ANNALES DE L'I. H. P.

R. WAVRE

Sur le mouvement des astres fluides

Annales de l'I. H. P., tome 3, nº 4 (1933), p. 491-510

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1933__3_4_491_0>

Sur le mouvement des astres fluides

PAR

R. WAVRE

Que mes premiers mots s'adressent à MM. Ch. MAURAIN, E. BOREL J. HADAMARD et M. FRÉCHET pour les remercier bien vivement de m'avoir appelé à exposer à l'Institut H. Poincaré l'essentiel de mes recherches sur les figures d'équilibre. Des quatre conférences données, nous ne retiendrons dans ce *résumé* que ce qui a trait aux propositions les plus générales. Il sera comme une brève introduction à l'étude du mouvement des astres fluides et notre désir est avant tout d'éclairer d'un jour nouveau la méthode dite « procédé uniforme ». Pour toutes les applications, nous prierons le lecteur de bien vouloir se référer à deux travaux qui paraîtront prochainement : 1° « Figures planétaires et géodésie » [1] 2° « Essai sur les petites vibrations des astres fluides » [2].

Le point de vue adopté dans nos recherches est le même que dans les figures d'équilibre, où l'on néglige les corrections relativistes, les effets thermiques et radiatifs. La viscosité du fluide ne sera pas non plus prise en considération. Mais les astres envisagés pourront être supposés homogènes ou hétérogènes, compressibles ou incompressibles, quitte à choisir ensuite celle des hypothèses que l'on adoptera en vue de telle ou telle application.

Au § 3, il conviendra de faire une distinction entre mouvements barotropes et baroclines, suivant qu'il existe ou non un potentiel des

(1) *Collection des Cahiers Scientifiques*, fasc. 12.
(2) *Commentarii Mathematici Helvitici*, V, III, p. 183 et V IV, p. 74.

accélérations, distinction presque identique à celle que fait M. BJERKNES (1) dans le domaine de la météorologie.

Enfin, une catégorie de mouvements mérite une attention particulière, celle des rotations permanentes dont M. P. Dive (2) a fait une étude très méthodique en même temps que très belle. Chaque particule décrit le parallèle sur lequel elle se trouve avec une vitesse angulaire constante, cette dernière pouvant varier avec le rayon l de la circonférence trajectoire et avec la distance z au plan équatorial, $\omega = f(l, z)$. Le mouvement zonal que présente Jupiter, Saturne et le soleil est vraisemblablement une rotation permanente.

Extension du théorème de Stokes-Poincaré. — Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent, ρ étant la densité, p la pression, U le potentiel newtonien, γ l'accélération et enfin, x, y, z un système d'axes ortogonaux

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma_y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma_z.$$

Multiplions-les par les composantes d'un déplacement δ pris à temps constant et ajoutons membre à membre

$$\frac{1}{\rho}\,\delta p = \delta U - \gamma_x\delta_x - \gamma_y\delta_y - \gamma_z\delta_z.$$

Sur une même surface de niveau S, à pression constante, on aura $\delta p = 0$, d'où :

$$\delta U = \gamma_x\delta_x + \gamma_y\delta_y + \gamma_z\delta_z.$$

Intégrons d'un point fixe P_0 à un point variable P, le long d'un chemin tracé sur la surface S telle qu'elle est à l'instant considéré. Posons

$$K = U(P_0), \quad A = \int_{P_0}^{P} \gamma_x\delta_x + \gamma_y\delta_y + \gamma_z\delta_z;$$

A est un flux d'accélération et le potentiel s'écrit sur S

$$(2) \qquad U = K + A.$$

(1) *Appell*, T. III, p. 562, ed. 1928.
(2) *Rotations internes des astres fluides*, Thèse Blanchard, Paris 1930.

Si la surface S coïncide avec la frontière S_1 du fluide, le potentiel U, harmonique à l'extérieur de l'astre, y est défini à partir de sa valeur (2) sur S_1 par la résolution du problème extérieur de Dirichlet. Alors, supposons connue la surface libre et le mouvement de ses particules, seule la constante K restera indéterminée. Mais elle crée à l'extérieur un potentiel dit conducteur et l'on peut conclure :

Le potentiel newtonien créé par un astre fluide est déterminé par le mouvement de la surface libre à un potentiel conducteur près.

Soit V le potentiel conducteur, à l'extérieur de l'astre ; il vaudra avec les notations habituelles, la dérivée normale étant prise vers l'extérieur

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\,dS_1.$$

D'autre part, la masse totale M de l'étoile est donnée par

$$M = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dU}{dn}\,dS_1.$$

S'il existait deux valeurs de K à savoir K' et K'' répondant à la même masse totale et aux mêmes accélérations superficielles, on aurait par soustraction, le potentiel dû à A disparaissant :

$$V' - V'' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{d(V' - V'')}{dn}\,dS_1 \tag{3}$$

et

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d(V' - V'')}{dn}\,dS_1.$$

Sur la surface libre $V' - V''$ prend la valeur $K' - K''$, ainsi qu'à l'intérieur. La densité fournie par la dérivée normale dans la formule (3) est donc celle d'une charge électrique en équilibre à la surface d'un conducteur, mais la dernière intégrale montre que la charge totale est nulle, le potentiel se réduit à zéro, d'où $K' = K''$. La masse totale détermine donc entièrement K. En conclusion : *Pour déterminer l'attraction d'une étoile sur les points extérieurs, il suffit de connaître sa masse totale et le mouvement de sa surface libre.* La connaissance de la répartition des densités à l'intérieur de la masse fluide est superflue.

Symboliquement, si γ_1 représente les composantes tangentielles des accélérations de S_1, on peut écrire, pour l'extérieur de l'astre,

$$U = F | S_1, M, \gamma_1 |.$$

Si le fluide envisagé tourne tout d'une pièce autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante ω, les accélérations γ_1 ne dépendent plus que de S_1 et de ω. On retrouve ainsi le théorème de POINCARÉ-STOKES sur les figures d'équilibre

$$U = F | S_1, M, \omega |.$$

Rappelons que STOKES omettait la masse totale et avec elle le potentiel conducteur, c'est POINCARÉ qui les a introduits. Mais, on peut se demander si la masse totale variant S_1 et γ_1 ne varieraient pas aussi. Il n'est donc pas exclu qu'une expression de la forme suivante soit légitime

$$U = F | S_1, \gamma_1 |.$$

Remarque : a) Dans une rotation permanente, la distribution ω_1 (l) des vitesses angulaires sur la surface libre détermine les accélérations γ_1 et l'on peut écrire

$$U = F | S_1, M, \omega_1(l) |.$$

L'on retrouve ainsi les premières extensions que M. DIVE et moi-même avons données du théorème classique.

b) Les propositions soulignées ci-dessus sont encore vraies si l'astre subit l'attraction de corps étrangers.

Il suffit en effet de remplacer U par la somme du potentiel U_f dû à l'étoile et du potentiel U_p des corps perturbateurs. L'équation (2) s'écrit actuellement

$$U_f = K + A - U_p$$

et cette succession de valeurs de U_f sur la surface libre détermine entièrement U_f au dehors. Le potentiel U_p disparaît comme A dans le raisonnement qui fixe la valeur de K.

c) Revenons à l'équation (2) en supposant la surface de niveau S intérieure à l'astre. Soient C le noyau qu'elle délimite et Z la zone allant de S à la surface libre ou à l'infini s'il y a des corps étrangers. L'équation (2) devient $U_c + U_z = K + A$.

Pour plus de clarté écrivons,

$$U_0 = K + A - U_z \qquad \text{et} \qquad U_z = K + A - U_C.$$

La première équation montre que le potentiel de C dans Z ne dépend pas de la répartition des matières dans C, mais uniquement de la masse totale du noyau, des accélérations tangentielles sur sa frontière et du potentiel de la zone sur S, en vertu du principe de DIRICHLET pour le problème extérieur. La seconde nous apprend que l'attraction de Z dans C ne dépend que des accélérations tangentielles sur S et du potentiel de C sur S à une constante près. L'artifice de la cavité dont il sera question plus loin tirera parti de la remarque sur le potentiel de C dans Z.

2) *Extension des formules de Poincaré et de H. Bruns.*

Les équations fondamentales (1) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g_x, \qquad\qquad (5) \qquad g_x = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x,$$

celles en y et en z sont analogues. Le vecteur $\vec{g}$ de projections g_x, g_y, g_z est la résultante de l'attraction et de l'accélération changée de signe. Nous l'appellerons la pesanteur généralisée. Elle est perpendiculaire aux surfaces d'égale pression et notamment à la surface libre du fluide que nous supposons à pression nulle ou constante.

Les équations (5) impliquent, en prenant la divergence

$$(6) \qquad div\,\vec{g} = -4\pi i\rho - div\,\vec{\gamma}.$$

Le premier terme du second membre provient de ΔU par l'intermédiaire de la formule de Poisson et i représente le coefficient de l'attraction universelle.

Intégrons les deux membres de (6) dans le volume total T occupé par le fluide

$$\int div\,\vec{g}\,dT = -4\pi i M - \int div\,\vec{\gamma}\,dT.$$

Les deux intégrales restantes peuvent s'exprimer au moyen du flux total de $\vec{g}$ et de $\vec{\gamma}$ au travers de la surface libre. Le vecteur $\vec{g}$ étant perpendiculaire à S_1 l'équation peut s'écrire, en changeant les signes :

$$\int g dS_1 = + 4\pi i M + \int div\, \vec{\gamma}\, dT ; \tag{7}$$

g représente l'intensité de la pesanteur. Ce vecteur est toujours dirigé du côté où la pression augmente c'est-à-dire vers l'intérieur du fluide. Le premier membre de (7) est donc toujours positif, d'où la conséquence

$$4\pi i M > -\int div\, \vec{\gamma}\, dT. \tag{8}$$

Une division de (8) par T donne la relation entre les valeurs moyennes

$$4\pi i \rho_{moy} > -(div\, \vec{\gamma})_{moy}. \tag{9}$$

Si l'astre est une figure d'équilibre relatif, l'on a $div\, \vec{\gamma} = -2\omega^2$.
La formule (9) se réduit à l'inégalité de POINCARÉ

$$2\pi i \rho_{moy} > \omega^2,$$

et la formule (7) à l'équation de l'illustre savant

$$\int g dS_1 = 4\pi i M - 2\omega^2 T.$$

Remarquons enfin que s'il existe un potentiel des accélérations A, l'on a $div\, \vec{\gamma} = \Delta A$.

Soient comme précédemment g l'intensité de la pesanteur, puis α, β, γ les cosinus directeurs de $\vec{g}$, on peut écrire $g_x = g\alpha$, et former la divergence

$$\text{div}\, \vec{g} = \frac{\partial g}{\partial x}\alpha + \frac{\partial g}{\partial y}\beta + \frac{\partial g}{\partial z}\gamma + g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

Or les trois premiers termes donnent la dérivée $\frac{dg}{dn}$ de g prise dans la direction α, β, γ et la parenthèse qui n'est autre que la divergence des vecteurs normaux $\vec{n}$ aux surfaces d'égale pression est égale, au signe près, au double c de la courbure moyenne de la surface d'égale pression passant au point considéré

$$\text{div}\, \vec{n} = -c.$$

Les rayons de courbure sont comptés positivement dans le sens de $\vec{g}$ et la dérivée normale est aussi prise dans ce sens-là. On a donc d'une part

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{dg}{dn} - cg$$

et d'autre part, en vertu de (6)

$$\operatorname{div} \vec{g} = - 4\pi i \rho - div\, \vec{\gamma}\, \cdot$$

Le rapprochement de ces deux expressions donne, la formule très générale :

$$\frac{dg}{dn} - cg = - 4\pi i \rho - \operatorname{div} \vec{\gamma}\, . \tag{11}$$

S'il existe un potentiel A des accélérations, les surfaces d'égale pression se confondent avec les surfaces d'égale densité ; $\frac{1}{2}\, c$ est la courbure moyenne de ces dernières au point considéré et l'équation s'écrit

$$\frac{dg}{dn} - cg = - 4\pi i \rho - \Delta \mathrm{A}.$$

Si le fluide est en rotation permanente, les accélérations sont

$$\gamma_x = - \omega^2 x, \quad \gamma_y = - \omega^2 y, \quad \gamma_z = 0$$

et l'on a $\omega = \omega\,(l,\, z)$. La divergence de $\vec{\gamma}$ est facile à former

$$\operatorname{div} \vec{\gamma} = - 2\omega^2 - 2l^2 \frac{\partial \omega^2}{\partial l^2}\, .$$

La formule (11) se réduit alors à celle de M. Dive. Si ω ne dépend que de l, l'on retrouve une relation que nous avons indiquée autrefois.

Enfin, pour les figures d'équilibre ω est constant, et l'on obtient la formule de H. Bruns (1)

$$\frac{dg}{dn} - cg = - 4\pi i \rho + 2\omega^2\, ;$$

relation rigoureuse, fort intéressante, liant l'intensité de la pesanteur, sa variation suivant la verticale, la densité du point où l'on opère, la courbure moyenne de la surface d'égale densité passant en ce point, la vitesse angulaire du fluide et la constante de l'attraction universelle.

(1) *Figur der Erde*, 1878.

Mouvements barotropes et baroclines. — Nous appellerons stratification en p la répartition au point de vue strictement géométrique des couches d'égale pression, et stratification en ρ la même chose pour les densités, c'est-à-dire la famille des surfaces d'égale densité, abstraction faite des valeurs de la densité sur chaque surface.

Alors deux cas sont possibles : la stratification en p coïncide constamment avec la stratification en ρ.

La stratification en p diffère à un instant d'avec la stratification en ρ.

Traduite analytiquement, la première circonstance s'écrirait

$$\rho = f(p, t) \tag{12}$$

où t est le temps.

Nous appellerons mouvement barotrope le mouvement d'un fluide pour lequel l'équation (12) est satisfaite et barocline un mouvement pour lequel elle n'est pas satisfaite.

M. BJERKNES appelle fluide barotrope tout fluide obéissant à une équation complémentaire de la forme $\rho = f(p)$, et barocline un fluide qui n'y satisfait pas. Si naturelle que soit la définition de M. BJERKNES pour un mélange de deux fluides chimiquement homogènes, nous préférons la nôtre pour la théorie des masses fluides hétérogènes, en l'absence de toute équation caractéristique donnée, car il est possible de démontrer qu'un même astre hétérogène et incompressible se comportera d'une manière barotrope ou barocline suivant la nature du mouvement dont il est animé. Ce dernier, comme l'on sait, est barotrope dans une figure d'équilibre relatif, et barocline au contraire comme nous le verrons, au cours des petites oscillations au voisinage du repos absolu.

Le caractère barotrope appartient donc davantage aux mouvements qu'au fluide dans les questions dont nous nous occupons.

Un mouvement barotrope est encore caractérisé par l'existence d'un potentiel des accélérations.

En effet, la relation (12) permet de définir l'intégrale prise à temps constant et indépendante du chemin tracé dans le fluide, d'un point de la surface libre à un point quelconque à pression p

$$\Phi(p, t) = \int^{p} \frac{\delta p}{\rho(p, t)} \,. \tag{13}$$

Les équations (4) et (5) s'écrivent, dans ces circonstances,

(14) $$g_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$ (15) $$\gamma_x = \frac{\partial (U - \Phi)}{\partial x} .$$

La fonction U — Φ est bien un potentiel des accélérations. Il peut dépendre du temps.

Réciproquement, l'existence d'un potentiel des accélérations $A(x, y, z, t)$ permet de former un potentiel Φ de la pesanteur :

$$\Phi = U - A$$

et l'on a, pour tout déplacement δ, à temps constant :

(16) $$\frac{1}{\rho} \delta p = \delta \Phi .$$

Sur une couche de niveau $\delta p = 0$ d'où $\delta \Phi = 0$ et réciproquement. La stratification en p coïncide avec la stratification en Φ, c'est-à-dire en surfaces à Φ constant, d'où Φ $(p. t)$ et la relation (16) s'écrit encore

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \qquad \text{d'où} \qquad \rho = f(p, t) .$$

Le mouvement est bien barotrope.

Remarques : d) Une masse composée d'une superposition de n fluides chimiquement homogènes et compressibles, régis par des équations caractéristiques

$$\rho = f_1(p), \cdots, \rho = f_n(p)$$

est encore animée d'un mouvement barotrope dans chacune de ses parties ; mais la pression ne sera pas constante en général sur les surfaces de séparation. Il en est de même si chaque fluide est homogène et incompressible.

e) Certains auteurs ont admis *a priori* que la pesanteur doit être ortogonale aux couches d'égale densité sans s'être aperçus que ces couches coïncident alors avec les surfaces de niveau. Pour un déplacement δ sur une surface d'égale densité, l'on aurait, en vertu de l'ortogonalité de δ et de $\vec{g}$.

$$\frac{1}{\rho} \delta p = g_x \delta_x + g_y \delta_y + g_z \delta_z = 0 .$$

La pression serait constante sur les couches d'égale densité. Les stratifications en p et en ρ coïncident et le mouvement est barotrope. Pour une rotation permanente l'existence d'un potentiel des accélérations A implique

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\omega^2 x, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = -\omega^2 y, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

La dernière équation montre que A ne dépend pas de z et les deux premières prouvent alors que ω n'en dépend pas non plus. Les rotations permanentes barotropes sont caractérisées par l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

f) Si le fluide est en état d'équilibre relatif, on peut définir un trièdre qui lui soit solidaire. Comme il n'existe un potentiel des accélérations pour les points d'un solide que si ce dernier tourne autour d'une droite de direction fixe, un mouvement barotrope ne peut se réduire à un équilibre relatif que s'il s'agit d'une rotation uniforme autour d'une telle droite.

Il en est ainsi en particulier, d'un fluide barotrope, en état d'équilibre relatif. C'est le théorème de POINCARÉ-APPELL [1].

g) Pour tout mouvement barotrope, les équations fondamentales (1) se réduisent à la relation

$$\Phi(\rho, t) = U(x, y, z, t) - A(x, y, z, t) \tag{17}$$

entre les trois potentiels. La notation $\Phi(\rho, t)$ n'est cependant pas légitime pour une région où la masse est homogène, car ρ et t ne variant pas Φ peut varier.

Pour les figures d'équilibre, le potentiel des accélérations ne dépend que de la distance l à l'axe et l'on peut écrire ω étant constant,

$$U = \Phi(\rho) - \frac{\omega^2}{2} l^2.$$

M. DIVE a relevé l'intérêt de cette dernière formule pour une masse hétérogène, elle nous apprend en effet que le potentiel ne dépend que de ρ et de l.

h) Le calcul rigoureux du potentiel newtonien est, en dehors du cas des ellipsoïdes homogènes, pratiquement impossible, tant est compliquée la dépendance fonctionnelle entre le potentiel lui-même et la

(1) *Acta Mathematica*, 1926.

répartition des surfaces d'égale densité. Aussi avons-nous cherché dès le début, à éviter le calcul direct de U, c'est là encore une des particularités de l'artifice de la cavité et du procédé uniforme qui en découle.

L'artifice de la cavité. — Reprenons l'équation fondamentale (17) entre les potentiels $\Phi = U - A$ et faisons agir l'opérateur de LAPLACE; l'on trouve

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho - \Delta A.$$

Soit S une surface de niveau, C la cavité et Z la zone allant jusqu'à la surface libre ou à l'infini s'il y a des corps perturbateurs.

Le potentiel newtonien s'écrit, r étant la distance du point attiré P au point attirant P'

$$U = i\int \frac{\rho}{r}\,dZ + i\int \frac{\rho}{r}\,dC.$$

Remplaçons dans le dernier terme ρ par sa valeur tirée de (18)

$$U = i\int \frac{\rho}{r}\,dZ - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta A}{r}\,dC - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta\Phi}{r}\,dC. \tag{19}$$

Invoquons ensuite l'identité où Φ_s représente la valeur constante de Φ sur S et Φ_P sa valeur un un point P intérieur à S

$$\int \frac{\Delta\Phi}{r}\,dC + \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS + 4\pi\Phi_P - 4\pi\Phi_S = 0 \tag{20}$$

La dérivée normale est prise sur S vers C. Remplaçons dans (19) U par $\Phi + A$ et le dernier terme par sa valeur tirée de (20). On trouve

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS + i\int \frac{\rho}{r}\,dZ = \Phi_S + A_P + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta A}{r}\,dC. \tag{21}$$

Cette équation fonctionnelle doit être satisfaite, quels que soient le point P intérieur à la cavité C et la surface de niveau S intérieure à l'astre.

Dans ces conditions, l'équation (21) est équivalente, on le montre facilement, à la relation primitive entre les potentiels

$$\Phi = U - A. \tag{22}$$

Malgré les apparences, (21) présente sur (22) certains avantages importants qui doivent être indiqués dès maintenant.

1° Les deux membres de (21) sont harmoniques et par suite analytiques dans la cavité et il suffira d'identifier leur développement de Taylor au voisinage d'un point, par exemple du point de pression maximum, commun à toutes les cavités.

2° La répartition de la matière dans le noyau C n'intervient plus dans (21), ce qui est conforme à la remarque c inspirée du théorème de STOKES.

3° Pour les petits mouvements barotropes, l'on a toujours $\Delta A = 0$ comme nous le verrons et la dernière intégrale de (21) disparaît.

4° Pour les figures d'équilibre, l'on a $\Delta A = -2\omega^2$ et le dernier terme de (21) est le potentiel d'une masse homogène, répartie dans C. En divisant C en une sphère S de même pôle et une marge C+, le potentiel pour S se calculera directement et il ne restera plus que le potentiel dû à C+.

5° Pour les petits mouvements, comme pour les figures d'équilibre, on pourra développer l'inverse de la distance $\frac{1}{r}$ suivant les rayons vecteurs τ et R des points P et P', l'origine étant au point de pression maximum. Si α désigne l'angle POP' et X_q le q^e polynôme de LEGENDRE, l'on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{R}\right)^q X_q(\cos\alpha). \tag{23}$$

Pour chaque surface S la variable τ pourra être supposée aussi petite que l'on voudra, tandis que R restera supérieur à un nombre positif, puisque P' balaie S, Z et éventuellement C+.

Le développement (23) échappe ainsi à toutes les difficultés de convergence qui ne manquent pas de se présenter quand on l'applique au calcul direct du potentiel U lui-même, puisqu'on est obligé de placer le point potentié dans la masse.

6° La surface S, en tant que surface à Φ constant, peut être pour les figures d'équilibre supposée extérieure à l'astre et l'intégrale portant sur la zone Z disparaît de (21). L'équation régit alors les variations des surfaces équipotentielles S et de la pesanteur $g = \frac{d\Phi}{dn}$ à l'extérieur de la planète à partir des deux éléments stokiens : la surface libre S_1 et la vitesse angulaire ω ; sans que la distribution des matières à l'intérieur ait lieu d'intervenir. Pour la géodésie, ce résultat est essentiel.

Le procédé uniforme. — L'équation (21) doit être satisfaite, nous l'avons dit, quel que soient les surfaces S de niveau à l'intérieur du corps. Il s'agit donc de déterminer les couches S, les fonctions Φ_s et ρ_s constantes sur chacune des S et le potentiel A. Désignons alors par j un paramètre servant à distinguer les couches de niveau S les unes des autres, et soient θ et ψ les coordonnées polaires d'un point de la sphère unité. Nous pourrons poser

$$\text{(24)} \qquad A + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta A}{r} dc = \sum_{q=0}^{\infty} \tau^q Y_q(\theta, \psi, j, t),$$

les fonctions Y_q étant des fonctions sphériques en θ et ψ d'ordre q. Elles dépendent de j qui caractérise la frontière S de C, sauf si le potentiel ΔA est harmonique, $\Delta A = 0$. Un tel développement est toujours possible car le premier membre est une fonction harmonique, dans la cavité C ; quant au rayon τ, il pourra, on l'a vu, être supposé aussi petit que l'on veut. La question de la convergence du second membre ne se pose même pas.

En remplaçant $\frac{1}{r}$ par (23) dans le premier membre de (21), ce dernier devient

$$\text{(25)} \qquad \sum_{q=0}^{\infty} \int \left(\frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi}{dn} R^{-1-q}\frac{dS}{d\Omega} + i\int_j^{j_1} \rho R^{-1-q}\frac{dZ}{d\Omega}\right) X_q d\Omega,$$

$d\Omega$ étant l'élément de la sphère unité, ou angle solide, et j_1 le paramètre de la surface libre S_1. L'intégrale en $d\Omega$ donne à un facteur près la fonction sphérique de rang q du développement de la parenthèse. Nous représenterons cette fonction par un indice inférieur q. L'on a, en effet, d'une manière générale,

$$\int (\quad) X_q(\cos\alpha) d\Omega = \frac{4\pi}{2q+1}(\quad)_q.$$

L'identification des coefficients des différentes puissances de τ dans les développements (24) et (25) donne

$$\left(\frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi}{dn} R^{-1-q}\frac{dS}{d\Omega} + i\int_j^{j_1} \rho R^{-1-q}\frac{dZ}{d\Omega}\right)_q = \frac{2q+1}{4\pi}\begin{cases}\Phi + Y_0 \text{ si } q = 0\\ Y_q \text{ si } q = 1, 2, 3, \cdots.\end{cases}$$

Soit R (θ, ψ, j, t) le rayon vecteur du point qui parcourt les surfaces S. La parenthèse du premier membre devient

$$(q, \mathrm{R}, \Phi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial j}\mathrm{HR}^{-1-q}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial j}\right)^{-1} + i\int_j^{j_1} \rho \mathrm{R}^{1-q} d\mathrm{R}$$

avec

$$\mathrm{H} = 1 + \left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \psi}\right)^2,$$

θ étant la colatitude et ψ la longitude. Le système précédent s'écrit en conséquence

$$(26) \qquad (q, \mathrm{R}, \Phi)_q = \frac{2q+1}{4\pi}\begin{cases} \Phi + \mathrm{Y}_0 \text{ si } q = 0 \\ \mathrm{Y}_q \text{ si } q = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

Ce tableau est encore entièrement rigoureux, j'entends qu'aucune approximation n'a été faite et que le développement de $\frac{1}{r}$ ne donnait prise à aucune objection.

La suite infinie des équations précédentes représente encore la condition nécessaire et suffisante pour que la relation fondamentale entre les trois potentiels soit satisfaite.

L'équation de Poincaré étendue au cas actuel peut se mettre sous la forme

$$(-1, \mathrm{R}, \Phi)_{-1} = i\mathrm{M} + \frac{1}{4\pi}\int \Delta\,\mathrm{A}\, dc,$$

en convenant que la fonction sphérique de rang -1 est identique à la fonction sphérique de rang 0. Cette équation vient donc se placer en tête du tableau précédent. Elle détermine la masse totale ou impose une condition de plus si cette dernière est donnée.

Le cas des sphéroïdes. — Supposons les surfaces de niveau peu différente d'une famille de sphères concentriques et prenons pour paramètre j le rayon vecteur de la surface S compté sur un même axe polaire $\theta = 0$. Posons enfin

$$\mathrm{R} = j(1 + e).$$

La fonction $e(\theta, \psi, j, t)$ est la différence du rayon vecteur de la surface S dans la direction θ, ψ et du rayon polaire, rapportée à ce dernier. Nous l'appellerons la déformation. Si l'on néglige les termes de l'ordre de e^2, la parenthèse précédente se transforme en une opération linéaire en j à faire subir à la déformation e et devient pour $q = 1, 2, 3 \cdots$

$$\{ e \} = -\frac{4\pi i}{3} \mathrm{D} j^{-3-2q} \frac{\partial e j^q}{\partial j} + 4\pi i \int_j^{j_1} \rho d(e j^{2-q}),$$

$\mathrm{D}(j)$ étant la densité moyenne de la matière intérieure à la sphère de rayon j. Le système précédent s'écrit par conséquent

$$\{ e \}_q = (2q + 1) \mathrm{Y}_q \tag{27}$$

abstraction faite des équations de rang 0 et 1, légèrement plus compliquées et qui n'interviendront pas dans la suite de ce mémoire.

Equation de continuité et petits mouvements. — En coordonnée d'EULER habituelle, l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Si les déplacements des particules sont d'un ordre de grandeur ε, ainsi que les vitesses, les accélérations et la dérivée de ρ en suivant la particule, l'on trouve, aux termes en ε^2 près

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} + \operatorname{div} \vec{\gamma} = 0.$$

S'il existe un potentiel des accélérations A, l'on aura

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} + \Delta \mathrm{A} = 0.$$

Si le fluide est incompressible, le potentiel des accélérations est harmonique ; et réciproquement car ρ ne saurait varier comme $at + b$.

Soient a, b, c la position d'une particule à l'instant $t = 0$, j le rayon vecteur allant de l'origine au point a, b, c et enfin $j\eta$ la projection sur ce rayon du déplacement $x - a, y - b, z - c$ de la particule. On a évidemment

$$j \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{a}{j} \gamma_x + \frac{b}{j} \gamma_y + \frac{c}{j} \gamma_z$$

et s'il existe un potentiel des accélérations $\mathrm{A}(x, y, z, t)$

$$j^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = a \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \cdots = a \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a} + b \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial b} + c \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c}.$$

Si le potentiel A est holomorphe dans le fluide, il se décompose en une somme de polynômes homogènes P_n de degré n en a, b, c

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(a, b, c).$$

Le terme P_0 n'a pas lieu d'intervenir, puisqu'il donnerait une attraction nulle, et le terme P_1 non plus, car il répond à un champ constant d'accélération qui disparaît si l'on se refère à des axes liés au centre de gravité du fluide.

Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes permet d'écrire

$$j^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_{n=2}^{\infty} nP_n(a, b, c).$$

Si le potentiel A est harmonique, l'on aura $P_n = j^n\, Y_n$ d'où

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_{n=2}^{\infty} nj^{n-2}Y_n(\theta, \psi, t).$$

Nous appellerons η le déplacement radial rapporté au rayon et $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ l'accélération radiale rapportée.

Sur les petites oscillations d'un astre incompressible hétérogène. — Nous voulons démontrer que *les petits mouvements au voisinage du repos absolu d'un fluide incompressible et hétérogène sont baroclines.* En effet, supposons-les barotropes, alors, l'on aurait d'une part

$$\{ e \}_q = (2q + 1)Y_q \tag{28}$$

et d'autre part

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_{q=2}^{\infty} qj^{q-2}Y_q. \tag{29}$$

Comme le fluide est incompressible, les couches d'égale densité sont des surfaces fluides, nous pouvons les prendre comme surfaces S. La déformation radiale est égale, à e^2 près, au déplacement radial, d'où

$$e \equiv \eta, \qquad \{ e \}_q \equiv \{ \eta \}_q, \qquad \left\{ \frac{d^2e}{dt^2} \right\}_q \equiv \left\{ \frac{d^2\eta}{dt^2} \right\}_q.$$

Les valeurs des deux membres de la dernière équation se calculent facilement à partir des équations (28) et (29) et l'on trouve

$$(30) \qquad (2q+1)\frac{d^2Y_q}{dt^2} = q \{ j^{q-2} \} Y_q.$$

Or, on a, c'est facile à vérifier,

$$\{ j^{q-2} \} = -\frac{8\pi i}{3}(q-1)D(j).$$

L'équation (30) implique donc

$$\frac{d^2Y_q(\theta, \psi, t)}{dt^2} + \frac{8\pi}{3} i D \frac{q(q-1)}{2q+1} Y_q(\theta, \psi, t) = 0,$$

ce qui exige que D soit indépendant de j. La masse devrait être homogène. C. Q. F. D.

Si la masse est entièrement homogène, la fréquence ω_q des petites vibrations correspondant à la fonction sphérique Y_q est donnée par

$$\omega_q^2 = \frac{8\pi}{3} i D \frac{q(q-1)}{2q+1}.$$

Ce sont les fréquences de Lord KELVIN et l'on retrouve ainsi la théorie classique. Dans notre mémoire sur les petites vibrations, nous avons considéré le cas d'un astre composé d'un noyau et d'une enveloppe fluides, le noyau pouvant être supposé indifféremment fluide ou solide et avons rejoint la théorie des marées en admettant l'existence de corps perturbateurs.

Les figures planétaires et les approximations successives. — Si la masse fluide tourne d'une seule pièce autour d'une droite fixe oz, prise pour axe polaire, $\theta = 0$, le potentiel des accélérations existe et son laplacien est constant

$$A = -\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2), \qquad \Delta A = -2\omega^2.$$

La dernière intégrale de l'équation (21) intervient actuellement, faisons-la passer au premier membre et posons :

$$[q, R, \Phi]_q = 4\pi(q, R, \Phi) + 2\omega^2 \frac{1^+}{2-q} R^{2-q}.$$

Le symbole I^+ indique simplement qu'il faut remplacer le coefficient de $2\omega^2$ par log R si $q = 2$. Le système fondamental s'écrit alors

$$(31) \qquad [q, R, \Phi]_q = \begin{cases} \Phi & \text{si } q = 0 \\ \frac{5}{3}\,\omega^2 X_2(\cos\theta) & q = 2 \\ 0 & q = 1, 3, 4, 5, \cdots. \end{cases}$$

Introduisons de nouveau la déformation e par $R = j(1 + e)$, puis développons e et Φ suivant les puissances de ω^2

$$e = 0 + \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \cdots + \omega^{2n} e^{(n)} + \cdots$$
$$\Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2\Phi^{(1)} + \omega^4\Phi^{(2)} + \cdots + \omega^{2n}\Phi^{(n)} + \cdots;$$

puis nous procéderons à une identification des coefficients de toutes les puissances de ω^2 dans le système (31). Ensuite, on pourra développer les fonctions $e^{(n)}$ suivant les fonctions sphériques fondamentales $Y_{q,m}(\theta, \psi)$

$$e^{(n)} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=-q}^{+q} e_{q,m}^{(n)}(j) Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

L'identification des termes indépendants de ω donne simplement des sphères concentriques et l'attraction sur chacune d'elles

$$g^{(0)} = -\frac{d\Phi^{(0)}}{dj} = \frac{4}{3}\pi i j D(j).$$

L'identification des termes ω^2 donne un système qui résume la théorie classique de Clairaut et de Laplace

$$\left\{ e_{q,m}^{(1)} \right\} = \begin{cases} \Phi^{(1)} + j\dfrac{d\Phi^{(1)}}{dj} - j^2 & \text{si } q = 0 \\ \dfrac{5}{3} & \text{si } q = 2,\ m = 0 \\ 0 \text{ pour tous les autres coefficients.} \end{cases}$$

Les approximations suivantes se font d'une manière vraiment systématique et l'on a pour $n \geqq 2$

$$\left\{ e_{q,m}^{(n)} \right\} = -\left[q, R_{n-1}, \Phi_{n-1}\right]_{q,m}^{(2n)} + \begin{cases} \Phi^{(n)} + j\dfrac{d\Phi^{(n)}}{dj} & \text{si } q = 0 \\ 0 \text{ si } q > 0,\ -q \leq m \leq +q. \end{cases}$$

Dans ce tableau, les indices q, m du crochet indiquent qu'il ne faut retenir que le coefficient de $Y_{q,m}$ du développement du crochet, et l'indice $(2n)$ rappelle qu'il ne faut conserver que le coefficient de ω^{2n} de ce même développement. Nous avons posé en outre

$$R_{n-1} = j[1 + \omega^2 e^{(1)} + \cdots + \omega^{2n-2} e^{(n-1)}]$$
$$\Phi_{n-1} = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \cdots + \omega^{2n-2} \Phi^{(n-1)}.$$

Ce sont les expressions du potentiel de la pesanteur et du rayon vecteur après l'approximation d'ordre $n - 1$.

On montre facilement que le coefficient $e^{(n)}$ doit être de la forme

$$e^{(n)} = e_0^{(n)} + e_2^{(n)} X_2(\cos\theta) + \cdots + e_{2n}^{(n)} X_{2n}(\cos\theta).$$

L'équation relative à $q = 0$ permet ensuite de déterminer $\Phi^{(n)}$.

Le procédé uniforme fournit ainsi un moyen pour déterminer les figures d'équilibre des masses fluides hétérogènes à l'approximation que l'on désire. On trouvera une étude détaillée de la seconde approximation dans le livre annoncé *Figures planétaires et géodésie.*

Les rotations permanentes et la méthode de M. Dive. — La recherche des rotations permanentes barotropes, pour lesquelles la vitesse angulaire ne dépend, comme on le sait, que de la distance l à l'axe de rotation, s'effectue assez facilement par le procédé uniforme et ressemble fort à celle des figures d'équilibre. Le potentiel des accélérations devient

$$A(l^2) = -\frac{1}{2}\int_0^{l^2} \omega^2(l^2)\,dl^2.$$

L'intégrale étendue à la cavité dans l'équation (21) exige simplement un examen plus attentif que dans le problème des figures d'équilibre.

Bien différente est la méthode de M. Dive pour l'étude des rotations permanentes les plus générales.

L'analogie avec le problème des figures d'équilibre est très lointaine car la répartition des matières peut être donnée arbitrairement, dans de certaines limites, et l'on cherche ensuite de quelle vitesse angulaire il faut animer les différentes particules pour que le fluide conserve sa stratification initiale.

En coordonnées ρ, l, les équations (1) impliquent

$$dp = \rho\left[dU + \omega^2(\rho, l)\,\frac{1}{2}\,dl^2\right]$$

Le premier membre est une différentielle totale, il doit en être de même du second. M. Dive se donne alors la répartition des densités ce qui détermine théoriquement U (ρ, l). Il détermine ensuite ω^2 de telle sorte que ρ deviennent facteur intégrant de la quantité entre crochet. Il obtient ainsi, après de savantes transformations

$$\omega^2(\rho, l) = \frac{1}{\rho l}\left[\int_{\rho}^{\rho_1}\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{\rho'} d\rho' - \rho_1\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{\rho_1}\right].$$

Ce n'est là naturellement que le point de départ des belles recherches que M. Dive expose dans sa thèse.

Parmi les résultats obtenus par cette méthode, je me plais à relever les deux suivants :

1° Si la stratification en ρ est formée d'ellipsoïdes, le mouvement ne peut être que barocline.

2° Il est possible, que la surface libre tourne d'une seule pièce et que les couches internes se déplacent par rapport à elle.

Cette dernière proposition a conduit M. Dive à émettre des idées très suggestives, au point de vue géologique, sur l'influence qu'aurait un léger courant dirigé vers l'est à la base des socles continentaux et d'une manière plus générale sur l'existence de mouvements intratelluriques.

Conférences faites à l'Institut Henri Poincaré en Mai 1932.