ANNALES DE L'I. H. P.

GEORGE D. BIRKHOFF

Sur l'existence de régions d'instabilité en Dynamique

Annales de l'I. H. P., tome 2, n° 4 (1932), p. 369-386
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_4_369_0>

Sur l'existence de régions d'instabilité en Dynamique

PAR

GEORGE D. BIRKHOFF

1. — Soit un système dynamique à deux degrés de liberté, et considérons les mouvements qui correspondent à une valeur donnée de l'énergie totale. Dans ce cas on peut écrire les équations différentielles du mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p}. \tag{1}$$

En particulier dans le voisinage immédiat d'un mouvement périodique, on peut considérer la variable indépendante t comme coordonnée angulaire de période 2π, et H comme fonction périodique par rapport à cette variable, le mouvement périodique lui-même correspondant à la trajectoire $p = q = 0$ dans l'espace des variables p, q, t.

2. — Selon une méthode employée dans les travaux de POINCARÉ (1), LEVI-CIVITA (2) et moi-même (3), l'étude des mouvements voisins d'un mouvement périodique se ramène à l'étude d'une transformation ponctuelle T du plan. Désignons par

$$p(p_0, q_0, t) \quad \text{et} \quad q(p_0, q_0, t)$$

(1) Voir les *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. III.

(2) Voir, par exemple, son mémoire *Sopra alcuni criteri di instabilità*, *Annali di Matematica*. ser. III, t. V, 1901.

(3) *Surface Transformations and their dynamical applications*, *Acta Mathematica*, t. XLIII (1917). Nous remarquerons que presque tous les raisonnements contenus dans ce mémoire, restent valables dans le cas où T s'exprime par des fonctions continues ayant également toutes leurs dérivées continues.

les coordonnées p, q du mouvement tels que pour $t = o$, p et q se réduisent respectivement à p_0 et q_0. Si H est une fonction analytique, ces deux fonctions p et q seront également des fonctions analytiques en p_0, q_0, t.

Après un intervalle de temps 2π, le point variable se trouvera de nouveau dans le plan $t = 0$ (1) avec des valeurs de p et de q égales *à*

$$\begin{cases} p_1 = p(p_0, q_0, 2\pi) \equiv \varphi(p_0, q_0), \\ q_1 = q(p_0, q_0, 2\pi) \equiv \psi(p_0, q_0). \end{cases}$$

De cette manière, la transformation, T de p, q en p_1, q_1 sera donnée par :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{T}: \quad p_1 = \varphi(p, q), \qquad q_1 = \psi(p, q).$$

On démontre immédiatement que cette transformation est directe, bi-univoque et analytique dans le voisinage du point invariant $p = 0$, $q = 0$, qui correspond au mouvement périodique donné, et, que de plus, elle conserve les aires :

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial q} - \frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial q} \equiv 1.$$

3. — D'autre part, étant donné une transformation T de cette espèce, il existe toujours des systèmes dynamiques correspondants de la forme (1) pour lesquels H est une fonction de classe C_∞ (2), sinon analytique (3).

4. — Supposons maintenant que le mouvement périodique $p = q = 0$ soit du type stable général. En ce cas l'équation caractéristique

$$\text{(4)} \qquad \lambda^2 - \left(\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial p} + \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial q}\right)\lambda + 1 = 0$$

aura deux racines imaginaires

$$\lambda' = e^{\sigma\sqrt{-1}}, \qquad \lambda'' = e^{-\sigma\sqrt{-1}}$$

(1) Nous regardons les points $(p, q, t + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ comme confondus.
(2) C'est-à-dire, H et toutes ses dérivées partielles sont continues.
(3) Voir ma note, « A Remark on the Dynamical Role of Poincaré's Last Geometric Theorem », *Szeged Acta*, t. III, 1929.

telles que le rapport $\frac{\sigma}{2\pi}$ soit irrationnel. Les séries qui expriment formellement les coordonnées p et q en fonction de t sont alors du type trigonométrique.

Au moyen de la transformation T, la question fondamentale de la stabilité se pose de la manière suivante : Répétons indéfiniment la transformation T (ou T^{-1}) et considérons les images successives d'un point quelconque P situé à une distance plus petite que δ du point invariant (0,0). Est-il toujours possible de choisir δ suffisamment petit pour que toutes ces images restent à une distance moindre que $\varepsilon < 0$, de ce point, ε étant un nombre donné, et arbitrairement petit ? S'il en est ainsi, on aura stabilité au sens strict du mot. Jusqu'ici on n'a pas pu résoudre ce problème difficile dans toute sa généralité.

Comme le remarquait POINCARÉ [1], pour que dans un cas donné il y ait stabilité il faut et il suffit qu'il existe des courbes [2] invariantes, arbitrairement petites, autour du point invariant. Dans ce cas on peut évidemment trouver une suite infinie de courbes $f_1, f_2, \cdots$ convergeant vers ce point, avec f_{n+1} dans l'intérieur de f_n pour $n = 1, 2, \cdots$.

5. — J'ai démontré (voir l'article déjà cité des *Acta Mathematica*), qu'on peut toujours réduire la transformation T, à une forme normale par l'emploi de séries formelles :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{p}_1 &= \bar{p} \cos\left(\sigma + c(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)^m\right) - \bar{q} \sin\left(\sigma + c(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)^m\right), \\ \bar{q}_1 &= \bar{p} \sin\left(\sigma + c(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)^m\right) + \bar{q} \cos\left(\sigma + c(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)^m\right), \end{aligned} \right.$$

où, en général, $m = 1$, $c \neq 0$.

Dans le cas intégrable, les séries $\bar{p}$, $\bar{q}$ sont convergentes, et il existe une famille analytique de courbes invariantes f, à savoir, les courbes $\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \text{const.}$ Voilà donc un cas simple où il y a stabilité stricte.

6. — J'ai étudié également la forme des courbes invariantes dans le cas général non intégrable, sous la seule hypothèse $c \neq 0$. Si l'on emploie des variables convenables p, q, il existe un cercle ayant son

(1) *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. III, pp. 149-151.
(2) C'est-à-dire frontières d'une région ouverte d'un seul tenant.

centre à l'origine, pour lequel la transformation T fait tourner toute direction radiale à gauche ou à droite de la nouvelle direction radiale suivant que $c > 0$ ou $c < 0$, tandis que la transformation inverse T^{-1} fait tourner ces directions dans le sens opposé. En ne considérant que l'intérieur d'un tel cercle j'ai démontré, entre autres, les faits suivants :

(1) Toute courbe invariante f est de la forme $r = f(\theta) > 0$ (r, θ étant des coordonnées polaires), où $f(\theta)$ est une fonction continue et périodique de période 2π, pour laquelle le rapport

$$\frac{f(\theta_1) - f(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}$$

est uniformément borné.

(2) A chaque courbe invariante correspond un coefficient de rotation qui donne en quelque sorte l'accroissement moyen que subit la variable angulaire θ des points (r, θ) de cette courbe, sous l'influence de la transformation T (1). En supposant $c > 0$ (2) la courbe invariante f_1 contiendra la courbe invariante f_2 dans son intérieur si l'on a $\tau_1 > \tau_2$, et inversement si f_2 se trouve à l'intérieur de f_1 on aura $\tau_1 > \tau_2$.

(3) Le même coefficient τ ne peut pas appartenir à plus d'une courbe f, sauf dans le cas $\tau = 2m\frac{\pi}{n}$ (m, n étant entiers). Dans ce cas toutes les courbes correspondant à cette valeur de τ ont nécessairement un ou plusieurs points communs ; ces points communs seront des points invariants pour T^n tels que l'accroissement de θ soit égal à $2m\pi$.

(4) (3) Chaque courbe f qui appartient à une valeur $\tau = 2m\frac{\pi}{n}$ est soit une courbe analytique, soit une courbe composée d'un nombre fini d'arcs analytiques, sauf peut-être à leur extrémité où ils restent de classe C_∞. Ces extrémités sont des points invariants du type instable, pour la transformation T^n, et les arcs correspondants sont asymptotiques à ces points.

(1) Plus exactement, après n itérations successives de T la valeur de cet accroissement se trouve toujours entre $n\tau - 2\pi$ et $n\tau + 2\pi$ selon les résultats de Poincaré.

(2) Cette hypothèse ne restreint pas la généralité parce que les valeurs de c pour T et T^{-1} sont de signes contraires.

(3) Lorsque T est de la classe C_∞, mais non analytique, le résultat (4) doit être convenablement modifié.

(5) La série des courbes f et des coefficients τ est fermée et contient toujours la courbe invariante $r = 0$ avec le coefficient $\tau = \sigma$.

7. — On voit donc que plusieurs cas peuvent se présenter : *a*) il n'existe pas de courbes f autre que $r = 0$; *b*) il en existe et elles correspondent à toutes les valeurs de τ d'un certain intervalle (σ, μ) ; et enfin *c*) il existe des courbes f, mais elles ne correspondent pas à toutes les valeurs de cet intervalle.

Dans le premier cas nous avons une région d'instabilité autour du point invariant, qui est proprement instable selon le critère de Poincaré. Dans le troisième cas nous aurons des régions annulaires d'instabilité entre deux courbes invariantes f_1 et f_2, telles qu'il n'existe pas de valeur de τ entre τ_1 et τ_2 ; souvenons-nous du fait que l'ensemble τ est fermé. Ces régions annulaires d'instabilité possèdent des propriétés remarquables qui ressemblent beaucoup à celles des régions d'instabilité du premier cas. En particulier on peut trouver des points dans le voisinage de n'importe quel endroit d'un des deux bords f de la région annulaire, tels que quelques-unes de leurs images, par T ou T^{-1}, se trouvent dans le voisinage immédiat de l'*autre* bord.

Jusqu'ici on n'a jamais démontré l'existence de telles régions annulaires d'instabilité. Le principal but de cet article est de le démontrer dans l'hypothèse que T *est analytique et que* H *est de classe* C_∞, *sinon analytique.*

Si l'on pouvait aller plus loin et démontrer qu'il existe de telles régions annulaires qui aboutissent à l'origine (c'est-à-dire, qu'une des courbes f_1, f_2 se réduise à la courbe $r = 0$), le problème de la stabilité serait résolu dans le sens négatif.

8. — Pour démontrer le résultat que nous venons d'énoncer, nous allons considérer en premier lieu une transformation composée, de la forme $T_k = T_0R_k$. Ici T_0 désigne la transformation (5) avec $m = 1$, $0 < c < \pi$; R_k est une transformation dépendant d'un paramètre k qui pour $k = 0$ devient la transformation identique et qui, pour tout k, conserve les aires et admet l'origine et les points du cercle $r = 1$ comme points invariants. Nous définirons tout de suite la transformation R_k d'une manière tout à fait précise.

En employant les coordonnées polaires $\rho = r^2$, θ modifiées, la transformation T_0 s'écrit

$$\rho_1 = \rho, \qquad \theta_1 = \theta + \sigma + c\rho. \tag{6}$$

La condition pour qu'une transformation quelconque, exprimée au moyen de ces coordonnées, conserve les aires, est que le déterminant fonctionnel correspondant soit égal à l'unité.

Choisissons la constante σ de façon qu'elle soit négative mais plus grande algébriquement que $- c$. Dans ce cas la transformation T_0 laisse invariants non seulement l'origine, mais aussi tous les points du cercle $\rho = -\frac{\sigma}{c} < 1$ dans la région circulaire $\rho \leqq 1$.

Définissons maintenant la transformation R_k par les équations (1)

$$p_1 = p + k\frac{\partial u}{\partial q_1}(p, q_1), \qquad q = q_1 + k\frac{\partial u}{\partial p}(p, q_1), \tag{7}$$

où, par exemple,

$$u(p, q_1) \equiv -(p^2 + q_1^2 - 1)^2(p^2 + q_1^2)^2 p.$$

Pour k suffisamment petit on voit que cette transformation est directe, bi-univoque et analytique, et qu'elle se réduit à la transformation identique pour $k = 0$. De plus, l'origine et les points du cercle $\rho = 1$ sont invariants, et les aires sont conservées pour toute valeur de k, comme le montre un calcul direct du déterminant fonctionnel. Donc R_k a bien toutes les propriétés mentionnées plus haut.

Si l'on exprime les variables p_1, q_1, en fonction de p, q, on obtient les séries suivantes :

$$p_1 = p + k\frac{\partial u}{\partial \theta}(p, q) + \cdots, \qquad q_1 = q - k\frac{\partial u}{\partial p}(p, q) + \cdots. \tag{8}$$

En fonction des coordonnées ρ, θ, ces équations prennent la forme suivante :

$$\rho_1 = \rho + 2k\frac{\partial u}{\partial \theta} + \cdots, \qquad \theta_1 = \theta - 2k\frac{\partial u}{\partial \rho} + \cdots. \tag{9}$$

Nous n'employerons pas ces dernières équations dans le voisinage immédiat de l'origine.

(1) Pour l'emploi des équations de ce type voir l'article par E. GOURSAT, « Sur les transformations ponctuelles qui conservent les volumes », *Bulletin des Sciences Mathématiques*, sér. 3, t. V, 1901.

9. — Considérons maintenant la transformation composée, $T_k = T_0 R_k$. Pour k petit il est évident que cette transformation possède les propriétés suivantes :

(*a*) T_k est directe, bi-univoque et analytique par rapport à p, q, et varie analytiquement avec le paramètre k ;

(*b*) elle conserve les aires ;

(*c*) elle admet l'origine comme point invariant simple avec des développements en p, q qui coïncident avec ceux de T_0, jusqu'au quatrième ordre ;

(*d*) le cercle $\rho = 1$ est une courbe invariante, f, pour T_k, dont tous les points sont avancés d'un angle $\sigma + c < 2\pi$;

(*e*) pour $k = o$ T_k se réduit à T_0, dont les points invariants sont le point invariant simple (du type stable) à l'origine et tous les points du cercle $\rho = -\frac{\sigma}{c} < 1$.

10. — Démontrons maintenant deux autres propriétés de la transformation auxiliaire T_k :

(*f*) T_k tourne les directions radiales vers la gauche de cette direction, au moins pour k très petit ;

(*g*) dans le cercle $f \leqq 1$ T_k admet seulement deux autres points invariants autres que l'origine. Ces points sont simples et varient analytiquement avec k. Ils se réduisent à $\left(-\frac{\sigma}{c}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sigma}{c}, \pi\right)$ (coordonnées (ρ, θ)) pour $k = 0$; le premier de ces points est du type stable, le deuxième du type instable.

Pour démontrer (*f*) observons que pour k petit, les directions radiales tournent de la façon indiquée, au moins pour les points voisins de l'origine, parce que les développements de p_1, q_1, en série de p, q, ne changent pas jusqu'au quatrième ordre et varient analytiquement avec k. D'autre part l'angle dont tourne la direction radiale vers la gauche est une fonction analytique de p, q (l'origine exclue), fonction qui est positive pour $k = 0$ sauf à l'origine, et qui reste donc positive en dehors d'un cercle donné $\rho = \delta > 0$ pour k suffisamment petit.

Pour démontrer (*g*) il faut examiner les points invariants de T_k. Evidemment de tels points ne peuvent pas exister pour k petit sauf dans le voisinage de $\rho = 0$ et de $\rho = -\frac{\sigma}{c}$ qui donnent les points invariants de T_0. Le point $\rho = 0$ est un point invariant « simple » de T_0. Par conséquent pour k petit tout point invariant de T_k dans le voisinage de $\rho = 0$ s'obtient par la variation analytique du point à l'origine. Comme l'origine est un point invariant pour tout k, il s'ensuit que T_k ne possède pas d'autre point invariant dans le voisinage de l'origine, que ce point lui-même.

Pour étudier les autres points invariants nous allons employer les coordonnées ρ, θ. En fonction de ces coordonnées la transformation T_k s'écrit :

$$(10) \qquad \begin{cases} \rho_1 = \rho + 2k\dfrac{\partial u^*}{\partial \theta}(\rho, \theta + \sigma + c\rho) + \cdots, \\ \theta_1 = \theta + \sigma + c\rho - 2k\dfrac{\partial u^*}{\partial \rho}(\rho, \theta + \sigma + c\rho) + \cdots \end{cases}$$

où

$$u^*(\rho, \theta) \equiv u(p, q).$$

En un point invariant $\rho_1 = \rho$, $\theta_1 = \theta$, nous aurons

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial \theta}(\rho, \theta + \sigma + c\rho) + kA_1 + \cdots = 0, \\ \sigma + c\rho - k\dfrac{\partial u^*}{\partial \rho}(\rho, \theta + \sigma + c\rho) + k^2B_1 + \cdots = 0, \end{cases}$$

où $A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ sont des fonctions analytiques de ρ et θ, périodiques, de périodes 2π en θ ; de plus ces séries convergent uniformément pour les valeurs de ρ et θ que nous considérons ici ($0 < \delta \leqq \rho \leqq 1$, θ quelconque).

Mais avec notre choix particulier de u, nous aurons

$$u^*(\rho, \theta) \equiv -(1-\rho)^2\rho^{\frac{5}{2}}\cos\theta.$$

La première équation (11) nous montre donc que pour toute valeur de ρ près de $-\frac{\sigma}{c}$, il existe deux valeurs correspondantes de θ qui satisfont à cette équation, l'une près de 0, l'autre près de π :

$$(12) \qquad \theta' = -\sigma - c\rho + kf_1(\rho) + \cdots, \qquad \theta'' = \pi - \sigma - c\rho + kg_1(\rho) + \cdots.$$

Ici, $f_1, f_2, \cdots, g_1, g_2, \cdots$ sont analytiques en ρ.

En substituant ces valeurs de θ dans la deuxième équation (11), on obtient deux équations ayant les formes suivantes :

$$(13)\qquad \begin{cases} \sigma + c\rho + kC_1(\rho) + \cdots = 0, \\ \sigma + c\rho + kD_1(\rho) + \cdots = 0, \end{cases}$$

où $C_1, C_2, \cdots, D_1, D_2, \cdots$ sont analytiques en f.

De cette manière on obtient les valeurs correspondantes ρ' et ρ'' de ρ

$$(14)\qquad \begin{cases} \rho' = -\dfrac{\sigma}{c} + kE_1 + \cdots, \\ \rho'' = -\dfrac{\sigma}{c} + kF_1 + \cdots, \end{cases}$$

où les coefficients sont des constantes.

Donc pour $k \neq 0$ et petit, il existe précisément deux points invariants autre que l'origine, qui varient analytiquement avec k, et se réduisent à $\left(-\frac{\sigma}{c}, 0\right)$ et $\left(-\frac{\sigma}{c}, \pi\right)$ pour $k = 0$.

Il reste à considérer les équations caractéristiques (4) de ces deux points invariants. En supposant $k > 0$, la première équation qui s'écrit

$$\lambda^2 - 2\left[1 + kc\left(1 + \frac{\sigma}{c}\right)^2\left(-\frac{\sigma}{c}\right)^{\frac{5}{2}} + \cdots\right]\lambda + 1 = 0,$$

aura deux racines réelles $\lambda_1' < 1$, $\lambda_1'' > 1$. Le point invariant correspondant est donc simple et formellement instable. La forme de l'autre équation est la suivante :

$$\lambda^2 - 2\left[1 - kc\left(1 + \frac{\sigma}{c}\right)^2\left(-\frac{\sigma}{c}\right)^{2} + \cdots\right]\lambda + 1 = 0.$$

Ici les deux racines sont imaginaires conjuguées. Ce point invariant est simple également mais stable au point de vue formel, au moins si l'on choisit k de façon que ces racines ne soient pas des $n^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité.

Par conséquent la transformation T_k ainsi définie aura toutes les propriétés énoncées.

11. — Mais pour k petit, T_k a au moins deux courbes invariantes, f, à savoir $\rho = 0$ et $\rho = 1$ avec des coefficients de rotation, σ et $\sigma + c$ respectivement. Donc, ou bien il existe une suite de courbes invariantes intermédiaires qui correspondent à tout l'intervalle $\sigma \leqq \tau \leqq \sigma + c$, ou bien il existe des régions annulaires d'instabilité comme nous voulons le démontrer. Il ne nous reste donc à considérer que la première possibilité.

En ce cas il doit exister *au moins* une courbe invariante, f_0, qui correspond à la valeur intermédiaire o de τ, et qui contient nécessairement le point invariant simple du type instable.

Je dis qu'il ne peut pas exister une seule courbe de cette espèce. En effet dans le cas contraire, cette courbe contiendrait deux des branches asymptotiques issues du point instable, et on aurait deux possibilités indiquées dans la figure ci-jointe.

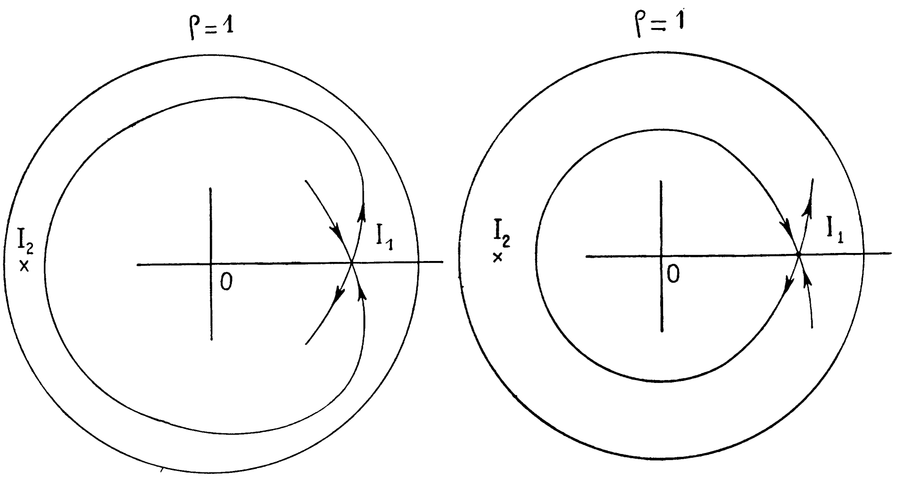

Fig. 1.

I_1 et I_2 indiquent les points invariants respectivement stable et instable ; la courbe asymptotique f_0 est rencontrée par un rayon quelconque issu de l'origine en un seul point, et la direction du mouvement des points de cette courbe est celle indiquée par les flèches ; en effet toute direction radiale tourne vers la gauche près du point I_1. Mais dans le cas considéré les courbes f pour la valeur limite $\tau = 0$ doivent s'approcher uniformément de f_0, ce qui est impossible, parce

(1) Nous faisons usage ici du fait bien connu que les deux branches asymptotiques positives et les deux branches asymptotiques négatives forment une seule courbe invariante au point I.

qu'une telle courbe invariante ne peut pas couper les deux branches asymptotiques libres issues de I_1.

Dans ces conditions il est évident qu'il ne reste qu'une possibilité: celle où il y aurait deux courbes invariantes asymptotiques, f_1 et f_2, formées par quatre branches asymptotiques issues de I_1, et qui coïncident deux à deux. Cette possibilité est indiquée dans la figure 2.

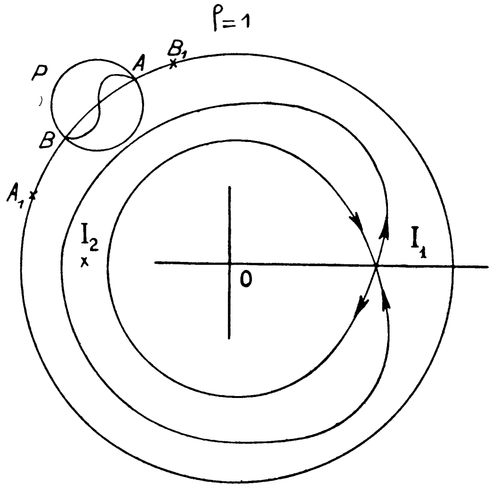

Fig. 2.

On pourrait conserver l'espoir de démontrer directement au moyen du calcul que cette possibilité ne se présente pas. En effet il semble infiniment peu probable que les quatre branches coïncident de la manière indiquée plus haut. Néanmoins ce calcul ne paraît pas être simple et je préfère éviter la difficulté comme je l'indique dans le paragraphe suivant.

12. — Nous pouvons donc admettre provisoirement que T_k possède deux courbes invariantes de la forme indiquée dans la figure 2.

Considérons alors la transformation composée $T_k^* = T_k S$, où S est définie comme la transformation identique en dehors d'un petit cercle γ autour d'un point P sur la branche extérieure asymptotique (voir la figure). A l'intérieur de γ, S est une rotation autour du centre P d'un angle variable mais petit qui se réduit à o au centre et sur la circonférence. Evidemment on peut choisir la transformation S, de la classe C_∞, de sorte que S tournera les directions radiales vers la gauche d'un angle aussi petit qu'on le voudra. De plus S conservera les aires. La transformation composée T_k^* jouit des propriétés analogues.

Mais une telle transformation T^* de classe C_∞ possède toujours des branches asymptotiques de classe C_∞, comme dans le cas analytique, avec la modification évidente que ces branches sont de classe C_∞ mais non nécessairement analytiques (1). Dans le cas considéré on peut même trouver ces branches directement. En effet ces branches sont les mêmes pour T^* que pour T au voisinage du point invariant I_1. En itérant successivement T^*, la partie supérieure de la branche extérieure (voir la figure) s'étend de la même manière que celle de T^*, au moins jusqu'au point A où cette branche rencontre le cercle γ. Or, si l'on répète T^* encore une fois, on commence par la transformation T, qui étend cette partie jusqu'à A_1, et on fait ensuite la transformation S, qui modifie l'arc AB intérieur au cercle en le changeant en un autre qui coupe AB une fois seulement (voir la figure).

D'autre part, par itération successive de $T^{*-1} = S^{-1}T_k^{-1}$, on peut étendre la branche inférieure de la même manière jusqu'au point B (voir la figure) où cette branche rencontre γ. Si maintenant on répète T^{*-1} encore une fois, on commence avec R^{-1} qui ne modifie pas la partie de la branche asymptotique déjà obtenue, et on fait alors la transformation T^{-1} qui l'étend jusqu'au point $B_{-1} = T^{-1}(B)$ sur la même courbe asymptotique que celle de T.

Donc les deux branches asymptotiques intérieures de T^* *se coupent au point* P.

13. — Mais cette transformation T^* aurait alors toutes les propriétés énoncées de T avec la seule modification qu'il faudrait remplacer la condition d'être analytique par celle d'être de classe C_∞. De plus, les branches asymptotiques ne coïncident pas, deux à deux, en ce cas.

Donc il existe des régions annulaires d'instabilité pour de telles transformations T^* *de classe* C_∞, *sinon analytiques.*

(1) Je parle ici seulement d'un point simple du type instable. Voir mon article déjà cité (§§ 33-41).

14. — Nous allons maintenant démontrer que la même conclusion subsiste pour des transformations analytiques.

Remarquons que nous pouvons construire des transformations $T_{0,t}$, $R_{k,t}$, S_t telles que :

(*a*) pour $t = 0$ ces transformations se réduisent à la transformation identique et pour $t = 2\pi$ à T_0, R_k et S respectivement ;

(*b*) elles sont directes, bi-univoques, de classe C_∞ en p, q, t, et même analytiques en t, et conservent les aires pour tout k ;

(*c*) elles laissent invariants l'origine et le cercle $\rho = 1$ quel que soit k.

En effet nous pouvons définir $T_{0,t}$, comme la transformation suivante :

$$\rho_1 = \rho, \qquad \theta_1 = \theta + (\sigma + c\rho)\frac{t}{2\pi}$$

qui possède évidemment les trois propriétés énoncées. D'une manière analogue nous pouvons définir R_k par les équations (1) légèrement modifiées :

$$p_1 = p + \frac{kt}{2\pi}\cdot\frac{\partial u(p,q_1)}{\partial q}, \qquad q = q_1 + \frac{kt}{2\pi}\cdot\frac{\partial u(p,q_1)}{\partial p},$$

avec le même choix de la fonction u. Quant à S_t, nous la définirons de la même façon que S, par une rotation dans le cercle γ diminuée dans le rapport $t : 2\pi$.

La transformation composée $T_t^* = T_{0,t}\, R_{k,t}\, S_t$ jouira elle aussi des trois propriétés (*a*), (*b*), (*c*), étendues à T_t^*.

Employons maintenant une représentation géométrique ; considérons les variables p, q, t, comme coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace.

Lorsque t varie de 0 à 2π, les points $(p, q, 0)$ du plan $t = 2\pi$ peuvent se déplacer en (p_1, q_1, t), où (p_1, q_1) est l'image de (p, q) par T_t^*. On voit alors que chaque point décrit une trajectoire qui commence au point $(p, q, 0)$ et se termine au point $(p_1, q_1, 2\pi)$ où (p_1, q_1) s'obtient de (p, q) au moyen de la transformation T^*. La totalité de ces régions remplit la région cylindrique $\rho \leqq 1$ entre les deux plans $t = 0$ et $t = 2\pi$, et la direction de la trajectoire unique qui passe par chaque point (p, q, t) s'exprime par des équations différentielles

$$\frac{dp}{dt} = \varphi(p, q, t), \qquad \frac{dq}{dt} = \psi(p, q, t), \tag{15}$$

où φ et ψ sont de classe C_∞ par rapport à p, q, et t, mais non nécessairement périodiques, de période 2π, en t. Evidemment l'axe des t est une de ces trajectoires, t' pour $\varphi(p, q, 0) = \psi(p, q, 0) = 0$.

Comme la transformation T_t^* conserve les aires pour toute valeur de t, il est évident que toute région tubulaire des trajectoires avec une base $d\sigma$ dans le plan $t = 0$ coupera tout autre plan $t =$ const., avec une aire toujours égale à $d\sigma$. Donc le volume d'un cylindre élémentaire de base $d\sigma$ et de hauteur dt sera toujours $d\sigma dt$. Il s'ensuit que les volumes sont conservés par le mouvement fluide défini par les équations différentielles (5), c'est-à-dire par

$$\frac{dp}{dt} = \varphi(p, q, \tau), \qquad \frac{dq}{dt} = \psi(p, q, \tau), \qquad \frac{dt}{d\tau} = 1.$$

Selon la règle habituelle nous aurons donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p, q, t) + \frac{\partial\psi(p, q, t)}{\partial q} = 0. \tag{16}$$

Mais l'équation (16) montre qu'il y a une fonction $H(p, q, t)$, de classe C_∞ en p, ,q t, et entièrement déterminée par (16) si on ajoute la condition $H(p, q, 0) = 0$, telle que

$$\varphi(p, q, t) = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q}, \qquad \psi(p, q, t) = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p}.$$

Donc les équations (15) sont de forme hamiltonienne

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q, t), \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, t),$$

où H n'est pas périodique par rapport à t.

Nous essaierons maintenant de trouver une autre fonction $\overline{H}(p, q, t)$, analytique en p, q, t qui soit à peu près égale à $H(p, q, t)$, et telle que la transformation $\overline{T}$ analytique correspondante ait aussi les autres propriétés de T^* [qui sont essentielles pour le but que nous avons en vue.

15. — Ces propriétés sont essentiellement les suivantes :

(*a*) Le cercle $\rho = 1$ est une courbe invariante de $\overline{\mathrm{T}}$;

(*b*) Le point $\rho = 0$ est un point invariant stable pour $\overline{\mathrm{T}}$, avec les mêmes développements de p, q, en fonction de p, q jusqu'au quatrième ordre.

En effet, une telle transformation $\overline{\mathrm{T}}$ aura deux points invariants simples voisins de ceux de T* avec des branches asymptotiques à peu près les mêmes, qui par conséquent se couperont. D'autre part les directions radiales seront tournées vers la gauche par T*, soit dans le voisinage du point invariant (à cause de la propriété (*b*)), soit à une distance considérable de ce point (à cause du fait que $\overline{\mathrm{T}}$ diffère peu de T*).

Pour choisir une telle fonction $\overline{\mathrm{H}}$, remarquons que

$$p\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} = 0$$

sur le cylindre $\rho = 1$. En effet la relation $p^2 + q^2 = 1$ à un instant quelconque entraîne cette relation pour tout t. Donc

$$\frac{d}{dt}(p^2 + q^2 - 1) = 2\left(-p\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q} + q\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}\right) = 0.$$

Mais cette relation demande que H se réduise sur le cylindre à une fonction de t seulement, de sorte que nous pouvons écrire

$$\mathrm{H}(p, q, t) \equiv \mathrm{H}(1, 0, t) + (p^2 + q^2 - 1)\mathrm{J}(p, q, t),$$

où J (p, q, t) est de classe C_∞. De plus, le développement de J (p, q, t) jusqu'aux termes du quatrième ordre détermine celui de H : nous remarquons que J aussi bien que H est analytique sauf sur le cercle γ. De plus, puisque $p = q = 0$ est une trajectoire, les dérivées partielles de H du premier ordre par rapport à p et q s'évanouissent identiquement, et la même propriété subsiste pour J.

Choisissons maintenant (s'il est possible) une fonction $\overline{\mathrm{J}}$, différant peu de J, analytique en p, q, t, et qui admette le même développement que J jusqu'aux termes du quatrième ordre. Considérons la fonction $\overline{\mathrm{H}}$ correspondante.

$$\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}(0, 1, t) + (p^2 + q^2, - 1)\overline{\mathrm{J}}(p, q, t)$$

et les équations hamiltoniennes qu'elles définissent. On voit tout de suite que la transformation $\overline{\mathrm{T}}$ correspondante aura toutes les propriétés demandées, en particulier (*a*) et (*b*).

En admettant pour le moment le fait presque évident qu'on peut choisir une telle fonction $\overline{\mathrm{J}}$, nous voyons qu'il *existe des régions annulaires d'instabilité pour les transformations analytiques.*

Pour éviter des difficultés dans cette manière de raisonner, nous supposons que toutes les dérivées partielles de $\overline{\mathrm{J}}$ jusqu'au cinquième ordre diffèrent peu des dérivées correspondantes de J ; nous démontrerons la possibilité d'un tel choix plus tard (paragraphe 7). Évidemment, dans ces conditions une direction radiale quelconque subira une rotation vers la gauche pour $\overline{\mathrm{T}}$ comme pour T.

16. — Dans les équations hamiltoniennes qui correspondent à cette fonction $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$, avec $0 \leqq t \leqq 2\pi$, nous pouvons étendre la définition de $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$, de façon à la rendre périodique. Naturellement cette fonction $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$ n'est pas toujours analytique ni même continue pour $t = 0, \pm 2\pi, \cdots$.

Supposons maintenant que nous effectuions dans la direction de l'axe des t, la déformation indiquée par l'équation

$$\bar{t} = \chi\, t).$$

La fonction inverse $\chi^{-1}(\bar{t})$ est ici de classe C_∞, et croît de 0 à 2π avec $\bar{t}$, de façon que $\frac{dt}{d\bar{t}}$ soit positive sauf pour $t = 0$ et $t = 2\pi$ quand toutes les dérivées s'annulent à la fois. Après cette déformation, les trajectoires modifiées auront leurs directions parallèles à l'axe des $\bar{t}$ sur les deux plans $\bar{t} = 0$ et $\bar{t} = 2\pi$, et on voit que les trajectoires sont de classe C_∞ partout. Avec cette nouvelle variable indépendante les équations différentielles maintiennent leur forme hamiltonienne, avec une nouvelle fonction

$$\overline{\mathrm{H}} = \overline{\overline{\mathrm{H}}}\frac{dt}{d\bar{t}},$$

laquelle est évidemment de classe C_∞ en p, q, t,de période 2π en $\bar{t}$, et analytique sauf pour $t = 0, \pm 2\pi, \cdots$ si nous avons choisi une fonction $\chi^{-1}(t)$ ayant les mêmes propriétés. Ce changement de variable indépendante ne modifie pas la transformation T associée aux équations différentielles initiales.

Donc il existe des régions annulaires d'instabilité pour des systèmes dynamiques (1), *avec* H *de classe* C_∞ *et même analytique, sauf peut-être pour* $t = 0, \pm 2\pi, \cdots$, *et avec* T *analytique.*

A première vue on pourrait croire qu'une petite modification supplémentaire permettrait de trouver une fonction H analytique partout. Mais il y a à cela une difficulté qui tient au fait que le développement de $\overline{H}$ en fonction des variables p, q, contient des coefficients non analytiques qui doivent être modifiés. Néanmoins je crois que cette méthode peut être effectivement appliquée, et, par conséquent, qu'on peut trouver une fonction H qui soit partout analytique. Mais je ne l'ai pas encore démontré.

En tout cas, au point de vue des applications, c'est le cas d'une fonction H de classe C_∞ qui est intéressant.

17. — Pour compléter notre raisonnement il suffit de démontrer le simple lemme qui suit :

Soit une fonction

$$f(x_1, \cdots, x_n, t),$$

de classe C_∞ pour

$$a \leqq x_i \leqq b, \qquad (i = 1, \cdots, n), \qquad -\delta \leqq t \leqq 2\pi + \delta,$$

laquelle s'évanouit ainsi que toutes ses dérivées partielles par rapport à $x_1, \cdots, x_2$ jusqu'au $k^{ième}$ ordre pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; on peut alors trouver une fonction $g(x_1, \cdots, x_n, t)$ analytique en $x_1, \cdots, x_n, t$ avec la même propriété, telle que $f - g$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'au $k^{ième}$ ordre soient aussi petites que l'on voudra dans cette région.

En effet si on soustrait de J le polynome P qui donne son développement en p, q jusqu'au cinquième ordre, on obtiendra une fonction J* à laquelle on pourra appliquer le lemme précédent. L'approximation analytique K de J* ainsi obtenue (avec $n = 3$, $k = 5$) nous donne l'approximation K + P de J que nous cherchons.

Il reste à démontrer le lemme.

Observons que le lemme est vrai pour $n = 0$, parce qu'on peut trouver une fonction $g(t)$ analytique et qui diffère aussi peu qu'on veut d'une fonction donnée $f(t)$ de classe C_∞ ; le lemme est vrai aussi pour $k = 0$.

Si donc le lemme n'est pas vrai pour tout n, il existe un $n > 0$ plus petit et un $k > 0$ plus petit pour lequel il n'est pas vrai. Mais pour une telle fonction f nous pouvons écrire

$$f(x_1, \cdots, x_n, t) = f(x_1, \cdots. x_{n-1}, 0, t) + x_n f_1(x_1, \cdots, x_n, t),$$

où le premier terme à gauche ne contient que $n - 1$ variables x_i tandis que la deuxième terme définit une fonction $f_1(x_1, \cdots, x_n, t)$ de classe C_∞ dont toutes les dérivées partielles par rapport à $x_1, \cdots, x_n$ pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ s'évanouissent jusqu'au $(k - 1)^{\text{ième}}$ ordre. Donc par deux applications successives du lemme à des cas déjà établis on peut trouver une valeur approximative de $f(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0, t)$ et une valeur approximative de $f_1(x_1, \cdots, x_n, t)$ qui nous conduisent à la valeur approximative de $f(x_1, \cdots, x_n, t)$ que nous cherchons.

Conférence faite à l'Institut Henri-Poincaré, le 1er Mai 1931.