de leur interprétation statistique. — On cite souvent (29) comme exemple typique d'application des méthodes statistiques à la biologie (« biométrique »), le cas de certains crabes étudiés par M. W. Weldon avec l'aide de K. Pearson. Il s'agissait de deux groupes de ces crustacés, l'un provenant de Plymouth et l'autre de Naples, pour lesquels il était intéressant de déterminer la répartition statistique d'un caractère quantitatif simple; à savoir le rapport (que nous appellerons ici x) entre la largeur et la longueur de chaque individu. Dans ce but on détermina les pourcentages $y_1, y_2, \ldots$, de crabes ayant un x compris dans certains intervalles petits, égaux et

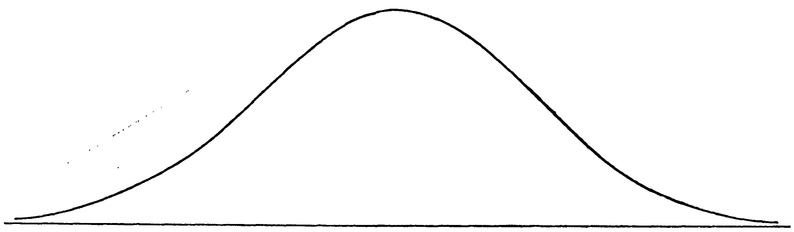

Fig. 2.

contigus, I_1, $I_2, \ldots$, ayant comme centres les points x_1, $x_2, \ldots$; ensuite, à l'aide des points de coordonnées (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$, on traça les

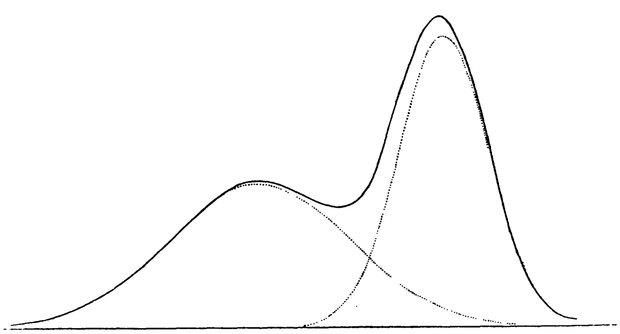

Fig. 3.

courbes de fréquence du caractère x dans les deux groupes examinés, voir les figures 2 (crabes de Plymouth) et 3 (crabes de Naples).

(29) *Voir*, par exemple, Du Pasquier, *Le calcul des probabilités*. Paris, Hermann, 1926; p. 253, ou Risser et Traynard, *Les principes de la statistique mathématique*. Paris, Gauthier-Villars, 1933; p. 99.

On a pu constater de cette manière que les crabes de Plymouth ne présentaient rien de particulier en ce qui concerne le caractère x (courbe de fréquence « en cloche », ce qui signifie que les valeurs de x se groupent *au hasard* autour de leur valeur moyenne x_0); au contraire, les crabes de Naples présentent une courbe de fréquence à deux maxima et par conséquent doivent être un mélange d'au moins deux races différentes, avec des valeurs moyennes distinctes x_1 et x_2 du rapport x.

Du point de vue mathématique, la courbe de fréquence du premier cas peut être représentée, avec une approximation suffisante, par une équation de Gauss de la forme

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2m}}, \tag{67}$$

tandis que, dans le deuxième cas, il est nécessaire de recourir à une combinaison linéaire de deux exponentielles du type (67), c'est-à-dire à une expression de la forme

$$y = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi m_1}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2m_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi m_2}} e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2m_2}}, \tag{68}$$

comme on peut aisément se convaincre par une analyse graphique facile de la courbe de fréquence relative. [Dans la figure 3 les courbes pointillées sont les diagrammes des deux termes de (68) considérés séparément.]

Ces brèves considérations suffisent, je crois, à faire comprendre l'importance du problème analytique suivant : *Étant donnée une courbe de fréquence $y = f(x)$, c'est-à-dire une fonction $f(x)$ satisfaisant à certaines conditions (par exemple à la condition d'être toujours positive, etc.), déterminer s'il est possible de la représenter par une « somme » d'exponentielles de Gauss, c'est-à-dire au moyen d'une formule du type*

$$f(x) = \sum_k \frac{a_k}{\sqrt{2\pi m_k}} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2m_k}}, \tag{69}$$

où a_k, m_k, x_k sont des constantes indéterminées a priori.

En effet, les choses ne se passent pas toujours aussi simplement que dans l'exemple de la figure 3, car la courbe résultant de deux (ou plusieurs) exponentielles de Gauss avec des valeurs moyennes assez voisines entre elles (ou *dispersions* assez fortes), peut n'avoir plus qu'un seul sommet, comme dans le cas illustré par la figure 4.

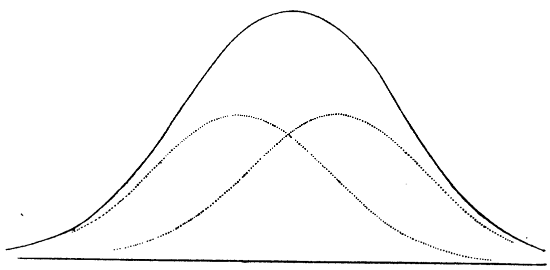

Fig. 4.

12. Rapports entre l'analyse gaussienne d'une courbe de fréquence et autres problèmes. — Le problème précédent peut aussi se poser sous une forme un peu différente qui semble meilleure à certains points de vue. On peut se proposer de représenter la fonction $f(x)$ non par une somme (ou série) d'exponentielles, mais par une intégrale, c'est-à-dire au moyen d'une formule du type :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\sqrt{2\pi\, m(\xi)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2m(\xi)}} d\xi. \tag{70}$$

où $F(\xi)$ et $m(\xi)$ sont deux fonctions à déterminer. Plus généralement on peut penser à une représentation par une intégrale de Stieltjes du type :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, m(\xi)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2m(\xi)}} d\,G(\xi). \tag{71}$$

qui comprend les deux précédentes comme cas particuliers.

On voit de cette sorte que le problème qui nous occupe comprend comme cas particulier [formule (70) dans le cas $m(\xi) = m =$ const.] la résolution de l'équation intégrale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2m}} F(\xi)\, d\xi \tag{72}$$

laquelle. au changement sans importance de $2t$ en m près, n'est autre chose que l'équation (25) du n° 4 donnant la solution du problème de refroidissement d'un conducteur infini ([30]).

Le rapprochement de deux problèmes si dissemblables en apparence présente un intérêt indiscutable ([31]), mais il a de plus, en effet, qu'on retrouve la même équation (72) dans bien d'autres cas, par exemple lorsque l'on se propose, avec M. P. Lévy ([32]) de décomposer, à l'aide de la formule (47), une loi de probabilité donnée en deux composantes indépendantes, dont l'une de la forme de Gauss.

En d'autres termes : *le problème de la représentation d'une fonction de fréquence par une formule du type* (70) (*dans le cas de* $m = const.$), *ainsi que le problème de remonter le cours du temps dans le refroidissement d'un conducteur filiforme, ou enfin le problème précédent de M. P. Lévy, etc.; se réduisent tous, du point de vue mathématique, à la résolution de l'équation intégrale* (72), *c'est-à-dire à l'inversion de la transformation de Gauss* (9).

13. Quelques propriétés de la transformation de Gauss. — J'ai rencontré, il y a quatre ans, la transformation de Gauss en étudiant les transformations fonctionnelles linéaires $\mathfrak{T}$ *permutables avec la dérivation* ([33]), c'est-à-dire telles que

$$\mathfrak{T}\left[\frac{d\,\mathrm{F}(t)}{dt}\right] = \frac{d}{ds}\mathfrak{T}[\mathrm{F}(t)]. \tag{73}$$

parmi lesquelles la transformation $\mathcal{G}^{(m)}$ de Gauss joue un rôle de premier plan. Comme il arrive assez souvent, j'ai pu constater par la suite qu'elle avait été déjà envisagée par Weierstrass, qui s'est surtout attaché à étudier sa propriété de limite

$$\lim_{m \to 0} \mathcal{G}^{(m)}[\mathrm{F}(t)] = \mathrm{F}(s), \tag{74}$$

([30]) Si la fonction $m(\xi)$ n'est pas constante l'analogie subsiste encore : il suffit de considérer un fil ayant une conductibilité thermique intérieure variable en chaque point.

([31]) *Voir*, pour un exemple d'application de ce rapprochement de problèmes : F. Tricomi, *Ancora sulla rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss* (*Giorn. Istituto Ital. d. Attuari*, 7, 1936, p. 42-44).

([32]) *Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène* [*Annali Scuola Normali Sup. Pisa*, (2), 1, 1932, p. 283-296].

([33]) Dans mon mémoire cité ([3]).

(évidente du point de vue de la théorie de la chaleur) et, plus récemment, par un savant américain : M. E. Hille ([34]).

Parmi les principales propriétés de cette remarquable transformation, je me bornerai à rappeler ici, outre les deux précédentes, la *formule d'homogénéité* :

$$\mathcal{G}_s^{(m)}[F(t)] = \mathcal{G}^{(1)}_{\frac{s}{\sqrt{m}}}[F(t\sqrt{m})], \tag{75}$$

qui, à l'occasion, permet de se passer du paramètre m, et la propriété de groupe

$$\mathcal{G}^{(m_1)}\mathcal{G}^{(m_2)} = \mathcal{G}^{(m_1+m_2)}, \tag{76}$$

qu'on peut regarder comme découlant de l'application du *principe de Huyghens* de M. Hadamard au problème de refroidissement, et — surtout — son *comportement à l'égard des polynomes d'Hermite* ([35]), exprimé par la formule

$$\mathcal{G}^{(m)}[H_n(t)] = (\sqrt{1-m})^n H_n\left(\frac{s}{\sqrt{1-m}}\right) \qquad (0 < m < 1), \tag{77}$$

d'où en passant à la limite pour $m \to 1$, on déduit en particulier que

$$\mathcal{G}^{(1)}[H_n(t)] = s^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{78}$$

tandis que, d'un autre côté, on a

$$\mathcal{G}^{(1)}[t^n] = i^{-n} H_n(is) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{79}$$

Ces dernières formules, qu'on peut aisément vérifier en s'appuyant sur l'expression explicite des polynomes d'Hermite, présentent un grand intérêt pour l'étude des séries de polynomes d'Hermite, qu'on peut donc ramener à des séries de puissances à l'aide de la transformation de Gauss. Un exemple fera mieux comprendre la question. Considérons les deux séries

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

et

$$\varphi_2(x) = 1 + \frac{H_1(x)}{1!} + \frac{H_2(x)}{2!} + \frac{H_3(x)}{3!} + \ldots,$$

([34]) E. Hille, *A class of reciprocal functions* [*Annals of Math.*, (2), 27, 1926, p. 427-464].

([35]) Les polynomes d'Hermite considérés ici sont définis par la formule

$$e^{-\frac{x^2}{2}+tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\frac{x^n}{n!}.$$

dont la première représente la fonction exponentielle e^x. La seconde série semble au contraire devoir représenter quelque chose de bien plus compliqué. Or, il n'en est rien; à l'aide de la transformation de Gauss nous pourrons constater tout de suite que la fonction $\varphi_2(x)$ ne diffère de $\varphi_1(x) = e^x$ que par un facteur constant!

En effet, en vertu de (78) et du fait, bien facile à établir, que la série φ_2 converge uniformément sur l'axe réel, on a

$$\mathcal{G}_s^{(1)}[\varphi_2(t)] = \varphi_1(s).$$

D'un autre côté, la fonction $\varphi_1(t)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d\varphi}{dt} - \varphi = 0, \tag{80}$$

qui se change en elle-même par la transformation $\mathcal{G}^{(1)}$, aussi bien que par toute autre transformation permutable avec la dérivation; donc la fonction $\varphi_2(t)$ doit être elle aussi une solution de l'équation différentielle (80), c'est-à-dire être de la forme $C\varphi_1(t)$. Il ne reste maintenant plus qu'à déterminer la constante C, ce qu'on fait en posant $t = 0$. On trouve ainsi que $C = e^{-\frac{1}{2}}$ et, par conséquent, que

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} e^x. \tag{81}$$

D'une manière tout à fait analogue on peut, par exemple, démontrer les autres formules intéressantes

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} H_{2n}(x)}{(2n)!} &= e^{\frac{1}{2}k^2} \cos kx, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n+1} H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} &= e^{\frac{1}{2}k^2} \sin kx, \end{aligned}\right. \tag{82}$$

qui — jusqu'à preuve du contraire — ont été données pour la première fois dans mon mémoire cité ([33]); voir aussi Dœtsch, p. 185-186. Au contraire, la formule (81) est implicitement contenue dans la formule classique de la note ([35]).

On voit donc que la transformation de Gauss représente un outil précieux pour traiter, dans le cas des séries d'Hermite, un problème en général bien négligé dans le grand nombre de publications concernant les séries de fonctions orthogonales : l'étude quantitative de la fonction-somme et (éventuellement) sa détermination en termes finis ([36]).

14. Inversion de la transformation de Gauss. — Abordons maintenant le fond de la question, à savoir le problème de l'inversion de la transformation de Gauss en observant tout d'abord que cette transformation peut se ramener facilement à la transformation bilatérale de Laplace. En effet, si l'on développe le carré de $s - t$ qui figure dans (9), on aura

$$f(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{2m}}}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{st}{m}} \left[e^{-\frac{t^2}{2m}} F(t) \right] dt.$$

d'où on déduit facilement que

$$\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{s^2}{2}} \mathcal{G}^{(m)}_{-\sqrt{m}s} [F(t)] = \mathcal{L}_{II} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} F(\sqrt{m}\, t) \right]. \tag{83}$$

On peut donc appliquer à l'inversion de la transformation de Gauss toutes les méthodes applicables à l'inversion de la transformation bilatérale de Laplace, et réciproquement ([37]); en particulier la formule (34) du numéro 5, nous conduit à la formule d'inversion complexe de la transformation de Gauss (9) suivante

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(t-x-i\eta)^2}{2m}} f(x + i\eta)\, d\eta. \tag{84}$$

où x désigne une constante réelle, arbitraire entre certaines limites.

Toutefois cette formule, comme la formule (34), n'a qu'un champ d'application très limité, soit à cause de la présence des imaginaires, soit à cause de la difficulté de bien délimiter le domaine des fonctions f auxquelles elle est applicable. Il conviendra donc d'emprunter une autre voie et précisément partir de l'observation fondamentale — due à M. Dœtsch ([38]) — que l'intégrale qui figure dans la transformation de

([36]) Pour quelques considérations générales à cet égard, *voir* mon mémoire cité ([17]) et la conférence citée ([12]); *voir* aussi les nombreux travaux de M. G. Palamà, par exemple : *La trasformazione di Gauss e i polinomi di Hermite* [*Rend. Accad. Lincei*, (6), 25, 1937, p. 356-361].

([37]) F. Tricomi, *Ueber Dœtschs Umkehrformel der Gauss-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation* (*Math. Zetschrift*, 40, 1936, p. 720-726).

([38]) G. Dœtsch, *Zerlegung einer Funktion in Gausssche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes* (*Math. Zeitschrift*, 41, 1936, p. 283-318).

Gauss représente une « Faltung ». En effet, ayant égard à (43), on peut écrire (9) sous la forme

$$(85)\qquad f = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{t^2}{2m}} \star F,$$

où, par plus de simplicité, on a indiqué la « Faltung » entre $-\infty$ et ∞ par le signe $\star$ seulement.

Cette observation si simple a une grande portée; en effet, elle entraîne le fait que, sous des conditions de détail à établir, *la transformation de Gauss peut s'algébriser moyennant la transformation $\mathfrak{F}$ de Fourier.* Précisément, en vertu de la formule (51) du numéro 9, on a que

$$(86)\qquad \mathfrak{F}[f] = e^{-\frac{m}{2}s^2}\,\mathfrak{F}[F]$$

et, par conséquent,

$$(87)\qquad \mathfrak{F}[F] = e^{\frac{m}{2}s^2}\,\mathfrak{F}[f].$$

Il s'agit maintenant de bien préciser les conditions de validité du résultat précédent et de discuter la question si le second membre de (87) donne effectivement une transformée de Fourier, c'est-à-dire s'il est effectivement possible de calculer la fonction F au moyen de la formule (87) et du théorème d'inversion de Fourier. Dans ce but, il convient de se placer dans l'espace L^2 des fonctions à carré sommable dans $(-\infty, \infty)$, de manière à pouvoir utiliser la belle théorie de M. Plancherel concernant la transformation de Fourier dans cet espace. Il convient maintenant de définir cette transformation par la formule

$$\mathfrak{F}[f(x)] = \underset{\alpha \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ixy} f(x)\,dx,$$

où « l.i.m. » veut dire : *limite en moyenne quadratique.* On parvient ainsi au beau théorème suivant (dû à M. Dœtsch) où, en suivant cet auteur, nous avons écrit à nouveau $2t$ au lieu de m, comme dans la formule (25) :

Afin que l'équation intégrale

$$(88)\qquad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} F(\xi)\,d\xi,$$

où t est une constante donnée, admette une solution F *appartenant à la classe* L^2, *il est nécessaire et suffisant :*

I. *que la fonction f appartienne elle aussi à la classe* L^2 ;

II. *que la transformée de Fourier $\varphi(y)$ de $f(x)$ (laquelle existe par conséquent) soit telle que l'intégrale*

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ty^2} \,|\, \varphi(y) \,|^2 \, dy \tag{89}$$

converge.

Si, au contraire, la constante t n'est plus donnée à l'avance, il faudra, sans modifier la condition I, *déterminer la borne supérieure* T *des valeurs de t pour lesquelles l'intégrale* Q *converge. S'il résulte* $T = 0$, *cela voudra dire qu'il n'y a pas de solution à carré sommable. Si au contraire* $T > 0$, *il existera une solution* L^2 *pourvu que* $t < T$ (*éventuellement même pour* $t \leqq T$), *mais aucune si* $t > T$.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, la solution F est donnée par la formule

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \, e^{ty^2} \, \varphi(y) \, dy, \tag{90}$$

où l'intégrale est, éventuellement, à entendre dans le sens de la convergence en moyenne.

15. Cas où la transformation de Gauss a la forme d'une intégrale de Stieltjes. — Dans le mémoire de M. Dœtsch cité plus haut sous ([38]) on trouvera, en dehors du théorème du numéro précédent, toute une série de considérations très intéressantes sur la continuité, ou mieux la *non-continuité*, sur l'inverse de la transformation de Gauss et, avant tout, sur l'étude de l'inversion de la transformation de Gauss sous la forme qui intéresse le plus la statistique, c'est-à-dire avec intégrale de Stieltjes :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \, d\,G(\xi). \tag{91}$$

Dans ce cas il ne convient plus de prendre comme base l'espace L^2 ; il convient de supposer au contraire que $G(x)$ jouisse des propriétés qualitatives d'une fonction de répartition, c'est-à-dire qu'elle soit *bornée*, *monotone* et telle que dans les points de discontinuité x' éventuels (nécessairement de première espèce) on ait toujours

$$G(x') = \frac{1}{2}[G(x'-0) + G(x'+0)].$$

Sur ces bases M. Dœtsch parvient au théorème suivant :

Afin qu'il existe une « fonction de répartition » G *satisfaisant à l'équation intégrale* (91) *il faut et il suffit :*

I. *Que la fonction f soit à variation bornée.*

II. *Que la fonction* (*qui existe par conséquent*)

$$\delta(y) = \frac{i}{y} e^{ly^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, df(y) \tag{92}$$

soit « définie-positive » au sens de M. Mathias [39], *c'est-à-dire :*

a. continue et bornée dans $-\infty < y < \infty$;

b. hermitienne, à savoir telle que $g(-y) = \overline{g(y)}$, *où* $\overline{g(y)}$ *désigne le nombre complexe conjugué à* $g(y)$;

c. telle que, pour un entier n quelconque, il soit toujours

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \delta(y_\mu - y_\nu) z_\mu \bar{z}_\nu \geqq 0,$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *sont des nombres réels et* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *des nombres complexes arbitraires.*

Malheureusement ce théorème, qui semble théoriquement épuiser la question, n'a pas de grandes possibilités d'applications pratiques à cause des difficultés inhérentes à la vérification de la condition II.

16. Méthodes pratiques pour l'analyse gaussienne d'une courbe de fréquence. — Avec le théorème du numéro précédent nous avons pénétré dans le vif des questions les plus intéressantes du point de vue de la statistique mathématique. On doit toutefois remarquer que celle-ci n'accorde qu'un intérêt relatif au problème de savoir si une courbe de fréquence donnée $y = f(x)$, peut ou non se représenter par une intégrale du type (71) ou (72); en effet, d'après ce que nous avons vu, on peut donner à cette question une réponse affirmative sous certaines con-

---

(39) M. Mathias, *Ueber positive Fourier-Integrale* (*Math. Zeitschrift*, 16, 1923, p. 103-125), et S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, Teubner, 1932, p. 76. *Voir* aussi P. Lévy, *op. cit.* (20), p. 39, note (1).

ditions qualitatives, qu'on peut toujours considérer comme satisfaites lorsque la fonction $f(x)$ est donnée numériquement. Ce qui intéresse vraiment la statistique est plutôt de savoir si la fonction $f(x)$ peut se représenter par une formule du type (69), c'est-à-dire *comme somme d'un nombre fini* (et pas trop grand) *d'exponentielles de Gauss*. Du point de vue purement théorique, ce dernier problème peut être résolu par des applications répétées du théorème précédent, mais, comme M. Dœtsch l'observe lui-même ([40]), cette méthode de résolution n'a aucune valeur pratique à cause des difficultés inhérentes à la vérification de la condition II.

Il faut donc recourir, dans la pratique, à d'autres méthodes, par exemple se servir d'une méthode due à Pearson ([41]) et perfectionnée par Dœtsch ([42]), qui utilise les relations rattachant les constantes a_k, x_k et m_k qui figurent dans l'égalité (69) aux *moments* successifs $M_0, M_1, M_2, \ldots$, de la fonction $f(x)$. Cette méthode a pourtant l'inconvénient d'exiger la fixation *a priori* du nombre n des composantes gaussiennes et, surtout, de nécessiter des calculs très compliqués, même dans les cas bien simples $n = 2$ ou $n = 3$.

Or, on peut remarquer, avec M. Dœtsch, que, des considérations précédentes, on peut dégager une méthode *pratique* — c'est-à-dire pratiquement utilisable sans des efforts disproportionnés au but — pour l'analyse gaussienne d'une courbe de fréquence donnée empiriquement; cette méthode se réduit au fond à l'observation qu'on peut souvent ramener, les *cas difficiles* du genre de celui de la figure 4, c'est-à-dire les cas pour lesquels les différentes *cloches* de Gauss de la courbe $y = f(x)$ ne sont pas discernables à première vue, à des *cas plus simples* du genre de celui de la figure 3.

Pour bien comprendre l'esprit de la méthode en question, observons d'abord, en nous détachant ainsi quelque peu de la voie suivie par M. Dœtsch, que l'on a la formule

$$\mathfrak{G}^{(m)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi m'}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2m'}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(m'+m)}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2(m'+m)}}, \tag{93}$$

([40]) *Op. cit.* ([38]), p. 315.

([41]) *Voir*, par exemple, Risser et Traynard, op. cit. ([29]), p. 97-99.

([42]) G. Dœtsch, *Die Elimination des Dopplereffektes bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten* (*Zeitschr. für Physik*, 49, 1928, p. 705-730; voir spéc. à p. 709-714).

La transformation $\mathcal{G}^{(m)}$ de Gauss change donc une exponentielle de Gauss avec une valeur moyenne x_0 et une *dispersion* (c'est-à-dire : un écart quadratique moyen) $\sqrt{m'}$ en une autre exponentielle de Gauss avec la même valeur moyenne x_0 et la *dispersion plus grande :* $\sqrt{m'+m}$. Par conséquent, si nous appliquons une transformation $\mathcal{G}^{(m)}$ ayant une valeur de m assez grande, à une combinaison linéaire d'exponentielle de Gauss du type (69), les différentes « cloches » du diagramme vont s'élargir et s'emmêler de telle sorte que, même dans le cas où elles étaient dissemblables à première vue au début, elles ne le seront certainement plus après la transformation.

Le contraire aura lieu si, au lieu d'opérer avec la transformation de Gauss $\overline{\mathcal{G}}^{(m)}$, nous opérerons avec son inverse $\overline{\mathcal{G}}^{(m)}$. En effet (en supposant, bien entendu, que $m < m'$), on aura

$$(94)\qquad \overline{\mathcal{G}}^{(m)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi m'}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2m'}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(m'-m)}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2(m'-m)}}$$

et, par conséquent, l'effet d'une transformation $\overline{\mathcal{G}}^{(m)}$ sur une combinaison linéaire d'exponentielles du type (69), avec

$$(95)\qquad m < m_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sera de réduire la largeur et de mieux séparer les différentes cloches de son diagramme, qui pourront ainsi, au moins en partie, être rendues visibles *à l'œil nu* [43].

Ce qui précède laisse voir assez clairement les lignes essentielles de la méthode d'analyse gaussienne que nous proposons. A part la question, sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure, de la réalisation pratique de la transformation $\overline{\mathcal{G}}^{(m)}$, la principale difficulté qu'on rencontre est due aux inégalités (95). car les quantités m_k ne sont pas connues à l'avance. On devra donc procéder par des essais, avec toute une suite de valeurs croissantes m', m'', m''', ..., de m, en enlevant chaque fois (par soustraction d'ordonnées) les composantes dont les cloches sont (éventuellement) si hautes et minces qu'on puisse en déduire que la dernière valeur de m est déjà dans l'entourage immédiat des m_k corres-

---

[43] La formule (94) peut continuer à être valable même dans le cas extrême $m = m'$, si l'on admet la considération des fonctions dites *impulsives*. La limite du second membre pour $m \to m'$ est en effet une fonction de cette sorte.

pondants. Si on l'oublie ou si l'on fait usage de valeurs trop grandes de m avant de terminer l'analyse — ce qui peut arriver, mieux : *doit* arriver, lorsque la fonction f n'est pas du type (69) — on sera, en général, averti du voisinage dangereux des bornes de convergence de la méthode, par l'apparition d'oscillations trop fortes dans la courbe transformée et, particulièrement, par des intervalles où la courbe présente des ordonnées négatives, bien souvent incompatibles avec la question traitée.

La figure 5 donne une idée de l'application de la méthode précédente.

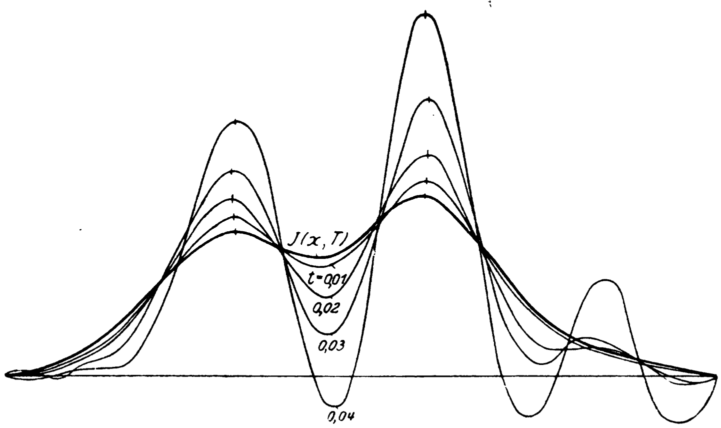

Fig. 5.

Elle est extraite du mémoire de M. Dœtsch cité plus haut ([42]), et se rapporte à un problème de spectroscopie (analyse de la structure fine de la raie spectrale H_α de l'hydrogène), formellement, identique à l'analyse gaussienne d'une courbe de fréquence. La courbe à analyser (en trait fort) $J(x, t)$, et ses transformées *antigaussiennes* successives, sont désignées par les valeurs correspondantes de $t = m/2$. La valeur $t = 0,04$ est manifestement un peu trop haute, mais la courbe précédente $t = 0,03$ donne déjà clairement le résultat principal de l'analyse, c'est-à-dire la présence d'une troisième composante gaussienne (à droite des deux principales) qu'on n'aurait pas soupçonnée avec la simple inspection *à l'œil nu* de la courbe $J(x, t)$ donnée.

Il reste enfin à préciser comment on doit pratiquement effectuer les successives transformations antigaussiennes $\overline{\mathcal{G}}^{(m')}$, $\overline{\mathcal{G}}^{(m'')}$, $\overline{\mathcal{G}}^{(m''')}, \ldots$, de la fonction f donnée. On se servira pour cela de la formule (87) du numéro 14 qui nous montre qu'il suffit de multiplier par $e^{\frac{m}{2}s^2}$ la transformée de Fourier de $f(x)$ pour obtenir celle de la fonction $\overline{\mathcal{G}}^{(m)}[f]$. Les opérations à effectuer sont donc les trois suivantes :

I. Détermination de la transformée de Fourier de la fonction donnée;

II. Multiplication de la transformée ainsi obtenue par $e^{\frac{m'}{2}s^2}$, $e^{\frac{m''}{2}s^2}$, $e^{\frac{m'''}{2}s^2}$, ...

III. Détermination des fonctions ayant comme transformées de Fourier les fonctions précédentes.

Dans la pratique on simplifiera essentiellement les opérations I et III en observant que la fonction $f(x)$ est, d'habitude, pratiquement nulle en dehors d'un certain intervalle fini (α, β), ce qui permet de substituer la *série* de Fourier à l'intégrale. Plus particulièrement (en supposant, pour plus de simplicité, que $\alpha = 0$, $\beta = l$) l'opération I se réduira au calcul des *coefficients* b_ν *de Fourier* de la fonction $f(x)$ au moyen de la formule

$$b_\nu = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\nu\frac{\pi x}{l}\right)dx \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{96}$$

ou d'un appareil d'analyse harmonique. On multipliera ensuite (opération II) ces coefficients par [44]

$$e^{\frac{\nu^2\pi^2}{2l^2}m'}, \quad e^{\frac{\nu^2\pi^2}{2l^2}m''}, \quad e^{\frac{\nu^2\pi^2}{2l^2}m'''}, \quad \ldots;$$

et enfin (III) on calculera les fonctions transformées antigaussiennes avec la formule

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{\nu^2\pi^2}{2l^2}m'} b_\nu \sin\left(\nu\frac{\pi x}{l}\right) \tag{97}$$

et analogues. Il s'agit donc uniquement de calculs d'un type bien classique et qui ne sont pas exagérément compliqués.

---

[44] *Voir* Dœtsch, *op. cit.* [42], p. 723.