

ANNALES DE L'I. H. P.

MARCEL BRILLOUIN

Équations aux dérivées partielles du 2e ordre. Domaines à connexion multiple. Fonctions sphériques non antipodes

Annales de l'I. H. P., tome 4, n° 2 (1933), p. 173-206

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1933__4_2_173_0

© Gauthier-Villars, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Equations aux Dérivées partielles du 2^e ordre.
Domaines à connexion multiple.
Fonctions sphériques non antipodes.**

PAR

MARCEL BRILLOUIN

Introduction

I. — Un grand nombre de questions de physique ou de mécanique conduisent à des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Au cours du XIX^e siècle, les mathématiciens et les physiciens ont écrit pour les étudier d'innombrables mémoires, et cependant, les difficultés sont telles que des questions importantes ont à peine été abordées. C'est sur ces questions que je désire attirer l'attention en indiquant un mode d'attaque probablement suffisant d'ordinaire, mais sans essayer le travail, pourtant indispensable, de distinction entre les cas ordinaires et les cas extraordinaires où le mode de construction de l'intégrale que je propose se trouvera en défaut.

Les équations les plus étudiées sont les équations du potentiel ; mais c'est tout récemment que les conditions d'existence ont été étudiées par M. de la VALLÉE-POUSSIN, puis par M. JULIA, dans le cas où le contour est à connexion multiple. Un tel cas se présente quand on veut étudier la forme d'équilibre d'une membrane appuyée sur plusieurs anneaux irréguliers ; de même, s'il s'agit de l'écoulement permanent d'un liquide gêné par plusieurs obstacles cylindriques parallèles ; les problèmes électrostatiques ou électromagnétiques per-

manents avec plusieurs obstacles cylindriques parallèles sont aussi fréquents. Voici donc une première question « construire l'intégrale de l'équation du potentiel pour un domaine plan, à connexion multiple » pour lequel je ne connais ni l'indication d'une méthode générale de construction, ni un exemple particulier, lorsque la connexion est supérieure à celle de l'anneau. Je crois que la méthode que je propose est nouvelle, d'une mise en œuvre relativement simple, et sans mécomptes.

Lorsque le milieu où se produit le phénomène de gravitation, d'électrostatique, d'électromagnétisme a une constitution hétérogène à variation continue, lorsque le liquide est remplacé par un fluide, compressible et hétérogène, l'équation aux dérivées partielles diffère de l'équation de LAPLACE. C'est souvent encore une équation linéaire du second ordre, mais à coefficients variables d'un point à l'autre. Le problème apparaît comme beaucoup plus compliqué.

Je propose de l'aborder de la manière suivante : quelle que soit la connexion, je forme d'abord, par le mode de construction précédemment indiqué, l'intégrale de l'équation du potentiel qui prend les valeurs données en tous les points du contour. La fonction V ainsi construite satisfait aux conditions au contour, mais ne satisfait pas à l'équation aux dérivées partielles. Pour satisfaire à cette dernière, j'ajoute à la fonction V , une fonction v nulle sur tous les contours, et je la construis de telle sorte que $V + v$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles donnée.

La discussion des cas d'exception, en relation avec les propriétés des coefficients variables de l'équation aux dérivées partielles, n'est pas abordée.

2. — Il y a pourtant toute une série de problèmes pour lesquels ces cas exceptionnels sont plus intéressants. Ce sont les problèmes de recherche des périodes propres d'oscillation. Dans ces problèmes l'équation générale linéaire à deux variables d'espace x, y , contient en outre des dérivées par rapport au temps. On fait disparaître celles-ci, en étudiant le phénomène périodique pur, et prenant la fonction cherchée sous la forme $Ve^{i\theta t}$. Les coefficients de l'équation aux dérivées partielles par rapport à x, y , contiennent alors le paramètre θ , et, comme on sait par les exemples à connexion simple, l'intégrale n'existe et ne satisfait aux conditions au contour que pour une suite discrète de va-

leurs particulières de ϑ . Lorsque l'intégrale est connue par un développement en série, le développement est divergent en général, et ne devient convergent que pour les *fréquences propres* ϑ que l'on cherche.

La recherche de ces conditions de convergence est alors le véritable problème physique ; il convient de remarquer que ϑ ne figurera que dans la série complémentaire v , mais sous des signes de quadrature (voir § 4) qui rendront peut-être difficile la mise en évidence des fréquences propres.

3. — Je n'ai donné la forme explicite du développement que pour un type de conditions aux contours : valeur de la fonction elle-même donnée au contour.

Lorsqu'on donne la valeur de la dérivée normale en tous les points du contour, la construction des séries est encore possible, bien que le choix des fonctions qui serviront à la construction complémentaire v soit beaucoup moins simple.

Mais, lorsque les données sont mélangées, fonction sur certains arcs de contour, dérivée normale sur d'autres et surtout lorsque la donnée est une relation linéaire entre la fonction et ses dérivées premières, je ne puis encore rien dire ⁽¹⁾.

4. — Dans une autre direction, le progrès me paraît possible, et c'est en réalité pour ce problème bien plus complexe que j'ai entrepris l'étude des régions à connexion multiple. Ce problème type, qui accumule toutes les difficultés, est celui des vibrations propres d'une plaque courbe, (Equation aux dérivées quatrièmes) encastrée par son bord, appuyée en un ou plusieurs points de son intérieur, et percée d'ouvertures à bord libre : prototype schématique de la *table* des instruments à corde, avec ses ouïes, et les points d'appui de l'âme, des pieds du chevalet, — sans oublier la complication due à la barre.

Pour faire un pas dans ce sens, il faudra d'abord apprendre à construire l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du 4^e ordre, en satisfaisant à deux conditions le long de chaque contour. Ce sera la première difficulté à attaquer.

(1) *Note ajoutée au moment de l'impression.* — J'emploie maintenant des fonctions φ ... d'une forme plus simple que celles indiquées par la formule (14), et qui s'adaptent aussi facilement à tous les types de conditions au contour.

CHAPITRE PREMIER

Domaine simple

1. — Un grand nombre de questions de Physique mathématique se ramènent à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre avec des conditions diverses aux contours. Malgré les innombrables travaux des géomètres sur ce sujet, le nombre des problèmes que l'on sait traiter jusqu'au bout est extraordinairement restreint. Les contours qui se sont prêtés à l'intégration et à la discussion numérique, même dans le cas le plus simple, tel que les vibrations des membranes, se bornent à peu près au rectangle, à quelques triangles, à la circonférence, à l'ellipse et à l'anneau circulaire.

Je vais montrer comment on peut, pour les problèmes plans, quelle que soit la complication des frontières, construire les fonctions nécessaires au développement en série de l'intégrale, satisfaisant aux conditions aux frontières et à l'équation aux dérivées partielles.

2. — Je commence par le problème le plus simple.

Étant donné un domaine simple, intérieur à la courbe

$$(1) \quad r = f(\alpha)$$

en coordonnées polaires α, r , autour d'une origine intérieure, on demande de former le potentiel V qui prend sur le contour les valeurs $V(\alpha)$.

Je suppose le contour assez simple pour que, d'une origine convenablement choisie, chaque rayon vecteur α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) rencontre le contour en un seul point.

Puisqu'il s'agit d'un potentiel, je vais construire la solution à l'aide de la suite *complète* de solutions simples bien connue :

$$1, \quad r \sin \alpha, \quad r \cos \alpha, \quad r^2 \sin 2\alpha, \quad r^2 \cos 2\alpha, \dots$$

et je poserai en général

$$(2) \quad U_{2k-1} = r^k \sin k\alpha, \quad U_{2k} = r^k \cos k\alpha.$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 2^e ORDRE

Soient n, b , des constantes qui seront déterminées seulement à la fin de la solution. La suite de fonctions $\Phi_N(r, z)$, dont chacune satisfait dans tout le plan à l'équation du potentiel,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 = 1 \\ \Phi_1 = n_1 (b_1^0 + U_1(r, z)) \\ \Phi_2 = n_2 (b_2^0 + b_2^1 \Phi_1 + U_2(r, z)) \\ \dots \\ \Phi_N = n_N (b_N^0 + b_N^1 \Phi_1 + \dots + b_N^{N-1} \Phi_{N-1} + U_N(r, z)) \\ \dots \end{array} \right.$$

est, elle aussi, une suite complète.

REMARQUE. — Quand les constantes n, b seront connues on pourra, en résolvant par rapport aux U , donner aux Φ la forme, équivalente,

$$(4) \quad \Phi_N = a_N^0 + a_N^1 U_1 + a_N^2 U_2 + \dots + a_N^{N-1} U_{N-1} + a_N^N U_N.$$

Sous cette forme, on peut écrire immédiatement les équations des lignes de force qui correspondent aux potentiels U , et en fournissent les trajectoires orthogonales :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_N = a_N^2 U_1 - a_N^1 U_2 + a_N^4 U_3 - a_N^3 U_4 + \dots \\ \quad + a_N^{2k} U_{2k-1} - a_N^{2k-1} U_{2k} + \dots + (-1)^N a_N^N U, \end{array} \right.$$

où le dernier terme est le terme orthogonal à U_N , c'est-à-dire U_{N-1} si N est pair, U_{N+1} si N est impair.

On peut d'ailleurs éviter la recherche des a de la manière suivante :
Je pose

$$\begin{aligned} u_{2k} &= r^k e^{ikz} \equiv U_{2k} + iU_{2k-1} \\ u_{2k-1} &= -ir^k e^{ikz} \equiv U_{2k-1} - iU_{2k} \end{aligned}$$

et j'écris la suite

$$\begin{aligned} W_0 &= 1 \\ W_1 &= n_1 (b_1^0 + u_1) \\ W_2 &= n_2 (b_2^0 + b_2^1 W_1 + u_2) \\ &\dots\dots\dots \\ W_N &= n_N (b_N^0 + b_N^1 W_1 + \dots + b_N^{N-1} W_{N-1} + u_N) \end{aligned}$$

avec les mêmes coefficients réels, n , b , que dans la suite (3). Les W sont alors des fonctions complexes

$$(5') \quad W_N = \Phi_N + i\Psi_N$$

dont la partie réelle reproduit la suite (3), et le coefficient de l'imaginaire est identique à la suite (5).

3. — Cela posé, le potentiel à déterminer peut être écrit sous la forme d'une série

$$(6) \quad V = \Sigma B_N \Phi_N(r, x),$$

et il faudra choisir les coefficients B_N et tous les coefficients n , b , de manière à satisfaire le plus simplement possible à la condition du contour

$$(7) \quad V(x) = \Sigma B_N \Phi_N(f(x), x).$$

Une *normalisation* convenable des fonctions Φ_N va fournir la solution.

La somme des carrés des erreurs au contour est

$$\int_0^{2\pi} dx [\Sigma B_N \Phi_N(f(x), x) - V(x)]^2.$$

On la rend minimum, — ce que nous appelons satisfaire à la condition au contour — en déterminant les B_N par les équations :

$$\sum_{N=0}^{\infty} B_N \int_0^{2\pi} \Phi_M(f(x), x) \cdot \Phi_N(f(x), x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \Phi_M(f(x), x) \cdot V(x) \cdot dx.$$

Équations que l'on réduit à

$$(8) \quad B_M = \int_0^{2\pi} \Phi_M(f(x), x) \cdot V(x) \cdot dx.$$

si l'on a normalisé la suite Φ par la condition

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} \Phi_M(f(x), x) \cdot \Phi_N(f(x), x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & M \neq N \\ 1 & M = N \end{cases}.$$

Telle est la condition, de normalisation au contour, qui va servir à

déterminer les b et les n . Des règles classiques donnent

$$(10) \quad b_N^M = \int_0^{2\pi} U_N(f(x), x) \cdot \Phi_M(f(x), x) \cdot dx, \quad M < N,$$

et

$$(11) \quad \left(\frac{1}{n_N}\right)^2 = \int_0^{2\pi} [U_N(f(x), x)]^2 dx - \left[(b_N^0)^2 + (b_N^1)^2 + \dots + (b_N^{N-1})^2 \right].$$

Pour trouver le potentiel V qui devient $V(x)$ sur le contour $r = f(x)$, on commencera donc par déterminer les b , n , par les équations (10) et (11). On déterminera ainsi les fonctions Φ dans tout le domaine.

Ces fonctions ne dépendent que de la forme du contour $r = f(x)$; elles restent les mêmes quelle que soit la distribution donnée $V(x)$ sur le contour.

Calculant ensuite les B_N par les équations (8), on aura la série qui fournit pour V la valeur donnée sur le contour.

REMARQUE. — Si l'on veut avoir les lignes de force de cette distribution, on n'aura qu'à calculer les coefficients a des formules (4), pour former les fonctions Ψ_N (5), ou à employer les expressions (5') des Ψ_N ; les lignes de force seront données par

$$(12) \quad W = \sum B_N \Psi_N$$

avec les mêmes coefficients B_N calculés pour V .

4. — ÉQUATION LINÉAIRE QUELCONQUE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE.

Supposons maintenant que la fonction cherchée, au lieu d'être un potentiel défini par l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

soit une fonction définie par une équation aux dérivées partielles du 2^e ordre, linéaire par rapport à V et à ses dérivées, avec des coefficients fonctions quelconques des coordonnées :

$$(13) \quad L(V) \equiv a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial V}{\partial x} + b_1 \frac{\partial V}{\partial y} + c_1 V + a_2 = 0.$$

Au lieu de chercher à traiter le nouveau problème *ab ovo*, je vais utiliser la solution obtenue pour le potentiel, en la complétant par une fonction φ assujettie à être nulle sur le contour.

On obtient une infinité de telles fonctions en prenant par exemple :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{p,2q-1} = \sin p\pi \frac{r-f(x)}{f(x)} \cdot \sin qx \\ \varphi_{p,2q} = \sin p\pi \frac{r-f(x)}{f(x)} \cdot \cos qx. \end{array} \right.$$

p est un nombre entier, non nul ; q est aussi un entier, qui peut être nul.

Rangeons ces fonctions en ordre linéaire, tel que le nombre des concamérations croisse avec une régularité suffisante :

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_{1,0} = \varphi_1 & & & & & \\ \varphi_{2,0} = \varphi_2 & \varphi_{1,1} = \varphi_3 & \varphi_{1,2} = \varphi_4 & & & \\ \varphi_{3,0} = \varphi_5 & \varphi_{3,1} = \varphi_6 & \varphi_{2,2} = \varphi_7 & \varphi_{1,3} = \varphi_8 & \varphi_{1,4} = \varphi_9 \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \varphi_{p,0} = \varphi_{p^2-2p+2}, & \varphi_{p-1,1} = \varphi_{p^2-2p+3}, & \varphi_{p-1,2} = \varphi_{p^2-2p+4} \dots & & & \\ \varphi_{p-q,2q-1} = \varphi_{p^2-2p+2q+1}, & \varphi_{p-q,2q} = \varphi_{p^2-2p+2q+2}, & \dots & & & \\ \varphi_{1,2p-2} = \varphi_{p^2-1}, & \varphi_{1,2p-3} = \varphi_{(p^2)}. & & & & \end{array}$$

Je les caractérise par un seul indice N , qui détermine les p, q de la manière suivante :

Soit

$$n^2 < N \leq (n+1)^2,$$

en posant

$$N = n^2 + m.$$

Si on a

$$m \leq n+1,$$

on en déduit

$$p = n, \quad q = m - 1;$$

si on a

$$m \geq n+1,$$

on en déduit

$$p = 2n + 1 - m, \quad q = n;$$

ce qui détermine les deux indices entiers p, q , à l'aide du seul indice entier N .

Ce classement nous permet de former une suite simple et complète de fonctions v_N , à normaliser convenablement, qui sont toutes nulles sur la frontière $[r = f(x)]$:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \varphi_1 \\ v_2 = m_2 [\beta_2^1 v_1 + \varphi_2] \\ v_3 = m_3 [\beta_3^1 v_1 + \beta_3^2 v_2 + \varphi_3] \\ \dots \\ v_N = m_N [\beta_N^1 v_1 + \beta_N^2 v_2 + \dots + \beta_N^{N-1} v_{N-1} + \varphi_N] \\ \dots \end{array} \right.$$

Les β, m seront déterminés, *indépendamment de la forme de l'équation (13) aux dérivées partielles*, par les formules suivantes, déduites des conditions de normalisation (18)

$$(20) \quad \beta_N^M = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} r dr \cdot \varphi_N(r, x) \cdot v_M(r, x), \quad M < N$$

et

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{m_N} \right)^2 = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} r dr \cdot [\varphi_N(r, x)]^2 \\ - \left[(\beta_N^1)^2 + (\beta_N^2)^2 + \dots + (\beta_N^{N-1})^2 \right] \end{array} \right\}$$

et je prends

$$(17) \quad V = V + \Sigma c_N v_N$$

qui satisfait à la condition au contour.

Si je porte cette expression dans l'équation aux dérivées partielles (13), la somme des carrés des erreurs est

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} dr \cdot r \cdot [L(v)]^2$$

qu'il s'agit de rendre minimum par un choix convenable des coefficients c , tel que

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} dr \cdot r \cdot v_M \cdot L(V) + \Sigma c_N \int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} r dr \cdot v_M v_N = 0.$$

Normalisons les v_N par la condition

$$(18) \quad \int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} r dr \cdot v_M \cdot v_N = \begin{cases} 0 & M \neq N \\ 1 & M = N \end{cases}$$

nous aurons

$$(19) \quad c_N = - \int_0^{2\pi} dx \int_0^{f(x)} r dr v_N \cdot L(V)$$

ce qui résout le problème.

5. — DISCUSSION. — La construction de la suite de fonctions v_N ne dépend que de la forme du contour ; elle ne dépend ni de l'équation aux dérivées partielles (13), ni des conditions au contour pour V . Seules des singularités de forme du contour pourraient créer des difficultés ; mais il me semble que la condition que j'ai imposée au début « chaque rayon vecteur r rencontre le contour en un point à distance finie et un seul » suffise à éviter toute difficulté.

L'équation aux dérivées partielles (13) n'intervient que dans le calcul des coefficients c_N (19), du développement (17) qui fournit la solution. A première vue, rien ne fait prévoir que l'on puisse rencontrer une difficulté dans l'évaluation des intégrales, (19) étendues à tout le domaine intérieur au contour $r = f(x)$. Faut-il en conclure que le développement fournit bien la solution, unique et déterminée, du problème posé, pourvu que le développement soit convergent, quelle que soit l'équation aux dérivées partielles (13), elliptique ou hyperbolique, dans tout le domaine, ou de caractère différent en différents points du domaine ? Les difficultés, pour les domaines où l'équation est hyperbolique, sont-elles reportées uniquement sur les conditions de convergence ?

Ce sont là des questions de première importance, que je laisse en suspens, parce qu'elles dépassent mes forces.

CHAPITRE II

Couronne annulaire

6. — Les développements précédents sont facilement adaptables à la couronne annulaire ayant $r = f(\alpha)$ pour frontière intérieure et $r = g(\alpha)$ pour frontière extérieure, avec point origine dans le domaine central exclus.

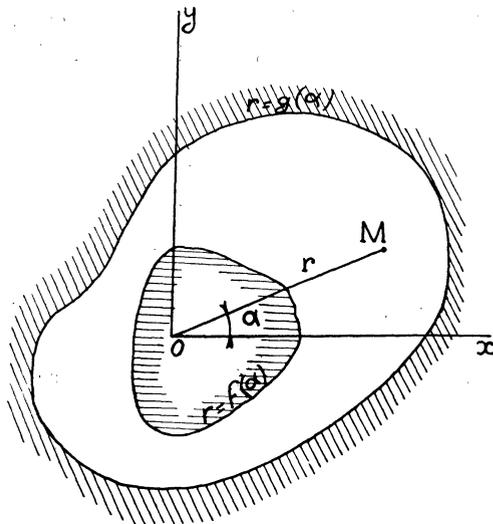


FIG. I.

Je traite d'abord le cas du potentiel satisfaisant à l'équation de LAPLACE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = 0$$

et astreint à prendre la valeur $V_1(\alpha)$ sur la frontière intérieure et $V_2(\alpha)$ sur le contour extérieur.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 2^e ORDRE

Ces conditions donnent

$$(25) \quad b_N^M = \int_0^{2\pi} dx [U_N(f(x), x) \Phi_M(f(x), x) + U_N(g(x), x) \Phi_M(g(x), x)] \quad M < N$$

et

$$(26) \quad \left(\frac{1}{n_N}\right)^2 = \int_0^{2\pi} dx [\overline{U_N(f(x), x)}^2 + \overline{U_N(g(x), x)}^2] \\ - \left[(b_N^0)^2 + (b_N^1)^2 + \dots + (b_N^{N-1})^2 \right].$$

Les coefficients B_M ainsi déterminés conviennent aussi à $W = \sum B_N U_N$ qui détermine les lignes de force.

7. — Résolvons maintenant le même problème pour une équation quelconque linéaire aux dérivées partielles (13) du second ordre. Partant toujours de la solution obtenue pour le potentiel, je n'ai qu'à reproduire ce qui est dit au § 4, en prenant seulement les

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{p,2q-1} = \sin p\pi \frac{r-f(x)}{g(x)-f(x)} \sin qx \\ \varphi_{p,2q} = \sin p\pi \frac{r-f(x)}{g(x)-f(x)} \cos qx \end{array} \right.$$

nulles aux deux contours, au lieu des (14), et dans les formules de normalisation prenant l'intégrale en rdr de $f(x)$ à $g(x)$ — [au lieu de de 0 à $f(x)$] (voir la Note du § 4).

Bien entendu, on a supposé l'aire réellement annulaire, c'est-à-dire

$$f(x) - g(x) < 0$$

pour le même α quelconque ; on a supposé aussi que chaque rayon vecteur rencontre chacun des deux contours en un point et un seul.

Mêmes réserves qu'au § 5, si l'équation (13) est de caractère hyperbolique

8. — Il peut arriver que les coordonnées du paragraphe précédent ne soient pas les plus avantageuses. Par exemple, si l'îlot interne est très excentrique, il vaudra mieux prendre des coordonnées bi-circulaires fournies par une charge + 1, en un point intérieur à l'îlot, et une charge - 1 extérieure à distance finie. Appelons r_1 la distance d'un point quelconque au point + 1, r_2 la distance au point - 1,

α_1, α_2 , les angles de ces rayons avec l'axe ox ; je construirai toutes les formules de résolution avec

$$(28) \quad v = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{et} \quad u = \alpha_2 - \alpha_1,$$

au lieu de r et α .

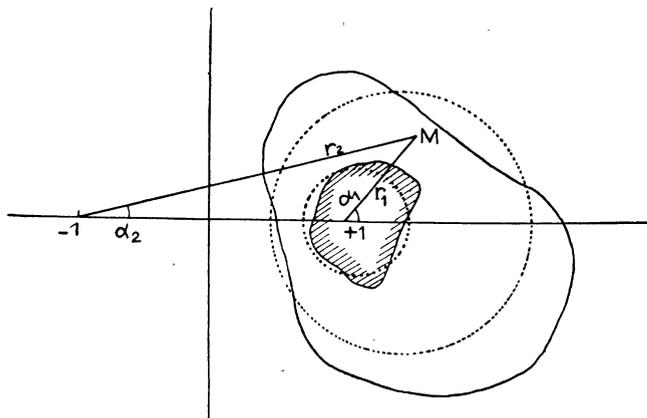


FIG. 2.

Le contour extérieur sera défini par $v = g(u)$, le contour de l'îlot par $v = f(u)$, et tout se poursuivra sans autre changement.

CHAPITRE III

Domaines à connexion multiple quelconque

9. — Occupons-nous maintenant des domaines à connexion multiple. Au lieu d'un seul îlot entouré d'une frontière, comme dans les anneaux, supposons qu'il y ait un nombre quelconque fini, 2, 3, ... 5... 10, îlots épars dans le domaine que limite un seul contour. Nous voici en présence d'une difficulté nouvelle sans l'aide d'aucun exemple particulier. Les mathématiciens se sont uniquement préoccupés des questions d'existence de la solution dans le cas du potentiel, et les difficultés rencontrées ont absorbé toute leur attention (voir p. ex.

de la Vallée Poussin, Julia). Ma curiosité est tout autre ; je veux former la solution quand elle existe, sans rien discuter à ce sujet ; les coordonnées employées dans les discussions d'existence ne conviennent pas du tout pour la construction de la solution.

Ce qui a permis une expression simple de la solution dans le cas de l'anneau, c'est l'existence d'une coordonnée, l'angle azimutal α , dont la variation de 0 à 2π fournit tous les points de la frontière extérieure une fois et une seule, et de même pour la frontière intérieure, avec correspondance bi-univoque de chaque point de l'une à un point de l'autre.

Il s'agit de définir tous les contours de tous les îlots de manière à conserver une propriété de ce genre.

10. — COORDONNÉES ÉLECTROSTATIQUES. — Je me suis heureusement aperçu que rien n'est plus simple. Il suffit de se rappeler quelques propriétés du potentiel, dont l'énoncé est le plus clair en langage électrostatique :

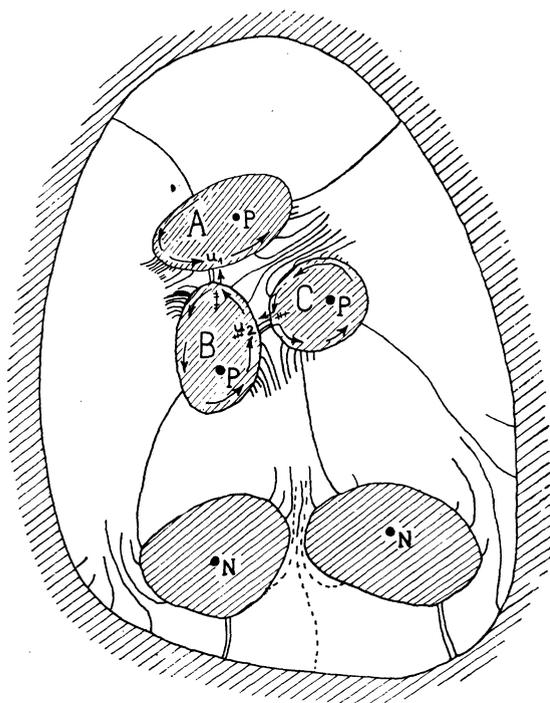
I. — Le maximum absolu du potentiel se trouve en un point de la frontière. Il en est de même du minimum.

Si donc nous adoptons zéro pour potentiel de la frontière extérieure et d'un certain nombre d'îlots, et V_1 pour tous les autres îlots, le potentiel dans tout le domaine sera compris entre zéro et V_1 . Toutes les lignes de force iront, sans aucun croisement, de la frontière V_1 à la frontière zéro. Aucune ligne de force non nulle ne peut aller d'un point d'un des îlots V_1 à un autre point au même potentiel V_1 ; ni d'un point au potentiel zéro à un autre point au même potentiel zéro. Les lignes de force établissent une correspondance biunivoque entre chaque point de la frontière au potentiel V_1 et un point de la frontière zéro.

II. — Soit M la charge totale de l'ensemble des îlots au potentiel V_1 , et $-M$ la charge totale des îlots et du contour au potentiel zéro ; le flux de force total est $2\pi M$. Partons d'un point arbitraire de la frontière V_1 , et suivons-la dans le sens des flux croissants u ; nous décrirons d'abord une partie du contour de l'îlot A, et nous atteindrons un point où la force est nulle, point de départ d'une ligne de force constamment nulle qui se termine en un point d'un îlot voisin B. Les lignes de force suivantes partiront tout près de ce point de force nulle sur l'îlot B ; le flux continuant à croître, on décrira une partie de B, jusqu'à une nouvelle région de force nulle, où se fera le passage à un autre C des îlots de

potentiel V_1 . Continuant, on reviendra décrire les arcs complémentaires de B, A, toujours en arrivant par une région de force nulle, et en changeant d'îlot en un autre point de force nulle, jusqu'à ce que l'on revienne sur A au point de départ avec la valeur $u = 2\pi M$ du flux.

Suivons jusqu'au potentiel *zéro* la ligne origine des flux ; nous décrivons de la même manière tous les îlots et le contour au potentiel *zéro*,



*Les lignes de force nulle sont indiquées
par un trait double*

FIG. 3.

en passant une fois et une seule par chaque point ; le passage d'un îlot à un autre, ou au contour extérieur, se fera toujours dans une région de force nulle des deux contours. Il n'y a d'ailleurs aucune correspondance entre les régions de force nulle sur les îlots V_1 , et celles sur les îlots *zéro*.

Les lignes de niveau, même les plus voisines des extrêmes sont des

lignes très sinueuses, qui suivent de près les contours des îlots, sauf en face des arcs de force presque nulle ; chacune de ces lignes de niveau se trace *d'un trait continu*, en sorte que le domaine entre le ligne de niveau $V_1 - \varepsilon_1$, et la ligne de niveau $+ \varepsilon_0$, est exactement un domaine annulaire de même connexion que l'anneau entre deux circonférences.

J'appelle coordonnées électrostatiques le potentiel v et le flux u ainsi définis.

Le potentiel v jouera dans toutes les formules suivantes le même rôle que r pour l'anneau circulaire, et le flux u le même rôle que α , avec la seule différence que le flux total est $2\pi M$ au lieu de 2π , en appelant $+ M$ la charge totale des îlots positifs.

II. — CHOIX DES COORDONNÉES ÉLECTROSTATIQUES POUR UNE DISTRIBUTION DONNÉE D'ÎLOTS A L'INTÉRIEUR D'UN CONTOUR DONNÉ. — Pour utiliser cette indication générale, il s'agit de choisir judicieusement, le système de coordonnées électrostatiques v, u , pour chaque distribution donnée des îlots.

Je puis choisir arbitrairement les îlots positifs et les îlots négatifs ; mais il est clair que certains choix seraient maladroits ; ce sont ceux qui fourniraient des coordonnées enchevêtrées, et d'une interprétation confuse. Le dessin des îlots renseignera facilement, pour peu qu'on se soit exercé à tracer à *vue* quelques réseaux de lignes de force et de lignes de niveau. A part le cas où les îlots sont très nombreux et, en partie, à peu près alignés, il conviendra de les séparer en deux groupes : un groupe central positif et un groupe périphérique négatif ainsi que le contour.

Pour avoir les coordonnées les plus simples, on prendra, au milieu de chaque îlot positif P_k un point polaire A_k , ayant une charge m_k , — dont je préciserai le choix plus loin, — et au milieu de chaque îlot négatif N_h un point polaire B_h de charge $-m_h$. Il restera pour le contour extérieur une charge $-(\Sigma m_k + \Sigma m_h) = -m_0$, qu'il sera le plus souvent avantageux, de répartir sur un ou plusieurs points, extérieurs à la frontière, et généralement éloignés. Si r_k désigne la distance d'un point x, y , du domaine libre au point polaire A_k , et α_k l'angle azimutal du point x, y autour du point polaire A_k , je prendrai

$$(29) \quad v + i u = - \Sigma m_k \log \left(\frac{r_k}{c_k} \right) + \Sigma m_h \log \left(\frac{r_h}{c_h} \right) + i [\Sigma m_k \alpha_k - \Sigma m_h \alpha_h].$$

Les points extérieurs négatifs jouent un rôle analogue au point extérieur utilisé dans les coordonnées bi-circulaires pour un anneau très excentré (§ 8).

12. — Il faut maintenant choisir les charges m_k et les rayons c_k .

Commençons par ceux-ci ; si le rayon r_k est égal à c_k , le potentiel, dû au point de charge m_k , est nul. Pour chaque point A_k , on choisira facilement, à vue, un rayon c_k dont la circonférence traverse les régions où l'on veut que le potentiel total soit nul.

D'autre part, si la surface de l'îlot k équivaut à un cercle de rayon $\rho_k < c_k$, en prenant m_k égal à $V_1 / (\log \rho_k - \log c_k)$ le potentiel dû à ce seul point

$$(30) \quad v_k = V_1 \frac{\log r_k - \log c_k}{\log \rho_k - \log c_k}$$

sera égal à V_1 sur cette circonférence.

Si les îlots ne sont pas trop serrés, la courbe de potentiel V_1 autour du pôle A_k , dans le potentiel total v , ne s'écartera pas beaucoup de cette circonférence ; si l'îlot k n'a pas une forme trop allongée, son contour donné sera lui aussi dans le voisinage de la courbe V_1 due au potentiel total.

Pour les pôles négatifs, il convient de prendre pour c_k le rayon du cercle équivalent à l'aire de l'îlot, et de choisir à vue un rayon $\rho_h (> c_h)$ dont la circonférence parcourt les régions occupées par les îlots de potentiel positif V_1 . Le potentiel dû au seul pôle B_h sera

$$(31) \quad v_h = V_1 \frac{\log r_h - \log c_h}{\log \rho_h - \log c_h},$$

et contribuera pour sa part à donner un contour de potentiel *zéro* pas trop écarté du contour de l'îlot négatif h , et à ne produire qu'un déplacement et une déformation peu marqués des contours de potentiel V_1 .

Ces considérations, presque qualitatives, suffiront à guider, pour le choix judicieux, mais largement arbitraire, des coordonnées u, v .

Je ne leur demande pas de me fournir rigoureusement du premier coup comme lignes de potentiel V_1 , les contours des îlots positifs, et comme lignes de potentiel *zéro*, les îlots négatifs et la frontière extérieure. Je leur demande seulement de fournir des contours de potentiels V_1 et *zéro*, assez proches des contours donnés, pour que chaque

ligne de force de la famille u rencontre le contour des îlots donnés en un point et un seul. Il me suffit d'établir par l'intermédiaire des lignes de force u une correspondance *bi-univoque* des points des îlots positifs avec ceux de la frontière et des îlots négatifs.

C'est ce que les indications qui précèdent suffisent à obtenir, si les îlots ne sont ni très serrés ni de contour très compliqué. Dans le cas contraire, on réussira toujours facilement en insérant dans chaque îlot deux ou plusieurs points de charges convenables et judicieusement placés.

13. — Bornons-nous au cas le plus simple. Nos coordonnées seront désormais les *coordonnées électrostatiques*

$$(32) \quad v = V_1 \sum \frac{\log r_k - \log c_k}{\log \rho_k - \log c_k} \quad \text{potentiel}$$

et

$$(33) \quad u = V_1 \sum \frac{\alpha_k}{\log \rho_k - \log c_k} + u_0 \quad \text{flux de force}$$

u_0 est une constante disponible pour le choix le plus commode de la ligne de force origine. Les sommes Σ sont étendues à tous les îlots et au contour externe.

La somme des charges positives ($\rho_k < c_k$) est

$$(34) \quad V_1 \sum \frac{1}{\log \rho_k - \log c_k} \equiv M.$$

Le flux total, qui va des îlots positifs aux îlots négatifs et à la frontière est $2\pi M$; quand u passe de zéro à $2\pi M$, le point de départ de la ligne de force parcourt complètement les contours des îlots positifs et revient à sa position initiale ; de même pour le point d'arrivée sur les contours négatifs.

14. — EMPLOI DES COORDONNÉES ÉLECTROSTATIQUES. — Ayant arrêté le choix des coordonnées, le premier travail à faire est d'établir un tableau de correspondance entre les angles u , et les arcs parcourus sur les îlots positifs d'une part, et sur les îlots et la frontière négative de l'autre. Soient u_1, u_2, \dots les lignes qui aboutissent à un point de force nulle, sur un quelconque des contours de référence V_1 ou zéro.

Cela fait, on exprimera les coordonnées qui figurent dans l'énoncé du problème, au moyen des coordonnées électrostatiques choisies u, v ;

$$(35) \quad v - V_I = f(u),$$

et ceux des îlots négatifs et de la frontière sous la forme

$$(36) \quad v = g(u).$$

$f(u), g(u)$ changent brusquement de forme ou de valeur aux points de force nulle u_1, u_2, \dots .

La forme géométrique des frontières réelles données est désormais définie au moyen des coordonnées u, v .

Passons aux conditions imposées à la fonction inconnue V aux contours des divers îlots. Ces conditions, données en fonction des coordonnées usuelles x, y , devront être transformées et exprimées au moyen de la seule coordonnée u . Tout cela est du travail de géométrie analytique et de simple algèbre.

Bien entendu, les conditions aux contours, sous leur nouvelle forme, subiront des changements brusques au passage par tous les points de force nulle u_1, u_2, \dots .

Tout est désormais préparé pour la construction de la solution sur le modèle de celle de la couronne annulaire avec

$$(37) \quad \begin{array}{lll} 1, \dots, v^n \sin n \frac{u}{M}, & v^n \cos n \frac{u}{M}, \dots \\ \frac{u}{M}, & \log v \dots, \frac{1}{v^n} \sin n \frac{u}{M}, & \frac{1}{v^n} \cos n \frac{u}{M}, \dots \end{array}$$

au lieu de

$$\begin{array}{lll} 1, r^n \sin nx & r^n \cos nx \\ \alpha & \log r, & \frac{1}{r^n} \sin nx & \frac{1}{r^n} \cos nx. \end{array}$$

Toute l'intégration se poursuivra sans autre changement comme aux numéros 6, 7.

Il est inutile de récrire les mêmes formules avec le seul changement de r en v , et de α en $(u : M)$.

15. — CONCLUSION. — Ainsi est résolu complètement le problème, purement formel, de la construction de séries, qui, lorsqu'elles seront convergentes, satisferont dans toutes l'aire libre à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indé-

pendantes avec des coefficients variables quelconques ; l'intégrale étant astreinte à prendre des valeurs données le long du contour, formé d'un nombre quelconque d'îlots indépendants, enfermés à l'intérieur d'une même courbe.

La discussion des cas d'exception, et l'étude de l'influence — non évidente — du caractère hyperbolique de l'équation donnée dépasse mes forces.

CHAPITRE IV

Fonctions sphériques multipolaires et polycycliques

1. — L'une des plus intéressantes, parmi les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles on peut appliquer les considérations des chapitres précédents, est l'Équation des Marées contraintes à la surface du globe terrestre. A la vérité, ce n'est pas la valeur du soulèvement qui est donnée aux côtes mais cette difficulté n'est pas grave. Une autre difficulté tient à la forme extrêmement compliquée des continents, avec trois grosses masses — Europe, Asie, Afrique — les deux Amériques — le continent antarctique — une très grande île, l'Australie, — avec beaucoup d'autres îles importantes, celles de l'Insulinde, du Japon, Madagascar, etc. Le domaine océanique est donc un domaine à connexion multiple, au moins quadruple ou quintuple, pour une première approximation très grossière — et cela, sur la sphère. Il faut donc savoir construire sur la sphère des coordonnées analogues aux coordonnées « électrostatiques » du plan (Ch. III), et d'abord, posséder des fonctions sphériques multipolaires.

2. — Les fonctions sphériques, introduites dans l'analyse par LEGENDRE et LAPLACE, objet d'études de tous les géomètres, sont de deux sortes : celles dites de première espèce (P), finies sur toute la surface de la sphère, et celles de seconde espèce (Q), qui deviennent infinies aux deux pôles de l'axe de référence, $+\infty$ à l'un des pôles, $-\infty$ à l'autre. Ces fonctions Q, que j'appellerai *bipolaires antipodes*, sont les

seules introduites en analyse, et, à lire tous les auteurs que je connais, on pourrait croire impossible l'existence de fonctions ayant plusieurs pôles et surtout ayant des pôles *non* antipodes (1).

Dès qu'on s'occupe de questions dans lesquelles figurent des frontières tracées sur la surface de la sphère, on reconnaît que les solutions générales exigent l'introduction de fonctions de la longitude et de la latitude ayant des pôles infinis, positifs ou négatifs, à l'intérieur des domaines circonscrits par les frontières, tout comme dans les problèmes plans de même connexion. Peut-on former de telles fonctions, satisfaisant aux équations des fonctions sphériques ? Comment doit-on les construire ? C'est ce que je vais étudier dans ce chapitre.

3. — L'équation de LAPLACE, écrite en coordonnées « thermométriques » de LAMÉ (2), est

$$(1) \quad \Delta V \equiv \frac{L^2}{r^4} \frac{\partial^2 V}{\left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \right) = 0$$

où α est la longitude, θ la colatitude avec

$$(2) \quad \tau = \log \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1 - \mu}{1 + \mu}, \quad \mu = \cos \theta.$$

$$\mu = -\operatorname{Th}(\tau), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{1}{\operatorname{Ch}^2(\tau)} \frac{\partial}{\partial \mu} = (\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu}.$$

Posant

$$V = \left(\frac{r}{L} \right)^n S_n(\tau, \alpha) \quad \text{ou} \quad V = \left(\frac{L}{r} \right)^{n+1} S_n(\tau, \alpha)$$

la fonction S_n est appelée, en général, fonction sphérique d'ordre n , quel que soit n . Elle est définie par l'équation

$$(3) \quad \frac{n(n+1)}{\operatorname{Ch}^2(\tau)} S_n + \frac{\partial^2 S_n}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 S_n}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Les coordonnées « thermométriques » de LAMÉ ne sont autres que le logarithme du rayon vecteur, et l'angle azimutal de la projection stéréographique de la sphère sur le plan tangent au pôle Nord ($\mu = 1$), faite du pôle Sud ($\mu = -1$) comme origine.

(1) Les fonctions multipolaires de Maxwell sont formées de *fonctions antipodes* dont l'axe polaire a une orientation quelconque, différente de l'axe origine des coordonnées.

(2) Lamé. Coordonnées curvilignes, p. 54.

Posons

$$(4) \quad \zeta = \xi + \eta i = e^{\tau + \alpha i};$$

ξ, η sont aussi des coordonnées thermométriques — coordonnées rectangulaires sur le plan tangent au pôle Nord, l'une ξ sur la projection du méridien origine, l'autre η à angle droit, — et donnent l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 S_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S_n}{\partial \eta^2} + n(n+1) \frac{4}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} S_n = 0.$$

4. — FONCTIONS SPHÉRIQUES D'ORDRE ZÉRO MULTIPOLAIRES. — La valeur la plus importante, parce qu'on y peut rattacher toutes les autres, est $n = 0$, qui donne

$$(6) \quad \frac{\partial^2 S_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial \eta^2} = 0.$$

Toute fonction harmonique dans le plan ξ, η , est une fonction sphérique d'ordre zéro, qu'on obtient en remplaçant ζ par sa valeur sphérique :

$$(7) \quad \zeta = e^{\tau + \alpha i} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \alpha + i \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \alpha = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Dans le plan ξ, η , la fonction S_0 peut avoir un nombre quelconque de pôles, placés où l'on veut, dont la somme des puissances (y compris le pôle à l'infini) est nulle. Pour le physicien, en langage électrostatique : des droites normales au plan, de charges unitaires quelconques m_1, m_2, \dots peuvent percer le plan en des points quelconques, $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$. Le potentiel qu'elles produisent en un point ξ, η , est

$$(8) \quad S_0 = - \sum m_k \log \sqrt{(\xi - a_k)^2 + (\eta - b_k)^2},$$

dont les lignes de force, orthogonales, sont données par

$$(9) \quad T_0 = \sum m_k \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta - b_k}{\xi - a_k} \right),$$

avec

$$\sum m_k = 0,$$

si toutes les charges électriques sont à distance finie ; sinon, il faut ajouter à S_0 une série entière commençant par la constante

$$M = - \sum m_k$$

et à T_0 , la série entière orthogonale.

Ecrivons les fonctions S_0, T_0 , avec les variables sphériques, α, μ ; nous aurons les fonctions sphériques « multipolaires », d'ordre zéro, qu'il est nécessaire d'introduire dans l'analyse dès que la surface de la sphère n'est pas entièrement libre.

Soit, pour le pôle k ,

$$(10) \quad a_k + ib_k = \sqrt{\frac{1 - \mu_k}{1 + \mu_k}} (\cos \alpha_k + i \cdot \sin \alpha_k)$$

il vient

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi - a_k = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{1 - \mu_k}{1 + \mu_k}} \cos \alpha_k \\ \eta - b_k = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}} \sin \alpha - \sqrt{\frac{1 - \mu_k}{1 + \mu_k}} \sin \alpha_k \end{array} \right.$$

d'où

$$S_0 = - \sum m_k \log \sqrt{\frac{1 - \mu \mu_k - \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_k^2} \cos (\alpha - \alpha_k)}{(1 + \mu)(1 + \mu_k)}}.$$

$1 + \mu$ figure au dénominateur de tous les logarithmes ; si donc $\sum m_k$ est nul, ces termes se compensent, et le pôle Sud ($1 + \mu = 0$) disparaît de S_0 ; il reste seulement

$$(12) \quad S_0 = \left\{ \begin{array}{l} - \sum m_k \log \sqrt{1 - \mu \mu_k - \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_k^2} \cos (\alpha - \alpha_k)} \\ + \sum m_k \log \sqrt{1 + \mu_k} ; \end{array} \right.$$

et cette seconde ligne peut être confondue avec la constante arbitraire que comporte S_0 .

On reconnaît sous le radical

$$1 - \cos \varphi_k,$$

en appelant φ_k l'angle, au centre de la sphère, compris entre le point variable μ, α , et le point $k.(\mu_k, \alpha_k)$.

Les fonctions sphériques de 2^e espèce Q , considérées jusqu'ici, ne permettaient pas d'introduire le pôle k sans le compenser par son antipode, et exigeaient sous le signe log, la fraction $\frac{1 - \cos \varphi_k}{1 + \cos \varphi_k}$. Notre mode de construction, en passant par la projection stéréographique, montre clairement

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 2^e ORDRE

comment la compensation des pôles positifs s'effectue par des pôles négatifs placés où l'on veut, avec disparition du pôle Sud ($\mu = 1$) dès que Σm_k est nul.

J'appelle donc fonction sphérique multipolaire générale d'ordre zéro, la fonction

$$(I3) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_0 = -\frac{1}{2} \Sigma m_k \log (1 - \mu \mu_k - \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_k^2} \cos (x - x_k)) \\ S_0 \equiv -\frac{1}{2} \Sigma m_k \log (1 - \cos \varphi_k) \end{array} \right.$$

avec

$$\Sigma m_k = 0.$$

Il est facile de s'assurer par un calcul direct que S_0 satisfait bien à l'équation des fonctions sphériques d'ordre zéro, bien que chaque terme pris isolément n'y satisfasse pas.

5. — FONCTIONS SPHÉRIQUES D'ORDRE ZÉRO POLYCYCLIQUES. — La seconde fonction T_0 qui fournit les trajectoires orthogonales de la première est aussi une fonction sphérique d'ordre zéro ; elle est l'analogue de l'angle azimutal (ou longitude) α . La fonction orthogonale

$$(I4) \quad T_0 = \Sigma_k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \mu} \sqrt{1 + \mu_k} \sin \alpha - \sqrt{1 + \mu} \sqrt{1 - \mu_k} \sin x_k}{\sqrt{1 - \mu} \sqrt{1 + \mu_k} \cos \alpha - \sqrt{1 + \mu} \sqrt{1 - \mu_k} \cos x_k}$$

est aussi une fonction sphérique générale d'ordre zéro, qu'on peut appeler polycyclique.

Cherchons-en la définition géométrique sur la sphère, en utilisant la propriété classique de la projection stéréographique : la représentation de la sphère sur le plan tangent au pôle Nord par projection faite du pôle Sud est une représentation conforme.

Mais, remarquons-le de suite, pour éviter les fausses interprétations : la courbe qui sur la sphère correspond à une droite du plan, n'est pas en général un arc de grand cercle ; c'est un arc du petit cercle d'intersection de la sphère par le plan projetant que détermine le pôle Sud et la droite projetée. En général, à un triangle rectiligne du plan correspond sur la sphère un triangle formé d'arcs de petits cercles ; ce n'est pas ce qu'on appelle un triangle sphérique. Les côtés d'un angle ne sont des arcs de grand cercle que si le sommet de l'angle est au pôle Nord.

Soit P le pôle Nord, origine de toutes nos coordonnées ; soit sur la sphère un centre polaire A_1 (α_1, μ_1) dont la projection stéréographique est B_1 (a_1, b_1) ; M un point mobile (α, μ) sur la sphère, dont la projection stéréographique est N (ξ, η). L'angle plan qui figure dans T_0 par son *arc tg* est l'angle de B_1N avec $P\xi$, que j'appellerai β_1 ; il est égal, dans le plan à $\alpha_1 + \pi - \widehat{NB_1P}$, et par conséquent sur la sphère à $\pi + \alpha_1$, moins l'angle γ_1 de sommet A_1 , compris entre le méridien A_1P (α_1), et l'arc de petit cercle projetant A_1M . Chaque angle tel que $\widehat{MA_1P}(= \gamma_1)$ est mesuré autour de son point polaire, A_1

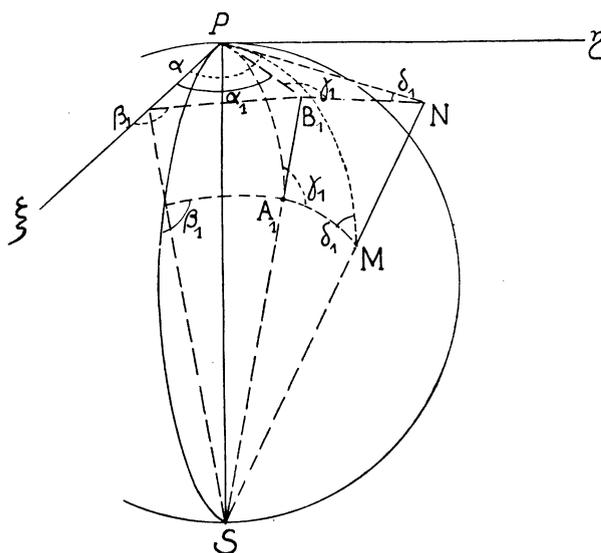


FIG. 4.

Sous bénéfice de ces remarques, nous pouvons écrire

$$(15) \quad T_0 = \sum m_k \zeta_k \quad (\sum m_k = 0)$$

ou

$$(16) \quad T_0 = - \sum m_k \gamma_k + cte \quad (\gamma_k = \widehat{MA_kP})$$

étant bien entendu que sur la sphère les arcs MA_k sont les arcs des *petits cercles* projetants, déterminés par les M, A_k et le pôle Sud.

Une autre correspondance géométrique des angles peut souvent être utile. Tous sont déterminés par la position du point mobile M ; mettons

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 2^e ORDRE

en évidence des angles qui aient ce point comme sommet commun. Dans le plan, l'angle β_1 est égal à $\alpha + \text{PNB}_1$. Appelons δ_1 , ce dernier angle $\widehat{\text{PNB}_1}$ égal à $\widehat{\text{PMA}_1}$ sur la sphère.

$$(17) \quad T_o = \Sigma m_k \delta_k + \alpha \Sigma m_k = \Sigma m_k \delta_k \quad (\Sigma m_k = 0).$$

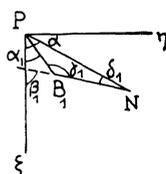


FIG. 5.

EXEMPLE. — Deux pôles A_1, A_2 ; coordonnées bi-circulaires :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_o = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \varphi_1}{1 - \cos \varphi_2} \\ T_o = \delta_1 - \delta_2. \end{array} \right.$$

T_o , qui définit les lignes de force est, dans le plan, l'angle au sommet mobile N du triangle rectiligne B_1NB_2 ; sur la sphère c'est aussi l'angle au sommet M du triangle *pseudosphérique* A_1MA_2 . Je l'appelle *pseudosphérique* parce que ses trois côtés sont, — non pas les arcs de grand cercle A_1A_2, MA_1, MA_2 , — mais les arcs des petits cercles A_1A_2 Pôle Sud, MA_1 Pôle Sud, et MA_2 Pôle Sud.

Il serait évidemment important de savoir utiliser les vrais triangles sphériques, fût-ce au prix d'une complication d'écriture.

6. — AUTRES FONCTIONS SPHÉRIQUES D'ORDRE ZÉRO. — Les autres fonctions sphériques les plus simples sont celles qui se déduisent des puissances positives ou négatives de $\zeta - \zeta_k$:

$$(19) \quad \left[\frac{1 - \cos \varphi_k}{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta_k)} \right]^{\frac{q}{2}} \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} q\gamma_k$$

$$(20) \quad \left[\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta_k)}{1 - \cos \varphi_k} \right]^{\frac{q}{2}} \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} q\gamma_k.$$

Dans cette dernière ($q > 0$), il ne reste comme pôle que le point A_k sur la sphère.

Toutes les autres formes que l'on peut obtenir en dérivant par rapport à ξ , ou η , un nombre quelconque de fois sont également utiles.

Dans d'autres circonstances, les points singuliers isolés, à l'intérieur des domaines exclus, seront avantageusement remplacés par des lignes singulières, dont l'emploi fournira des développements à convergence plus rapide. Telles seront, par exemple, pour un domaine allongé

$$x(\xi - \zeta) = \text{Sh}(S_0 + iT_0) \quad \text{sur le plan,}$$

qui donne

$$(21) \quad \begin{cases} f(\xi - a) - g(\eta - b) = \text{Sh}S_0 \times \cos T_0 \\ g(\xi - a) + f(\eta - b) = \text{Ch}S_0 \times \sin T_0 \end{cases} \quad (z = f + ig).$$

Les lignes de niveau S_0

$$(22) \quad \left[\frac{f(\xi - a) - g(\eta - b)}{\text{Sh}S_0} \right]^2 + \left[\frac{g(\xi - a) + f(\eta - b)}{\text{Ch}S_0} \right]^2 = 1,$$

sont, dans le plan, les ellipses ayant leur centre au point a, b , et dont les foyers sont aux points

$$a + \frac{g}{f^2 + g^2}, \quad b + \frac{f}{f^2 + g^2},$$

et

$$a - \frac{g}{f^2 + g^2}, \quad b - \frac{f}{f^2 + g^2}.$$

Sur la sphère, le grand axe de l'ellipse devient l'arc de *petit cercle* déterminé par les trois points $\mu_1 \alpha_1, \mu_2 \alpha_2, \mu_3 \alpha_3$:

$$(23) \quad \begin{cases} \text{centre} & a + ib = \sqrt{\frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1}} e^{i\alpha_1} \\ \text{foyers} & \begin{cases} a + ib + \frac{g + if}{f^2 + g^2} = \sqrt{\frac{1 - \mu_2}{1 + \mu_2}} e^{i\alpha_2} \\ a + ib - \frac{g + if}{f^2 + g^2} = \sqrt{\frac{1 - \mu_3}{1 + \mu_3}} e^{i\alpha_3}. \end{cases} \end{cases}$$

Les trajectoires orthogonales sont les lignes T_0 ,

$$(24) \quad - \left[\frac{f(\xi - a) - g(\eta - b)}{\cos T_0} \right]^2 + \left[\frac{g(\xi - a) + f(\eta - b)}{\sin T_0} \right]^2 = 1,$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 2^e ORDRE

hyperboles de mêmes foyers que les ellipses, dans le plan tangent au pôle Nord. Sur la sphère, ces lignes de force vont toutes passer au pôle Sud, (qui correspond au point à l'infini du plan).

Ce pôle Sud, de charge totale égale et opposée à la charge de la ligne $S_0 = 0$ (en langage électrostatique sur la sphère), est entouré par les lignes de niveau S_0 de cote très grande, et correspond à S_0 infini.

7. — FONCTIONS SPHÉRIQUES, MULTIPOLAIRES OU POLYCYCLIQUES DE RANG ENTIER n QUELCONQUE. FORMATION PAR RÉCURRENCE A PARTIR DES FONCTIONS DE RANG ZÉRO. — Je cherche une relation de récurrence par rapport à n . Pour cela, je cherche d'abord à exprimer linéairement $S_{n+1}(\tau, \alpha)$ à l'aide de $\frac{\partial S_n}{\partial \tau}(\tau, \alpha)$, et je trouve facilement que la fonction

$$(25) \quad S_{n+1} = G_n \left(\frac{\partial S_n}{\partial \tau} - (n+1) \text{Th}(\tau) \cdot S_n \right)$$

satisfait à l'équation (3) de rang $(n+1)$

$$\frac{\partial^2 S_{n+1}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 S_{n+1}}{\partial \alpha^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{(Ch\tau)^2} S_{n+1} = 0,$$

si la fonction S_n satisfait à l'équation (3) de rang n , sans qu'il soit besoin de rien spécifier quant à la dépendance en α . G_n est un coefficient numérique arbitraire ; n est un nombre quelconque réel ou imaginaire.

De l'équation (25), on tire facilement [par dérivation, élimination de $\frac{\partial S_n}{\partial \tau}$ et emploi de (3)] une autre relation de récurrence inverse :

$$(26) \quad (n+1)^2 S_n + \frac{\partial^2 S_n}{\partial \alpha^2} = - \frac{1}{G_n} \left[\frac{\partial S_{n+1}}{\partial \tau} + (n+1) \text{Th}(\tau) S_{n+1} \right].$$

D'ailleurs $\frac{\partial^2 S_n}{\partial \alpha^2}$ est, comme toutes les dérivées de S_n par rapport à α , une fonction sphérique de rang n ; le premier membre est donc une fonction sphérique de rang n . Désignons donc par S'_n une fonction sphérique de ce rang n , autre que S_n , et par G'_n une constante numérique arbitraire, autre que G_n , la relation (26) peut s'écrire

$$(27) \quad S'_n = G'_n \left[\frac{\partial S_{n+1}}{\partial \tau} + (n+1) \text{Th}(\tau) S_{n+1} \right];$$

Le choix des constantes G_n, G_n' est jusqu'à présent arbitraire. On peut les déterminer de proche en proche en s'imposant comme LEGENDRE la condition polaire $S_n(+1, \alpha) = +1$; ou, ce qui vaudrait mieux, une condition de normalité sur la surface *utile* de la sphère.

Appliquons deux fois la relation (25) et éliminons les dérivées par rapport à τ , à l'aide de (3)

$$S_{n+2} = G_{n+1} \left[\begin{array}{l} G_n \left(\frac{\partial^2 S_n}{\partial \tau^2} - (n+1) \Gamma h(\tau) \frac{\partial S_n}{\partial \tau} - \frac{(n+1)}{Ch^2(\tau)} S_n \right) \\ - (n+2) \Gamma h(\tau) S_{n+1} \end{array} \right]$$

donne

$$(28) \quad S_{n+2} = -G_{n+1} \left[\begin{array}{l} (2n+3) \Gamma h(\tau) S_{n+1} \\ + G_n \left((n+1)^2 S_n + \frac{\partial^2 S_n}{\partial \tau^2} \right) \end{array} \right]$$

entre trois fonctions de rangs $n, n+1, n+2$.

8. — Les deux relations de récurrence essentielles, sont les relations (25) et (27). Pour la suite, il est plus simple de choisir les fonctions qui ont en facteur $\cos kx$ ou $\sin kx$, k étant d'ailleurs un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, réel ou complexe :

$$S_n = S_n^k \times \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix}$$

On écrira alors

$$(25') \quad S_{n+1}^k = G_n^k \left(\frac{\partial S_n^k}{\partial \tau} - (n+1) \Gamma h(\tau) S_n^k \right),$$

et, en utilisant (26)

$$(27') \quad ((n+1)^2 - k^2) S_n^k = -\frac{1}{G_n^k} \left[\frac{\partial S_{n+1}^k}{\partial \tau} + (n+1) \Gamma h(\tau) S_{n+1}^k \right],$$

ce qui donne

$$(29) \quad G_n^k = -\frac{1}{(n+1)^2 - k^2} \frac{1}{G_n^k}$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 2^e ORDRE

9. — Choisissons maintenant les valeurs des G_n^k qui correspondent à la condition imposée par LEGENDRE au pôle $\mu = +1, \tau = -\infty$;

$$(30) \quad G_n^0 = \frac{1}{n+1}, \quad G_n^k = \frac{1}{n+1-k},$$

qui donne

$$(31) \quad G_n^k = -\frac{1}{n+1+k}.$$

Avec ces valeurs, mes formules générales — parce qu'elles sont tirées directement de l'équation différentielle de définition — deviennent

$$(25') \quad (n+1-k)S_{n+1}^k = \frac{\partial S_n^k}{\partial \tau} - (n+1)\text{Th}(\tau)S_n^k$$

$$(27'') \quad (n+1+k)S_n^k = \frac{\partial S_{n+1}^k}{\partial \tau} + (n+1)\text{Th}(\tau)S_{n+1}^k$$

$$(28') \quad (n+1-k)S_{n+1}^k + (2n+1)\text{Th}(\tau)S_n^k + (n+k)S_{n-1}^k = 0.$$

Ecrivons la formule (27'') en descendant n d'un rang, éliminons S_n^k entre elle et (25'), dérivons par rapport à τ , et éliminons $\frac{\partial^2 S_n^k}{\partial \tau^2}$ à l'aide de (3) ; il vient

$$(32) \quad -n(n+1-k)\frac{\partial S_{n+1}^k}{\partial \tau} + (n+1)(n+k)\frac{\partial S_{n-1}^k}{\partial \tau} = (2n+1)\left[\frac{n(n+1)}{Ch^2\tau} - k^2\right]S_n^k.$$

Il suffit de les écrire en μ au lieu de τ :

$$\text{Th}(\tau) = -\mu, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = (\mu^2 - 1)\frac{\partial}{\partial \mu},$$

pour retrouver en toute généralité les formules (bien connues pour n et k entiers) :

$$(25'') \quad (n+1-k)\Gamma_{n+1}^k = (\mu^2 - 1)\frac{\partial}{\partial \mu}\Gamma_n^k + (n+1)\mu\Gamma_n^k.$$

$$(27''') \quad (n+k)\Gamma_{n-1}^k = (1 - \mu^2)\frac{\partial}{\partial \mu}\Gamma_n^k + n\mu\Gamma_n^k,$$

et par addition

$$(28'') \quad (n+1-k)\Gamma_{n+1}^k - (2n+1)\mu\Gamma_n^k + (n+k)\Gamma_{n-1}^k = 0.$$

La formule (32) devient

$$(32') \quad \left\{ \begin{aligned} n(n+1-k) \frac{\partial T_{n+1}^k}{\partial \mu} - (n+1)(n+k) \frac{\partial T_{n-1}^k}{\partial \mu} \\ = 2n+1 \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-\mu^2} \right] T_n^k. \end{aligned} \right.$$

Pour ($k=0$), c'est la formule, si utile, qui donne

$$(32'') \quad P_{n+1} - P_{n-1} = (2n+1) \int_{-1}^{\mu} P_n d\mu.$$

Pour les fonctions tessérales ($k \neq 0$) le résultat est moins simple

$$\begin{aligned} n(n+1-k) T_{n+1}^k - (n+1)(n+k) T_{n-1}^k + (2n+1)k^2 \int_{-1}^{\mu} \frac{T_n^k}{1-\mu^2} d\mu \\ = (2n+1)n(n+1) \int_{-1}^{\mu} T_n^k d\mu. \end{aligned}$$

qui ne donne $\int T_n^k d\mu$ que si on sait calculer $\int T_{n-1}^k \frac{d\mu}{1-\mu^2}$. On peut pour cela s'aider d'une formule de récurrence, qu'on forme facilement à l'aide de (25'') et (27''')

$$(33) \quad \int_0^{\mu} T_n^k \frac{d\mu}{1-\mu^2} = \frac{n(n-1+k)}{(n-1)(n-k)} \int_0^{\mu} T_{n-2}^k \frac{d\mu}{1-\mu^2} - \frac{2n-1}{(n-1)(n-k)} [T_{n-1}^k]_0^{\mu}.$$

mais cette formule sera généralement peu utile ; il faudrait trouver mieux.

REMARQUE. — Lorsque n n'est pas un entier, les récurrences montrent qu'il suffit de connaître les fonctions pour les valeurs de n comprises entre zéro et 1. Il conviendrait alors d'essayer les développements suivant les puissances entières et positives de $n(n+1)$

$$(34) \quad S_n^k = \cos kx [\Sigma_0 + n(n+1)\Sigma_1 + \dots + \overline{n(n+1)^q \Sigma_q} \dots]$$

avec

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial \tau^2} - k^2 \Sigma_0 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Sigma_q}{\partial \tau^2} - k^2 \Sigma_q &= \frac{1}{Ch^2(\tau)} \Sigma_{q-1}. \end{aligned} \right.$$

10. — DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS § 4 ET § 5 EN SÉRIES DE FONCTIONS CLASSIQUES. — Pour finir, il importe de rattacher les fonctions sphériques dont les points singuliers ne sont pas antipodes, aux fonctions classiques. Ce sont tout simplement des séries de fonctions classiques, polynômes de LEGENDRE et fonctions tessérales de LAPLACE, dont chaque terme est fini sur toute la sphère, mais dont les coefficients numériques sont tels que la *série diverge* — et devienne infinie logarithmique en des points arbitrairement choisis sur la sphère ; la somme des coefficients des infinis logarithmiques doit être nulle. Ces propriétés, et surtout le rang n de la somme de la série, formée de termes de tout rang, ne sont probablement pas faciles à reconnaître sur une série donnée, ni à obtenir si on ne tirait pas la série des formes simples, (12), (14), sous forme finie, des § 4 et 5.

Sans attaquer ces discussions, trop difficiles pour moi, je me bornerai à indiquer le développement des fonctions non antipodes qui servent à construire toutes les autres, soit par addition, soit par récurrence.

11. — On obtient facilement, par développement suivant les puissances de μ , et passage aux expressions de μ^n en polynômes de LEGENDRE :

$$(36) \quad \log (1 - \mu) = 1 - \log 2 + \frac{3}{1 \cdot 2} P_1 + \frac{5}{2 \cdot 3} P_2 + \frac{7}{3 \cdot 4} P_3 \\ + \dots + \frac{2n + 1}{n(n + 1)} P_n + \dots$$

Mettons le pôle au point α_1, μ_1 , en remplaçant μ par

$$(37) \quad \left. \begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \mu \mu_1 + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu_1^2)} \cos (x - \alpha_1) \\ \log (1 - \cos \varphi_1) &= 1 - \log 2 + \frac{3}{1 \cdot 2} \cos \varphi_1 + \frac{5}{2 \cdot 3} P_2 (\cos \varphi_1) \\ &+ \dots + \frac{2n + 1}{n(n + 1)} P_n (\cos \varphi_1) + \dots \end{aligned} \right\}$$

Tel est le développement élémentaire, auquel on donnera sa forme explicite en écrivant en détail

$$(38) \quad \left. \begin{aligned} P_n(\cos \varphi_1) &= P_n(\mu_1)P_n(\mu) + 2 \frac{(n - 1)!}{(n + 1)!} T_n^1(\mu_1)T_n^1(\mu) \cos (x - \alpha_1) \\ &+ \dots + 2 \frac{(n - k)!}{(n + k)!} T_n^k(\mu_1)T_n^k(\mu) \cos k(x - \alpha_1) \\ &+ \dots + 2 \frac{1}{(2n)!} T_n^n(\mu_1)T_n^n(\mu) \cos n(x - \alpha_1) \end{aligned} \right\}$$

Je regarde le développement en $P(\mu), T_n^k(\mu), \dots$ qui correspond à la fonction d'ordre zéro, à deux pôles $\alpha_1\mu_1, \alpha_2\mu_2$,

$$(39) \quad \log(1 - \cos \varphi_1) - \log(1 - \cos \varphi_2),$$

comme obtenu en *soustrayant terme à terme*, les deux développements ; le terme général de ce développement est alors

$$(40) \quad \frac{2n+1}{n(n+1)} 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} T_n^k(\mu) \left[T_n^k(\mu_1) \cos k(x - \alpha_1) - T_n^k(\mu_2) \cos k(x - \alpha_2) \right].$$

On obtiendra, si l'on en est curieux, le développement bicyclique autour des deux mêmes points, $\alpha_1\mu_1, \alpha_2\mu_2$, par la condition d'orthogonalité. Mais, il me suffit d'avoir rappelé que les fonctions sphériques multipolaires ou polycycliques formées en termes finis au début de ce chapitre se rattachent aux développements non convergents en polynômes de LEGENDRE et de LAPLACE et à leurs points singuliers.

Conférences faites à l'Institut Henri-Poincaré les 22, 25, 29 novembre et le 2 décembre 1932.

Manuscrit reçu le 9 juin 1933.