

ANNALES DE L'I. H. P.

R. DE L. KRONIG

Le neutrino

Annales de l'I. H. P., tome 6, n° 3-4 (1936), p. 213-249

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1936__6_3-4_213_0

© Gauthier-Villars, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P.* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le neutrino

PAR

R. DE L. KRONIG

I

Phénomènes suggérant l'existence du neutrino Propriétés fondamentales de cette particule

Les faits expérimentaux qui ont conduit à l'hypothèse du neutrino ont trait à la structure des noyaux. On sait que les noyaux des substances radioactives naturelles peuvent être classés en deux groupes d'après le type de particule émis : le groupe des noyaux qui émettent une particule α , c'est-à-dire un noyau d'hélium, et celui des noyaux qui expulsent une particule β , c'est-à-dire un électron. On sait également que, comme l'ont démontré M. et Mme Joliot-Curie ainsi que Fermi et ses collaborateurs, il est possible de créer des noyaux radioactifs artificiels qui émettent des électrons ou des positons en bombardant des noyaux non-radioactifs par des particules α ou par des neutrons.

L'expérience a montré qu'un type de noyau radioactif déterminé émet toujours des particules α de même énergie, aux erreurs d'expérience près et abstraction faite des particules α de long parcours qui sont d'ailleurs en très petite proportion ; les parcours normaux des particules α émises par des noyaux de même espèce sont groupés autour d'une valeur moyenne, les petites fluctuations constatées étant dues au caractère statistique de l'ionisation dans la chambre de Wilson. Par contre, les parcours des particules β émises par une substance donnée varient depuis zéro jusqu'à une limite supérieure assez bien définie et variable avec la substance (x). Au moyen d'un champ magnétique on peut séparer les différentes vitesses ; on obtient ainsi

un *spectre continu*, à l'encontre de ce qui se passe pour l'émission α .

Ce spectre continu peut être interprété de deux manières différentes. On peut admettre en premier lieu que les rayons β quittent effectivement le noyau avec des énergies différentes s'échelonnant d'une manière continue entre zéro et une valeur maxima. On peut aussi imaginer cependant qu'ils sont émis par le noyau avec *la même énergie*, tout comme les particules α , mais qu'en traversant le champ électrique du noyau ils en perdent une partie sous forme de rayonnement par le même mécanisme qui produit le spectre continu des rayons X des rayons cathodiques freinés par les noyaux d'une anticathode. Les rayons β d'énergie maxima seraient ceux qui n'ont rien perdu de leur énergie initiale; les rayons de petite vitesse, par contre, ceux qui ont émis presque toute leur énergie sous forme de rayonnement.

L'expérience permet de choisir entre ces deux interprétations et se prononce en faveur de la première. En effet, pour le radium E, substance émettant un spectre continu β , on a constaté directement que le rayonnement γ émis en même temps ne forme qu'une fraction égale à 1 % de l'énergie totale des rayons β , et encore cette émission γ est-elle due en partie à des processus secondaires [excitation des couches atomiques par les rayons β , suivie de fluorescence (2)]. Dans ce cas, la distribution continue des vitesses ne provient certainement pas d'une perte par rayonnement; cela est en bon accord avec la théorie qui exige que l'effet dû au freinage soit négligeable. Une autre expérience consiste à évaluer l'énergie totale des rayons émis par le radium E en la transformant en chaleur et en la mesurant au moyen d'un calorimètre (3). On constate que cette chaleur correspond à l'énergie moyenne des rayons β émis et non pas à l'énergie maximum du spectre, ce qui signifie que les particules sont émises dès le début avec des vitesses différentes.

L'expérience nous contraint donc à admettre que les particules β sont émises avec des énergies différentes; or, cette conclusion semble, au premier abord, difficilement conciliable avec d'autres propriétés des noyaux. En effet, si l'on admet le principe de conservation de l'énergie et si tous les noyaux ont la même énergie avant désintégration, ils devront avoir des énergies différentes après l'émission d'une particule β et, par conséquent, des masses différentes, en vertu de la théorie de la relativité. On peut supposer que les éléments qui sont

LE NEUTRINO

stables à l'heure actuelle ont été formés à un moment ou un autre de leur histoire par des processus radioactifs ; il s'ensuit que les divers noyaux d'un même élément devront présenter, eux aussi, des différences de masse, lesquelles seraient parfaitement décelables par la méthode d'Aston, au moins pour les éléments légers. Or, l'expérience a démontré que ces différences n'existent pas.

De même, l'alternance régulière des intensités dans les spectres de bandes des éléments légers montre que les noyaux d'un même élément sont absolument identiques. Enfin, dans beaucoup de cas, un noyau radioactif émet un quantum γ ou une particule α immédiatement après avoir émis une particule β ; or, l'énergie γ ou α est toujours parfaitement définie, ce qui serait difficilement compréhensible si l'énergie du noyau émetteur subissait des variations.

Une autre difficulté que soulève cette interprétation a trait au moment de rotation des noyaux. On sait que pour déterminer ce moment il existe deux méthodes qui se complètent d'ailleurs de la manière la plus heureuse : l'examen de la structure hyperfine des spectres atomiques et l'analyse des spectres de bandes du point de vue de l'alternance des intensités ; la première permet d'étudier surtout les noyaux lourds, la seconde convient pour les noyaux légers. Enfin, des expériences directes suivant la méthode de Stern et Gerlach nous donnent la possibilité de trancher les cas douteux. L'ensemble des déterminations numériques connues actuellement (4) permet d'énoncer la règle suivante : la valeur I du moment du noyau, exprimée en unités quantiques $\hbar/2\pi$, est égale à

0, 1, 2,... pour des substances à poids atomique pair,
1/2, 3/2, 5/2,... pour les substances à poids atomique impair.

Supposons que cette règle, valable pour les noyaux examinés jusqu'à présent, soit applicable à tous les autres et en particulier aux noyaux radioactifs pour lesquels on ne peut l'établir directement, les produits de désintégration n'étant pas disponibles en quantité suffisante pour permettre une analyse spectrale. L'émission d'un électron ne changeant pas le caractère pair ou impair du poids atomique, les moments de rotation I de deux noyaux dont l'un dérive de l'autre par une émission β doivent tous les deux appartenir ou à la série 0, 1, 2,... ou à la série 1/2, 3/2, 5/2,... D'autre part, il faut attribuer à la particule β émise un moment égal à 1/2, à moins de supposer qu'elle

diffère d'un électron ordinaire, ce qui est peu probable. Donc si nous admettons que le noyau initial est formé par le noyau final et par l'électron émis, nous serons conduits à conclure que lorsque la valeur du spin I' de l'un des noyaux est égal à l'un des nombres de la suite $0, 1, 2, \dots$ la valeur du spin I'' de l'autre noyau fera partie de la série $1/2, 3/2, 5/2, \dots$; en effet, d'après les règles ordinaires de la mécanique quantique la composition d'un spin I'' avec un spin $1/2$ et peut-être avec un moment d'orbite (lequel est toujours un nombre entier) donne toujours un spin I' *différent de I''* par un des nombres $1/2, 3/2, 5/2, \dots$

Tout se passe donc comme si tout électron s'incorporant à un noyau perdait son spin, fait remarqué pour la première fois dans le cas du noyau d'azote (5). Ces résultats semblent contredire non seulement la loi de conservation de l'énergie mais aussi celle de la conservation des moments angulaires, ou spins.

Une troisième difficulté est étroitement liée au paradoxe précédent. Un ensemble de noyaux identiques obéit, d'après la mécanique quantique, soit à la statistique de Bose-Einstein, soit à la statistique de Dirac-Fermi. Dans la terminologie des ondes, cela veut dire que pour un système composé de particules identiques seuls existent dans la nature les états stationnaires dont les fonctions d'onde sont, soit symétriques, soit antisymétriques par rapport aux coordonnées de ces particules.

L'alternance des spectres de bandes nous permet non seulement de déterminer la valeur de I mais aussi, dans beaucoup de cas, de fixer le caractère de la statistique à laquelle obéit le noyau en question. L'expérience nous a enseigné que pour des noyaux ayant un I de la série $0, 1, 2, \dots$ seuls les états stationnaires à fonctions symétriques sont réalisés dans la nature, ces noyaux obéissant ainsi à la statistique de Bose-Einstein. Au contraire, pour les noyaux ayant un I de la série $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ nous aurons des états stationnaires à fonctions d'onde antisymétriques, c'est-à-dire la statistique de Dirac-Fermi.

En supposant que cette règle soit valable pour les noyaux radioactifs, pour lesquels on n'a pas encore réussi à la confirmer directement, nous devons en conclure que l'émission d'une particule β ne change pas la statistique du noyau émetteur. D'un autre côté on peut penser que l'échange des coordonnées de deux noyaux non encore désintégrés est équivalent à l'échange des coordonnées des produits

LE NEUTRINO

de désintégration, c'est-à-dire des deux nouveaux noyaux et des deux particules β . Mais ces dernières, qui sont des électrons, obéissant à la statistique de Dirac et de Fermi, changent le signe de la fonction d'onde. Pour que l'équivalence des deux modes d'échange soit assurée, on devrait donc supposer que les noyaux primitifs et les noyaux formés par une désintégration β obéissent, en fait, chacun à une statistique différente, les uns à celle de Bose-Einstein, les autres à celle de Fermi-Dirac. Le résultat des expériences peut alors être formulé comme suit : contrairement aux prévisions de la théorie tout changement du nombre d'électrons contenus dans un noyau n'a aucune influence sur la statistique (6).

Les trois difficultés énumérées ci-dessus ont conduit Pauli à suggérer l'hypothèse que toute émission β est accompagnée par l'émission d'une autre particule, qu'il est impossible d'observer directement. L'analyse chimique des produits de désintégration radioactives montre qu'après l'émission d'une particule β le nombre atomique a augmenté d'une unité, c'est-à-dire que la charge nucléaire a subi un accroissement égal à la charge élémentaire, accroissement compensé avant la désintégration par la charge négative de la particule β . On en conclut que la particule hypothétique dont l'émission accompagne celle de la particule β doit avoir une charge nulle, ce qui explique en même temps l'impossibilité où l'on s'est trouvé jusqu'à présent de l'observer directement. En effet, une particule non chargée ne donne en traversant la matière qu'une ionisation insignifiante ; cette absence d'ionisation, qui signifie aussi absence de freinage, ne permet pas de l'observer dans la chambre de Wilson.

Il y a quelques années, en s'appuyant sur les observations de M. et Mme Joliot-Curie, Chadwick a démontré l'existence d'une particule non-chargée, le neutron. Notre particule hypothétique ne peut cependant être identifiée avec le neutron. La masse de ce dernier est égale en effet à celle du proton, tandis que la variation de masse d'un noyau pendant une émission β est tout au plus de l'ordre de la masse électronique, comme le montre la comparaison des poids atomiques en jeu. La particule hypothétique peut avoir au plus une masse de cet ordre, et pour la distinguer du neutron, beaucoup plus lourd, on l'a appelée le *neutrino*.

Avec l'hypothèse du neutrino les trois difficultés énumérées ci-dessus peuvent être évitées. Le paradoxe de l'énergie des rayons β

se résout ainsi : L'excès d'énergie du noyau instable qui va se désintégrer est distribué statistiquement entre la particule β et le neutrino, la première prenant tantôt toute ou presque toute l'énergie, tantôt rien ou presque rien, et en général une fraction de cette énergie. D'après cette manière de voir, l'énergie maxima des rayons β doit être considérée comme l'énergie de transformation du noyau, ainsi que l'ont souligné Ellis et Mott (7).

On peut d'ailleurs trouver une preuve directe de l'exactitude de cette dernière conclusion, en examinant le bilan d'énergie des transmutations radioactives aussi bien naturelles qu'artificielles. Par

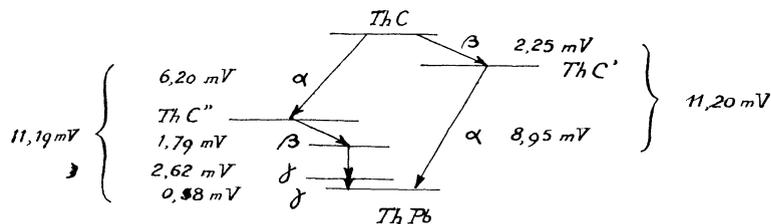


Fig. 1

exemple, le Th C peut se transformer en Th Pb de deux manières différentes indiquées sur la figure 1.

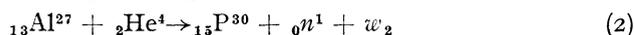
Les énergies maxima des deux transformations β ont été déterminées par Henderson (8). Pour la transformation $\text{Th C} \rightarrow \text{Th C}'$, Henderson trouve $2,25 \cdot 10^6 \text{ eV}$; l'énergie des rayons α dans la transformation suivante $\text{Th C}' \rightarrow \text{Th Pb}$ est de $8,95 \cdot 10^6 \text{ eV}$. Donc l'énergie totale pour la branche de droite est égale à $11,20 \cdot 10^6 \text{ eV}$. Pour l'autre branche, l'énergie α dans le processus $\text{Th C} \rightarrow \text{Th C}''$ est $6,20 \cdot 10^6 \text{ eV}$, l'énergie maximum des rayons β du Th C'', $1,79 \cdot 10^6$, leur somme par conséquent $7,99 \cdot 10^6 \text{ eV}$. Il y a cependant lieu de croire que le Th Pb formé à partir du Th C'' par l'émission d'une particule β ne se trouve pas dans son état normal, car pour chaque désintégration β on observe deux quanta γ , l'un ayant l'énergie $2,62 \cdot 10^6 \text{ eV}$ et l'autre $0,582 \cdot 10^6 \text{ eV}$, qu'il faut interpréter, suivant Ellis et Mott, comme étant dus au passage du Th Pb, en deux étapes, du niveau excité à l'état normal. En ajoutant l'énergie de $3,20 \cdot 10^6 \text{ eV}$ de ces quanta à l'énergie de $7,99 \cdot 10^6 \text{ eV}$ calculée ci-dessus, on trouve $11,19 \cdot 10^6 \text{ eV}$, ce qui est en bon accord avec le résultat précédent.

LE NEUTRINO

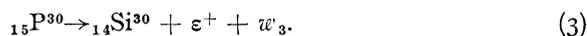
Parmi les radio-éléments artificiels le radio-phosphore nous permet de contrôler le rôle joué par l'énergie maxima des rayons β émis. En bombardant l'aluminium avec des rayons α , on peut provoquer deux réactions distinctes. Il se peut que l'aluminium soit transformé directement en silicium suivant l'équation



avec émission d'un proton, mais il se peut aussi qu'on obtienne un isotope du phosphore d'après l'équation



avec émission d'un neutron ; w_1 et w_2 indiquent la somme algébrique des énergies cinétiques de toutes les particules prenant part à la réaction. L'isotope du phosphore formé est radioactif et se transforme en silicium avec émission d'un positon :



En soustrayant les équations (2) et (3) de l'équation (1) on obtient

$${}_1\text{H}^1 + w_1 = {}_0n^1 + \varepsilon^+ + w_2 + w_3.$$

D'après Duncanson et Miller (9), l'énergie de transformation w_1 pour l'émission d'un proton, exprimé en unités de masse dans l'échelle des poids atomiques, est égale à 0,0022. Selon Jaeckel (10) l'énergie de transformation w_2 pour l'émission d'un neutron est égale à - 0,0022 dans la même échelle. Ellis et Henderson (11) ont trouvé pour l'énergie maxima des positons 0,0031, valeur que nous allons identifier avec w_3 . De cette manière on trouve

$${}_0n^1 - {}_1\text{H}^1 - \varepsilon^- = 0,0013 - \varepsilon^+ - \varepsilon^- = 0,0002.$$

Au premier membre nous avons la différence entre les masses du neutron et de l'atome d'hydrogène neutre, qui ont respectivement, d'après Oliphant, Kempton et Rutherford (12), les masses 1,0084 et 1,0081. L'accord est assez bon, ce qui montre que notre identification de w_3 avec l'énergie maxima des positons est parfaitement justifiée.

A côté de la conservation de l'énergie, rendue possible par l'hypothèse du neutrino, nous devons avoir la conservation de la quantité de mouvement. En absence de toute particule supplémentaire, la quantité de mouvement du noyau produit par la désintégration, devait être égale mais opposée à celle de la particule β . En présence

du neutrino il suffit que la somme vectorielle des quantités de mouvement des trois particules après désintégration soit égale à zéro. De cette manière la vitesse moyenne du noyau après désintégration sera différente suivant qu'il existe ou non un neutrino. A cause de la petitesse de la masse de l'électron et du neutrino la vitesse que prend le noyau sera en tout cas très petite, et, par conséquent, difficile à mesurer expérimentalement. Les conditions les plus favorables se présentent dans le cas des noyaux légers, ce qui exige que les expériences soient conduites avec des radioéléments artificiels. De telles expériences ont été entreprises par Leipunski (13), qui a obtenu des résultats en faveur de l'existence du neutrino.

Passons maintenant aux deux autres difficultés signalées plus haut, celle du spin et de la statistique. On constate qu'elles peuvent également être écartées si l'on attribue au neutrino un spin égal à $\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ et si l'on admet que cette particule obéit comme l'électron à la statistique de Fermi-Dirac. De cette façon le spin nucléaire I peut très bien garder sa parité pendant une désintégration β , par le fait qu'en même temps sont projetées deux particules, l'électron et le neutrino ayant chacune un spin égal à $\frac{1}{2}$; d'autre part, les effets de ces deux dernières particules sur la statistique se neutralisent et la difficulté correspondante s'évanouit.

En résumé, on peut dire qu'il y a beaucoup de présomptions en faveur de l'existence réelle d'un neutrino. Cette particule devrait avoir une charge électrique nulle, une masse tout au plus du même ordre que celle de l'électron, un spin égal à $\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ et obéirait à la statistique de Fermi-Dirac.

II

Relation entre un champ de neutrinos et le champ de rayonnement

L'introduction d'une nouvelle particule élémentaire en physique théorique n'est pas très agréable à un moment où le nombre de ces particules s'est agrandi d'une manière inquiétante par la découverte du neutron et du positon, un tel pluralisme offensant notre besoin de simplicité. Pour cette raison on a cherché à découvrir des relations entre le neutrino et d'autres particules déjà connues.

Nous avons déjà remarqué que la masse du neutrino est très petite ;

LE NEUTRINO

supposons qu'elle soit exactement nulle, ce qui a l'avantage de rendre inutile l'introduction d'une nouvelle constante universelle, la masse du neutrino, à côté d'autres constantes déjà assez nombreuses : vitesse de la lumière c , constante de Planck h , charge e et masse m de l'électron. Avec cette hypothèse le neutrino aura toujours la vitesse de la lumière, ce qui laisse penser qu'on pourrait établir une relation entre les neutrinos et le champ électromagnétique, c'est-à-dire les quanta de lumière, possibilité sur laquelle M. L. de Broglie (14) a, le premier, attiré l'attention.

Pour le montrer il nous faut d'abord insister davantage sur le détail des conceptions fondamentales que nous utiliserons par la suite. Dans un but de simplification nous commencerons par envisager un champ de rayonnement à une seule dimension, en faisant abstraction du caractère transversal des ondes correspondantes, donc de leur capacité de polarisation. Nous nous bornerons donc à des ondes scalaires se propageant dans une direction déterminée que nous pouvons appeler x . L'onde la plus générale de ce type résultera d'une superposition d'ondes partielles de la forme

$$e^{2\pi i\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)},$$

où la fréquence ν peut prendre toutes les valeurs. Pour éviter ce caractère continu de la fréquence et obtenir un problème portant sur des grandeurs discrètes, imposons aux ondes la condition d'être périodiques avec la période L , ce qui équivaut à enfermer le rayonnement dans une enceinte réfléchissante, à une dimension et de « volume » L ; à la fin du calcul on peut passer à la limite $L \rightarrow \infty$. Les champs électromagnétiques étant des champs réels, on obtient ainsi, pour l'onde la plus générale

$$\Phi(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} [b_l(t)e^{2\pi i\nu_l x/c} + b_l^{\dagger}(t)e^{-2\pi i\nu_l x/c}], \quad (4)$$

la croix signifiant le complexe conjugué, tandis que $b_l(t)$ dépend de t par l'intermédiaire du facteur $e^{-2\pi i\nu_l t}$. Pour satisfaire à la condition de périodicité imposée ci-dessus, il faut que

$$\nu_l = l\nu_1, \quad \nu_1 = \frac{c}{L}. \quad (5)$$

Les $b_l(t)$, étant des fonctions du temps t , peuvent être considérés

comme les variables dynamiques qui caractérisent le champ de rayonnement envisagé. En théorie classique ce sont des nombres ordinaires ; en théorie quantique, au contraire, les $b_l(t)$ sont représentables par des matrices, parce que nous savons que l'énergie de chaque onde partielle dans l'expression (4) est un multiple entier de l'énergie élémentaire $h\nu_l$, c'est-à-dire que dans chaque onde partielle nous avons un nombre entier de quanta de lumière. Nous pouvons tenir compte de ce fait expérimental en choisissant comme fonction d'Hamilton pour le champ de rayonnement l'expression

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^\dagger(t) b_l(t) h\nu_l, \quad (6)$$

h étant la constante de Planck, et en assujettissant les b_l aux relations d'échange

$$b_l(t) b_m(t) - b_m(t) b_l(t) = 0, \quad l, m = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$b_l(t) b_m^\dagger(t) - b_m^\dagger(t) b_l(t) = \delta_{lm}, \quad l, m = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

où la croix signifie maintenant la matrice adjointe, c'est-à-dire la matrice conjuguée et transposée.

Pour montrer qu'en vertu des formules (7) et (8) le champ de rayonnement a les propriétés annoncées, cherchons d'abord la dérivée $\dot{b}_m(t)$ de $b_m(t)$ par rapport au temps. D'après les règles de la théorie des quanta $\dot{b}_m(t)$ est donnée à l'aide de l'hamiltonien du système, par

$$\dot{b}_m(t) = \frac{2\pi i}{h} [W b_m(t) - b_m(t) W]. \quad (9)$$

Introduisant pour W l'expression (6), et tenant compte de (7) et (8), on voit que tous les termes de W , sauf celui pour lequel $l = m$, ne donnent aucune contribution à $\dot{b}_m(t)$. Le terme $l = m$, au contraire, nous donne dans (9)

$$\dot{b}_m(t) = -2\pi i \nu_m b_m(t),$$

ce qui veut dire que

$$b_m(t) = b_m e^{-2\pi i \nu_m t},$$

comme nous l'avons demandé. En introduisant maintenant les \tilde{b}_l , indépendants du temps t , au lieu des $b_m(t)$, nous trouvons au moyen des équations (6), (7) et (8)

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{b}_l^\dagger \tilde{b}_l h\nu_l \quad (10)$$

et

$$b_l b_m - b_m b_l = 0, \quad l, m = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$b_l b_m^\dagger - b_m^\dagger b_l = \delta_{lm}, \quad l, m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Pour constater que l'énergie W se compose effectivement de quanta $h\nu_l$, il faut chercher des matrices b_l , satisfaisant aux relations d'échange (11) et (12) et donnant pour W une matrice diagonale. Une solution est donnée par un système de matrices b_l , dont les éléments dépendent de deux séries de nombres quantiques, prenant les valeurs 0, 1, 2, ... et caractérisant l'état initial et l'état final du champ de radiation :

$$\left. \begin{aligned} & b_l (M_1, M_2, \dots, M_l, \dots; M'_1, M'_2, \dots, M'_l, \dots) \\ & = \sqrt{M_l + 1} \text{ pour } M'_1 = M_1, M'_2 = M_2, \dots, M'_l = M_l + 1 \\ & = 0 \text{ dans tous les autres cas,} \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

On peut se convaincre tout de suite que les équations (11) et (12) sont satisfaites par les matrices (13) et on trouve pour W la matrice diagonale

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} M_l h\nu_l, \quad (14)$$

de manière que

$$M_l = b_l^\dagger b_l \quad (15)$$

représente le nombre des quanta de lumière de fréquence ν_l . En résumé nous pouvons dire que la résolution du champ de rayonnement en ondes partielles planes redonne les propriétés discontinues de la lumière pourvu que les amplitudes de ces ondes soient considérées comme des variables quantiques, satisfaisant les relations d'échange (7) et (8), et que l'hamiltonien du champ soit donné par (6).

Passons maintenant au champ de neutrinos en nous bornant également aux mouvements dans la direction x . Si pour le moment nous faisons abstraction du spin du neutrino, nous obtiendrons l'équation d'onde en absence de champ extérieur de la manière suivante : Dans l'équation relativiste reliant l'énergie E à la quantité de mouvement p

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad (16)$$

faisons la substitution

$$E \rightarrow -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (17)$$

posons $m = 0$, selon l'hypothèse déjà faite, et appliquons les opérateurs des deux membres de (16) sur une fonction d'onde $\Psi(x, t)$; nous trouvons l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0.$$

Les solutions sont encore composées des ondes du type

$$e^{2\pi i \nu \left(\frac{x}{c} - t \right)},$$

et en imposant la même condition de périodicité que dans le cas de la lumière, nous trouvons comme solution la plus générale

$$\Psi(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l(t) e^{2\pi i \nu l x / c}, \quad (18)$$

ν_l étant donné toujours par (5).

Ici il ne faut pas exiger que Ψ soit réel, les ondes de Broglie en général étant complexes. L'onde partielle l représente un neutrino dans un état stationnaire d'énergie $h\nu_l$ et de quantité de mouvement $h\nu_l/c$, comme on le voit en appliquant les opérateurs (17) à cette onde partielle. Les valeurs positives de l correspondent aux états d'énergie positive, les valeurs négatives de l à ceux d'énergie négative.

L'onde générale (18) peut être considérée comme représentant un neutrino dont l'énergie n'est pas bien définie, chaque état stationnaire l ayant une probabilité proportionnelle au carré de $a_l(t)$. Cependant, cette onde générale peut aussi être considérée comme représentant un gaz de neutrinos, distribués sur les divers états stationnaires l , pourvu qu'on considère les $a_l(t)$ comme des matrices, ainsi que nous l'avons fait auparavant pour les $b_l(t)$; en effet les valeurs observables de l'énergie du gaz de neutrinos ne sont pas quelconques mais des valeurs qui se composent additivement des énergies $h\nu_l$ des neutrinos considérés. Il y a cependant une différence essentielle entre les $a_l(t)$ d'un côté et les $b_l(t)$ de l'autre. Tandis que dans l'onde partielle l de la lumière nous pouvions avoir un nombre arbitraire de photons d'énergie $h\nu_l$, il n'est plus possible à cause du principe d'exclusion de Pauli, de placer dans un état stationnaire l plus d'un seul neutrino.

LE NEUTRINO

Pour rendre compte de ces propriétés du gaz de neutrinos il suffit de prendre comme hamiltonien l'expression

$$E = \sum_{l=1}^{\infty} [a_l^\dagger(t)a_l(t) + a_{-l}(t)a_{-l}^\dagger(t)] h\nu_l, \quad (19)$$

où les $a_l(t)$ sont considérés comme variables dynamiques qui doivent obéir aux relations d'échange

$$a_l(t)a_m(t) + a_m(t)a_l(t) = 0, \quad l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (20)$$

$$a_l(t)a_m^\dagger(t) + a_m^\dagger(t)a_l(t) = \delta_{lm}, \quad l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

Montrons d'abord que les $a_l(t)$ sont bien des fonctions du temps ayant la forme prévue. On a :

$$\dot{a}_m(t) = \frac{2\pi i}{h} [E a_m(t) - a_m(t) E],$$

et en vertu de (20) et (21) :

$$\dot{a}_m(t) = -2\pi i \nu_m a_m(t).$$

Les $a_m(t)$ sont ainsi de la forme

$$a_m(t) = a_m e^{-2\pi i \nu_m t},$$

ce qui justifie leur emploi comme variables dynamiques. Afin de démontrer que l'énergie totale se comporte de la manière annoncée, passons des $a_l(t)$ aux a_l , indépendants du temps. De (19) et (20), (21) nous obtenons

$$E = \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^\dagger a_l + a_{-l} a_{-l}^\dagger) h\nu_l \quad (22)$$

et

$$a_l a_m + a_m a_l = 0, \quad l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (23)$$

$$a_l a_m^\dagger + a_m^\dagger a_l = \delta_{lm}, \quad l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

Il faut trouver des matrices a_l , obéissant à (23) et (24), qui rendent (22) une matrice diagonale.

On obtient une solution par des matrices dont les éléments dépendent de deux séries de nombres quantiques, qui prennent seulement les valeurs 0 et 1, la première série caractérisant l'état initial du gaz de neutrinos, et la dernière son état final :

$$\left. \begin{aligned} & a_l(\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_{-1}, \dots, \mathbf{L}_l, \mathbf{L}_{-l}, \dots; \mathbf{L}'_0, \mathbf{L}'_1, \mathbf{L}'_{-1}, \dots, \mathbf{L}'_l, \mathbf{L}'_{-l}, \dots) \\ & = (-1)^{L_0 + L_1 + L_{-1} + \dots + L_{-l} + 1} \text{ pour } \mathbf{L}'_0 = \mathbf{L}_0, \mathbf{L}'_1 = \mathbf{L}_1, \mathbf{L}'_{-1} = \mathbf{L}_{-1}, \dots, \mathbf{L}'_l = 1, \mathbf{L}_l = 0, \mathbf{L}'_{-l} = \mathbf{L}_{-l}, \dots \\ & = 0 \text{ dans tous les autres cas ;} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 & a_l(I_0, I_1, I_{-1}, \dots, I_l, I_{-l}, \dots; I'_0, I'_1, I'_{-1}, \dots, I'_l, I'_{-l}, \dots) \\
 & = (-1)^{I_0 + I_1 + I_{-1} + \dots + I_l} \text{ pour } I'_0 = I_0, I'_1 = I_1, I'_{-1} = I_{-1}, \dots, I'_l = I_l, I'_{-l} = I_{-l}, I_{-l} = 0, \dots \\
 & = 0 \text{ dans les autres cas ;} \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

En insérant les matrices (25) et (26), on trouve que les équations (23), (24) sont satisfaites, tandis que pour l'énergie totale E du gaz des neutrinos on obtient

$$E = \sum_{l=1}^{\infty} (I_l + N_l) h\nu_l, \tag{27}$$

les matrices diagonales

$$I_l = a_l^\dagger a_l, \qquad l = 0, 1, 2, \dots, \tag{28}$$

$$N_l = a_{-l} a_{-l}^\dagger = I - I_{-l}, \qquad l = 1, 2, \dots \tag{29}$$

représentant les nombres de neutrinos et de trous (antineutrinos) d'énergie $h\nu_l$.

Ayant obtenu une description du champ de rayonnement et du champ de neutrinos à l'aide des quantités b_l et a_l , essayons maintenant d'exprimer les b_l en fonction des a_l . La relation fonctionnelle doit être telle que les relations d'échange (23) et (24) pour les a_l aient pour conséquence les relations d'échange (11) et (12) pour les b_l . Nous démontrerons que la formule

$$\sqrt{l} b_l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^\dagger a_{m+l}, \qquad l = 1, 2, \dots \tag{30}$$

remplit bien cette condition. Elle est essentiellement équivalente à une formule proposée par Jordan (15), mais modifiée selon les idées de Born et Nagendra Nath (16).

Commençons avec la relation d'échange

$$b_l b_m - b_m b_l = 0. \tag{31}$$

L'équation (30) nous permet d'écrire

$$\sqrt{lm} b_l b_m = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} a_k^\dagger a_{k+l} a_n^\dagger a_{n+m}.$$

En vertu de (23), (24) cela est égal à :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} a_k^\dagger (-a_n^\dagger a_{k+l} + \delta_{n, k+l}) a_{n+m} = \\
 = & - \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} a_k^\dagger a_n^\dagger a_{k+l} a_{n+m} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^\dagger a_{k+l+m} = \\
 = & - \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} a_n^\dagger a_k^\dagger a_{n+m} a_{k+l} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^\dagger a_{k+l+m} = \\
 = & - \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} a_n^\dagger (-a_{n+m} a_k^\dagger + \delta_{n+m, k}) a_{k+l} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^\dagger a_{k+l+m} = \\
 = & \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} a_n^\dagger a_{n+m} a_k^\dagger a_{k+l} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k^\dagger a_{k+l+m} - a_{k-m}^\dagger a_{k+l}).
 \end{aligned}$$

La première somme est égale à $\sqrt{lm} b_m b_l$. La deuxième somme est égale à zéro, parce qu'il y a pour chaque terme un autre qui le compense. (31) est donc satisfaite. De la même manière on peut démontrer que les équations (12) sont valables pour $m \neq l$.

Il reste donc à démontrer que

$$b_l b_l^\dagger - b_l^\dagger b_l = I, \quad l = 1, 2, \dots \quad (32)$$

La relation (30) nous permet d'écrire :

$$l(b_l b_l^\dagger - b_l^\dagger b_l) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (a_m^\dagger a_{m+l} a_{n+l}^\dagger a_n - a_{n+l}^\dagger a_n a_m^\dagger a_{m+l}).$$

Pour $n \neq m$ nous pouvons intervertir les facteurs avec m et les facteurs avec n dans la dernière expression, et les termes correspondants fourniront ainsi une contribution nulle à la somme double. Il nous reste :

$$\begin{aligned}
 l(b_l b_l^\dagger - b_l^\dagger b_l) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_m^\dagger a_{m+l} a_{m+l}^\dagger a_m - a_{m+l}^\dagger a_m a_m^\dagger a_{m+l}) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_m^\dagger a_m a_{m+l} a_{m+l}^\dagger - a_m a_m^\dagger a_{m+l}^\dagger a_{m+l}).
 \end{aligned}$$

Mais, ainsi que nous l'avons indiqué dans les équations (28) et (29),

$$\begin{aligned}
 a_l^\dagger a_l &= I_l, & a_l a_l^\dagger &= I - I_l, & l &= 0, 1, 2, \dots, \\
 a_{-l} a_{-l}^\dagger &= N_l, & a_{-l}^\dagger a_{-l} &= I - N_l, & l &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

En divisant la dernière somme de la manière suivante

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} = \sum_{m=-\infty}^{-l-1} + \sum_{m=-l}^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty}$$

et en remplaçant dans les deux premières sommes partielles m par $-m$, nous obtenons enfin

$$l(b_l b_l^\dagger - b_l^\dagger b_l) = \sum_{m=l+1}^{\infty} [(1 - N_m)N_{m-l} - N_m(1 - N_{m-l})]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [(1 - N_m)(1 - L_{l-m}) - N_m L_{l-m}] + \sum_{m=0}^{\infty} [L_m(1 - L_{m+l}) - (1 - L_m)L_{m+l}]$$

ce qui est égal à l . Ainsi la validité de (32) est démontrée.

Nous pouvons formuler les résultats obtenus en disant que dans le cas d'une dimension il est possible de construire un champ scalaire dont les amplitudes partielles b_i obéissent aux relations d'échange caractéristiques de la statistique de Bose-Einstein à l'aide d'un champ de particules avec états stationnaires d'énergie positive et négative dont les amplitudes partielles a_i obéissent aux relations d'échange caractéristiques pour la statistique de Fermi-Dirac. Plus précisément, les b_i sont des fonctions quadratiques des a_i données par l'équation (30).

III

Construction d'un champ de rayonnement ayant des nombres déterminés de photons dans chaque état

Ayant trouvé la relation (30) qui garantit que les b_i obéissent aux relations d'échange convenables lorsque les neutrinos satisfont au principe de Pauli, un premier problème se pose tout naturellement, à savoir : *de quelle manière* faut-il distribuer les neutrinos entre leurs divers états stationnaires pour obtenir un champ de rayonnement ayant un nombre défini de quanta de lumière dans chacune de ses ondes partielles. En d'autres termes : La série des nombres M_i , caractérisant le champ de rayonnement, étant donnée, comment faut-il choisir les L_i et N_i pour représenter ce champ ?

LE NEUTRINO

En posant

$$M_i = b_i^\dagger b_i$$

et en exprimant les b_i en fonction des a_i à l'aide de (30), Kro-nig (17) a montré que les M_i ne sont pas commutables avec les L_m et N_m , c'est-à-dire que :

$$M_i L_m - L_m M_i \neq 0, \quad M_i N_m - N_m M_i \neq 0.$$

Cela signifie que pour un champ de neutrinos où les L_m et N_m ont des valeurs définies, de sorte que ces quantités sont représentées par des matrices diagonales, les M_i ne peuvent pas être représentés par de telles matrices.

Illustrons ce résultat par un exemple. Prenons un champ de neu-trinos avec la distribution suivante

$$\begin{array}{cccccc} L_0 & L_1 & N_1 & L_2 & N_2 & L_3 & N_3 \dots \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \dots \end{array} \quad (33)$$

c'est-à-dire avec deux neutrinos. Nous démontrerons que l'élément de matrice de $M_1 = b_1^\dagger b_1$ qui conduit à l'état

$$\begin{array}{cccccc} L'_0 & L'_1 & N'_1 & L'_2 & N'_2 & L'_3 & N'_3 \dots \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \dots \end{array} \quad (34)$$

et qui est donc non-diagonal, est différent de zéro. Nous avons, d'après (30),

$$\begin{aligned} b_1^\dagger &= \dots a_{-2}^\dagger a_{-3} + a_{-1}^\dagger a_{-2} + a_0^\dagger a_{-1} + a_1^\dagger a_0 + a_2^\dagger a_1 + a_3^\dagger a_2 + \dots, \\ b_1 &= \dots a_{-3}^\dagger a_{-2} + a_{-2}^\dagger a_{-1} + a_{-1}^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_3 + \dots \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu dans (25) et (26), l'opérateur a_l augmente L_l d'une unité, tandis que a_l^\dagger la diminue d'une même quantité. En intro-duisant les N_l selon (29), nous voyons que l'opérateur a_{-l} avec $l > 0$ diminue N_l d'une unité, tandis que a_{-l}^\dagger l'augmente d'une même quantité. Ainsi le terme $a_1^\dagger a_0$ de b_1^\dagger dans le produit $M_1 = b_1^\dagger b_1$ nous conduit de l'état initial (33) à l'état intermédiaire.

$$\begin{array}{cccccc} L''_0 & L''_1 & N''_1 & L''_2 & N''_2 & L''_3 & N''_3 \dots \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \dots \end{array}$$

et de cet état à l'état final (34) par le terme $a_2^\dagger a_3$ de b_1 .

Les champs de rayonnement ayant des valeurs définies des M_i , c'est-à-dire les champs pour lesquels les M_i sont représentés par des matrices diagonales, sont effectivement réalisés dans la nature. Par exemple un champ de rayonnement monochromatique a tous les M_i égaux

à zéro, sauf un, lequel a une valeur fonction de l'énergie totale du rayonnement. Si les champs de neutrinos ayant des valeurs définies pour les nombres de neutrinos L_i et N_i ne peuvent décrire de tels champs de rayonnement, comment pourrions-nous alors les reproduire à partir d'un ensemble de neutrinos ?

La réponse à cette question est en principe assez simple. Les champs des neutrinos pour lesquels les L_i et N_i prennent des valeurs bien définies ne sont pas les seuls qu'on puisse imaginer. Dans la théorie

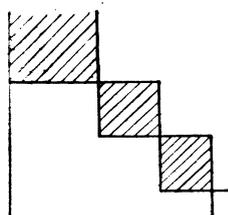


Fig. 2

des quanta nous pouvons construire de nouvelles solutions en faisant des combinaisons linéaires des solutions élémentaires. En d'autres termes : dans notre problème il faut chercher une transformation linéaire des états du champ de neutrinos qui nous conduise de la représentation dans laquelle les L_i et N_i sont des matrices diagonales à une représentation dans laquelle les M_i sont des matrices diagonales (17). Les coefficients de la transformation linéaire mentionnée peuvent aussi être décrits sous forme d'une

matrice que nous appellerons S . D'après les règles connues de la mécanique quantique nous avons pour les matrices transformées

$$L'_i = S L_i S^{-1}, \quad N'_i = S N_i S^{-1}, \quad M'_i = S M_i S^{-1}.$$

Il faut donc déterminer S de manière que les M'_i soient diagonales, les L'_i et N'_i ne l'étant naturellement plus.

A première vue la détermination de S ne semble pas être très simple parce que les matrices M_i ont un nombre infini de colonnes. Cependant, Kronig (18) a montré qu'il est possible de faire un progrès considérable dans la résolution du problème de la manière suivante : Si l'on se demande quels sont les éléments des M_i différents de zéro, on trouve qu'ils possèdent tous une propriété caractéristique : seuls les éléments qui correspondent à un état initial et à un état final ayant la même énergie totale ne s'annulent pas. Cela résulte du fait que les opérateurs b_i^\dagger provoquent une diminution de $h\nu_i$ de l'énergie totale du champ de neutrinos, tandis que les b_i l'augmentent de la même quantité, de sorte que l'opérateur $M_i = b_i^\dagger b_i$ ne modifie pas cette

LE NEUTRINO

énergie. Cette condition n'est pas unique. D'après Kronig (19) et Jordan (20) la matrice

$$\left. \begin{aligned} B &= a_0^\dagger a_0 - \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^\dagger a_l - a_{-l} a_{-l}^\dagger) \\ &= L_0 - \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (L_l - N_l) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

a la propriété d'être commutable avec tous les b_l :

$$B b_l - b_l B = 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Elle est alors commutable avec tous les M_l , et par conséquent seuls les éléments des M_l diffèrent de zéro pour lesquels B a la même valeur dans l'état initial et dans l'état final. Si donc on arrange les états stationnaires du gaz de neutrinos suivant les valeurs de l'énergie totale E et suivant les valeurs de B, les M_l se présenteront sous la forme de matrices ayant un nombre fini de lignes et de colonnes (fig. 2). Le problème de la transformation des M_l en matrices diagonales est réduit donc à celui de la transformation de chacune de ces matrices finies en une matrice diagonale.

Pour illustrer ce résultat par un exemple, cherchons les états du champ de neutrinos correspondant à une énergie totale égale à 3, en unités élémentaires $h\nu_1$, où $h\nu_1$ est la différence d'énergie entre les états successifs des neutrinos. Voici un tableau de ces états, appelés I, II, ..., et dont le nombre est égal à douze :

	L_0	L_1	N_1	L_2	N_2	L_3	N_3	L_4	N_4	...	B
I	1	1	0	1	0	0	0	0	0		$\frac{5}{2}$
II	1	0	0	0	0	1	0	0	0		$\frac{3}{2}$
III	0	1	0	1	0	0	0	0	0		$\frac{3}{2}$
IV	0	0	0	0	0	1	0	0	0		$\frac{1}{2}$
V	1	0	1	1	0	0	0	0	0		$\frac{1}{2}$
VI	1	1	0	0	1	0	0	0	0		$\frac{1}{2}$
VII	0	0	1	1	0	0	0	0	0		$\frac{1}{2}$
VIII	0	1	0	0	1	0	0	0	0		$-\frac{1}{2}$
IX	1	0	0	0	0	0	1	0	0		$-\frac{3}{2}$
X	1	0	1	0	1	0	0	0	0		$-\frac{3}{2}$
XI	0	0	0	0	0	0	1	0	0		$-\frac{5}{2}$
XII	0	0	1	0	1	0	0	0	0		$-\frac{5}{2}$

Il y a seulement un champ, l'état I, ayant les valeurs $E = 3$ et

$B = 5/2$. Pour cet état les M_i sont donc déjà diagonaux. On trouve pour eux à l'aide de (15), (30) et (25), (26) les valeurs $M_i = 0$, signifiant que le champ de rayonnement n'est pas excité. Pour $E = 3$ et $B = 3/2$ il y a deux états, II et III. Nous obtenons les matrices suivantes pour les parties m_1, m_2 de M_1, M_2 qui appartiennent à ces états :

$$m_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad m_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

tandis que m_3, m_4, \dots ne contiennent que des zéros. La matrice s qui transforme m_1, m_2 en des matrices diagonales est la suivante :

$$s = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Elle donne

$$m_1' = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad m_2' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

A partir des deux états II et III du champ de neutrinos caractérisé par les nombres L_i et N_i nous pouvons donc construire, par superposition, deux états avec des nombres bien définis M_i des quanta de lumière. L'énergie du rayonnement correspondante est égale à $W = 2$. De la même manière on peut traiter les autres cas où B prend une valeur différente.

Le résultat le plus important obtenu dans l'exemple ci-dessus est le suivant : l'énergie totale W du rayonnement peut être moindre que l'énergie totale E des champs de neutrinos que nous avons superposés. Il existe en particulier des champs (I et XII) pour lesquelles aucun des oscillateurs qui représentent le champ de rayonnement n'est excité ; en d'autres termes ces champs de neutrinos d'énergie totale $E = 3$, ne contiennent aucun photon. Ce fait est de nature à nous rassurer sur la légitimité de notre point de vue ; en effet, il nous montre clairement qu'il existe une possibilité théorique pour les neutrinos de se soustraire à l'observation dans la désintégration β .

Le calcul direct, que nous avons fait pour le cas $E = 3$, devient naturellement très compliqué si E devient grand. Les états I, II,...

sont alors très nombreux et la détermination de la matrice de transformation s exige la résolution d'un système d'équations linéaires à un très grand nombre d'inconnues. Nous devons donc chercher une méthode indirecte pour répondre à la question : quels sont les champs de rayonnement caractérisés par des nombres M_i qui peuvent être construits par superposition de champs de neutrinos ayant la même énergie $E = j$ (mesuré en unités $h\nu_1$, donc avec $j =$ nombre entier) ? Nous ne ferons qu'esquisser les diverses phases de cette méthode indirecte sans donner de démonstration pour chaque étape qu'il nous faudra parcourir, parce que quelques certaines parties de ce calcul sont assez longues. On peut en trouver les détails dans deux articles de Kronig (19) et de Jordan (20).

La clef du problème est fournie par la matrice B définie par (35). L'importance de B pour notre problème se manifeste lorsqu'on la met en rapport avec l'hamiltonien E du champ de neutrinos et l'hamiltonien W du champ de rayonnement. Entre ces matrices, on a, d'après Kronig (19) la relation

$$E - W = \frac{1}{2} \left(B^2 - \frac{1}{4} \right) h\nu_1. \quad (36)$$

La démonstration de (36) peut être obtenue en partant des définitions (27) et (14) de E et de W , ainsi que de la définition (35) de B , en y introduisant pour les b_i leurs expressions en fonction des a_i et en faisant finalement usage des relations d'échange pour les a_i .

Le problème ci-dessus avait pour but de trouver les champs de rayonnement ayant des valeurs M_i données, que l'on peut construire à partir de champs de neutrinos avec une énergie totale $E = j$. Nous voyons par (36) que les valeurs caractéristiques de W sont aussi les valeurs caractéristiques de $E - \frac{1}{2} \left(B^2 - \frac{1}{4} \right)$. E étant déjà une matrice diagonale de valeurs caractéristiques égales à j , il suffira de retrancher les valeurs caractéristiques de $\frac{1}{2} B^2$, c'est-à-dire les valeurs $\frac{1}{8}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{1}{8} (2n + 1)^2, \dots$ et d'ajouter $\frac{1}{8}$. On trouve donc comme valeurs possibles de l'énergie totale du champ de rayonnement

$$W = j - \frac{n(n+1)}{2} \geq 0. \quad (37)$$

L'exemple étudié confirme l'exactitude de ce calcul. Dans cet exemple E avait la valeur 3, ce qui nous donne pour $n = 0, 1, 2$ les valeurs $W = 3, 2, 0$; c'est-à-dire précisément des valeurs que nous avons trouvées par le calcul direct.

Cependant la détermination de W n'achève pas la résolution du problème. Nous ne voulons pas connaître uniquement les valeurs de W possibles pour un champ de neutrinos d'énergie E , mais aussi les valeurs individuelles possibles de M_i . Pour obtenir une solution rigoureuse il faut faire appel à la théorie des groupes; nous nous bornerons ici à donner le résultat final: à partir de champs de neutrinos d'énergie totale $E = j$ on peut obtenir par superposition tous les champs de rayonnement d'énergie totale donnée par (37), avec des valeurs données de M_i , et seulement ceux-là.

Dans notre exemple $j = 3$ toutes les combinaisons M_i qui nous donnent $W = 3, 2, 0$ sont en effet présentes tandis que la combinaison $M_1 = 1, M_2 = 0, \dots$ avec $W = 1$ est absente.

Parmi tous les champs de rayonnement possibles ceux pour lesquels $W = E$ ou $W = 0$ méritent une attention spéciale. Dans les premiers toute l'énergie des neutrinos apparaît comme énergie de rayonnement; ce sont des champs de rayonnement pur. Dans les seconds il n'y a pas d'énergie de rayonnement; ce sont des champs de neutrinos purs qui jouent un rôle dans les transformations β . En dehors de ces cas extrêmes nous avons les cas où une partie seulement de l'énergie des neutrinos se manifeste sous forme de rayonnement. Nous rencontrerons dans le chapitre suivant d'intéressants exemples de ce dernier type de champ.

IV

L'équilibre thermodynamique pour les champs de neutrinos Extension de la théorie au cas de trois dimensions

Nous avons vu qu'un champ de neutrinos avec un nombre déterminé de particules de ce type dans chaque état stationnaire n'est pas équivalent à un champ de rayonnement avec un nombre défini de photons dans chaque état; on peut cependant obtenir un pareil champ de rayonnement pour lequel les M_i seraient diagonaux au moyen d'une

LE NEUTRINO

superposition de champs de neutrinos. Nous en avons conclu que ce n'est qu'une partie de l'énergie du champ de neutrinos qui apparaît comme énergie de rayonnement, de façon que dans le cas extrême cette dernière énergie peut même être égale à zéro. Étudions maintenant un problème qui présente un grand intérêt, celui de l'équilibre thermodynamique d'un gaz de neutrinos (20).

La première question qui se pose est la suivante : Quelle est la distribution des neutrinos entre les divers états stationnaires possibles dans le cas de l'équilibre thermodynamique ? Les neutrinos obéissent au principe d'exclusion de Pauli, c'est-à-dire à la statistique de Fermi-Dirac. Leur distribution entre les divers états stationnaires peut donc être obtenue de la même manière que la distribution de l'énergie des électrons dans un métal, selon la théorie de Sommerfeld. Il y a pourtant une différence importante : Le nombre des électrons dans un volume déterminé du métal est donné, tandis qu'il faut considérer le nombre de neutrinos comme variable : les neutrinos peuvent être produits ou détruits de même que les quanta de lumière peuvent apparaître et disparaître. Il faut donc se demander quelle est la distribution de neutrinos, satisfaisant au principe de Pauli, qui a la plus grande probabilité statistique, donc l'entropie maxima, sans qu'aucune limitation soit imposée à la valeur du nombre total des neutrinos. D'après la méthode bien connue de la théorie des métaux on trouve qu'à la température T les valeurs moyennes des L_i et N_i sont

$$\bar{L}_i = \bar{N}_i = \frac{1}{e^{h\nu_i/kT} + 1} = \frac{1}{e^{\beta} + 1}, \quad \beta = \frac{h\nu_i}{kT}. \quad (38)$$

Ayant trouvé la distribution d'équilibre des neutrinos entre leurs divers états stationnaires il s'agit de trouver maintenant quel est le caractère du rayonnement correspondant à ce champ de neutrinos. En d'autres termes : quelles sont les valeurs moyennes \bar{M}_i des M_i auxquelles notre distribution \bar{L}_i, \bar{N}_i donne lieu ? La réponse s'obtient d'une manière assez simple. D'après les règles de la mécanique quantique l'espérance mathématique \bar{M}_i des M_i est donnée par les éléments diagonaux des matrices M_i . En nous rappelant la définition (15) de M_i , en tenant compte de la relation fondamentale (30) laquelle donne b_i en fonction des a_i , et de (28), (29) qui relie ces dernières

quantités aux L_l et N_l on trouve, après un calcul simple (15)

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_l &= \frac{1}{l} [L_0 N_l + (1 - L_0) L_l] \\ &+ \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{l-1} L_m N_{l-m} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} [L_{m+l} (1 - L_m) + N_{m+l} (1 - N_m)]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Dans cette formule, qui est encore valable pour chaque distribution des neutrinos entre leurs divers états stationnaires, il faut maintenant substituer aux L_l et N_l les expressions \bar{L}_l et \bar{N}_l de (38). Ces expressions \bar{L}_l et \bar{N}_l sont égales ; ensuite

$$1 - \bar{L}_l = \bar{L}_{l-1}.$$

En tenant compte de ces propriétés, nous pouvons écrire pour \bar{M}_l ,

$$\begin{aligned} \bar{M}_l &= \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{L}_m \cdot \bar{L}_{l-m} \\ &= \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{m\beta} + 1} \frac{1}{e^{(l-m)\beta} + 1} = \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{m\beta} + 1} \cdot \frac{e^{(m-l)\beta}}{e^{(m-l)\beta} + 1}. \end{aligned}$$

Le terme général dans la somme peut être écrit

$$\frac{1}{e^{m\beta} + 1} \frac{e^{(m-l)\beta}}{e^{(m-l)\beta} + 1} = \frac{1}{2(e^{l\beta} - 1)} \left[\frac{e^{m\beta} - 1}{e^{m\beta} + 1} - \frac{e^{(m-l)\beta} - 1}{e^{(m-l)\beta} + 1} \right].$$

Nous avons donc

$$\bar{M}_l = \frac{1}{2l} \frac{1}{e^{l\beta} - 1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \left[\frac{e^{m\beta} - 1}{e^{m\beta} + 1} - \frac{e^{(m-l)\beta} - 1}{e^{(m-l)\beta} + 1} \right].$$

Dans cette somme un grand nombre de termes se compensent. Il reste seulement les termes

$$\frac{e^{m\beta} - 1}{e^{m\beta} + 1} \quad \text{pour } m = N - l + 1 \text{ jusqu'à } N \quad (40)$$

et

$$-\frac{e^{(m-l)\beta} - 1}{e^{(m-l)\beta} + 1} \quad \text{pour } m = -N \text{ jusqu'à } -N + l - 1. \quad (41)$$

Si N est très grand, les termes (40) ainsi que (41) se réduisent à l'unité.

LE NEUTRINO

A la limite $N \rightarrow \infty$ la somme prend donc la valeur $2l$, ce qui donne enfin :

$$\bar{M}_l = \frac{1}{e^{l\beta} - 1} = \frac{1}{e^{h\nu_l/kT} - 1}. \quad (42)$$

Cette expression est cependant identique à la loi de Planck pour le nombre de quanta de lumière dans l'onde partielle de fréquence $\nu_l = l\nu_1$. En résumé, nous pouvons donc dire que la distribution d'équilibre des neutrinos conduit à un champ de rayonnement dans lequel la distribution des photons est précisément la distribution d'équilibre, c'est-à-dire la distribution de Planck.

A ce propos, il est intéressant de déterminer, pour le cas de l'équilibre thermodynamique, l'énergie totale du champ de neutrinos et du champ de rayonnement dans le « volume » L de l'enceinte, considérée au début de nos recherches. Si cette enceinte est assez grande, nous pouvons passer des états discrets à une suite continue. Entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ il y a $d\nu/\nu_1 = Ld\nu/c$ fréquences caractéristiques du champ de neutrinos et du champ de rayonnement. Le nombre de neutrinos et d'antineutrinos et le nombre de photons pour chacune de ces fréquences est donné par les expressions (39) et (42); leur énergie s'obtient en multipliant les nombres par $h\nu_l$. L'énergie totale du champ de neutrinos sera donc

$$\bar{E} = \frac{L}{c} \int_0^\infty \frac{2h\nu d\nu}{e^{h\nu/kT} + 1} = \frac{\pi^2 k^2 T^2}{6 hc} \cdot L, \quad (43)$$

et celle du champ de rayonnement :

$$\bar{W} = \frac{L}{c} \int_0^\infty \frac{h\nu d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{\pi^2 k^2 T^2}{6 hc} \cdot L; \quad (44)$$

donc pour un volume suffisamment grand l'énergie du rayonnement sera égale à celle du gaz de neutrinos pour le cas de l'équilibre thermodynamique.

Il faut souligner que toute la discussion précédente s'est limitée au cas d'une seule dimension. On se demandera naturellement comment il faut généraliser les résultats obtenus pour le cas de trois dimensions. Nous verrons que cela ne présente aucune difficulté. Au lieu de l'enceinte à une dimension, c'est-à-dire de la longueur L , nous introduisons maintenant un cube de côté L , et nous imposons aux fonctions

d'onde une périodicité dans les trois directions des coordonnées. Les ondes partielles pour le rayonnement et pour les neutrinos ont alors la forme

$$\exp 2\pi i l \left(\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z}{c} - \nu_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} t \right), \quad \nu_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{c}{L} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}.$$

Ici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ désignent trois nombres premiers entre eux tandis que l est un nombre entier.

Désignons ensuite par $b_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, l}$ et par $a_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, l}$ l'amplitude des ondes partielles. Pour relier le champ de radiation avec celui des neutrinos posons (20)

$$\sqrt{l} b_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, l} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, m}^\dagger a_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, m+l}. \quad (45)$$

De cette manière il est évident que les relations d'échange pour les b sont une conséquence des relations d'échange pour les a comme dans le cas d'une dimension, le cas de trois dimensions se réduisant en effet au cas d'une seule dimension au moyen de la relation (45). Nous pouvons dire qu'à cause de cette formule seuls les neutrinos qui se propagent dans la même direction coopèrent pour donner de la lumière. Il est nécessaire d'imposer cette condition, parce que seulement dans ce cas deux neutrinos ayant une énergie totale $h\nu$ ont aussi une quantité de mouvement $h\nu/c$.

A cause de la relation intime entre le cas de trois dimensions et le cas d'une dimension il s'ensuit que la distribution des neutrinos dans le cas d'équilibre thermodynamique, régie par la formule

$$\bar{N}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, l} = \bar{N}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, l} = \frac{1}{e^{h\nu_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}/kT} - 1},$$

a comme conséquence la distribution des photons déterminée par

$$\bar{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, l} = \frac{1}{e^{h\nu_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}/kT} - 1}.$$

La loi de Planck est donc satisfaite également dans le cas de trois dimensions. Cependant dans ce cas l'énergie totale du champ de rayonnement diffère de l'énergie totale du champ de neutrinos. Entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ il y a pour un grand volume de la cavité qui contient les neutrinos et la radiation

$$\frac{4\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

fréquences caractéristiques. L'énergie totale des neutrinos est alors

$$\overline{\overline{E}} = \frac{4\pi L^3}{c^3} \int_0^\infty \frac{2h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} + 1} = \frac{7\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{h^3 c^3} L^3, \quad (46)$$

tandis que l'énergie totale de la radiation est

$$\overline{\overline{W}} = \frac{4\pi L^3}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{4\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{h^3 c^3} L^3. \quad (47)$$

La dernière expression est la loi de Stefan-Boltzmann, donnant une proportionnalité de l'énergie totale avec T^4 . Nous avons

$$\frac{\overline{\overline{W}}}{\overline{\overline{E}}} = \frac{4}{7},$$

c'est-à-dire que le champ des neutrinos en équilibre thermodynamique n'est pas un champ de rayonnement pur.

Dans une théorie relativiste, où il faut représenter les neutrinos par une équation d'onde du type introduit par Dirac pour l'électron, avec une fonction d'onde ayant quatre composants, et où la radiation n'est plus un phénomène d'ondes scalaires, la lumière pouvant être polarisée, il faut ajouter un facteur 2 dans les formules (46) et (47). Nous discuterons la théorie relativiste dans la section suivante.

V

Essai de théorie relativiste

Dans les développements précédents nous avons traité le champ de rayonnement comme champ scalaire, les amplitudes des ondes partielles étant b_i , c'est-à-dire nous avons fait abstraction du fait qu'en réalité il s'agit d'un champ vectoriel, caractérisé par les deux vecteurs E et H de la théorie électromagnétique. En outre, nous avons représenté les neutrinos par une fonction d'onde scalaire, ce qui nous a empêché de donner à la théorie une forme invariante par rapport aux transformations relativistes.

M. de Broglie a indiqué dans quelle direction il faut chercher une théorie relativiste (14); nous combinerons ses idées avec les résultats déjà acquis.

En premier lieu il faut traiter les neutrinos selon la méthode de Dirac, et écrire par conséquent comme équation d'onde

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0, \quad (48)$$

la masse du neutrino étant égale à zéro. Ψ est une fonction d'onde à quatre composants, les α_k sont les matrices de Dirac satisfaisant aux conditions connues

$$\alpha_k^2 = \mathbf{I}, \quad \alpha_l \alpha_k + \alpha_k \alpha_l = 0, \quad l \neq k.$$

On peut les écrire explicitement sous différentes formes ; pour notre but la forme suivante est la plus commode.

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{vmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{vmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -i & \mathbf{0} \end{vmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}.$$

En nous limitant de nouveau au problème d'une dimension où les ondes sont propagées dans la direction x , l'équation fondamentale (48) devient

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} = 0.$$

En imposant une condition de périodicité, nous avons comme solutions particulières les expressions suivantes

$$\varphi = A e^{2\pi i \nu_l \left(\frac{x}{c} - t \right)}, \quad A_1 = \mathbf{I}, \quad A_2 = A_3 = A_4 = 0,$$

$$\psi = C e^{2\pi i \nu_l \left(\frac{x}{c} - t \right)}, \quad C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = \mathbf{I}.$$

A partir de ces solutions on peut obtenir la solution générale par superposition :

$$\Psi = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[a(l) A e^{2\pi i \nu_l \left(\frac{x}{c} - t \right)} + c(l) C e^{2\pi i \nu_l \left(\frac{x}{c} - t \right)} \right].$$

En appliquant les opérateurs de la quantité de mouvement, de l'énergie et du spin aux fonctions précédentes :

$$p = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \sigma_x = -i \alpha_2 \alpha_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{vmatrix},$$

on voit que les solutions φ et ψ représentent des neutrinos qui se meuvent dans la direction positive de l'axe des x avec spin à droite et avec spin à gauche.

Comme M. de Broglie (14) l'a signalé, il est possible, à l'aide des matrices α , de construire un tenseur antisymétrique du second rang à partir des « spineurs » A et C ; en effet les quantités

$$\begin{aligned} & A^\dagger \alpha_1 \alpha_4 C, & A^\dagger \alpha_2 \alpha_4 C, & A^\dagger \alpha_3 \alpha_4 C, \\ & A^\dagger \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 C, & A^\dagger \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 C, & A^\dagger \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 C \end{aligned}$$

se transforment comme les composants d'un tel tenseur.

Posons maintenant pour la composante $E_x = E_1$ du champ électromagnétique.

$$\begin{aligned} E_1 = \rho \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} [a^\dagger(l)a(l+m)C^\dagger \alpha_1 \alpha_4 A \right. \\ \left. + c^\dagger(l)c(l+m)A^\dagger \alpha_1 \alpha_4 C] e^{2\pi i \nu m \left(\frac{x}{c} - t \right)} \right. \\ \left. - \sum_{l=-\infty}^{\infty} [a^\dagger(l)a(l-m)A^\dagger \alpha_1 \alpha_4 C \right. \\ \left. + c^\dagger(l)c(l-m)C^\dagger \alpha_1 \alpha_4 A] e^{-2\pi i \nu m \left(\frac{x}{c} - t \right)} \right\}, \end{aligned}$$

les autres composantes électriques et magnétiques E_2, E_3, H_1, H_2, H_3 étant obtenues en remplaçant $\alpha_1 \alpha_4$ par $\alpha_2 \alpha_4, \alpha_3 \alpha_4, -i\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, -i\alpha_3 \alpha_1 \alpha_4, -i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4$.

Considérons maintenant les $a(l)$ et les $c(l)$ non plus comme des nombres ordinaires, mais comme matrices, obéissant aux relations d'échange

$$\begin{aligned} a(l)a(m) + a(m)a(l) &= 0, & c(l)c(m) + c(m)c(l) &= 0, \\ a(l)a^\dagger(m) + a^\dagger(m)a(l) &= \delta_{lm}, & c(l)c^\dagger(m) + c^\dagger(m)c(l) &= \delta_{lm}, \\ a(l)c(m) + c(m)a(l) &= 0, \\ a(l)c^\dagger(m) + c^\dagger(m)a(l) &= 0, \end{aligned}$$

caractéristiques pour la statistique de Dirac et Fermi. On peut démontrer alors que E et H obéiront aux relations d'échange caractéristiques du champ électromagnétique dérivées par Heisenberg et Pauli (21).

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que de l'équivalence du rayonnement avec un champ de neutrinos. Nous n'avons pas examiné

la question de l'interaction entre les neutrinos et les autres particules élémentaires que nous connaissons aujourd'hui, les protons, les neutrons, les électrons et les positons. Comment faudrait-il traduire en langage de neutrinos l'effet d'un champ de rayonnement sur ces particules ?

L'émission, l'absorption et la dispersion quantiques de la lumière, ont été traitées par Dirac dans des recherches bien connues (22). On obtient l'hamiltonien d'un système atomique placé dans un champ de rayonnement en ajoutant l'hamiltonien du système atomique isolé, l'hamiltonien du champ et en plus un terme représentant l'interaction entre les deux. Pour une seule particule et dans une théorie relativiste, ce dernier terme a la forme

$$\frac{e}{c} \sum_{k=1}^3 \alpha_k V_k, \quad (49)$$

où e est la charge de la particule, c la vitesse de la lumière, les α_k les matrices de Dirac et les V_k les composants du potentiel vecteur du champ de rayonnement. En développant en série de Fourier les V_k , c'est-à-dire en les exprimant sous forme d'une superposition d'ondes planes d'amplitudes b_l , l'expression (49) devient une fonction des b_l . Il suffit alors de remplacer les b_l par leurs expressions en fonction des amplitudes a_l et c_l pour obtenir l'interaction sous la forme désirée. Scherzer (23) a développé cette idée et a démontré qu'on aboutit par cette méthode aux mêmes résultats que par la méthode de Dirac, en ce qui concerne les phénomènes d'émission et d'absorption de la lumière.

VI

Le neutrino et la physique nucléaire

Nous avons remarqué que la représentation d'un champ de rayonnement par un champ de neutrinos ne conduit à aucun résultat nouveau en ce qui concerne l'interaction ordinaire de la lumière avec les particules matérielles dont la vitesse n'est pas trop grande. Le domaine où l'on pourra véritablement voir si les nouveaux développements donnent lieu à un progrès réel sera celui de la physique nucléaire qui nous a fourni d'ailleurs à l'origine l'idée même de neutrino.

LE NEUTRINO

La conception du neutrino a été introduite au début dans la théorie de la désintégration β afin de concilier les faits avec le principe de conservation de l'énergie et du moment de rotation. Étudions un peu plus en détail ce problème de la désintégration β . Entre l'émission des photons par les électrons des couches atomiques extérieurs et l'expulsion des particules β par les noyaux il y a une analogie sur laquelle Heisenberg (24) a attiré l'attention et qui peut être schématisée par le tableau suivant :

	Atome	Noyau	
Particules primitives	Noyau, électrons	Protons, neutrons	
Particules émises pendant les transitions	Photons	Électrons Positons Neutrinos	Photons
Champ associé	Champ de Maxwell	Champ de Fermi	Champ de Maxwell
Première approximation des forces d'interaction	Forces de Coulomb	Forces d'échange	Forces de Coulomb

Analysons d'abord le cas des particules composant le système de l'atome et celui du noyau. Selon les idées communément admises, l'atome est composé d'un noyau et d'électrons, et cette conception est étayée par le fait expérimental que ce sont précisément ces particules qui apparaissent comme fragments d'atomes dans les expériences de collision. Quoique émis également par l'atome, les photons ne sont pas considérés comme des pierres de l'édifice atomique. On estime qu'ils sont créés pendant les transitions de l'atome entre deux états stationnaires, parce que, contrairement aux électrons, ils apparaissent longtemps après la collision qui a excité l'atome. Dans les expériences de choc concernant le noyau, on obtient comme fragments des protons et des neutrons (et dans certains cas des particules α). Les électrons et les positons ne sont observés que longtemps après la collision dans les phénomènes de radioactivité artificielle. Par analogie, il faut donc admettre que le noyau est composé des protons et des neutrons, tandis que les électrons, positons et neutrinos sont créés pendant la transition de ces particules lourdes. En dehors de ces

particules légères le noyau peut également créer des quanta de lumière, c'est-à-dire des rayons γ .

Aux photons correspond, dans le cas de l'atome, un champ, le champ électromagnétique de Maxwell, dont les amplitudes ont été appelées b_i . Si nous connaissons la loi d'action de ce champ sur les particules de l'atome, noyau et électrons, nous pouvons calculer la probabilité des transitions atomiques, c'est-à-dire la chance pour qu'un photon soit émis. Pour le champ de Maxwell la loi d'interaction avec les particules chargées est bien connue ; elle a permis à Dirac (22) de retrouver les expressions d'Einstein pour les probabilités d'absorption et d'émission de rayonnement.

Les électrons (ou positons) et les neutrinos jouent dans les processus nucléaires le même rôle que les quanta de lumière dans les processus concernant la structure extérieure de l'atome. Ces deux sortes de particules peuvent donc être représentées par des champs, caractérisés par les amplitudes des ondes partielles se rapportant aux états stationnaires des électrons et des neutrinos. Ce sont ces champs, que nous appellerons pour abrégé les champs de Fermi, cet auteur ayant le premier développé une théorie de la désintégration β dans cette direction (25), qui règlent l'interaction des particules lourdes dans le noyau de la même manière que le champ des quanta de lumière, c'est-à-dire le champ de Maxwell, gouverne l'interaction entre les particules atomiques. La première tâche doit donc être de trouver l'hamiltonien d'un noyau situé dans un champ de Fermi de la même manière que Dirac a obtenu l'hamiltonien d'un atome situé dans un champ de Maxwell. En d'autres termes, on cherche un hamiltonien se composant additivement de l'hamiltonien du noyau isolé, de l'hamiltonien des électrons et neutrinos libres et enfin d'un terme d'interaction, ce dernier donnant lieu aux transitions du noyau avec émission d'électrons et de neutrinos, c'est-à-dire à la désintégration β .

A l'encontre de ce qui se passe pour l'interaction des atomes avec le rayonnement, nous ne savons absolument rien sur celle des particules lourdes du noyau avec les particules légères, c'est-à-dire avec le champ de Fermi ; il s'agit précisément de trouver l'expression de cette interaction. Certaines conditions générales peuvent nous guider dans notre choix. Nous savons par exemple qu'à chaque désintégration β il n'y a qu'un seul électron ou positon qui soit émis ; il s'ensuit que le terme d'interaction doit être linéaire par rapport aux ampli-

LE NEUTRINO

tudes du champ des électrons. Ensuite pour que la charge électrique puisse être conservée il faut que la création d'un électron soit accompagnée par la transformation d'un neutron en un proton, et que la création d'un positon s'accompagne du processus inverse.

On peut tenir compte de ces dernières conditions en caractérisant la particule lourde par une coordonnée supplémentaire ρ , susceptible de prendre les deux valeurs $+1$ et -1 ; $\rho = -1$ signifiera que la particule correspondante est un neutron, $\rho = +1$ que c'est un proton. La matrice

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

dont les deux colonnes se rapportent à ces deux valeurs de ρ , est alors un opérateur donnant lieu à la transformation d'un neutron en proton, tandis que

$$Q^\dagger = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

donne lieu au processus inverse. Pour satisfaire à la première condition mentionnée ci-dessus, l'hamiltonien de l'interaction doit être également linéaire par rapport aux opérateurs Q .

Quant à la manière dont l'interaction dépend des amplitudes du champ de neutrinos, plusieurs hypothèses ont été mises en avant. Fermi (25) a proposé que cette dépendance soit également linéaire, de manière qu'un seul neutrino soit créé simultanément avec l'électron ou le positon expulsé. Si l'on exige de plus que le terme d'interaction soit invariant par rapport aux transformations de la relativité, il ne reste plus qu'une constante arbitraire dont on puisse disposer.

Admettons d'abord l'interaction de Fermi, et comparons entre elles la distribution théorique des vitesses des rayons β à laquelle cette interaction donne lieu et la distribution trouvée expérimentalement. En représentant cette distribution en fonction de l'énergie on obtient des courbes du type fig. 3 (a). Les résultats expérimentaux sont en général très incertains pour les petites vitesses, c'est-à-dire pour les vitesses inférieures à 100.000 électron-volt. Toutefois la courbe fig. 3 (b) semble montrer clairement que son maximum est plus aigu que les maxima théoriques, et ensuite que le rapport de l'énergie du maximum à l'énergie limite est nettement plus petit d'après l'expérience que selon la théorie.

Ce désaccord d'un caractère plutôt quantitatif que qualitatif n'est pas la seule raison qui nous fasse rechercher une modification de l'interaction proposée par Fermi ; d'autres objections beaucoup plus graves la réclament. Comme nous l'avons déjà indiqué dans notre schéma, l'interaction des électrons et du noyau d'un atome avec le champ de Maxwell peut être remplacée, pour les petites distances, par des forces directes entre les particules. Le schéma ($e^- = \text{électron}$, $h\nu = \text{quantum de lumière}$)

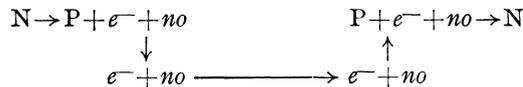


pour deux électrons très rapprochés n'est autre chose que la description de l'interaction d'après la loi de Coulomb. De la même manière



Fig. 3

pour des distances du même ordre, l'interaction des neutrons et protons avec le champ de Fermi, c'est-à-dire avec le champ des électrons et des neutrinos, donne lieu à des forces d'échange, c'est-à-dire à des forces n'agissant en première approximation qu'entre un proton et un neutron et pas entre deux neutrons ou deux protons. Nous avons par analogie avec le schéma précédent (P = proton, N = neutron, $no = \text{neutrino}$)



et l'essentiel dans ce schéma est l'existence, au début du schéma, d'un neutron à gauche et d'un proton à droite, par opposition avec la fin où nous avons un proton à gauche et un neutron à droite.

Le choix de Fermi pour le terme d'interaction entre les particules lourdes et les particules légères détermine complètement les forces qui s'exercent entre les particules lourdes, résultat mis en évi-

dence surtout par Tamm (26) et Iwanenko (27). Or, l'ordre de grandeur de ces forces nous est assez bien connu. Premièrement les défauts de masse, qui sont connus, nous donnent une mesure de ces forces d'interaction. D'après la théorie de relativité, le défaut de masse est proportionnel à l'énergie de liaison du noyau, et connaissant l'extension des forces de liaison, nous pouvons estimer leur grandeur. Ainsi pour le deuton, composé d'un seul proton et d'un seul neutron, on a pu mesurer directement l'énergie de liaison en le désintégrant par des rayons γ . D'autre part on peut évaluer l'interaction entre neutrons et protons au moyen d'expériences de choc entre ces particules, et ensuite comparer les valeurs théoriques et expérimentales. Or, il résulte de cette comparaison que les valeurs théoriques sont trop petites et différent des valeurs expérimentales par un facteur égal à 10^{-10} , ce qui est inacceptable.

Pour remédier à ce défaut et aussi pour corriger la divergence entre les courbes expérimentales et théoriques des rayons β , Bethe et Peierls (28) ainsi que Konopinski et Uhlenbeck (29) ont proposé de modifier l'interaction introduite par Fermi, en introduisant les dérivés des fonctions d'onde dans l'expression de l'interaction. C'est surtout par la modification de Bethe et Peierls qu'il est possible d'éviter la différence mentionnée de 10^{-10} .

En résumé, on peut dire que notre connaissance de l'interaction entre les diverses particules élémentaires — protons, neutrons, électrons et neutrinos — est encore fragmentaire. Dans le cadre des idées esquissées ici, l'objet des recherches théoriques futures devrait être l'établissement d'une loi universelle qui nous permette de décrire l'effet du rayonnement sur la matière sous forme d'une action des neutrinos et qui fournisse en même temps une description des processus nucléaires. Récemment Jordan (30), Kronig (31) et Stueckelberg (32) ont attiré l'attention sur certaines conditions qu'une telle loi devrait satisfaire.

LE NEUTRINO

BIBLIOGRAPHIE

- (1) E. RUTHERFORD, J. CHADWICK et C. D. ELLIS. — « Radiations from Radioactive Substances. » Cambridge, 1930.
- (2) S. BRAMSON. — *Zs. f. Phys.* **66**, 721, 1930.
- (3) C. D. ELLIS et W. A. WOOSTER. — *Proc. Roy. Soc.* **117**, 109, 1927 ; L. MEITNER. — *Phys. Zs.* **30**, 515, 1929 ; L. MEITNER et W. ORTHMANN. — *Zs. f. Phys.* **60**, 143, 1930.
- (4) S. FLÜGGE et A. KREBS. — *Phys. Zs.* **36**, 466, 1935.
- (5) R. DE L. KRONIG. — *Naturw.* **16**, 335, 1928.
- (6) W. HEITLER et G. HERZBERG. — *Ibid.* **17**, 673, 1929.
- (7) C. D. ELLIS et N. F. MOTT. — *Proc. Roy. Soc.* **141**, 502, 1933.
- (8) W. J. HENDERSON. — *Ibid.* **147**, 572, 1934.
- (9) W. E. DUNCANSON et H. MILLER. — *Ibid.* **146**, 396, 1934.
- (10) R. JAECKEL. — *Zs. f. Phys.* **91**, 493, 1934.
- (11) C. D. ELLIS et W. J. HENDERSON. — *Proc. Roy. Soc.* **152**, 714, 1935.
- (12) M. L. E. OLIPHANT, A. E. KEMPTON et E. RUTHERFORD. — *Ibid.* **150**, 241, 1935.
- (13) A. I. LEIPUNSKI. — *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **32**, 301, 1936.
- (14) L. DE BROGLIE. — *C. R.* **195**, 536, 577, 862, 1932 ; **197**, 1377, 1933 ; **198**, 135, 1934 ; **199**, 445, 1165, 1934.
- (15) P. JORDAN. — *Zs. f. Phys.* **93**, 464, 1935 ; **99**, 109, 1936.
- (16) M. BORN et N. S. NAGENDRA NATH. — *Proc. Ind. Acad. Sci.* **3**, 318, 1936 ; N. S. NAGENDRA NATH. — *Ibid.* **3**, 448, 1936.
- (17) R. DE L. KRONIG. — *Physica* **2**, 491, 1935.
- (18) R. DE L. KRONIG. — *Ibid.* **2**, 854, 1935.
- (19) R. DE L. KRONIG. — *Ibid.* **2**, 968, 1935.
- (20) P. JORDAN. — *Zs. f. Phys.* **98**, 759, 1936. P. JORDAN et R. DE L. KRONIG. — *Ibid.* **102**, 243, 1936.
- (21) W. HEISENBERG et W. PAULI. — *Zs. f. Phys.* **56**, 1, 1929 ; **59**, 168, 1930.
- (22) P. A. M. DIRAC. — *Proc. Roy. Soc.* **114**, 243, 710, 1927.
- (23) D. SCHERZER. — *Zs. f. Phys.* **97**, 725, 1935.
- (24) W. HEISENBERG. — « Verhandelingen aang. aan P. Zeeman. » 108, 1935.
- (25) E. FERMI. — *Zs. f. Phys.* **88**, 161, 1934.

R. DE L. KRONIG

- (26) I. TAMM. — *Nature*, **133**, 981, 1934.
- (27) D. IWANENKO. — *Ibid.* **133**, 981, 1934 ; D. IWANENKO et A. SOKOLOV,
— *Zs. f. Phys.* **102**, 119, 1936.
- (28) H. BETHE et R. PEIERLS. — « Conf. Nuclear Physics. » London, 1934.
- (29) E. J. KONOPINSKIV et G. E. UHLENBECK. — *Phys. Rev.* **48**, 7.
107, 1935.
- (30) P. JORDAN. — *Zs. f. Phys.* **98**, 709, 1936.
- (31) R. DE L. KRONIG. — *Nature* **137**, 149, 1936.
- (32) E. C. G. STUECKELBERG. — *Helv. Phys. Acta* **9**, 389, 533, 1936.

Le gérant : E. SCHNEIDER.