ANNALES DE L'I. H. P.

S. Stoïlow

Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable

Annales de l'I. H. P., tome 2, nº 3 (1932), p. 233-266
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_3_233_0>

Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable

PAR

S. STOÏLOW

Ces pages reproduisent, avec quelques modifications de détail, les six conférences que j'ai eu l'honneur de donner à la Faculté des Sciences de Paris en février 1931.

Je me suis borné ici à rappeler les énoncés de quelques propositions de la théorie des ensembles de points dont j'avais esquissé ou développé complètement les démonstrations dans mon exposé, mais qui sont bien connues.

Les recherches qui font l'objet des quatre premières sections ont été, — à peu de chose près, — publiées ailleurs, quoique sous une forme parfois un peu différente. Les résultats contenus dans les deux dernières sections, au contraire, paraissent ici pour la première fois.

I. — Introduction

1. — On appelle Analysis Situs ou *Topologie* l'étude des propriétés qualitatives, dites aussi *topologiques*, des figures ou des fonctions.

D'une façon précise : une propriété est dite topologique lorsqu'elle subsiste quand on effectue un changement de coordonnées (ou de variable) quelconque, biunivoque et bicontinu. La transformation qui le définit s'appelle une *transformation topologique*.

La propriété du cercle d'être une courbe fermée simple est une propriété topologique ; de même le « genre » d'une surface fermée exprime une propriété topologique de cette surface.

C'est RIEMANN qui, le premier, attira l'attention sur les propriétés topologiques des fonctions analytiques. Par l'introduction en Analyse des surfaces qui portent son nom il en fit voir la signification profonde.

A toute fonction analytique $Z = f(z)$ correspond une *surface de Riemann*. Sur cette surface la fonction $f(z)$ est uniforme et dénuée de singularités transcendantes. Si on appelle *point* de la fonction tout couple de valeurs (z_0, Z_0) qui se correspondent, on peut dire qu'entre les points de la fonction et ceux de la surface de RIEMANN il y a correspondance biunivoque et bicontinue.

Deux ensembles appartiennent au même *type* topologique [1] si on peut passer de l'un à l'autre par une transformation topologique. Les ensembles de points qui appartiennent au même type que l'ensemble des points de la fonction $f(z)$ [2] constituent une classe (Cf). Les propriétés communes à tous les éléments de (Cf) forment une première catégorie de propriétés, topologiques de $f(z)$: nous les appelerons propriétés topologiques riemanniennes.

En partant toujours de la fonction $Z = f(z)$ donnée, considérons une région quelconque de la surface de RIEMANN (région qui, en particulier, pourrait être cette surface tout entière).

Cette région d'une part, son image engendrée par le point Z (sur une sphère fixe) d'autre part, peuvent être soumises chacune *séparément* à des transformations topologiques [3]. A la fonction $Z = f(z)$, envisagée comme transformation univoque de z à Z, correspondra ainsi, une autre transformation, *topologiquement équivalente* à $Z = f(z)$. Toute propriété appartenant à *toute* transformation topologiquement équivalente à $Z = f(z)$ sera, par définition, une propriété topologique quelconque de $f(z)$. Soit (Ef) la classe de toutes les transformations ainsi obtenues. Toute propriété riemannienne est évidemment une

(1) On dit encore qu'ils sont *homéomorphes*.

(2) Ou, ce qui revient au même, au même type que la surface de RIEMANN de $f(z)$.

(3) L'image de la surface de RIEMANN sur la sphère fixe est considérée comme une surface simple (à un seul feuillet).

propriété de l'espèce que nous venons de définir. En effet, (Ef) est une sous-classe de (Cf).

Il existe, par contre des propriétés topologiques non riemanniennes. Telles sont, par exemple, l'existence ou la non existence de valeurs asymptotiques de $f(z)$ quand on approche de la frontière de la région dans laquelle on envisage cette fonction ; ou encore le fait que $f(z)$ prend un certain nombre de valeurs déterminées un nombre fini (ou infini) de fois dans cette région.

En prenant pour $f(z)$ une fonction analytique quelconque dans une région quelconque, on obtiendra une classe (E A) de transformations. Ce sont les transformations topologiquement équivalentes aux fonctions analytiques.

Nous allons chercher ici une définition directe, *topologique*, de (EA), qui ne devra pas, par conséquent, faire intervenir la notion de fonction analytique, et nous retrouverons, par cette voie, les propriétés topologiques fondamentales des fonctions analytiques. Notre but est donc surtout de grouper ces propriétés autour d'un petit nombre d'entre elles et, en nous passant de toute considération d'ordre non topologique, les rattacher à leur véritable origine qui doit être recherchée bien au delà de toute définition (nécessairement métrique) des fonctions analytiques.

2. — Considérons, pour plus de simplicité, une fonction $Z = f(z)$ uniforme dans une *région* [1] plane (r), où elle n'a pas de singularités non polaires, la région pouvant s'étendre ou non à l'infini.

Soit d'abord un point z_0 ordinaire et situé à distance finie dans (r). Soit Z_0 la valeur de la fonction en z_0. Le développement de la fonction inverse de $f(z) = Z$, autour de (Z_0, z_0) fait voir immédiatement que : quel que soit un cercle, situé dans (r) et de centre z_0, l'image de ce cercle dans le plan de Z, a le point Z_0 pour point *intérieur*.

Une transformation $z = \frac{1}{z}$, montre que la propriété subsiste quand z_0 est le point à l'infini. De même la transformation $Z = \frac{1}{Z}$, fait voir immédiatement que $f(z)$ peut avoir en z_0 un pôle sans que la propriété cesse d'être vérifiée.

(1) Le mot *région* désignera toujours dans la suite un ensemble ouvert et connexe, c'est-à-dire ce que l'on appelle encore un *domaine ouvert*.

Nous aurons donc tout avantage à considérer les valeurs de z et de Z représentées sur des sphères (s) et (S), afin de pouvoir adopter la même définition des mots : cercle, point intérieur, qu'il s'agisse d'un point à distance finie ou infinie, d'un point ordinaire de $f(z)$ ou d'un pôle. Si p et P désignent alors des points de (s) et de (S), respectivement, une fonction $\mathrm{P} = f(p)$ sera dite régulière dans une région (r) de (s) si elle n'y a d'autres points singuliers que des pôles.

Donc, quel que soit un ensemble (e) situé dans (r), la fonction $\mathrm{P} = f(p)$ le transforme en un ensemble (E) tel que *l'image de tout point intérieur à* (e) *est un point intérieur à* (E). Nous dirons brièvement que les *points intérieurs se conservent* pour une transformation $\mathrm{P} = f(p)$. Il en résulte, en particulier, que l'image sur (S) de (r) est également une région (R).

La propriété élémentaire des fonctions analytiques que nous venons d'établir *est une propriété topologique de ces fonctions*. En effet, il suffit pour le voir d'être assuré que la même propriété a lieu pour les transformations topologiques. Or cela résulte d'un théorème de SCHŒNFLIESS que son auteur a donné en 1898 (GŒTTINGER NACHRICHTEN) et qui s'établit très facilement au moyen du théorème bien connu de JORDAN sur les courbes fermées simples et d'une proposition élémentaire sur les transformations continues (voir la note de M. HADAMARD au tome II de l'*Introduction à la théorie des fonctions* de J. TANNERY).

3. — Un *continu* est un ensemble fermé et d'un seul tenant. Toute transformation continue transforme un continu en un autre continu ou en un point unique. Pour toute fonction $\mathrm{P} = f(p)$ cette dernière éventualité ne se produit jamais. D'autre part, par définition même, une transformation topologique ne peut transformer un continu en un point ; il en résulte que la propriété de $\mathrm{P} = f(p)$ de *transformer tout continu en un continu* est une seconde *propriété topologique des fonctions analytiques*. Nous verrons, un peu plus loin, que cette seconde propriétén'est pas une conséquence de la première.

4. — Considérons maintenant une transformation continue définie *a priori* dans une région (r) de (s) et caractérisée par les deux seules propriétés topologiques dont il a été question aux deux paragraphes précédents. Nous désignerons par $\mathrm{P} = \mathrm{I}(p)$ une telle transformation et nous l'appellerons *transformation intérieure* [1]. Les fonctions analytiques, ainsi que les transformations topologiques en sont des cas particuliers. C'est de cette classe de transformations que nous allons nous occuper dans les conférences suivantes.

5. — Nous allons montrer, entre autres, que, du point de vue de l'inversion *locale*, les transformations intérieures se comportent de la même manière que les fonctions analytiques autour des points ordinaires.

D'une façon précise : p_0 étant un point quelconque de (r) et P_0 son image dans (R), il existe un entier positif n attaché à p_0 tel que tout voisinage de p_0 contient un domaine (limité par un contour simple qui entoure p_0) qui peut être divisé par des arcs simples partant chacun de p_0 et aboutissant au contour, en n secteurs dont chacun se transforme par $P = I(p)$ en le même cercle de centre P_0. De plus à l'intérieur de chacun de ces secteurs la transformation donnée est topologique. Les points où n est plus grand que 1 sont donc isolés dans (r).

Supposons que l'on ait divisé la région (r) en domaines n'impiétant pas les uns sur les autres tels qu'à l'intérieur de chacun d'eux la transformation $P = I(p)$ soit topologique. Autour de chaque point où $n < 1$, nous prendrons pour domaines de division les secteurs dont il est question plus haut.

Soient (d_i) $(i = 1, 2, 3...)$ ces domaines qui couvrent (r). Soient (D_i) les images de (d_i). Plusieurs (D_i) peuvent se recouvrir, mais nous conviendrons de considérer comme distincts les (D_i) dont les indices sont distincts. Deux (D_i) auront une partie de frontière commune s'ils proviennent de deux (d_i) qui ont en commun une partie de leurs frontières. De cette manière (R) sera recouvert, en général un nombre infini de fois par l'ensemble des (D_i) qui, se raccordant entre eux comme on vient de l'expliquer, formeront une surface de RIEMANN construite *a priori* et étendue sur (R). Soit (ρ) cette surface de RIEMANN.

Si (r) est à connexion simple (c'est-à-dire si toute courbe fermée comprise dans (r) peut se réduire à un point par déformation continue sans sortir de (r)), il en sera de même de (ρ). Or, un théorème fondamental d'Henri POINCARÉ (qui lui a servi de base dans la théorie de l'uniformisation) affirme que toute surface de RIEMANN construite comme (ρ), et à connexion simple, peut être représentée sur une région sphérique avec conservation des angles. Soit (r') la région d'une sphère

(1) *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* (1928), p. 347 (IIIe série, t. 45).

(s') sur laquelle on a fait alors la représentation conforme de (ρ). Entre (ρ) et (r') d'une part, entre (ρ) et (r) d'autre part, il existe donc des correspondances biunivoques et bicontinues. Il en résulte que l'on peut passer par une transformation topologique $p = t(p')$ de (r) à (r') de telle manière que $P = I(p)$ devienne $P = I[(t\ (p')]$, cette relation entre p' et P *étant une fonction analytique*.

Des résultats obtenus par M. KŒBE permettent d'étendre ces considérations aux cas où (r) ne serait pas à connexion simple.

L'équivalence topologique entre les transformations intérieures quelconques, données *a priori* et les fonctions analytiques résultera donc aisément, comme on vient de le voir, des théorèmes sur l'uniformisation de Poincaré et de KŒBE, quand on aura établi la proposition énoncée plus haut.

6. — Dans la définition des fonctions analytiques on est arrivé, peu à peu, à se débarrasser d'un certain nombre d'hypothèses qu'utilisaient les définitions clasiques de CAUCHY et de RIEMANN : il suffit de citer les noms de MM. GOURSAT, MONTEL, BOHR et enfin de M. MENCHOFF qui est arrivé, il y a quelques années, à des définitions renfermant un minimum d'hypothèses.

D'après M. MENCHOFF (1) il suffit, par exemple, de supposer qu'une transformation ponctuelle de plan à plan est topologique dans une région et que, autour de chaque point, trois directions distinctes se transforment en trois directions formant les même angles, disposés dans le même ordre et le même sens, pour conclure que la transformation est conforme.

D'après ce que l'on vient de dire la première hypothèse de M. MENCHOFF, l'hypothèse topologique, peut être remplacée par celle-ci : *la transformation est intérieure dans la région donnée.*

Les deux hypothèses de la définition ainsi modifiée correspondent alors exactement aux deux parties que comporterait un exposé *logique* (2) de la théorie des fonctions analytiques. Dans la première (la partie topologique), on se bornerait donc à donner la définition des transformations intérieures, dont on pousserait l'étude aussi loin que possible sans avoir recours à aucune considération métrique. C'est cette partie que nous allons développer dans les conférences suivantes.

(1) *Comptes Rendus* 1928, t. CLXXXVII, p. 502.
(2) Cet exposé ne serait peut-être pas *didactique*.

II. — Indépendance des deux conditions des transformations intérieures. Lemmes et théorèmes de la théorie des ensembles. Théorème de M. Hadamard sur les transformations localement biunivoques.

1. — Nous allons d'abord montrer que la deuxième condition des transformations intérieures n'est pas une conséquence de la première (qu'elle n'est donc pas inutile dans cette définition).

Considérons pour cela, une transformation de plan à plan, définie comme suit : soient (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un plan et ρ et θ les coordonnées polaires de l'autre ; nous poserons

$$\rho = e^{-\frac{1}{y^2}} + xy^2$$
$$\theta = \frac{2\pi}{y}$$

pour $y \neq 0$; et $\rho \equiv 0$ pour $y = 0$.

Cette transformation (que nous envisageons dans la région $x > 0$ du plan seulement) est continue et transforme le continu $y = 0$ en le point (unique) $\rho = 0$. Les théorèmes classiques sur les fonctions implicites montrent que, pour $y \neq 0$, la transformation conserve les points intérieurs. Reste à montrer qu'il en est encore ainsi dans les régions qui contiennent des points de l'axe des x.

Soit x_0 un point fixe sur $y = 0$ $(x_0 > 0)$. Entourons x_0 d'un carré de centre x_0, de côtés 2ε $(\varepsilon > 0)$ et parallèles aux axes. Soit y_0 une valeur positive inférieure à ε. Quand (x, y) décrit le segment de $y = y_0$ compris dans le carré, le point (ρ, θ) décrit, sur le rayon vecteur $\theta_0 = 2\frac{\pi}{y_0}$ le segment compris entre

$$e^{-\frac{1}{y_0^2}} + (x_0 - \varepsilon)y_0^2 \qquad \text{et} \qquad e^{-\frac{1}{y_0^2}} + (x_0 + \varepsilon)y_0^2.$$

Soient $y_1, y_2, \ldots y_n$.. les nombres positifs décroissants et tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ qui fournissent le même rayon vecteur que y_0.

On a

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + y_n}.$$

L'image du carré couvre un segment du rayon vecteur ϑ_0 qui a l'une de ses extrémités en O. En effet, il faut et il suffit pour cela qu'on ait pour n suffisamment grand

$$e^{-\frac{1}{y_n^2}} + (x_0 - \varepsilon)y_n^2 < e^{\frac{1}{y_{n+1}^2}} + (x_0 + \varepsilon)y_{n+1}^2.$$

Or, en divisant par y_n^2 et en tenant compte de la relation entre y_n et y_{n+1} cette inégalité est évidemment vérifiée pour $y_n < \alpha$, α étant un nombre positif dépendant de x_0 et de ε. Elle est donc vérifiée pour n suffisamment grand.

Prenons $y_0 < \alpha$. L'image du rectangle limité par $y = y_0$ et $y = y_1$, d'une part, et par les deux côtés du carré parallèles à l'axe des y d'autre part, est limitée par deux arcs de spirales, dont celui qui est plus près de l'origine est compris à l'intérieur de l'image du rectangle analogue à celui qui est défini plus haut, mais où y_0 et y_1, sont remplacés par y_1 et y_2 respectivement. On voit ainsi que le rectangle

$$0 \leqslant y \leqslant y_0, \qquad x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon,$$

aura pour image un domaine pour lequel l'origine sera un point intérieur. Or le rectangle ci-dessus fait partie du carré du centre x_0 et, d'autre part, ε étant positif et arbitraire on peut, à l'intérieur de tout ensemble qui a x_0 pour point intérieur, déterminer un tel carré. Donc, si x_0 est point intérieur, l'origine est point intérieur pour l'ensemble transformé. La transformation donnée possède donc la première propriété des transformations intérieures.

2. — Etant donné un ensemble fermé et borné quelconque dans le plan, supposons que nous ayons une famille de domaines telle que chacun des points de l'ensemble soit compris à l'intérieur de l'un au moins de ces domaines. Un lemme bien connu de MM. BOREL et LEBESGUE affirme alors que l'on peut extraire de cette famille un nombre fini de domaines, tels que tout point de l'ensemble soit à l'intérieur de l'un au moins des domaines extraits. Nous aurons à nous servir de ce lemme dans la suite.

3. — C'est également au moyen de ce lemme qu'on arrive à démontrer assez aisément la proposition suivante bien connue dans la théorie des ensembles :

Etant donné un ensemble fermé quelconque dans le plan, qui ne contient aucun continu on peut, autour de chacun de ses points, et dans un cercle aussi petit que l'on voudra ayant ce point pour centre, décrire une courbe simple fermée ne passant par aucun point de l'ensemble.

Un ensemble qui satisfait à cette dernière propriété est appelé quelques fois *ensemble ponctuel,* même s'il n'est pas fermé. Un ensemble fermé discontinu est donc un ensemble ponctuel.

4. — Rappelons encore le théorème suivant qui nous sera utile : étant donné une suite de continus dont chacun est compris dans celui qui le précède dans la suite, l'ensemble des points communs à tous ces continus est un continu ou un point unique.

Nous rappelons, pour préciser, qu'un *continu* est, par définition, un ensemble qui est à la fois fermé et bien enchaîné. On dit qu'un ensemble est *bien enchaîné,* ou à *un seul tenant* si, ε étant un nombre positif quelconque donné à l'avance, on peut toujours déterminer, quels que soient deux points donnés de l'ensemble, une suite formée d'un nombre fini de points de l'ensemble (suite dont les deux points extrêmes sont les deux points donnés), telle que la distance entre deux de ses points consécutifs soit inférieure à ε.

5. — Considérons une région (r) absolument quelconque de la sphère (s) [1]. Un point limite de (r) qui n'appartient pas à (r) est un point frontière de (r). L'ensemble des points frontière forme la frontière (f) de (r). La frontière est nécessairement un ensemble fermé. Nous allons définir les *éléments* de la frontière de (r).

Soit a un point quelconque de (f). Il peut il y avoir dans (f) un autre point a' tel que l'on puisse trouver, quelque soit $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, une suite finie de points de (f) dont les deux extrêmes soient a et a' et telle que la distance entre deux points consécutifs de cette suite soit inférieure à ε. Il existe alors un continu compris dans (f) et comprenant a et a'. L'ensemble de tous les a' relatifs au même a formera certainement un continu. Ce continu, que nous appelons (f_1) ne se confond pas, en général, avec (f). Il y a donc dans (f), en général, un point b hors de ce continu. On pourra former, à partir de b, un autre

(1) Tous ces théorèmes et définitions s'appliquent naturellement aux ensembles de points sur une sphère. Par *cercle* nous entendons toujours, sur une sphère, une calotte limitée par une circonférence.

continu (f_2) compris dans (f). Si a′ n'existait pas nous désignerions par (f_1) le seul point a de sorte que : à tout point de (f) se trouve attaché un *élément* qui est ou bien un continu comprenant ce point et compris dans (f), ou bien ce point lui-même. Si l'opération indiquée plus haut conduit à la décomposition de (f) en un nombre *fini* d'éléments, le nombre de ces éléments sera dit l'*ordre de connexion* de (r).

Si (r) occupe toute la sphère, l'ordre de connexion est zéro. On dit que (r) est à *connexion simple* quand son ordre de connexion est zéro ou un. Cette définition coïncide avec celle qui a été rappelée au nº 5 de la section précédente.

L'ordre de connexion de (r) *est un invariant topologique*. En effet, en soumettant (r) à une transformation topologique arbitraire on obtiendra une région (r') et il est facile de voir que lorsque l'on tend vers un élément de la frontière de (r) par un chemin continu situé dans (r), le point correspondant tend toujours vers le même élément de la frontière de (r'). La transformation topologique établit donc une correspondance biunivoque entre les éléments des frontières de (r) et de (r') (1).

6. — En nous servant des notions et des propositions rappelées, nous allons maintenant démontrer un théorème de M. HADAMARD (2) sur les transformations continues localement biunivoques.

Une transformation continue est dite *localement* biunivoque si autour de chaque point où elle est définie on peut déterminer un domaine assez petit pour que, dans ce domaine, la transformation soit topologique. Une telle transformation est évidemment toujours une transformation intérieure, mais la réciproque n'est pas vraie. Il s'agit de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation définie et continue dans tout le plan et partout localement biunivoque soit une transformation topologique dans tout le plan et le transforme en lui-même. Des exemples simples (comme : $Z = e^z$) montrent qu'une condition est nécessaire en dehors de l'hypothèse de la biunivocité locale.

Nous allons remplacer le plan par la sphère pointée (ce qui est toujours possible par une simple projection stéréographique). Soit donc

(1) Il est à remarquer que cette correspondance *n'a pas lieu* entre les *points* des frontières. En effet la transformation employée cesse, en général, d'avoir un sens sur la frontière de (r) et de (r').

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1906, t. XXXIV. Voir aussi : *Carathéodory et Rademacher* : Archiv. der Math. u. Physik, t. XXVI, 1917.

(r) la sphère pointée en a, c'est-à-dire la surface sphérique dont on a exclu le seul point a, et $P = H(p)$ la transformation donnée, définie, continue et localement biunivoque dans tout (r).

Si l'image de (r) (qui est nécessairement une région (R) de la sphère sur laquelle nous représentons les points P) est à connexion simple, la transformation $P = H(p)$ sera évidemment topologique : un raisonnement simple utilisé en théorie des fonctions pour démontrer le théorème dit « de monodromie » s'applique alors, en effet, sans difficulté et montre que la correspondance inverse, qui conduit de P à p, est uniforme dans (R).

Cette remarque faite, nous allons démontrer maintenant le théorème de M. HADAMARD : la condition nécessaire et suffisante pour que $P = H\ (p)$ soit une transformation topologique transformant (r) en la sphère pointée en A est la suivante : *qu'il n'existe pas, dans (r), de chemin continu tendant vers a et se transformant en un arc de cercle de longueur finie qui ne contient pas A comme point limite.*

La condition est évidemment nécessaire car si $P = H(p)$ fait correspondre biunivoquement à la sphère pointée en a, la sphère pointée en A, il est clair que tout chemin tendant vers a se transformera en un chemin tendant vers A.

Supposons donc que la condition soit satisfaite et soit B un point frontière de (R) distinct de A. Si B n'existait pas (R) serait simplement connexe et, d'après la remarque faite plus haut, le théorème serait démontré. Soit alors (Σ) un arc fini de cercle complètement intérieur à (R) à l'exception d'une de ses extrémités B′ qui est sur la frontière de (R), ailleurs qu'en A. Un tel arc existe certainement si B existe car il n'y a qu'à prendre d'abord un arc de cercle quelconque ne passant pas par A, mais passant par B et ayant des points intérieurs à (R). Sur cet arc de cercle on en déterminera un autre, (Σ), comme il suit : à partir d'un point quelconque de l'arc donné, et intérieur à (R), on parcourra cet arc dans la direction de B. Le premier point frontière de (R) rencontré sera B′ et (Σ) sera la portion parcourue jusqu'à B′,

Soit K un point de (Σ) distinct de B′. Autour d'un point k de (r) qui a pour image K la transformation est biunivoque ; à la portion (Σ_1) de (Σ) partant de K et située à l'intérieur d'un cercle (T_1) de centre K, suffisamment petit, correspond donc un arc simple dans (r) partant de k. Nous supposerons que (T_1) soit le plus grand cercle de centre K satisfaisant à cette condition. Soit K_1 le premier point d'intersection de (Σ_1) avec la circonférence de (T_1). En répétant sur K_1 la même opération que celle effectuée sur K on arrive à un prolongement de l'arc simple, correspondant à (Σ_1).

Supposons que le prolongement fasse tendre ainsi, sur (Σ) vers un point B″ qui ne puisse être atteint. Les arcs trouvés chaque fois dans (r) détermineront un chemin (γ) dont l'extrémité ne peut tendre vers a, car l'image de (γ) tout entier étant une portion de (Σ) ceci serait contraire à la condition que, par hypothèse, vérifie $P = H(p)$. Elle ne peut pas davantage tendre vers un point déterminé intérieur à (r) car alors le prolongement pourrait se poursuivre au delà de B″. Il faut donc que l'extrémité du chemin (γ) ne tende vers aucune limite déterminée.

Soient alors b_1'' et b_2'' deux points limites distincts de l'extrémité de ce chemin. Il est clair que b_1'' et b_2'' doivent avoir pour image B″ L'ensemble des points de (r) qui ont pour image B″ est ponctuel. On pourra donc entourer b_1'' d'une courbe fermée (c) située dans (r) séparant b_1'' de b_2'' et ne passant par aucun point dont l'image est B″. Mais (γ) doit s'approcher indéfiniment de b_1'' comme de b_2''. Il traversera donc une infinité de fois (c) ce qui signifie qu'il y a sur (c) un point limite de l'extrémité de (γ). Ce point limite ne peut avoir que B″ pour image, ce qui est contradictoire avec l'existence de (c). Il n'y a donc pas d'arc de cercle (Σ) et par conséquent pas de point B. Le seul point frontière de (R) étant A le théorème est démontré. Nous donnerons plus loin, une généralisation de ce théorème.

III. — Le théorème fondamental pour les domaines normaux.

1. — Reprenons maintenant une transformation intérieure quelconque $P = I(p)$ définie dans (r). Soit (Δ) un domaine (1) quelconque situé dans (R), A un point quelconque intérieur à (Δ) et a un point quelconque de (r) ayant pour image A.

L'ensemble des points de (r) que l'on peut atteindre par un chemin continu partant de a et tel que l'image de ce chemin reste dans l'inté-

(1) Ce terme employé seul désignera toujours un *domaine fermé* c'est-à-dire une région et sa frontière.

rieur de (Δ), forme une région comprise dans (r). Soit (Δ, a) le domaine formé en ajoutant à cette région sa frontière. Nous appellerons (Δ, a), le *domaine maximum de* (Δ) *par rapport* à a. L'image de ce domaine est certainement comprise dans (Δ) ; mais elle peut ne pas couvrir tout (Δ).

Nous dirons que le domaine maximum (Δ, a) est *normal* s'il est tout entier situé dans (r). (Les points intérieurs d'un (Δ, a) quelconque sont toujours dans (r) mais les points frontières de ce domaine peuvent, dans certains cas, être sur la frontière de (r), donc hors de (r)).

On voit immédiatement que les images des points frontière d'un (Δ, a), normal ou non, si elles existent (c'est-à-dire si ces points frontière sont dans (r)) *sont sur la frontière de* (Δ). Si le domaine (Δ, a) est normal, il en sera ainsi de tous ses points frontière et, comme, d'autre part, tout point frontière de l'image de (Δ, a) doit alors provenir d'un point frontière de (Δ, a), *l'image de* (Δ, a) *(normal) couvre tout* (Δ) et se confond avec lui.

Une transformation $P = I(p)$ étant donnée, nous appellerons *domaine normal* de cette transformation un domaine (δ) situé entièrement dans (r) et tel que les points frontière de ce domaine aient, tous, pour image (par $P = I(p)$) des points frontière de l'image de (δ).

Tout domaine-maximum (Δ, a) normal, est un domaine normal de la transformation. Inversement : tout domaine normal (δ) de la transformation est un domaine maximum (Δ, a) normal, où (Δ) est l'image de (δ) et a un point quelconque intérieur à (δ). Cela se déduit immédiatement des définitions que nous venons de donner et du fait que $P = I(p)$ conservent les points intérieurs.

On en déduit encore les remarques suivantes :

1° (δ) étant un domaine normal quelconque et (Δ) son image, (Δ') étant un domaine compris dans (Δ) et a un point intérieur à (δ) qui a son image à l'intérieur de (Δ') : le domaine maximum (Δ', a) est normal.

2° Deux domaines maxima quelconques du même domaine (Δ), n'ont aucun point intérieur commun ou bien se confondent.

Soit A un point quelconque de (R) et a l'un des points de (r) qui ont pour image A. La seconde propriété qui entre dans la définition des transformations intérieures et une proposition rappelée dans la section précédente montrent que l'on peut entourer a d'une courbe fermée (γ), située dans (r) et telle qu'aucun point de (γ) n'ait pour image A. Soit ρ le minimum de la distance de A à l'image de (γ) et (K) un cercle de centre A et de rayon inférieur à ρ. Le domaine maximum (K, a) est évidemment normal, car il ne peut contenir des points de (γ). On peut donc ajouter aux précédentes cette troisième remarque :

3° Autour de tout point a de (r) (et dans un cercle aussi petit que l'on voudra) on pourra toujours déterminer un domaine normal de la transformation donnée.

2. — Ces préliminaires établis nous allons démontrer maintenant la proposition suivante :

Etant donné un domaine normal (δ) quelconque d'une transformation intérieure $P = I\ (p)$, soit (Δ) son image par cette transformation. A tout arc simple (Σ), compris avec ses extrémités A et B, dans l'intérieur de (Δ) et à tout point a de (δ) qui a pour image A, correspond un arc simple (σ), partant de a et qui, par $P = I\ (p)$, se transforme en (Σ) d'une manière biunivoque et bicontinue.

Soit (0, 1) l'intervalle dans lequel varie le paramètre t qui détermine la position d'un point sur (Σ). Les points correspondant aux valeurs $t = \frac{i}{2^n}$ (où n est un nombre entier positif fixe et où i prend successivement les valeurs 1, 2,...2^n) déterminent, sur (Σ), n sous-arcs (Σ_n^i), (i = 1, 2... 2^n), que l'on peut enfermer, chacun, en un domaine (Δ_n^i) en faisant parcourir à un cercle de rayon fixe l'arc (Σ_n^i). On prendra ce rayon, à la fois, inférieur à $\frac{1}{n}$ et assez petit pour que deux (Δ_n^i) n'aient de points communs que si les i diffèrent par une unité seulement (et, bien entendu, pour que tous les (Δ_n^i) soient à l'intérieur de (Δ)).

A cette *chaîne* de domaines (Δ_n^i) nous allons faire correspondre, dans (δ), des chaînes de (δ_n^i) telles que (δ_n^i) soit domaine maximum pour (Δ_n^i) si les indices i ont même valeur. A cet effet nous construisons d'abord (Δ_n^1, a) qui sera (δ_n^1). Comme l'image de (δ_n^1) couvre (Δ_n^1), car le domaine maximum est normal, il y aura dans (δ_n^1) un point au moins dont l'image sera le point $A_1\left(t = \frac{1}{2^n}\right)$ de (Σ). L'ensemble (α) des points de (δ_n^1) ayant cette image sera fermé. Entourons chacun de ses points d'un cercle assez petit pour que l'image de ce cercle soit intérieure à (Δ_n^2). D'après le lemme de BOREL-LEBESGUE on peut choisir un nombre fini de ces cercles de façon que tout point de l'ensemble (α) soit compris au moins dans l'un des cercles choisis. Il est alors évident que, si a_1 désigne un point quelconque de (α), il n'y aura qu'un nombre fini de domaines maxima (Δ_n^2, a_1) distincts, car les domaines maxima correspondant à deux points de (α) qui se trouvent à l'intérieur du même cercle se confondent. En effet ces domaines maxima ont en commun tous les points du cercle choisi qui comprend ces deux points de (α). Il n'y aura donc, si l'on prend pour (δ_n^2) l'un quelconque des (Δ_n^2, a_1), qu'un nombre fini de (δ_n^2) possibles.

Sur chacun de ces (δ_n^2) on opérera comme sur (δ_n^1), en remplaçant $A_1\left(t = \frac{1}{2^n}\right)$ par le point $A_2\left(t = \frac{2}{2^n}\right)$. On obtiendra donc un nombre fini de chaînes de (δ_n^i) ayant chacune, effectivement, la propriété annoncée.

Si p est un entier positif quelconque la chaîne (Δ_{n+p}^i) $(i = 1, 2, \ldots 2^{n+p})$ est comprise à l'intérieur de la chaîne (Δ_n^i) $(i = 1, 2\ldots 2^n)$ de façon que les premiers 2^p domaines de la chaîne (Δ_{n+p}^i) sont compris dans le premier domaine de la chaine (Δ_n), les 2^p domaines suivants dans le second domaine de la chaine (Δ_n^i) et ainsi de suite.

Si q est un entier positif quelconque compris entre 0 et p, la chaîne (Δ_{n+q}^i) $(i = 1, 2.. 2^{n+q})$ est comprise dans la chaîne (Δ_n^i) et comprend la chaîne (Δ_{n+p}^i). Une chaîne (δ_{n+p}^i) donnée est comprise dans une certaine chaîne (δ_n) ; il existe toujours une chaîne (δ_{n+q}^i) comprenant la première et comprise dans la seconde.

Ceci étant, il existe, parmi les chaînes (δ_1^i), une au moins qui contient des chaînes de tous les rangs, car le nombre des chaînes (δ_1^i) est fini. Choisissons une telle chaîne (δ_1^i) ; à l'intérieur de celle-ci choisissons une chaîne δ_2^i qui contienne des chaînes de tous les rangs et continuons ainsi indéfiniment. La suite de chaînes obtenue :

$$(\delta_1^i), \qquad (\delta_2^i), \cdots (\delta_n^i) \cdots$$

est une suite de continus emboîtés qui, d'après le théorème rappelé dans la section précédente, ont en commun un continu (σ). [Ce ne peut être un point unique car l'image de ce continu est l'arc (Σ)]. Il reste à démontrer que $P = I(p)$ établit entre (σ) et (Σ) une correspondance biunivoque, car cette correspondance étant continue de (σ) à (Σ) et (σ) étant fermé elle sera alors nécessairement bicontinue.

Soient p_1 et p_2 deux points distincts de (σ) ayant même image P.

Comme deux domaines (Δ_n^i) de la même chaîne n'ont de point commun que si les i diffèrent d'une unité au plus, les points p_1 et p_2 se trouveront, pour chaque valeur de n, dans deux domaines (δ_n) voisins ou dans le même (δ_n^i). Ce (δ_n^i), ou l'ensemble de ces deux (δ_n^i) voisins, (suivant le cas), forment un continu, et tous ces continus emboîtés, (quand n augmente indéfiniment) ont en commun un continu (car il doit comprendre les deux points distincts p_1 et p_2). Mais l'image de ce continu ne peut être que le point unique P, car le seul point commun des (Δ_n^i) correspondant à nos groupes (formés par un (δ_n^i), ou de deux (δ_n^i) voisins) est P. Ceci contredit la définition des transformations intérieures ; les points p_1 et p_2 ne peuvent donc être distincts et la proposition est démontrée.

3. — Nous allons donner tout de suite une application de cette proposition.

Considérons une transformation intérieure, définie dans (r) qu'elle transforme en (R), et supposons que (R) *ne couvre pas toute la sphère* (S) [1]. Soit (d) un domaine de (r) limité par une courbe fermée simple (γ) et supposons encore que *la transformation soit topologique sur* (γ). Dans ces conditions nous allons démontrer que *la transformation est topologique dans tout* (d).

L'image de (γ) est également une courbe fermée simple (Γ) qui détermine, sur (S), deux régions. L'image (D) de (d) se confond avec l'une de ces régions, car elle ne peut se confondre avec (S), et, d'autre part, toute la frontière de (D) et sur (Γ). (Γ) est donc la frontière de (D) et par conséquent (d) est un domaine normal de la transformation donnée.

Supposons maintenant qu'un point A de (D) soit l'image de deux points distincts a_1 et a_2 de (d). Soit (Σ) un arc de cercle passant par A entièrement situé dans (D) et soient P et Q ses deux extrémités qui se trouvent par hypothèse sur (Γ). Prenons une suite de points A_1, A_2... allant de A vers P sur la portion (AP) de (Σ) et tendant vers P. Appliquons à (AA_1) la proposition du paragraphe précédent : on aura un arc (σ_1') partant de a_1 et un arc (σ_2) partant de a_1, chacun ayant pour image (AA_1) et la transformation donnée établissant des corres-

(1) Ceci est le cas, par exemple, lorsque l'on a affaire à une transformation intérieure *finie* dans une région plane.

pondances biunivoques entre ces arcs et leurs images. En appliquant encore la même proposition aux extrémités de (σ_1') et de (σ_2') qui correspondent à A_1, et à l'arc (A_1A_2), on obtiendra deux arcs, (σ_1'') et (σ_2''), qui prolongent respectivement les précédents et forment avec ceux-ci des arcs simples se transformant d'une manière biunivoque en (AA_2). En continuant ainsi on pourra construire deux arcs simples partant de a_1 et de a_2 et correspondant à (AP) (1), quoique P soit sur la frontière de (D). Ces arcs formés de (σ_1'), (σ_1''), (σ_1''')... et de (σ_2'), (σ_2''), (σ_2''')... respectivement ne pourront tendre que vers (γ), car il n'y a pas de point à l'intérieur de (d) se transformant en P. point frontière de (D). Ces arcs devront d'ailleurs tendre vers le même point p de (γ) car la transformation est biunivoque sur (γ).

On fera la même construction pour a_1 et a_2 et l'arc (AQ). On obtiendra ainsi deux arcs simples (σ_1) et (σ_2) passant par a_1 et a_2 respectivement et aboutissant en p et q. Soient α et β les premiers points communs de ces deux arcs quand on les parcourt de a_1, et de a_2 vers p et q. Les portions $(\alpha\beta)$ de (σ_1) et de (σ_2) forment une courbe fermée simple qui limite une région comprise dans (d). L'image de cette région est comprise dans (D) et la frontière de cette image doit être toute entière sur l'image de (σ_1) et de (σ_2), c'est-à-dire sur (Σ). Ceci est évidemment impossible, car l'image d'une partie de (d) ne peut couvrir *a fortiori* tout (S). Donc a_1 et a_2 ne peuvent être distincts et la transformation est topologique dans (d).

4. — Nous allons maintenant compléter la proposition du paragraphe 2 par la suivante :

Dans tout (δ) il n'y a qu'un nombre fini d'arcs (σ) partant du même point a et se transformant en (Σ) d'une manière biunivoque et bicontinue.

Nous supposons d'abord que (δ) soit tel que son image (Δ) ne couvre pas toute la sphère (S), et, de plus, que (δ) soit à connexion simple.

Il est alors clair que deux arcs simples (σ) et (σ_1) partant tous les deux de a, se transformant en (Σ), chacun, ne peuvent avoir en commun un point a' différent de a sans se confondre entre a' et a. Les deux arcs sont, en effet, situés dans (δ) ; la partie de (σ) comprise entre a et le premier point commun avec (σ_1) que l'on rencontrerait quand on le parcourt en partant de a formerait, avec la partie analogue de (σ_1),

(1) Le raisonnement du numéro 6 de la section précédente montre que l'opération peut être poursuivie jusqu'en P.

une courbe simple fermée qui serait la frontière d'une certaine région faisant partie de (δ) (à cause de la connexité simple de ce domaine.) Le raisonnement du paragraphe précédent montre que cela est impossible.

S'il y a donc une infinité de (σ), leurs extrémités b, qui ont pour images l'extrémité B de (Σ), sont distinctes et en nombre infini. Elles sont toutes dans (δ) ; elles y ont donc au moins un point limite b_0 (qui a évidemment pour image B).

Prolongeons (Σ) par (Σ'), ayant comme extrémités B et B', et formant avec (Σ) un arc simple intérieur à (Δ). Autour de b_0 comme centre, décrivons un cercle (c) de rayon ε. A partir de chacune des extrémités b qui se trouvent à l'intérieur de (c) décrivons un arc (σ'), correspondant à (Σ') comme les (σ) correspondent à (Σ). Deux quelconques des (σ') ne peuvent avoir de point commun, car ils partent de points distincts et on peut raisonner sur $(\Sigma) + (\Sigma')$ comme plus haut sur (Σ). Soient b' les extrémités, toutes distinctes, de ces (σ'), extrémités ayant pour image B'. Soit b_0' un point limite des b' et décrivons un cercle (c') de rayon ε et de centre b_0'.

Considérons deux (σ') qui ont leurs extrémités b' dans (c'). Ces deux arcs simples, sans points communs, ont aussi leurs extrémités b dans (c). Joignons leurs extrémités b et leurs extrémités b', par des arcs simples qui ne rencontrent pas nos deux arcs (σ') et qui restent respectivement, dans (c) et dans (c'). On aura formé ainsi une courbe fermée simple (γ) qui sera la frontière complète d'un domaine (d) compris dans (δ). L'image (D) de (d) sera un domaine compris dans (Δ) et ne couvrira donc pas (S) tout entière. Sa frontière sera nécessairement l'image (Γ) de (γ) ou une partie de cette image. Or, ε est positif arbitraire. Si on le prend assez petit pour que les images de (c) et de (c') soient très voisines, de B et de B', on voit que, ni (Γ), ni une partie de (Γ), ne peut constituer la frontière *complète* de (D), puisque celui-ci ne couvre pas (S) toute entière. La contradiction à laquelle on aboutit ainsi démontre la proposition énoncée, au moins avec les hypothèses faites sur (δ).

Il est clair que l'on peut, autour de tout point p de (r), déterminer un (δ) normal et satisfaisant à ces hypothèses. Il suffit, en effet, de prendre une région (r') à connexion simple, contenant p, comprise dans (r) et telle que son image (R') ne couvre pas (S) entière. Soit P l'image de p. Le domaine maximum (K, p) où (K) est un cercle quelconque de centre P et compris dans (R′), satisfait aux hypothèses. En effet ce domaine est normal, son image ne couvre pas tout (S) et il est à connexion simple, car la région intérieure à (r') déterminée par toute courbe simple fermée comprise dans (K, p), fait partie de (K, p) d'après sa définition. (K, p), est donc un domaine (δ) cherché.

Mais nous verrons plus loin que la restriction n'est pas nécessaire et que la proposition est vraie pour tout (δ) normal.

Avec la propopoposition du paragraphe 2, celle qu'on vient de démontrer constitue le théorème fondamental pour les domaines normaux.

IV. — Théorème sur l'inversion locale des transformations intérieures et diverses applications.

1. — Si A désigne un point quelconque de (R) les points a de (r) qui ont pour image A forment un ensemble qui contient tous ses points limites intérieurs à (r), si de tels points existent. Nous allons voir justement que *tous les points limite de l'ensemble des a sont sur la frontière de (r)*, de sorte que l'ensemble est formé de points isolés.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et soit a_0 un point limite de a, compris dans (r). Ce point sera lui-même un point a. Décrivons autour de a_0 un domaine (δ) comme on l'a indiqué à la fin de la section précédente. Pour un tel domaine le théorème fondamental a été complètement démontré. Dans l'image (Δ) de (δ) traçons un arc simple (AB) partant de l'image A de a_0 et construisons tous les arcs (σ) partant de tous les a qui sont dans (δ) et qui correspondent à (AB), dans les conditions du théorème fondamental. Comme chacun de ces arcs ne peut être rencontré que par un nombre fini d'entre eux, on peut en choisir une infinité n'ayant, deux à deux, aucun point commun. Les extrémités b de ces arcs, étant toutes distinctes et se trouvant dans (δ), ont au moins un point limite b_0 dans (δ). On pourra donc choisir deux d'entre ces arcs tels que leurs deux extrémités a, aussi bien que leurs deux extrémités b soient entre elles à une distance aussi petite que l'on voudra. Le raisonnement déjà exposé dans la démonstration de la deuxième partie du théorème fondamental montre alors que l'on aboutit à une contradiction ; les points a ne peuvent donc être en nombre infini dans (δ), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point d'accumulation dans (r).

2. — Construisons maintenant, autour du point a donné, un cercle

tel qu'à son intérieur il n'y ait aucun autre point que a se transformant en A. Nous construirons alors le domaine (δ) autour de a comme il a été indiqué à la fin de la section précédente, pour que la seconde partie du théorème fondamental soit démontrée pour ce (δ) ; mais ayant soin de prendre pour (r') une région comprise dans le cercle décrit ici autour de a, de sorte que (δ) ne contienne aucun autre point que a ayant pour image A.

Soit (Γ) un cercle quelconque de centre A et compris dans (Δ), image de (δ). Soit B un point de la circonférence de (Γ) et (AB) le rayon (sphérique) passant par B. Soit B' un autre point quelconque de la circonférence. Au point B correspondent dans (δ) un nombre fini de points b, d'après le paragraphe précédent. Soit b_1 l'un d'eux. Il existe, dans (δ), d'après le théorème fondamental, un arc (σ') partant de b_1 et correspondant à l'arc (BB') de la circonférence. On le prolongera par l'arc (σ'') partant de l'extrémité du précédent et correspondant à l'arc (B'B) complémentaire de (BB') sur la circonférence. On aura donc un arc simple (σ_1) [formé de la réunion de (σ') et de (σ'')] qui se transforme, dans les conditions du théorème fondamental, en la circonférence entière de (Γ). Soit b_2 l'extrémité à laquelle on aboutit. Il se peut que b_2 se confonde avec b_1 ; alors (σ_1) est fermé comme (Γ) ; sinon on construira de la même manière, en partant de b_2, un arc (σ_2) qui aura encore (Γ) pour image. De toute façon, comme il n'y a qu'un nombre fini de points b dans (δ), on arrivera à une courbe simple fermée (γ) constituée par un seul ou plusieurs arcs : (σ_1), (σ_2),... (σ_n). La région déterminée par (γ) à l'intérieur de (δ) fait partie de (δ), puisque celui-ci est à connexion simple. Son image est le cercle (Γ) car cette image est dans (Δ) et tous les points frontière de cette image sont sur la ciconférence de (Γ). La courbe (γ) avec cette région forme, d'ailleurs, le domaine (Γ, a).

Envisageons maintenant l'un des arcs (σ_1) (σ_2)... (σ_n), qui constituent la frontière (γ). Des deux extrémités b_1 et b_2 de cet arc (σ_1), partent deux arcs simples qui, dans les conditions du théorème fondamental, correspondent à (BA). Je dis que ces deux arcs ne peuvent avoir d'autre point commun que a. En effet, si ces arcs se rencontraient d'abord en un autre point a' leurs portions comprises entre b_1 et a', et entre b_2 et a', formeraient un arc simple qui avec (σ_1), ou avec le complémentaire de (σ_1) sur (γ), constituerait une courbe fermée simple délimitant un domaine compris dans (Γ, a) et ne comprenant pas a. L'image de ce domaine, comme le montre l'image de sa frontière, ne pourrait être que (Γ) lui-même. Mais alors il devrait y avoir un point se transformant en A, ce qui conduit à une contradiction puisque a est le seul point ayant pour image A et se trouvant dans (Γ, a).

Avec (σ_1) les deux arcs, dont chacun a pour image biunivoque (BA), délimitent donc un domaine dans (Γ, a) qui contient a sur sa frontière. Ce domaine a pour image (Γ). Je dis que la transformation donnée est topologique à l'intérieur de ce domaine. En effet, si deux points p_1, et p_2 avaient même image P, il n'y aurait qu'à construire deux arcs passant, respectivement, par p_1 et p_2 et correspondant au rayon de (Γ) qui passe par P. Ces deux arcs aboutiraient tous deux d'un côté en a, de l'autre côté en l'unique point de (σ_1) qui a pour image l'intersection du rayon considéré avec la circonférence de (Γ). Il y aurait ainsi dans (Γ, a) un domaine limité par des arcs simples dont l'image serait sur un même rayon de (Γ). Comme on l'a vu plusieurs fois déjà, ceci est impossible.

Le même raisonnement montre que si (γ) est formé d'un seul (σ), la transformation est topologique au voisinage de a.

En résumé :

Dans le voisinage d'un point quelconque a de (r) on peut déterminer une courbe fermée simple limitant un domaine qui comprend a à l'intérieur et qui peut être divisé en un nombre fini n de secteurs, chacun de ces secteurs ayant pour image le même cercle de centre A et à l'intérieur de chacun de ces secteurs la transformation étant topologique.

De plus : on voit immédiatement que : *les points a pour lesquels $n > 1$ sont isolés.* C'est le théorème de l'inversion locale des transformations intérieures annoncé dans la première section.

Tout se passe donc, à ce point de vue, comme pour les fonctions holomorphes. Il est donc naturel d'appeler points doubles, triples, etc, les points a où $n = 2$, $n = 3$, etc.

3. — Un domaine quelconque (δ) qui est normal pour la transformation, se trouve par définition, à l'intérieur de (r) frontière comprise. La proposition du paragraphe 1 montre donc que le nombre des points qui ont même image et sont contenus dans (δ) est fini. Nous allons montrer que *dans l'intérieur de tout domaine normal (δ), ce nombre de points est indépendant de l'image (qui peut être prise quelconque dans (Δ)) chacun des points étant compté avec son ordre de multiplicité.*

Soit, en effet, n le nombre des points intérieurs a de (δ) ayant pour image A. D'après le théorème sur l'inversion locale des transformations intérieures on peut déterminer, autour de A, un cercle (Γ) et autour de chacun des a des domaines (γ) tels que chaque point de (Γ) soit l'image de n points situés dans l'ensemble des domaines (γ) (1). Le point A est image de n points de (δ) exactement ; nous allons montrer qu'il en est ainsi de tout point de (Γ) qui est assez près de A. En effet, si, aussi près que l'on voudrait de A, il y avait des points qui seraient chacun l'image de *plus* de n points de (δ), on pourrait trouver une suite de points dans (δ), hors des domaines (γ), et tels que les images de ces points tendent vers A. Tout point limite de la suite (situé nécessairement dans l'intérieur de (δ), hors de (γ) ou sur sa frontière) aurait donc pour image A, ce qui contredit l'hypothèse qu'il n'existe que n points dans (δ) ayant pour image A.

Ceci étant, l'ensemble des points de (Δ) qui sont chacun image de n points de (δ) exactement doit, nécessairement, occuper tout l'intérieur de (Δ), car ce que l'on vient de démontrer rend impossible l'existence de tout point frontière de cet ensemble à l'intérieur de (Δ).

Si tous les points appartenant à la frontière de (δ) sont des points simples de la transformation, il est facile de voir que notre conclusion s'étend au point frontière de (Δ). Dans le cas contraire il se peut que des points frontière de (Δ) soient image de plus de n points de (δ) dont certains sont alors nécessairement des points multiples (comme le montre l'exemple de la transformation : $Z = z^2$, considérée dans un cercle dont le centre est sur l'axe réel et qui passe par $z = 0$).

4. — Il suffit, comme on le voit, pour que la démonstration précédente soit valable pour les points intérieurs à (δ), que toute suite de points de (δ) tendant vers la frontière de (δ) ait pour image une suite tendant vers la frontière de (Δ) (2). Si on remplace alors (δ) par une région ouverte, $(\mathfrak{d})$, on peut énoncer la proposition suivante :

Toute transformation intérieure définie dans (r), *telle que toute suite de points de* (r) *tendant vers la frontière de* (r) *ait pour image une suite tendant vers la frontière de* (R), *transforme le même nombre de points*

(1) Il suffit, en effet, de prendre (Γ) assez petit pour satisfaire au théorème autour de chaque a.
(2) Une suite « tend vers la frontière » quand la distance des points de la suite à la frontière tend vers zéro.

de (r) (distincts ou confondus) en un point déterminé, quel que soit ce dernier point choisi dans (R). *Ce nombre de points de (r) est fini.*

Prenons par exemple pour (*r*) la sphère pointée et supposons que tout chemin allant vers le point frontière se transforme en un chemin allant vers un point fixe sur la sphère (S). La transformation fait correspondre alors à la sphère pointée (*r*), la sphère (S) pointée et chaque point de cette dernière est l'image du même nombre fini de points de (*r*).

Ceci constitue une généralisation du théorème de M. HADAMARD démontré dans une section précédente [1].

5. — Reprenons le domaine (δ) normal quelconque, pour une transformation intérieure quelconque donnée. Le théorème sur l'inversion locale montre immédiatement que les points de (δ) où l'on aurait $n > 1$, ou points de *ramification*, sont en nombre fini dans (δ) et, par conséquent leurs images sont en nombre fini. Considérons alors un arc de courbe simple quelconque (Σ) situé dans (Δ). (Σ) ne passe qu'un nombre fini de fois par une image de point de ramification car c'est un arc simple. Il en sera de même pour les points de ramification de tout arc (σ) correspondant à (Σ) dans les conditions du théorème fondamental. Il est, dès lors, aisé de voir, en tenant compte du théorème sur l'inversion locale, que *dans tout (δ) il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'arcs (σ) correspondant à (Σ)*, c'est-à-dire que la seconde partie du théorème fondamental est vraie dans un *domaine normal quelconque*. Nous avons ainsi levé, comme nous l'annoncions, les restrictions imposées d'abord à (δ) pour la démonstration de la proposition du nº 4 de la section précédente.

6. — Nous n'aurons pas à utiliser dans la suite le théorème fondamental pour les arcs (Σ) quelconques dans (R). J'ai démontré dans un travail publié il y a quelques années [2] que le théorème fondamental subsiste lorsque l'on ne considère plus des domaines normaux, mais *des arcs (Σ) quelconques situés dans* (R), *pourvu toutefois que (Σ) ne passe par aucune valeur asymptotique de la transformation.*

(1) La condition concernant les chemins allant à la frontière est ici plus restrictive. Il suffit de prendre une fonction entière dépourvue de valeurs asymptotiques finies pour se rendre compte que la condition du théorème de HADAMARD n'est plus suffisante ici.

(2) *Annales de l'Ecole NormleSupérieure*, 1928, 3e série, t. LXV, p. 361.

On appelle *valeur asymptotique* [1] d'une transformation intérieure, tout point A de (R) tel qu'il existe, dans (*r*), un chemin continu s'approchant indéfiniment de la frontière de (*r*), dont l'image s'approche indéfiniment de A.

Dans le Mémoire cité j'ai donné quelques applications de cette forme du théorème fondamental. Dans la suite nous allons établir des résultats plus généraux, que nous obtiendrons uniquement au moyen des théorèmes et propositions démontrées dans le présent travail. Je ne crois donc pas devoir m'étendre ici sur cette extension du théorème fondamental.

V. — Etude des transformations intérieures au voisinage de la frontière de la région d'existence.

1. — Considérons une région (*r*) absolument quelconque sur la sphère (*s*), et une transformation intérieure définie dans cette région.

Soit (*f*) la frontière de (*r*). Elle peut être formée d'un nombre fini ou infini d'éléments. Considérons une suite de points de (*r*) tendant vers(*f*).

Tout point limite des images des points d'une telle suite sera dit une *valeur limite de la transformation*. L'ensemble des valeurs limite est évidemment fermé ; nous le désignerons par (L).

L'ensemble (L) contient la frontière de (R). Il détermine, sur (S), un nombre fini ou une infinité dénombrable de régions : (R_1), (R_2)... (R_n).... Certaines de ces régions peuvent être hors de (R) : elles sont formées par les valeurs *non prises* par la transformation.

Je dis que *la transformation prend le même nombre de fois toutes les valeurs représentées par les points d'une région déterminée quelconque des* $(R_i)(i = 1,2...)$; c'est-à-dire qu'il y a toujours le même nombre de points dans (*r*) ayant pour image l'un quelconque des points de la région choisie (R_i).

La démonstration donnée plus haut (*IV*, nº 3) d'une proposition généralisant le théorème de M. HADAMARD s'applique en effet ici sans modification, quoique (R_i) ne soit pas, en général, l'image de la région (*r*) toute entière : cette condition n'intervient, en effet, à aucun moment dans la démonstration, et les conclusions du paragraphe 4

[1] Nous appellerons souvent dans la suite *valeurs de la transformation* les points de (R).

subsistent. Dans chacune des régions (R_i) la transformation a donc un *degré* déterminé et fini.

2. — Sur (L) il y au contraire, en général, des valeurs prises un nombre infini de fois, des valeurs prises un nombre fini de fois (qui peut varier) et des valeurs que la transformation ne prend pas du tout. Sur (L) se trouvent, en particulier, les valeurs asymptotiques de la transformation, s'il en existe. Nous allons voir comment se comportent ces différentes espèces de valeurs.

3. — Considérons un domaine (Δ) quelconque situé dans (R) et un point a quelconque de (r) dont l'image A est dans (R). Nous allons démontrer ceci :

THÉORÈME. *Si l'image du domaine maximum* (Δ, a) *ne couvre pas tout l'intérieur de* (Δ), *il y a nécessairement une valeur asymptotique au moins dans l'intérieur de* (Δ).

Soit (D) l'image [1] de (Δ, a) Il y a un point intérieur dans (Δ) qui est extérieur à (D). Il y a donc un point B intérieur à (Δ) qui est un point frontière de (D). Je dis que B ne fait pas partie de (D). En effet, B, ne peut provenir d'un point intérieur de (Δ, a), car ceci est contraire à la définition des transformations intérieures ; si, d'autre part, B provenait d'un point frontière de (Δ, a) ce dernier ne serait pas un domaine maximum de (Δ).

Soit (Δ') un cercle de centre B et compris à l'intérieur de (Δ). Soit A′ un point qui appartient à l'intérieur de (D) et qui est, en même temps intérieur à (Δ'). Il y a, dans (Δ, a), au moins un point a' dont l'image est A′. Le domaine (Δ', a') est compris dans (Δ, a) et son image qui laisse B à découvert, ne peut couvrir tout l'intérieur de (Δ'). Soit (D′) l'image de (Δ', a'). Soit B′ un point frontière de (D′) intérieur à (Δ'). Soit de même (Δ'') un cercle de centre B′ et compris à l'intérieur de (Δ'). On peut répéter sur (Δ'), (Δ', a'), D′ et B′ le raisonnement, fait pour les éléments désignés par les mêmes symboles non accentués ci-dessus.

En continuant ainsi indéfiniment et en prenant chaque fois le cercle ($\Delta^{(n)}$) de façon qu'il soit entièrement intérieur à ($\Delta^{(n-1)}$) et que les rayons des ($\Delta^{(n)}$) tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, on obtiendra, les domaines : (Δ, a), (Δ', a'), (Δ'', a'')... compris chacun dans le précédent, domaines

(1) Certains points de (Δ, a) sont sur la frontière de (r). (D) est l'ensemble des images des points de (Δ, a) qui sont dans (r).

maxima de (Δ), (Δ'), (Δ'')... respectivement. Comme ils ne couvrent pas ces derniers, nos domaines maxima ne sont pas normaux et, par conséquent, chacun a des points sur la frontière de (r) [1].

Considérons maintenant un chemin continu dans (r) qui commence dans (Δ, a), passe dans $(\Delta' a')$ et n'en sort plus, puis dans (Δ'', a'') sans en sortir et ainsi de suite, indéfiniment.

Tout point limite d'un tel chemin doit se trouver dans tous les $(\Delta^{(i)}, a^{(i)})$ $(i = 1, 2, 3,...)$; or, l'ensemble commun à tous ces domaines emboîtés est un continu (k) (ou un point unique), qui d'ailleurs doit nécessairement, contenir un point de la frontière de (r). D'autre part, l'image de tout point de (k) qui se trouve dans (r) est le point commun (nécessairement unique) de tous les $(\Delta^{(i)})$. Mais si (k) possède des points dans (r) il y a certainement tout un sous-continu de (k) dans (r). Comme un continu ne peut avoir pour image un point unique, tous les points de (k) sont donc sur la frontière de (r). Il en est donc de même des points limite de notre chemin et celui-ci tend vers la frontière de (r) tandis que son image tend vers un point déterminé intérieur à (Δ). Ce point représente une valeur asymptotique pour la transformation donnée.

4. — Comme conséquence du théorème que l'on vient d'établir nous allons montrer que :

Toute valeur A *faisant partie de* (L) *qui n'est prise qu'un nombre fini de fois par la transformation est une valeur asymptotique ou une limite de valeurs asymptotiques.*

Soient a_i $(i = 1, 2, 3,...)$ les points de (r) dont l'image est A. Soit (Γ) un cercle de centre A assez petit pour que tous les domaines (Γ, a_i) soient normaux. Plusieurs de ces domaines peuvent d'ailleurs se confondre, mais dans chacun d'eux toute valeur prise l'est un même nombre de fois. Or A est valeur limite de la transformation ; il y a donc hors des domaines (Γ, a_i), un point b dont l'image est dans (Γ). Le domaine maximum (Γ, b) ne peut avoir de point intérieur commun avec l'un des (Γ, a_i), car alors il devrait se confondre avec celui-ci, ce qui est impossible puisque b est choisi hors de tous les (Γ, a_i). Il est donc clair que (Γ, b) ne peut contenir aucun point ayant A pour image. Le théorème du paragraphe précédent montre alors qu'il y a dans (Γ) au moins

(1) On voit donc que les hypothèses ne peuvent être réalisées si (r) occupe toute la sphère (s).

une valeur asymptotique. Si A n'est pas lui-même une valeur asymptotique, comme (Γ) peut être pris aussi petit que l'on voudra, on voit que A doit être une limite de valeurs asymptotiques.

Les valeurs limites des valeurs asymptotiques ne sont pas, pour toute transformation intérieure, des valeurs asymptotiques.

Prenons par exemple la transformation :

$$X = e^x \cos y, \qquad Y = e^x \sin y,$$

dans la région (r) du plan (x, y) définie par les inégalités :

$$|y| < 1 + \pi + \sin \frac{1}{x}, \qquad \text{pour} \qquad |x| \leq \frac{1}{\pi}.$$

et

$$y = \text{quelconque}, \qquad \text{pour } |x| > \frac{1}{\pi}.$$

Sauf le point : $(X = -1, Y = 0)$, les points de (R) qui satisfont à : $X^2 + Y^2 = 1$, représentent des valeurs de la transformation que celle-ci prend un nombre fini de fois, mais qui ne sont que limites de valeurs asymptotiques sans être elles-mêmes de telles valeurs.

5. — *Les valeurs limites d'une transformation intérieure qui sont prises par celles-ci un nombre fini de fois forment un ensemble de première catégorie sur la sphère* (S) (1).

L'ensemble (L) des valeurs limites étant fermé et l'ensemble des valeurs prises au plus n fois l'étant également, il existerait, si la proposition énoncée n'était pas exacte, un nombre entier positif n tel que l'ensemble des valeurs limites prises n fois au plus, contiendrait un cercle. Supposons que n soit le plus petit nombre satisfaisant à cette condition et soit (C) le cercle en question. Dans (C), qui ne contient que des valeurs limites de la transformation prises n fois au plus, il y en a une, à savoir A, prise exactement n fois. Soit (Γ) un cercle de centre A compris dans (C) et à l'intérieur duquel toute valeur est prise n fois exactement. Si (Γ) est assez petit, les domaines (Γ, a_i) $(i = 1, 2 .. n)$ sont tous normaux, (donc à l'intérieur de (r) avec leurs frontières) et contiennent ensemble, tous les points de (r) qui ont leurs

(1) Rappelons qu'un *ensemble de première catégorie sur* (*S*) est un ensemble qui est la somme d'une infinité dénombrable (ou d'un nombre fini) d'ensembles non denses sur (S). Uu ensemple est *non dense sur* (S) si, dans toute région de (S), il y en a une autre dépourvue de points de l'ensemble.

images dans (Γ). Mais, d'autre part, A étant valeur limite, il existe dans (r), un point dont l'image est dans (Γ), aussi voisin que l'on voudra de la frontière de cette région, donc hors de (Γ, a_{i_i}). Il est donc impossible que le nombre n existe et notre proposition est établie.

On en conclut que, si (L) est un ensemble dense, une infinité de valeurs sont prises un nombre infini de fois. On peut même dire dans ce cas que : *en général* une valeur limite est prise un nombre infini de fois, si on considère qu'en Topologie les ensembles de première catégorie doivent jouer le rôle que les ensembles de mesure nulle jouent dans les théories métriques.

6. — Nous arrêterons là l'étude des transformations intérieures générales. Comme on le voit les valeurs qu'elles prennent se partagent entre plusieurs classes ayant chacune des propriétés différentes

Ce que nous venons de faire est une étude topologique des fonctions analytiques uniformes d'une variable dans une région quelconque de leur domaine d'existence qui peut être, en particulier, ce domaine lui-même. Mais il est loisible de remplacer la sphère (s) par une surface de RIEMANN et ces considérations s'apppliquent alors aux fonctions multiformes.

Nous allons nous occuper dans la dernière section d'une classe de transformations intérieures pour laquelle les propriétés étudiées se précisent et se rapprochent de celles des fonctions méromorphes dans tout le plan, bien que topologiquement la classe envisagée soit plus générale que ces fonctions.

VI. — Transformations possédant la propriété d'Iversen. Conclusions.

1. — Dans sa thèse (1) M. IVERSEN a démontré une propriété des fonctions méromorphes dans tout le plan, qui ne suffit pas à les caractériser, mais dont on peut tirer un certain nombre de conclusions importantes.

Etant donnée une fonction méromorphe dans tout le plan $Z = f(z)$ et un cercle (Γ) quelconque de centre A_0 dans le plan (Z), soit A un point intérieur à (Γ) qui représente une valeur prise en a par la fonction.

(1) *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsingfors (1914), p. 18.

M. Iversen a démontré que l'on peut faire le prolongement de l'élément (A, a) de la fonction inverse de $f(z)$ suivant un certain chemin intérieur à (Γ) et tendant vers A, sans être arrêté avant A_0. M. Valiron a donné de ce fait une démonstration très simple (1) que nous allons rappeler, en nous servant du langage employé plus haut.

On peut, naturellement, supposer le point A_0 à l'infini ; le cercle (Γ) est alors remplacé par l'*extérieur* d'un cercle de centre origine que nous appellerons (C). Soit (Δ) le domaine formé par la région extérieure à (C) plus la circonférence de (C). Le domaine maximum (Δ, a) ne peut être borné, car sur sa frontière on a : $|f(z)| = \rho$, ρ étant le rayon de (C). Or, a est dans (Δ, a) et on a, par hypothèse, $|f(a)| > \rho$.

Nous allons montrer, que $|f(z)|$ *ne peut être bornée dans* (Δ, a).

Supposons que l'on ait $f(z) < M$ dans (Δ, a). Soit α un point extérieur à (Δ, a) et λ la borne inférieure de $|z - \alpha|$ quand z est dans (Δ, a).

Le nombre μ étant positif quelconque, la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{\mu}}$$

est uniforme et holomorphe à l'intérieur de (Δ, a) et sur toute la frontière de ce domaine à distance finie. Considérons un cercle de centre origine et de rayon assez grand pour que sur la partie de sa circonférence qui est dans (Δ, a) on ait $|\varphi(z)| < \frac{\rho}{\lambda^{\mu}}$ et que a soit compris dans ce cercle. Dans le domaine borné qui comprend a à l'intérieur et qui est limité par des portions de la frontière de (Δ, a) et de la circonférence de ce cercle, on a évidemment

$$|\varphi(z)| < \frac{\rho}{\lambda^{\mu}},$$

car cette quantité est supérieure à $|\varphi(z)|$ sur toute la frontière de ce domaine. On a donc, en particulier

$$|f(a)| < \rho \cdot \frac{|a - \alpha|^{\mu}}{\lambda^{\mu}}.$$

Ceci est vrai quel que soit μ positif. En faisant tendre μ vers zéro on voit que l'on tombe sur une contradiction puisque, par hypothèse, $|f(a)| > \rho$.

La proposition énoncée se déduit immédiatement de ce résultat. En

(1) *Comptes Rendus*, t. 166 (1918).

effet, on peut par un chemin continu aller de a, en restant dans (Δ, a), en un point a' où l'on a $|f(a')| > 2\rho$. Remplaçons alors (C) par (C') de même centre et de rayon 2ρ. De a' on pourra aller en un autre point a'', par un chemin restant dans (Δ', a'), et avoir $|f(a'')| > 3\rho$. En continuant ainsi, indéfiniment, on voit que le chemin qui, dans le plan (Z), est l'image du chemin total obtenu dans (z), tend vers le point à l'infini ; le prolongement de la fonction inverse peut donc se poursuivre jusqu'à ce point.

2. — De cette proposition on déduit immédiatement la suivante (Iversen, *loc. cit.* p. 24) : étant donné un chemin quelconque (Σ) dans le plan (Z), ayant comme extrémités A et B, et un point a dans le plan (z) tel que $f(a) = A$, on peut toujours faire le prolongement de $f(z)$ à partir de a le long d'un chemin tel que son image reste dans un voisinage arbitrairement donné de (Σ) et que son extrémité tende vers B.

Cette propriété appartient encore à une classe étendue de fonctions, méromorphes dans une région déterminée du plan seulement. Nous allons la prendre pour définition d'une classe de transformations intérieures.

3. — Une transformation intérieure définie dans une région quelconque (r) de la sphère (s), sera dite une *transformation* (I) si elle satisfait à la condition suivante (analogue à la propriété que l'on vient d'énoncer pour les fonctions méromorphes) : étant donné un chemin (Σ) quelconque dans (S), d'extrémités A et B, et un point a dans (r) ayant pour image A, il existe un chemin, dans (r), partant de a et tel que lorsqu'un point parcourt ce chemin, l'image de ce point reste dans un voisinage arbitrairement donné de (Σ) et tend vers B [1].

4. — Considérons une région (R_1) déterminée, choisie parmi les (R_i) que nous avons définies dans la section précédente ; soit n le degré de la transformation dans (R_i), au sens du paragraphe I de la même section.

Soit A un point de (S) satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *A est point frontière de (R_1) accessible de l'intérieur de cette région.*

2° *A fait partie d'un continu sous ensemble de (L).*

(1) On peut encore dire qu'il existe toujours un chemin dans (r) dont l'image reste infiniment voisine de (Σ), l'image de l'extrémité distincte de a de ce chemin étant infiniment voisine de B.

Dans ces conditions nous allons démontrer que l'*on peut trouver dans (L), un point A', aussi voisin que l'on voudra de A, satisfaisant aux mêmes conditions que A et représentant, de plus, une valeur prise dans* (r) *exactement n fois.*

Supposons que A soit pris m fois. On a, comme il est facile de le voir, $m \leqslant n$. Nous avons donc à nous occuper uniquement du cas $m < n$.

De A comme centre décrivons un cercle (Γ) assez petit pour que les domaines (Γ, a_i) ($i = 1, 2, \ldots m$) [où les a_i représentent les m points de (r) qui se transforment en A] soient tous normaux.

Soient P et Q deux points distincts, situés sur une même circonférence (C) concentrique et intérieure à (Γ). Cette circonférence aura des points dans (R_1) ; nous supposerons qu'on ait choisi P et Q parmi ceux-ci.

Il y a dans l'ensemble des (Γ, a_i) ($i = 1, 2.. m$) un nombre m de points p_i, et autant de points q_i, qui ont, respectivement, P et Q pour images. Mais dans (R_1) le degré étant plus grand que m, il y a hors des (Γ a_i) au moins un point p ayant pour image P. Soient (C_1) et (C_2) les deux arcs déterminés sur (C) par P et Q. Entourons (C) d'une couronne circulaire comprise dans (Γ) et soient (ρ_1) et (ρ_2) deux tronçons de cette couronne entourant respectivement (C_1) et (C_2). D'après la définition des transformations (I) il existe un chemin continu partant de p, situé dans (r), tel que son image reste dans (ρ_1) et tende vers Q. Ce chemin ne peut pas tendre vers la frontière de (r) car Q n'est pas une valeur asymptotique. Il ne peut pas davantage tendre vers plusieurs points limite distincts (dont l'un ou plusieurs seraient dans (r)], car cela entraînerait comme on l'a vu dans des cas analogues, l'existence d'un continu se transformant en Q ce qui est impossible. Il faut donc que ce chemin tende vers un point bien déterminé q de (r). Le point q, comme p, est hors des (Γ, a_i).

On peut reprendre le même raisonnement en remplaçant p par q (ρ_1) par (ρ_2) et Q par P. On aura ainsi, dans (r), un chemin total partant de p et aboutissant en un point p', qui a la même image P. L'image de ce chemin restera dans la couronne circulaire ; il partira de P, en restant dans (ρ_1), aboutira en Q, puis partira de Q, en restant dans (ρ_2), pour aboutir en P. Il est certain qu'elle rencontrera au moins un point A' faisant partie de (L) et accessible en partant de (R_1), puisque par A passe un continu faisant partie de (L) et que (Γ) peut, d'autre part, être pris aussi petit que l'on voudra.

Le point A' par lequel passe le même continu que par A satisfait donc aux mêmes conditions que A et, représente comme tous les points rencontrés par l'image du chemin qui va de p à p', une valeur prise dans le domaine maximum (Γ, p). Celui-ci n'a de point intérieur commun avec aucun des (Γ, a_i), puisque p est hors de tous les (Γ, a_i). Toutes ces valeurs, et en particulier A', sont donc prises *plus* de m fois. Or ceci suffit pour affirmer que l'on peut trouver dans (Γ) un point tel que A' et représentant une valeur prise n fois, car il n'y a qu'à répéter l'opération [qui, chaque fois, fait gagner une unité] un nombre suffisant de fois.

5. — Le théorème qu'on vient de démontrer conduit à une conséquence qui montre bien quelle simplification représente la notion de transformation (I) par rapport aux transformations intérieures générales : *dans une transformation (I)* la condition pour que l'ensemble (L) contienne un continu est que (L) couvre tout le domaine (S).

Supposons que (R_1) existe. S'il y avait, dans (L), un continu on pourrait choisir sur la frontière de (R_1), un point A, accessible à partir de (R_1), faisant partie de (L) et représentant une valeur prise n fois exactement dans (r).

Reprenons le cercle (Γ) dont les domaines maxima (Γ, a_i) $(i = 1, 2 \ldots n)$ sont tous normaux. Comme A est une valeur limite, il existe, hors des (Γ, a_i), un point b dont l'image est dans (Γ). Le domaine maxima (Γ, b) ne peut contenir des points qui se transforment en un point P quelconque situé à la fois dans (Γ) et dans (R_1). Mais il existe un chemin dans (r) partant de b, tel que son image reste dans (Γ) et tende vers P. Ce chemin reste dans (Γ, b) ; il ne peut donc tendre vers un point de (r)bien déterminé, car ce point devrait avoir pour image P. Comme, d'autre part, P ne peut être image d'un continu, il est clair que ce chemin devrait tendre vers la frontière de (r). Mais alors P serait asymptotique ce qui est impossible puisqu'il est dans (R_1).

6. — En particulier, si (r) est par exemple la sphère pointée, l'ensemble (L) doit évidemment être un continu où un point unique [1]. Ce que l'on vient d'établir montre alors que dans le cas d'une transformation (I) l'ensemble (L) couvre toute la sphère (S) (c'est-à-dire les (R_i) n'existent pas), ou bien se réduit à un point unique.

(1) D'une manière générale si (r) est d'ordre de connexion k l'ensemble (L) est formé de k éléments au plus.

Dans ce dernier cas il n'y a qu'une seule région (R_i) et la transformation est topologiquement équivalente à une fonction rationnelle. Dans le premier cas la transformation satisfait au théorème de WEIERSTRASS sur les valeurs d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel qui est ici le point frontière de (r).

7. — Le théorème démontré au paragraphes 3 de la section précédente se précise pour les transformations (I) : Si l'image de (Δ, a) laisse à l'intérieur de (Δ) un point à découvert, *ce point représente une valeur asymptotique de la transformation.* Il suffit de reprendre la démonstration pour s'en rendre compte.

De même la première conséquence que nous en avons déduite pour les transformations intérieures quelconques devient ici :

I. *Si (L) contient un continu, toute valeur prise un nombre fini de fois est une valeur asymptotique* (on a vu, d'autre part, que dans ce cas (I_r) couvre toute la sphère (S)). De même :

II. *Si (I_r) est ponctuel, la transformation possède un degré unique n (fini et déterminé) ; toute valeur prise moins de n fois est une valeur asymptotique.*

On voit immédiatement, en effet, que dans ce dernier cas il n'y a qu'une seule région (R_i). Le reste de la proposition II résulte du même raisonnement que I.

8. — Occupons nous, pour terminer, de l'ensemble des valeurs qu'une transformation (I) prend un nombre fini de fois dans le cas I.

Je dis que *dans ce cas l'ensemble (E_n) des valeurs prises au plus n fois ne peut contenir un continu quel que soit n, pourvu toutefois qu'il soit fini.*

Un raisonnement presque identique à celui qui a servi au paragraphe 4 conduit facilement à cette conclusion. En effet, si la proposition n'était pas exacte il y aurait un (E_n) déterminé contenant un continu. Je suppose que (E_n) est celui de ces ensembles pour lequel n a la plus petite valeur. Dans le raisonnement rappelé il suffira de prendre pour A une valeur de (E_n) prise n fois et située sur un continu de (E_n) et pour P une valeur quelconque de (C) prise *plus* de n fois, Q pouvant être quelconque dans (C). Il y aura deux chemins partant de p et tels que leurs images restent dans (ρ_1) et (ρ_2), respectivement, et tendent vers Q. Ces chemins peuvent ici tendre vers la frontière de (r), mais leurs images n'en formeront pas moins une courbe fermée entourant A et situé dans (Γ). Il existe nécessairement un point d'intersection B de cette courbe avec (E_n) car celui-ci est supposé contenir un continu passant par A et (Γ) et arbitrairement petit. Le point B devrait donc représenter une valeur prise au moins $n + 1$ fois. Mais, puisqu'il est sur (E_n) cela est impossible.

Dans le cas d'une transformation (I) l'ensemble de première catégorie somme des (E_n) est donc ponctuel aussi.

9. — Les transformations (I) sont équivalentes, topologiquement, à une classe beaucoup plus vaste de fonctions que les fonctions méromorphes dans tout le plan.

Même si l'on ne considérait que des transformations (I) définies dans une région topologiquement équivalente au plan, c'est-à-dire simplement connexe, on resterait encore bien loin de la classe que forment les transformations topologiquement équivalentes aux fonctions méromorphes dans le plan entier. Si cette région est la sphère entière, il n'est même pas besoin d'ajouter la condition qui caractérise les transformations (I) pour obtenir la classe topologique correspondante aux fonctions rationnelles. Mais entre les fonctions méromorphes dans le plan entier et les fonctions méromorphes dans un cercle, la distinction *topologique* ne peut être la nature du domaine de définition, comme dans la théorie des fonctions : le cercle et le plan entier sont, en effet, topologiquement équivalents. C'est donc ailleurs qu'il faut chercher la caractéristique topologique des fonctions dans tout le plan méromorphe.

Manuscrit reçu le 10 juin 1931.