ANNALES DE L'I. H. P.

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet

Annales de l'I. H. P., tome 2, nº 3 (1932), p. 169-232

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_3_169_0>

Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

Avant-Propos

H. POINCARÉ a exposé la méthode dite du *balayage* dans un important Mémoire qui a paru dans l'*American Journal of Mathematics* (t. XIII, 1890) et a pour titre : *Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*. POINCARÉ considère le problème dans l'espace et le potentiel Newtonien. Sa méthode a été étendue au plan par A. PARAF (Thèse, *Ann. de l'Univ. de Toulouse*, 1892) et cette extension a été reproduite dans les trois éditions du *Traité d'Analyse* d'É. PICARD, ce qui l'a rendu classique. Rien d'essentiel n'a été ajouté au premier Mémoire de POINCARÉ. Il semble bien cependant que l'illustre mathématicien n'ait pas attaché à sa méthode l'importance qu'elle méritait et qu'il n'en ait pas reconnu la puissance. Il ne s'occupe, en effet, que des potentiels et néglige les masses. Ni lui ni ses successeurs ne se sont demandés ce que deviennent les masses transportées par le balayage. Nous nous proposons ici de montrer que la considération de ces masses conduit à des procédés de démonstration plus satisfaisants que ceux utilisés par POINCARÉ, parce qu'ils sont à la fois plus généraux et plus autonomes. Il en résulte une méthode de démonstration systématique qui se suffit à elle-même et s'applique dans des conditions très diverses. Dans la solution du problème de

DIRICHLET, la méthode du balayage ainsi entendue permet d'éliminer complètement la fonction de GREEN des raisonnements. Elle lui substitue une fonction qui mesure des masses sur les frontières et dont elle établit directement l'existence, même dans tous les cas où celle de GREEN cesse d'exister. A vrai dire, dans le cas du plan, cette fonction s'était déjà présentée naturellement comme associée harmonique de celle de GREEN, mais personne n'avait jamais raisonné directement sur elle ni montré les avantages que comporte son interprétation physique. La méthode du balayage conduit à des procédés de démonstration nouveaux dont les exemples que nous exposons feront apprécier, pensons-nous, le caractère intuitif, la simplicité et la souplesse.

La considération directe des masses présente encore des avantages particuliers dans l'étude de la *capacité*. Cette notion, récemment introduite et approfondie par MM. WIENER, KELLOG, BOULIGAND et VASILESCO soulève d'importants problèmes. La considération des masses rend à la notion de capacité la signification physique naturelle devant laquelle ces savants géomètres paraissent avoir reculé. C'est ce que nous montrons dans une dernière Note ajoutée au Mémoire ; nous souhaitons qu'elle puisse être utile, mais nous n'en avons point, quant à nous, tiré la solution des difficultés rencontrées antérieurement.

Le sujet du Mémoire a fait l'objet de quatre conférences à l'Institut Poincaré, les 14, 16, 18 et 20 avril 1931 (1). Nous adressons à la Direction de cet important Établissement scientifique qui a bien voulu accueillir nos recherches, l'expression de nos bien vifs remerciements.

Le 15 juin 1931.

(1) Un résumé succinct des résultats avait été publié antérieurement dans les *Comptes rendus*: *Sur quelques applications de la méthode du balayage de Poincaré et sur le problème de Dirichlet* (*C. R.* t. 192, 16 mars 1931, p. 651-653).

PREMIÈRE PARTIE

LE PROBLÈME DANS LE PLAN

§ 1. — Définition du potentiel et balayage du cercle.

1. — DISTRIBUTION DES MASSES ET DÉFINITION DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE. — Nous considérons dans le plan un domaine A sur lequel on a réparti une masse agissante, que nous supposons positive pour préciser les énoncés. La répartition peut être quelconque, superficielle, linéaire ou ponctuelle. Plus généralement, on peut considérer la masse comme une fonction complètement additive d'ensemble e [1]. On désigne par $\mu(e)$ la masse portée par l'ensemble e, par $d\mu(e)$ celle portée par un ensemble de de diamètre infiniment petit. Pour définir le potentiel dû à la masse répartie sur une aire A, on décompose cette aire en une infinité d'ensembles de de diamètre infiniment petit, sans point commun deux à deux. Si l'on désigne par r la distance du point potentié P à l'élément de, le potentiel au point P s'exprime par *l'intégrale de* STIELTJÈS

$$U(P) = \int_A \log \frac{1}{r} \, d\mu(e).$$

Tant que le point P *est à l'écart des masses, le potentiel est* $\left(\textit{avec} \log \frac{1}{r}\right)$ *une fonction continue du point* P.

Si le point P *varie à l'intérieur des masses (supposées positives), le potentiel est une fonction semi-continue inférieurement.*

Cette dernière propriété se vérifie aisément. Soit P_0 un point où $U(P_0)$ a une valeur finie ; on peut limiter une portion A′ de A excluant le point P_0 et suffisamment voisine de A pour que $U(P_0)$ soit aussi voisin qu'on veut de l'intégrale sur A′. Mais l'intégrale sur A′ est fonction continue de P et inférieure à U(P) ; donc, P tendant vers P_0, on

(1) C'est ce qui a été fait par G. C. Evans et E. R. C. Miles. Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundary value problem. *Procedings of the National Acad. of Sciences.* Vol. 15, n° 2, p. 102-108, 1929.

a *lim* $U(P) \geqq U(P_0)$. Si $U(P_0)$ était infini, la limite de $U(P)$ le serait aussi. Donc $U(P)$ est semi-continue inférieurement au point P_0.

Le potentiel engendré par une masse linéaire se définit d'une manière analogue par une *intégrale de* STIELTJÈS étendue à la ligne et jouit des mêmes propriétés.

Il doit être entendu une fois pour toutes que le potentiel $U(P)$ est supposé continu en tous les points du contour de l'aire A.

2. — BALAYAGE DU CERCLE. — Le principe du balayage du cercle résulte d'une interprétation de l'intégrale de POISSON (1). Si une masse μ est localisée en un point P à l'intérieur d'un cercle, on peut transporter cette masse sur la circonférence et l'étendre suivant une couche telle que le potentiel ne soit pas changé à l'extérieur. Mais (les masses étant positives) il sera diminué à l'intérieur. Le principe subsiste quelle que soit la distribution des masses à l'intérieur du cercle, car on peut balayer tous les éléments localisés $d\mu(e)$ successivement et faire la somme des couches qui en résultent. On obtiendra une distribution de la masse sur la circonférence, telle que le potentiel initial sera conservé à l'extérieur et diminué à l'intérieur. Le raisonnement ne s'applique pas en un point de la circonférence elle-même (où r s'annule), mais il résulte des démonstrations ultérieures (nº 7) que le potentiel initial sera conservé sur la circonférence s'il était continu au début.

Nous étendrons le principe du balayage d'abord à des aires très particulières susceptibles d'être recouvertes par un nombre limité de cercles, ensuite à des aires plus générales dont les contours vérifient encore certaines restrictions, enfin à des aires bornées par des lignes de JORDAN. Chemin faisant, nous donnerons la solution générale du problème de DIRICHLET.

§ 2. — Balayage d'une aire somme de cercles.

3. — DÉFINITIONS DE L'AIRE A ET DU BALAYAGE. — Nous considérons d'abord une aire A formée par l'empilement d'un nombre limité k de cercles $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ se coupant entre eux. Cette aire A, d'un seul tenant, mais à connexion simple ou multiple, comprend donc

(1) Voir, par exemple, le traité d'Analyse de E. PICARD, t. II, chap. IV.

tous les points qui appartiennent à l'un au moins des cercles précédents, de sorte qu'elle peut être entièrement recouverte par eux. Ses frontières sont formées d'arcs de cercles se joignant bout à bout sous un angle et tournant leur convexité vers l'extérieur. A l'intérieur de l'aire A, tout point d'intersection de deux cercles γ est supposé intérieur à un troisième. Si un point d'intersection ne vérifiait pas cette condition, il suffirait de mener un cercle supplémentaire de ce point comme centre pour réaliser la condition en défaut.

Le balayage de l'aire A est une opération poussée à la limite. Cette opération consiste à balayer successivement les k cercles $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$, dans l'ordre des indices et à recommencer indéfiniment cette suite de balayages dans le même ordre. Le potentiel ne varie pas hors de A ni sur sa frontière. Il est constant ou décroissant en tout point intérieur, mais comme il ne peut décroître indéfiniment, il tend nécessairement vers une limite déterminée.

Le balayage de l'aire A donne lieu aux théorèmes suivants :

4. — THÉORÈME. — *La masse totale contenue dans l'aire* A *tend vers zéro.*

Dès que tous les cercles γ ont été balayés au moins une fois, il ne reste plus dans l'aire A que des masses linéaires réparties sur les circonférences et le potentiel a partout une valeur finie. Nous allons montrer que, à l'intérieur de A, la masse portée par un élément d'arc σ d'une circonférence γ_r, élément situé à distance finie de toute autre circonférence γ, a pour limite zéro.

La masse portée par σ ne varie que par le balayage du cercle γ_r lui-même, ce qui l'augmente éventuellement, ou par le balayage d'un cercle contenant σ dans son intérieur, ce qui la supprime. Supposons qu'à un stade donné des opérations, cette masse surpasse le nombre ε positif donné. Soit γ_s le premier cercle contenant σ atteint par un balayage subséquent. Ce balayage de γ_s écarte toutes les masses du centre de ce cercle, et le potentiel diminue en ce point du chef de chaque masse déplacée. Il diminue donc au moins de la variation produite par le recul de la masse portée par σ. L'écart du centre à cette masse croît dans un rapport supérieur à un nombre assignable $k > 1$ et $\log \frac{1}{r}$ décroît d'au moins $\varepsilon \log k$. Cette diminution ne peut se renouveler qu'un nombre limité de fois, car le potentiel n'augmente jamais et (les masses restant à distance finie) il ne peut décroître indéfiniment. Il faut donc que la masse portée par σ devienne définitivement inférieure à tout nombre positif donné ε et, par conséquent, elle tend vers zéro.

Ce raisonnement prouve que les masses tendent vers zéro sur tous les arcs des circonférences γ qui sont à distance finie des points d'intersection de ces circonférences entre elles. Il ne s'applique plus aux masses qui s'accumuleraient autour de ces points, à l'intérieur de A ou sur le bord. Mais cette accumulation est impossible, car elle ferait croître indéfiniment le potentiel aux points d'accumulation, ce qui n'est pas.

Ainsi, comme conclusion du balayage de l'aire A, toute la masse intérieure m est transportée sur la frontière. Dans cette nouvelle situation, elle détermine un potentiel V(P) qui, comme nous allons le montrer, est bien déterminé et peut s'exprimer par une intégrale de contour.

5. — Distributions successives des masses sur les frontières et potentiels correspondants. — Supposons d'abord, pour simplifier, que l'aire A soit bornée par un contour simple C. Nous écarterons cette restriction après coup.

Soit s l'arc du contour C depuis une origine fixe M_0 jusqu'à un point M(s) variable, de sorte que s varie de O à S quand M décrit tout le contour. La masse portée par l'élément situé ds est constante ou croissante au cours du balayage, car une masse amenée sur ds y est définitivement fixée. Après le balayage de n cercles, la masse portée par l'arc s est une fonction $\mu_n(s)$ croissante avec s et avec n. Le potentiel dû à la distribution $\mu_n(s)$ sur le contour C s'exprime par l'intégrale de Stieltjès

$$V_n(P) = \int_0^S \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s),$$

où r est la distance du point variable M(s) au point P.

Nous avons considéré ici $\mu_n(s)$ comme une fonction du point M(s). On pourrait aussi bien considérer $\mu_n(s)$ comme une fonction de l'arc s en se plaçant au point de vue des fonctions d'ensemble. Alors $d\mu_n(s)$ est la masse portée par l'arc situé ds et l'intégrale précédente peut aussi bien s'écrire

$$V_n(P) = \int_C \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s).$$

6. — THÉORÈME. — *Les fonctions* $\mu_n(s)$ *tendent en croissant avec* n *vers une fonction continue* $\mu(s)$ *et, en tout point* P *situé à distance finie du contour* C, *le potentiel limite est défini par l'intégrale de* STIELTJÈS

$$V(P) = \int_0^S \log \frac{1}{r}\, d\mu(s).$$

D'abord, et ceci assure l'existence de cette intégrale, la fonction $\mu(s)$ est continue en chaque point du contour C. En effet, si $\mu(s)$ croissait brusquement au passage d'un point $M(s)$ du contour, le potentiel dû à cette distribution serait infini au point M où serait localisée une masse finie. Dans ce cas, celui qui est dû à la distribution $\mu_n(s)$ croîtrait indéfiniment avec n au point M, ce qui n'est pas le cas, les potentiels restant finis.

En second lieu, je dis que V(P) est la limite de $V_n(P)$. En effet, le point P n'est pas sur le contour C et sa distance à ce contour admet un minimum $r_1 > 0$; donc $\log r$ reste de module inférieur à un nombre assignable δ dans la formule

$$V(P) - V_n(P) = \int_0^S \log \frac{1}{r}\, d(\mu - \mu_n).$$

Or $\mu - \mu_n$ est une fonction non décroissante de s et sa valeur finale est $m - m_n$ en posant $m_n = \mu_n(S)$. Par conséquent, la différence $V - V_n$ est de module inférieur à $\delta(m - m_n)$ et elle tend vers zéro avec $m - m_n$.

Enfin je dis que le potentiel limite est bien égal à la limite de $V_n(P)$. En effet, la masse qui n'intervient pas dans le calcul de $V_n(P)$ tend vers zéro. Le potentiel qui lui est dû est donc infiniment petit en tout point P extérieur à l'aire A. En un point P de l'intérieur de A., le potentiel dû à la masse totale et $V_n(P)$ ont tous deux une limite, et cette limite est nécessairement la même, car la différence entre ce potentiel et $V_n(P)$ est infiniment petite, et cela pour la même raison qu'à l'extérieur, après chaque balayage du cercle γ qui contient le point P.

7. — THÉORÈME. — *Le potentiel limite s'exprime par l'intégrale* V(P) *même sur le contour* C *et cette intégrale définit une fonction continue du point* P *dans tout le plan. Cette fonction est égale au potentiel initial* U(P) *à l'extérieur de l'aire A et sur son contour.* A *l'intérieur, elle définit la fonction harmonique prenant les valeurs* U *sur le contour.*

La fonction V(P) est égale à la fonction continue U(P) en dehors de l'aire A, puisque V(P) est la limite des fonctions V_n qui ne diffèrent de U dans ce domaine que par un potentiel infiniment petit. Il reste donc à démontrer que l'intégrale V(P) est encore continue à travers le contour C, donc en tout point Q_0 situé sur ce contour.

De Q_0 comme centre traçons un petit cercle γ. Soit σ la portion du contour comprise dans γ et $C - \sigma$ le reste. Le potentiel provenant de $C - \sigma$ est continu au point Q_0 lequel est séparé de $C - \sigma$. Il suffit donc de démontrer que le potentiel dû à σ est infiniment petit avec le rayon du cercle γ aux environs du point Q_0. Désignons ce potentiel par v.

D'abord $v(Q_0)$ est infiniment petit, car, dans le cas contraire, $V(Q_0)$ serait infini. Mais si $V(Q_0)$ était infini, V(P) le serait aussi en un point P infiniment voisin de Q_0 tandis que V(P) est égal à U hors de A.

Ensuite $v(P)$ est infiniment petit en un point P infiniment voisin de Q_0 extérieur à A. Il suffit de le démontrer pour un point P choisi à volonté sous ces conditions, car $v(P)$ est continu avec V qui est égal à U hors de A. Or, quel que soit le point Q_0 (anguleux ou non), nous pouvons tracer un angle extérieur à A ayant son sommet au point Q_0 et choisir le point P sur la bissectrice de cet angle. Dans ce cas, le rapport $r_0 : r$ des distances d'un point M de σ à Q_0 et à P respectivement reste inférieur à un nombre positif fixe k et nous avons

$$v(P) - v(Q_0) = \int_\sigma \log \frac{r_0}{r} \, d\mu < \log k \cdot \mu(\sigma).$$

Donc $v(P)$, qui est positif, est infiniment petit avec $v(Q_0)$ et $\mu(\sigma)$.

Enfin $v(P)$ sera encore infiniment petit en un point P intérieur à A. En effet, si $v(P)$ augmentait brusquement quand P pénètre dans A, le potentiel V(P) éprouverait le même accroissement brusque. Mais à l'intérieur de A, V(P) est $\leqq$ U(P) et V(P) ne pourrait que décroître brusquement quand P entre dans A. Le théorème est donc démontré (1).

8. — Aire a connexion multiple. — Si l'aire A est à connexion multiple, le balayage transporte une part de la masse sur chacun de contours et la répartition se fait suivant une loi déterminée $\mu(s)$ sur chacun d'eux. A part cela, il n'y a rien à changer aux démonstrations précédentes. Le potentiel limite V(P) sera défini par une somme d'inté-

(1) Si l'on considère le problème correspondant dans l'espace, les cercles sont remplacés par des sphères, mais la démonstration est analogue. On considère un cône au lieu d'un angle et le rapport $v(P) : v(Q_0)$ des deux potentiels au lieu de leur différence. Cette remarque sera utilisée au n° 38.

grales étendues aux divers contours de l'aire et il est toujours permis de l'écrire sous la forme

$$V(P) = \int_C \log \frac{1}{r}\, d\mu(s).$$

Cette intégrale s'étend alors au contour complet de l'aire A, que ce contour soit simple ou multiple.

9. — Théorème d'unicité. — *La distribution* $\mu(s)$ *de la masse* m *sur le contour* C *est la seule engendrant un potentiel continu à travers la courbe et égal à* U(P) *hors de l'aire* A.

En effet, si deux distributions μ et μ' engendrent un tel potentiel, la distribution $\mu - \mu'$ de masses positives et négatives engendrerait un potentiel $V - V'$ nul partout : hors de A et aussi dans A (puisque $V - V'$ serait harmonique dans A et nul sur le bord). Dans ce cas, la masse due à la distribution $\mu - \mu'$ serait nulle sur toute aire ω limitée par un contour γ, car elle est donnée par l'intégrale de Gauss

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{d(V - V')}{dn}\, d\sigma = 0\,;$$

donc les deux distributions sont identiques.

§ 3. — **Balayage d'une aire dont le contour est soumis à certaines conditions de régularité.**

10. — Définitions et hypothèses. — Nous considérons une aire A dont le ou les contours C sont soumis aux conditions de régularité suivantes : 1° le contour est rectifiable ; 2° tout point du contour peut être considéré comme le sommet d'un angle extérieur à l'aire A. Nous admettrons d'abord que l'aire A est bornée par un contour simple et nous écarterons ensuite cette restriction.

Pour effectuer le balayage de l'aire A, nous inscrivons dans celle-ci une suite illimitée d'aires de l'espèce envisagée dans le paragraphe précédent et qui embrassent successivement tous les points de A. Nous désignons ces aires par $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ et leurs contours par $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ Nous faisons tendre uniformément ces contours vers C. Pour prouver que c'est possible, il suffit de montrer qu'étant donnée une aire fermée intérieure à A et aussi voisine qu'on veut de A, on peut construire une aire A_n qui la contient. A cet effet, nous observons que de tout point intérieur à A comme centre, on peut mener un cercle contenu dans A et ayant au moins un point de sa frontière sur C. Tout point d'une aire fermée comprise dans l'intérieur de A (au sens étroit) est intérieur à l'un de ces cercles, donc cette aire (fermée) peut être entièrement recouverte par un nombre limité de cercles de la famille et ceux-ci constitueront l'aire A_n.

Considérons le contour C_n de l'aire A_n ; il y a lieu d'établir une correspondance continue et biuniforme entre les points des contours C et C_n. Celle-ci s'établit d'abord d'elle-même aux points communs aux deux contours. Dans l'intervalle de deux consécutifs de ces points a et b, nous ferons correspondre les points M de C et M′ de C_n qui partagent le segment ab de chacun des deux contours dans le même rapport. Nous pouvons alors désigner par s et s_n les arcs de C et de C_n comptés depuis une origine commune jusqu'aux points correspondants M et M′.

11. — Balayage des aires A_n et potentiels V_n qui en résultent. — Soit encore m la masse totale répartie dans l'aire A. Il est commode de supposer, pour commencer, que cette masse soit tout entière à distance finie du contour C et alors il est permis de la supposer contenue également dans toutes les aires A_n.

Le balayage de l'aire A_n, défini dans le paragraphe précédent, répartit toute la masse m sur le contour C_n suivant une loi $\mu_n(s)$, en désignant par s l'arc de C qui correspond à celui de C_n. Le potentiel qui résulte de cette répartition est égal à V(P) hors de A_n et sur C_n ; et il s'exprime par l'intégrale de Stieltjès

$$V_n(P) = \int_{Cn} \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s).$$

12. — Lemme. — *Les fonctions $\mu_n(s)$ sont uniformément continues dans leur ensemble et constituent, par conséquent, une famille normale* (au sens de M. Montel).

Il s'agit de démontrer qu'à tout nombre positif ε correspond un nombre ρ, tels que la condition $\Delta s < \rho$ entraîne

$$\Delta\mu_n(s) < \varepsilon.$$

Il suffit d'ailleurs de démontrer que cette condition est réalisée à partir d'un indice n suffisamment grand.

Le potentiel initial est borné sur le contour C qui est supposé extérieur à la masse et nous pouvons désigner par U_1 sa borne supérieure sur ce contour. Quelle que soit la répartition μ_n considérée, le potentiel dû à une portion quelconque de cette masse ne peut surpasser en valeur absolue, sur C, une borne K facile à assigner. Cette borne K sera le maximum, U_1, du potentiel initial si le diamètre de A est ≤ 1. Si ce diamètre est $R > 1$, les masses éloignées peuvent produire un potentiel négatif, mais de module $< m \log R$ et l'on peut faire $K = U_1 + m \log R$.

Dès lors la masse contenue dans un cercle de rayon 2ρ centré sur un point de C ne peut pas surpasser $K : \log \frac{1}{2\rho}$ et elle tend, par conséquent, uniformément vers zéro avec ρ.

Donnons-nous un nombre ρ satisfaisant à la condition

$$K : \log \frac{1}{2\rho} < \varepsilon.$$

Puisque le contour c_n tend uniformément vers le contour C, un segment Δs de C supposé $< \rho$ et son correspondant Δs_n à partir d'un certain indice (le même pour tous les Δs), peuvent être enfermés dans un même cercle de rayon 2ρ centré sur C. Dès lors, on aura

$$\Delta\mu_n(s) < K : \log \frac{1}{2\rho} < \varepsilon.$$

13. — THÉORÈME. — *De la suite des fonctions $\mu_n(s)$ qui est normale, on peut extraire une suite convergente* (1) $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ *ayant pour limite une fonction continue $\mu(s)$. Alors, en tout point* P *distant du contour* C, *la suite des potentiels correspondants* $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$ *converge vers un potentiel limite qui s'exprime par l'intégrale de* STIELTJÈS

$$V(P) = \int_C \log \frac{1}{r}\, d\mu(s).$$

Le point P, supposé distant du contour C, l'est aussi de tous les contours C_n à partir d'un certain indice et nous ne considérerons que ceux-là. Alors $\log \frac{1}{r}$ est une fonction uniformément continue de s sur ces contours.

(1) Voir, par exemple, MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques* (n° 14). Coll. Borel, 1927.

Prenons s comme variable d'intégration, et supposons s coissant de o à S sur le contour C. Les fonctions $V_n(P)$ et $V(P)$ auront respectivement pour expressions

$$\int_0^S \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s), \qquad \int_0^S \log \frac{1}{r}\, d\mu(s).$$

Mais r est la distance du point P au point M' de C_n dans la première intégrale, et celle au point correspondant M de C dans la seconde. La fonction $\mu(s)$ est croissante avec s comme les fonctions $\mu_n(s)$ dont elle est la limite.

Si l'on partage l'intervalle (o, S) en intervalles consécutifs infiniment petits Δs, les intégrales précédentes sont respectivement les limites des deux sommes

$$\sum \log \frac{1}{r}\, \Delta\mu_n(s), \qquad \sum \log \frac{1}{r}\, \Delta\mu(s).$$

Mais r est une fonction uniformément continue de s pour l'ensemble des contours C_n. On peut donc calculer les deux sommes précédentes avec un nombre limité mais suffisant de subdivisions Δs, assez petites pour que chacune des deux sommes diffère aussi peu qu'on le voudra de sa limite quel que soit n. Quand n tend vers l'infini, la première somme tend vers la seconde, sans difficulté puisque le nombre des termes est limité. La même conclusion s'applique aux deux intégrales puisqu'elles sont aussi voisines qu'on veut des sommes finies. Donc le théorème est établi.

14. — THÉORÈME. — *Le potentiel limite s'exprime par l'intégrale* V(P) *même sur le contour* C. *Cette fonction est continue dans tout le plan ; elle est égale au potentiel initial* U(P) *hors de* A *et sur son contour ; à l'intérieur de* A, *elle définit la fonction harmonique qui prend la valeur* U(P) *sur le contour.*

Il suffit de démontrer que V(P) est finie et déterminée sur le contour C et qu'elle reste continue à la traversée de celui-ci. Or V est la limite des fonctions V_n, toutes égales à U à l'extérieure de l'aire A et sur son contour. La démonstration se fait exactement comme dans le cas précédent (n° 7).

15. — EXTENSION AUX CAS OU LES CONTOURS SONT MULTIPLES OU INFINIMENT VOISINS DE MASSES INTÉRIEURES. — C'est uniquement pour simplifier que nous avons supposé l'aire A à contour simple. Si l'aire est à connexion multiple, on y inscrit des aires A_n du même ordre de connexion, mais cela ne change rien aux raisonnements. Le potentiel limite V(P) s'exprimera encore par la même intégrale (nº 13) étendue aux divers contours, ou tout simplement au contour C considéré comme multiple.

Nous pouvons faire disparaître aussi la condition que les masses soient à distance finie du contour C, pourvu bien entendu que le potentiel soit continu sur le contour, auquel cas les masses infiniment voisines du contour engendrent un potentiel infiniment petit à distance finie (nº 1). Les potentiels V_n ne diffèrent alors de celui qui est dû à la masse entière que par un potentiel infiniment petit et on peut négliger cette différence dans les raisonnement .

16. — Théorème d'unicité. — *La distribution de la masse m sur le contour* C *qui conserve le potentiel* U *à l'extérieur et engendre un potentiel continu dans tout le plan, est unique.*

Même démonstration que dans le cas précédent (nº 9).

Ce théorème prouve que la suite des fonctions $\mu_n(s)$ est convergente dans son ensemble et qu'elle admet une fonction limite unique $\mu(s)$.

17. — Théorème. — *Le balayage de l'aire* A *distribue la masse sur toutes les parties du contour sans exception.*

En effet, le contour C doit former une coupure entre les deux fonctions harmoniques différentes définies par V(P) à l'intérieur et à l'extérieur du contour. A l'extérieur, V(P) est égale à U(P) potentiel de masses intérieures et, par conséquent, ne peut être le prolongement de V(P) harmonique à l'intérieur. Donc la coupure ne peut disparaître en aucun point du contour et aucune portion du contour n'est dépourvue de masses.

§ 4. — Balayage d'une masse ponctuelle unité. Résolution du problème intérieur de Dirichlet sous les conditions de régularité précédentes.

18. — La fonction $\mu(s, P)$. — Le cas le plus intéressant à étudier est celui où l'aire A, bornée par un contour simple ou multiple, ne porte qu'une seule masse unité, localisée en un point géométrique P de cette aire. Le balayage répartira cette masse sur le contour suivant une loi qui dépend de la position du point P et que nous désignerons par $\mu(s, P)$.

Cette fonction de l'arc s et du point P jouit de deux propriétés fondamentales que nous allons établir.

19. — THÉORÈME. — *Pour chaque valeur du paramètre s, la fonction* $\mu(s, P)$ *est une fonction harmonique du point* P *dans l'aire ouverte* A.

Ce théorème est classique dans le cas du cercle : la densité de la masse répartie sur la circonférence est une fonction harmonique du point P. Nous allons en déduire que le théorème est général. Il suffit évidemment de prouver que $\mu(s, P)$ est harmonique dans tout cercle γ contenu dans l'aire A.

Le point P étant intérieur à γ, attribuons-lui la masse *un* et balayons ensuite le cercle γ. La répartition de la masse *un* sur la circonférence γ se fera suivant une loi qui définit la fonction $\mu_\gamma(\sigma, P)$ où σ est l'arc de la circonférence γ. Cette fonction de σ et de P est harmonique de P, pour chaque valeur de σ, quand P varie dans l'intérieur du cercle γ.

En vertu du théorème d'unicité (nº 16), la fonction $\mu(s, P)$ est indépendante de la manière de faire le balayage. On peut donc remplacer la masse localisée en P par la même masse répartie comme il est dit sur la circonférence γ.

Si l'élément situé $d\sigma$ de l'arc de circonférence γ portait la masse unité, celle-ci se répartirait sur le contour C suivant la loi $\mu(s, d\sigma)$ où $d\sigma$ joue le rôle du point P. Mais la masse portée par l'élément $d\sigma$ est $d\mu_\gamma(\sigma, P)$ au lieu de *un* ; elle se répartit proportionnellement, donc suivant la loi

$$\mu(s, d\sigma)d\mu_\gamma(\sigma, P).$$

La répartition $\mu(s, P)$ de la masse du point P sur C est la somme de toutes les répartitions analogues provenant des éléments successifs $d\sigma$ de la circonférence γ ; elle s'exprime donc par l'intégrale, étendue à la circonférence γ,

$$\mu(s, P) = \int_\gamma \mu(s, d\sigma)d\mu_\gamma(\sigma, P) = \int_\gamma \mu(s, d\sigma)\mu'_\gamma(\sigma, P)d\sigma.$$

Nous désignons par $\mu'_\gamma(\sigma, P)$ la dérivée de μ_γ par rapport à σ. C'est la densité de la couche répartie sur la circonférence γ et c'est une fonction harmonique du point P dans l'intérieur du cercle γ. Donc la fonction $\mu(s, \mathrm{P})$ définie par l'intégrale précédente est aussi une fonction harmonique du point P dans le même cercle, comme étant la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions harmoniques (Principe de HARNACK).

20. — THÉORÈME. — *Si le point* P, *intérieur à l'aire* A, *tend d'une manière quelconque vers un point donné* Q_0 *du contour* C, *la masse répartie suivant la loi* $\mu(s, \mathrm{P})$ *tend vers zéro sur toute portion du contour* C *à distance finie du point* Q_0 *et, par conséquent, vers l'unité sur tout arc de* C *enfermant ce point.*

Du point Q_0 comme centre, décrivons un cercle γ de rayon δ ; il faut montrer que, quelque petit que soit ce cercle, la masse qui en est exclue tend vers zéro quand le point P tend vers Q_0.

Suivant l'hypothèse que nous avons faite sur la nature du contour C (n^o 10), le point Q_0 est le sommet d'un angle limitant un secteur du cercle γ extérieur à l'aire A, à condition toutefois de supposer ce cercle γ suffisamment petit. Nous désignerons l'ouverture de cet angle par 2φ.

Soit ε la masse exclue du cercle γ ; nous allons montrer que ε tend vers zéro quand le point P intérieur à A tend vers Q_0. Supposons le point P intérieur au cercle γ et à la distance $r < \delta$ du point Q_0. Soit P′ le point extérieur à A, situé à la même distance r du point Q_0 sur la bissectrice de l'angle 2φ et, par conséquent, à une distance supérieure à $r \sin\varphi$ du contour. Au point P′, le potentiel dû au point P (de masse *un*) est $< \log \frac{1}{2r}$. D'autre part, le potentiel équivalent dû à la masse $1 - \varepsilon$ comprise dans γ et à la masse ε exclue de ce cercle, est inférieure à

$$(1 - \varepsilon) \log \frac{1}{r \sin \varphi} + \varepsilon \log \frac{1}{\delta - r}.$$

On en conclut l'inégalité

$$\log \frac{1}{2r} < (1 - \varepsilon) \log \frac{1}{r \sin \varphi} + \varepsilon \log \frac{1}{\delta - r},$$

d'où

$$\varepsilon < \frac{\log \dfrac{2}{\sin \varphi}}{\log \dfrac{\delta - r}{r \sin \varphi}},$$

ce qui montre que ε tend vers zéro avec r.

21. — DÉMONSTRATION DU PRINCIPE ET RÉSOLUTION DU PROBLÈME INTÉRIEUR DE DIRICHLET. — *Soit* $U(s)$ *une fonction continue donnée en chaque point* $M(s)$ *du contour* C (*simple ou multiple*). *Il existe une fonction harmonique dans l'aire* A *intérieure au contour et qui prend la valeur* $U(s)$ *donnée sur le contour. Cette fonction est définie par l'intégrale de Stieltjès étendue au contour entier.*

$$U(P) = \int_C U(s) d\mu(s, P).$$

La vérification est immédiate. La fonction $U(P)$ est harmonique avec $u(s, P)$ car cette intégrale est limite de sommes harmoniques (Principe de HARNACK). Quand le point P tend vers un point Q_0 du contour, $\Delta\mu(s, P)$ tend vers zéro sur tout arc Δs de C à distance finie de Q_0 et vers l'unité sur tout arc Δs enfermant Q_0. Donc puisque $U(s)$ est continue au point Q_0, l'intégrale précédente tend vers $U(Q_0)$ ou $U(s)$.

Remarque. — La convergence de $U(P)$ vers $U(Q_0)$ sera uniforme le long d'un arc de C, pourvu que chaque point de cet arc soit le sommet d'un triangle de grandeur invariable extérieur à l'aire A, car cette condition suffit pour assurer l'uniformité de la convergence dans le théorème précédent. On verra plus loin que cette restriction est inutile (n° 34).

22. — THÉORÈME. — *Une fonction harmonique dans un domaine ne peut admettre de singularité isolée où elle reste bornée* [1].

Soit, en effet, P_0 un point singulier aux environs duquel la fonction $U(P)$ est harmonique et bornée. Traçons deux circonférences de centre P_0 dans cette région, l'une Γ de rayon fixe, l'autre γ de rayon infiniment petit. On a, dans la couronne,

$$U(P) = \int_\Gamma U(s) d\mu(s, P) + \int_\gamma U(s) d\mu(s, P).$$

Le potentiel engendré au point P_0 par les masses μ' et μ'' portées par Γ et γ est fini, puisque c'est celui de la masse *un* en P. Donc la masse μ''

(1) Ce théorème est dû à SCHWARZ, *Journ. f. die reine u. angew. Math.*, vol. 74 (1872) p. 252. E. PICARD en a donné une démonstration simple comme conséquence des propriétés des fonctions analytiques. *C. R.*, t. 176, 1923, avril. Le raisonnement fait ici s'étend de lui-même à une fonction régulière et bornée à l'exclusion d'un ensemble *de capacité nulle*.

portée par γ tend vers zéro, sinon son potentiel serait infini au point P_0. Donc la seconde intégrale disparaît à la limite. Il reste.

$$U(P) = \int_{\Gamma} U(s) d\mu(s, P),$$

et, cette fonction étant harmonique dans Γ, toute singularité au point P_0 serait artificielle.

§ 5. — Le problème extérieur de Dirichlet sous les mêmes conditions de régularité

23. — Problème préliminaire. — Le problème de Dirichlet extérieur est étroitement lié au problème suivant, dit parfois *problème de* Robin, dont les principes précédents donnent une solution presque immédiate :

Répartir une masse positive donnée m sur un contour C, *soit simple, soit formé de plusieurs contours simples extérieurs les uns aux autres, de manière que le potentiel dû à cette répartition soit constant à l'intérieur du contour* C, *avec la même valeur dans chaque contour partiel si le contour est multiple.*

Entourons le contour C (simple ou multiple, mais satisfaisant aux conditions du paragraphe précédent) d'une circonférence Γ et répartissons uniformément la masse donnée m sur cette circonférence. Cette masse engendre alors un potentiel constant U dans le cercle et, par conséquent, aussi à l'intérieur du contour C.

Considérons une suite de cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_n, \cdots$ concentriques à Γ mais de rayons croissant à l'infini. Faisons, de proche en proche, le balayage des aires comprises entre C et Γ_1, puis entre C et $\Gamma_2, \cdots$, entre C et Γ_n et ainsi de suite. A chaque, nouveau balayage, une nouvelle portion de masse est refoulée sur C et la fonction $\mu_n(s)$ qui définit la répartition de la masse sur C après n balayages, va en augmentant avec n. Elle tend donc vers une limite déterminée $\mu(s)$. D'ailleurs, à la limite, la masse entière m est transportée sur C, car, si une masse finie était rejetée à l'infini, elle engendrerait un potentiel infini négatif sur le contour C, tandis que le potentiel considéré ne varie pas sur ce contour.

Désignons aussi par $\mu_n(s)$ la loi de répartition de la masse sur le cercle Γ_n ; le potentiel, après le $n^{ième}$ balayage, a pour expression

$$\int \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s) + \int_{\Gamma_n} \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s).$$

Soient R_n le rayon de Γ_n et ε_n la masse totale répartie sur Γ_n ; l'expression précédente peut s'écrire

$$\int_C \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(s) + \varepsilon_n \log \frac{1}{R_n} + \int_{\Gamma_n} \log \frac{R_n}{r}\, d\mu_n(s).$$

Quel que soit n, cette expression est égale, dans l'intérieur du contour C, à la valeur constante du potentiel U. Mais, quand n tend vers l'infini, $\mu_n(s)$ tend sur C vers $\mu(s)$, et le premier terme vers une limite finie ; le dernier terme tend vers zéro, car $R_n : r$ tend vers l'unité ; donc le terme du milieu tend aussi vers une limite finie, qui ne peut être qu'une constante négative

$$-h^2 = \lim \varepsilon_n \log \frac{1}{R_n}.$$

En définitive, le potentiel U (constant dans l'intérieur de C) a pour expression

$$\int_C \log \frac{1}{r}\, d\mu(s) - h^2.$$

Il s'ensuit que la distribution $\mu(s)$ obtenue sur C par les balayages détermine un potentiel constant, mais $>$ U, sur le contour C et répond à la question.

24. — THÉORÈME. — *La distribution* $\mu(s)$ *de la masse positive donnée* m *qui détermine un potentiel constant dans tout l'intérieur du contour* C, *est unique,*

Soient μ et μ' deux distributions de la masse m satisfaisant à cette condition. Je dis qu'elles déterminent le même potentiel sur le contour C et sont, par conséquent, les mêmes. Considérons, en effet, la distribution $\mu - \mu'$ d'une masse algébriquement nulle. Celle-ci engendre un potentiel qui s'annule à l'infini, car, en désignant par R la distance du point P à un point fixe du contour C et en ajoutant un terme nul, ce potentiel du point P se met sous la forme

$$\int_C \log \frac{R}{r}\, d(\mu - \mu') ;$$

son module est $< 2 \max \log \left|\frac{R}{r}\right|$ et tend vers zéro quand R tend vers l'infini (R : r tendant alors vers l'unité). Si, par impossible, le potentiel dû à μ était plus grand sur C que celui dû à μ', celui dû à $\mu - \mu'$ atteindrait son maximum en tout point de C et $\mu - \mu'$ ne pourrait être négatif en aucun point du contour en vertu d'un principe général. Donc, la masse étant algébriquement nulle, $\mu = \mu'$ et les deux distributions sont identiques. Elles le sont d'ailleurs nécessairement si les potentiels sont les mêmes.

25. — PROPRIÉTÉ DE MINIMUM. — *La distribution $\mu(s)$ de la masse positive donnée m qui détermine un potentiel constant dans tout l'intérieur du contour* C, *est celle qui minime la borne supérieure du potentiel, parmi toutes les distributions possibles de cette masse sur* C *ou dans l'intérieur de* C.

Soit μ' une distribution quelconque de la masse m sur C ou dans l'intérieur de C. Le potentiel dû à $\mu - \mu'$ s'annule à l'infini (comme on vient de le démontrer). Ce potentiel étant borné, sa valeur à l'infini est, comme on le verra plus loin (nº 29), une moyenne entre ses valeurs sur C [1]. Donc le potentiel dû à $\mu - \mu'$ ne peut garder un signe invariable sur C et, par conséquent, le potentiel dû à μ' surpassera, sur C, le potentiel constant dû à μ.

26. — BALAYAGE DU DOMAINE EXTÉRIEUR DANS LE CAS D'UNE MASSE PONCTUELLE UNIQUE. — Soit C un contour simple ou un ensemble de tels contours extérieurs les uns aux autres. Soit P un point de masse *un* extérieur au contour. Il s'agit de définir le balayage du domaine extérieur ne contenant que cette seule masse. Traçons, comme dans la résolution du problème précédent (nº 23), une cercle Γ de centre fixe et de rayon infiniment croissant, puis balayons l'aire comprise entre C et Γ. A la limite, la masse unité localisée en P se répartira tout entière sur le contour C suivant une loi $\mu(s, \text{P})$ qui dépend du point P. La masse unité ainsi répartie déterminera, comme dans le cas précédent, un potentiel V(P) continu dans tout le plan et prenant, à l'intérieur du contour C, la même valeur que le potentiel initial dû au point P, sauf l'addition d'une constante h^2, toujours

(1) Le théorème et sa démonstration subsistent dans l'espace, sauf que la moyenne considérée au nº 29 doit être remplacée par celle du nº 49.

positive et qui dépend aussi de la position du point P. Ce transport de la masse unité du point P sur le contour C, suivant une loi telle que le potentiel se conserve (à une constante près) dans l'intérieur de C, constitue *le balayage du domaine extérieur* à C dans le cas d'une masse ponctuelle unique. Ce balayage admet aussi un *théorème d'unicité* : la distribution $\mu(s, P)$ de la masse unité qui réalise ces conditions est unique. La démonstration se fait comme pour le théorème d'unicité précédent (n° 15).

27. — DOMAINE EXTÉRIEUR A UN CERCLE. — Si le contour C est un cercle, les balayages des domaines intérieur et extérieur se ramènent l'un à l'autre. Soient, en effet, P le point extérieur et P′ son conjugué intérieur au cercle. Le rapport des distances d'un point M de la circonférence aux points P et P′ est constant et, par conséquent les potentiels dus aux masses unités localisées respectivement en P et P′ ne diffèrent que par une constante sur la circonférence. Donc, en vertu du théorème d'unicité, les deux distributions $\mu(s, P)$ et $\mu(s, P')$ dues au balayage de la masse en P ou de celle en P′ sont identiques.

On déduit de là un corollaire important.

Si le point P *s'éloigne à l'infini, son conjugué* P′ *tend vers le centre du cercle et, par conséquent, la distribution de la masse sur la circonférence tend vers l'uniformité. La distribution limite est celle d'équilibre, c'est-à-dire celle qui détermine un potentiel constant dans le cercle.*

Nous allons montrer que ce résultat subsiste pour un contour quelconque.

28. — DISTRIBUTION LIMITE DE LA MASSE BALAYÉE QUAND LE POINT P S'ÉLOIGNE A L'INFINI. — *Quel que soit le contour* C *simple ou formé de contours simples séparés, si le point* P *tend vers l'infini, la distribution* $\mu(s, P)$ *tend uniformément vers celle d'équilibre, c'est-à-dire celle qui détermine un potentiel constant dans l'intérieur du contour, et le même dans les diverses parties du contour s'il est multiple.*

Entourons le contour C d'une circonférence fixe Γ laissant le point P à l'extérieur, puis balayons le domaine extérieur à cette circonférence. La distribution de la masse du point P sur Γ sera la même que celle déterminée par le point P′ conjugué de P. Cette distribution serait uniforme, c'est-à-dire de densité constante, si P′ était au centre de Γ. On peut donc éloigner P suffisamment et, par suite, rapprocher suffisamment P′ du centre du cercle pour que la masse *un* distribuée sur la circonférence Γ soit de densité intermédiaire entre $\frac{1 \pm \varepsilon}{\text{circ } \Gamma}$ où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut. La répartition de même masse sur C provient du balayage de cette masse actuellement répartie sur Γ ; elle sera comprise sur tout arc de C entre les répartitions des masses $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ uniformément réparties sur Γ et assurant toutes les deux un potentiel constant sur le contour C. Soit donc $\mu(s, \infty)$ la distribution d'équilibre sur C, assurée par la résolution du problème préliminaire (n° 23) ; la distribution de la masse provenant du point P sera comprise, sur toute portion s du contour C, entre celles définies par les deux lois :

$$(1 - \varepsilon)\mu(s, \infty) \quad \text{et} \quad (1 + \varepsilon)\mu(s, \infty).$$

Le nombre ε peut être rendu aussi petit qu'on veut en écartant suffisamment le point P, ce qui prouve le théorème.

29. — Résolution du problème extérieur de Dirichlet. — *Soit encore* C *un contour simple ou un ensemble de contours simples séparés astreints aux conditions antérieures* (n° 10). *Soit ensuite* U (s) *une fonction continue donnée le long du contour. Il existe une fonction* U(P) *harmonique dans le domaine extérieur au contour, qui est régulière à l'infini et qui prend la valeur assignée* U(s) *sur le contour. Cette fonction est unique et elle s'exprime par l'intégrale de* Stieltjès

$$U(P) = \int_C U(s) d\mu(s, P).$$

On prouve que U(P) est harmonique à l'extérieur et tend vers U(s) sur le contour comme dans le cas du problème intérieur. Il suffit de montrer que U(P) est régulière à l'infini, ce qui veut dire que U(P) est bornée quand P tend vers l'infini. Ceci d'ailleurs est immédiat, car la valeur de U au point $P = \infty$ est

$$U(\infty) = \int_C U(s) d\mu(s, \infty).$$

Cette valeur est une moyenne entre celles de U(s) sur le contour C. Cette moyenne est définie par *la distribution d'équilibre* de la masse unité sur le contour. Il est commode de lui donner un nom et nous l'appellerons la *Moyenne harmonique* des valeurs de U sur le contour.

Le *théorème d'unicité* s'applique à la fonction régulière à l'infini : il ne peut y avoir qu'une seule fonction harmonique bornée dans le domaine extérieur et prenant les valeurs assignées $U(s)$ sur le contour C. En effet, s'il y en a deux, leur différence u et une fonction harmonique aussi, mais qui s'annule sur le contour C. De l'origine comme centre, traçons une circonférence Γ de rayon R infiniment grand. La valeur $u(P)$ dans le domaine extérieur à C et borné par Γ, s'exprime par la formule réduite à l'intégrale sur la circonférence Γ (car celle sur C s'évanouit avec u)

$$u(P) = \int_{\Gamma} u(s) d\mu(s, P),$$

où $\mu(s, P)$ est la loi de distribution sur Γ de la portion de la masse du point P qui a été balayée sur cette circonférence, le reste ayant été balayé sur le contour C. Cette distribution $\mu(s, P)$ sur Γ est la différence des distributions qu'on obtient en balayant dans le cercle entier la masse *un* du point P d'une part et la portion balayée sur C d'autre part. A la limite, ces deux distributions sont uniformes ; la distribution $\mu(s, P)$ sur Γ l'est donc aussi ; et, comme $u(s)$ est bornée, la valeur de l'intégrale précédente est indépendante du point P. Donc $u(P)$ est constant et, par conséquent, nul, puisqu'il l'est sur C.

§ 6. — **Balayage des aires limitées par des lignes de Jordan. Représentation conforme**

30. — Remarques sur la représentation conforme. — Les théorèmes et les démonstrations des paragraphes précédents s'étendent à l'espace moyennant quelques modifications de détail, mais à condition de considérer des volumes limités par des surfaces astreintes à certaines restrictions qui correspondent à celles que nous avons introduites jusqu'ici pour le plan. Par contre, les extensions qui vont suivre sont particulières au plan, parce qu'elles s'appuient sur la représentation conforme qui n'admet pas de correspondante dans l'espace.

Nous supposons connu le théorème de Carathéodory, en vertu duquel toute aire limitée par un contour simple de Jordan admet une représentation conforme sur un cercle qui est continue et uniforme dans les deux sens, frontières comprises. Cette propriété s'étend aux domaines extérieurs par une inversion.

Considérons une aire A à connexion multiple, bornée par un contour extérieur C et un certain nombre de contours internes C_1, C_2, $\cdots$ On peut toujours en construire une image conforme A′ bornée par des lignes analytiques régulières. On procède par des transformations de proche en proche en opérant chaque fois sur la figure transformée. On représente d'abord le domaine simplement connexe intérieur à C sur l'intérieur d'un cercle, ce qui transforme tous les contours intérieurs. On représente ensuite l'aire extérieure au contour C_1 transformé sur l'aire extérieure à un cercle et on opère de même avec C_2, C_3, $\cdots$ On obtient finalement une image A′ de l'aire A bornée par des contours sans singularité aucune et dont le dernier transformé est un cercle.

L'importance de la transformation conforme dans le problème qui nous occupe apparaît dans le théorème suivant :

31. — THÉORÈME. — *Si deux aires* A *et* A′ *limitées par des contours simples ou multiples qui peuvent être des lignes de* JORDAN, *sont des images conformes l'une de l'autre et que l'on place une masse unité en deux points homologues* P *et* P′ *de chacune des deux aires, alors, si l'on effectue le balayage de chacune des deux aires, la répartition sur leurs contours des masses provenant respectivement des points* P *et* P′ *obéit à la loi de conformité : les arcs correspondants des contours porteront des masses égales.*

Considérons d'abord deux aires correspondantes A et A′, bornées par des contours C et C′ satisfaisant aux conditions antérieures. Soit U(P) une fonction harmonique dans A prenant la suite continue de valeurs U(s) sur C. Soit P′ le transformé du point P dans A′ ; la fonction U(P′) qui prend la valeur U(P) est harmonique dans A′. Ces fonctions s'expriment donc par les intégrales sur les contours correspondants, ce qui donne

$$\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \mathrm{U}(\mathrm{P}') = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{U}(s)d\mu(s, \mathrm{P}) = \int_{\mathrm{C}'} \mathrm{U}(s')d\mu(s', \mathrm{P}').$$

Faisons tendre U(s) vers l'unité sur un arc donné s de C et vers zéro sur le reste du contour ; alors U(s') tend vers l'unité sur l'arc s' de C′ qui correspond à s et vers zéro sur le reste de ce contour. Il vient ainsi

$$\int_{s} d\mu(s, \mathrm{P}) = \int_{s'} d\mu(s', \mathrm{P}),$$

d'où $\mu(s, \mathrm{P}) = \mu(s', \mathrm{P}')$. Dans ce cas, la proposition est établie.

Considérons, en second lieu, une aire A′ bornée par des contours de JORDAN mais qui est l'image d'une aire A du type précédent. L'aire A est la limite d'une aire intérieure A_1 dont le contour est régulier et tend vers celui de A, et le balayage de A est la limite du balayage de A_1 en vertu du théorème d'unicité. Alors l'aire A′ est la limite de l'aire A'_1 image de A_1. Mais le théorème s'applique au balayage des aires A_1 et A'_1 et comme la correspondance est uniformément continue jusqu'à la limite, la répartition des masses se fera encore suivant la loi de conformité sur les contours de A et de A′.

Enfin on peut considérer deux aires A et A′ images l'une de l'autre et bornées toutes deux par des contours de JORDAN. On fait alors l'image de ces deux aires sur une même troisième du type antérieur et l'on est ramené au cas précédent.

32. — INTRODUCTION DU PARAMÈTRE DES LIGNES DE JORDAN. — En général, une ligne de JORDAN n'est pas rectifiable et l'on ne peut plus prendre comme paramètre la mesure s de l'arc. Une ligne de JORDAN est définie par une représentation paramétrique

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

où x et y sont des fonctions continues de t. Si la ligne est un contour simple, il est décrit quand t varie dans un certain intervalle. Si l'on considère une aire bornée par plusieures contours, on peut supposer que les divers contours sont décrits en faisant varier t dans des intervalles différents. Le balayage d'une aire A portant la masse unité localisée au point P distribuera cette masse suivant une loi que l'onpeut définir par une fonction $\mu(t, \mathrm{P})$. Cette fonction qui dépend du point P fait connaître la masse répartie sur un segment (t_0, t) du contour.

33. — PROPRIÉTÉS DE LA DISTRIBUTION $\mu(t, \mathrm{P})$. — Les deux propriétés reconnues dans le cas des contours antérieurs subsistent avec des contours de JORDAN.

1° *La fonction* $\mu(t, \mathrm{P})$ *est une fonction harmonique du point* P *dans l'intérieur de l'aire* A.

2° *Si le point* P *tend vers un point* Q_0 *du contour, la masse distribuée suivant la loi* $\mu(t, \mathrm{P})$ *tend vers zéro sur tout segment du contour à distance finie du point* Q_0, *et, par conséquent, vers l'unité sur tout segment contenant ce point intérieurement.*

La première propriété se démontre comme pour les contours antérieurs. Passons à la seconde. Construisons une image conforme de l'aire A bornée par des contours réguliers. Si le point P tend vers Q_0, le point P' correspondant dans l'image tend vers le point Q_0' transformé de Q_0. La distribution de la masse balayée possède, dans l'image, la propriété énoncée, donc elle la possède aussi dans l'aire A, puisque la correspondance est continue et que les distributions sur les contours se correspondent d'une manière conforme. On voit de plus, la correspondance étant uniformément continue, que si le point P tend vers un point variable Q_0 du contour, la concentration de la masse portée par le contour vers ce point, aura lieu uniformément.

34. — Résolution des problèmes intérieur et extérieur de Dirichlet. — Les deux propriétés précédentes sont celles sur lesquelles se fonde la démonstration précédemment donnée du principe de Dirichlet. Le problème de Dirichlet se résout donc de la même manière dans le cas général, sauf la substitution du paramètre t à l'arc s.

Si l'aire A *est bornée par un contour* C, *simple ou multiple, formé de lignes de* Jordan, *et que l'on donne une fonction continue* $U(t)$ *le long du contour, il existe une fonction* U(P) *harmonique, dans l'aire* A, *prenant les valeurs données* $U(t)$ *sur le bord. Cette fonction est unique et définie par l'intégrale de* Stieljès

$$U(P) = \int_C U(t) d\mu(t, P).$$

De plus, si P *tend vers un point* Q_0 *du contour, la convergence de* U(P) *vers* $U(Q_0)$ *est uniforme pour tout le contour.*

Le problème extérieur se résout par l'intégrale analogue.

35. — Théorème général sur le balayage. — Considérons une aire A bornée par un contour C quelconque de Jordan. Supposons qu'une masse positive m soit distribuée d'une manière quelconque dans cette aire, mais avec la condition que les masses infiniment voisines du bord ne déterminent qu'un potentiel infiniment petit et que le potentiel U dû à la masse entière soit continu sur la frontière. Nous avons alors le théorème suivant :

Il est possible de transporter la masse m *sur le contour* C *suivant une loi* $\mu(t)$ *telle que le potentiel* U *soit conservé à l'extérieur de l'aire et sur le* *contour, et que le potentiel dû à la nouvelle distribution soit continu dans tout le plan et représenté dans tout le plan par l'intégrale de* STIELTJÈS

$$V(P) = \int_C \log \frac{1}{r} d\mu(t),$$

où r est la distance du point P *au point* M(t) *qui décrit le contour.*

Faisons l'image de l'aire A sur une aire A_1 bornée par un contour analytique et régulier C′. Limitons une aire A_1' intérieure à A_1 par un contour C_1' infiniment voisin de C′ et orthogonal à sa normale. Nous faisons alors correspondre les points de C′ et de C_1' situés sur la même normale. Limitons dans A l'aire A′, image de A_1', par le contour C_1, image de C_1' et faisons correspondre les points de C et de C_1, dont les images se correspondent sur C′ et C_1'. Nous attribuerons à ces deux points le même paramètre t dans la description des contours.

Le balayage de l'aire A_1 (dont le contour est régulier) se fait sans difficulté et conduit à l'intégrale

$$V_1(P) = \int_{C_1} \log \frac{1}{r} d\mu_1(t).$$

Abstraction faite du potentiel infiniment petit dû aux masses éventuellement comprises entre les contours C et C_1, cette intégrale V_1 est égale à U hors de A_1 et sur C_1, tandis que, à l'intérieur de A_1, elle exprime la fonction harmonique qui prend la valeur U sur le contour. Quand C_1 tend vers C, le paramètre t reste le même et $\mu_1(t)$ tend vers une limite $\mu(t)$ (comme dans l'image). L'intégrale précédente tend, en tout point P distant du contour C (r ne s'annulant pas pour les masses conservées), vers

$$V(P) = \int_C \log \frac{1}{r} d\mu(t).$$

Cette nouvelle intégrale est égale à U hors de A. Dans l'intérieur de A, elle est égale à la limite de V_1. Cherchons quelle sera cette limite. A l'intérieur de A, le potentiel V_1 est constant ou décroissant quand l'aire A_1, se développe, donc il est inférieur à U. D'autre part, il est supérieur à la fonction harmonique qui prend la même valeur U sur C (puisque ce potentiel provient de masses positives dans A). Donc $V_1(P)$ a pour limite la fonction harmonique qui prend la valeur U sur le bord de A et telle est aussi la valeur de V dans A.

Il reste seulement à montrer que $V(P)$ est encore continue sur le contour C. Cette fonction l'est certainement en tout point du contour suceptible d'être le sommet d'un angle extérieur ou intérieur à A, car on peut reproduire la démonstration déjà faite (nº 7). Nous appellerons de tels points *normaux* et il est clair qu'ils forment un ensemble dense sur le contour.

Soit donc Q_0 un point quelconque sur le contour, $V(Q_0)$ ne peut surpasser $U(Q_0)$ car V est semi-continue inférieurement. Je dis que l'on n'aura pas non plus $V(Q_0) < U(Q_0)$. Entourons, en effet, le point Q_0 d'un contour infiniment petit γ qui coupe C en deux points normaux. La fonction $V(P)$ sera continue et infiniment voisine de $U(Q_0)$ sur tout ce contour γ. Balayons maintenant l'aire intérieure à γ, ce qui ne change pas le potentiel sur γ et le diminue en Q_0. Ce potentiel, devenu harmonique, sera plus petit en Q_0 que sur γ, ce qui est impossible. Donc $V(Q_0) = U(Q_0)$, ce qui achève la démonstration.

Tous les théorèmes antérieurs sont maintenant étendus aux domaine limités par des courbes de JORDAN.

On peut évidemment se poser le problème de DIRICHLET dans des conditions plus générales encore. Par exemple, on peut considérer des domaines ayant des frontières quelconques et l'on pourrait encore utiliser la méthode du balayage. Nous ne le ferons pas. Il importe seulement de signaler les importants résultats obtenus dans cette voie par G. C. EVANS en utilisant la fonction de GREEN (1).

DEUXIEME PARTIE

LE PROBLÈME DANS L'ESPACE

§ 7. — Balayage d'un domaine à trois dimensions

36. — DISTRIBUTION DES MASSES ET DÉFINITION DU POTENTIEL. — Nous considérons dans l'espace un domaine A dans lequel on a réparti

(1) G. C. EVANS, *The Logarithmic potential. Discontinuous Dirichlet and Neumann problems. American mathematical Society.* Colloquium publications, vol. VI, New York (1927).

une masse agissante et, pour préciser les théorèmes, nous supposerons cette masse positive. Les raisonnements sont généraux, parce que s'il y a des masses positives et d'autres négatives, on peut toujours les balayer séparément. La répartition de cette masse dans A est définie par une fonction complètement additive d'ensemble. La masse portée par un ensemble e de points est exprimée par la fonction $\mu(e)$. Nous désignons par $d\mu(e)$ la masse portée par un ensemble de de diamètre infiniment petit. Le potentiel engendré par les masses répandues dans le domaine A se définit par l'intégrale de STIELTJÈS,

$$U(P) = \int_A \frac{d\mu(e)}{r},$$

étendue à tous les ensembles de provenant de la décomposition de A en parties de diamètre infiniment petit. On désigne par r la distance du point potentié P à l'élément de.

Le potentiel U(P) est une fonction continue du point P en dehors des masses agissantes. A l'intérieur des masses (supposées positives), c'est une fonction semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que, P tendant vers P_0, on a $\lim U(P) \geqq U(P_0)$.

37. — CONDITIONS TOPOLOGIQUES IMPOSÉES AUX FRONTIÈRES DU DOMAINE BALAYÉ. — Nous considérons un domaine A borné par des surfaces qui seront soumises à certaines conditions.

Nous disons qu'une surface ou une portion de surface S est *régulière* si elle admet un plan tangent dont l'orientation varie d'une manière continue et si ses courbures principales sont bornées et continues.

La méthode du balayage s'étend à des domaines bornés par des surfaces d'une beaucoup plus grande généralité et même à tous les domaines ouverts [1]. Mais, pour simplifier, nous nous bornerons ici aux surfaces qui sont engendrées par la déformation continue d'une surface régulière, ou, sous une forme plus précise, les surfaces dont les points peuvent être mis en correspondance bicontinue et biuniforme avec ceux d'une surface régulière S', cette correspondance s'étendant au voisinage, c'est-à-dire à l'espace environnant, au moins du côté où se fait le balayage.

Cette hypothèse est encore très large. Elle se vérifie pour des surfaces non quarrables et dépourvues de plan tangent, tel l'anneau

[1] Voir la Note I à la fin du mémoire.

engendré par la rotation d'une ligne plane fermée de JORDAN autour d'un axe.

38. — BALAYAGE DE LA SPHÈRE OU D'UN DOMAINE A SOMME DE SPHÈRES. CRITERIUM DE POINCARÉ. — Le balayage de la sphère est tout analogue à celui du cercle. Si des masses positives sont répandues à l'intérieur de la sphère et engendrent un certain potentiel U, on peut balayer ces masses de l'intérieur sur la circonférence suivant une loi telle que le potentiel se conserve à l'extérieur et soit diminué à l'intérieur. Le potentiel est conservé sur la surface de la sphère s'il est continu sur cette surface.

Le balayage d'un domaine somme de sphères se définit comme il a été fait pour un domaine somme de cercles. Soit A un tel domaine borné par une surface S formée de portions sphériques. On suppose qu'elle contient des masses positives engendrant un potentiel U, mais que le potentiel provenant de masses infiniment voisines de S (s'il y en a) soit infiniment petit. On peut balayer les masses de l'intérieur sur la surface suivant une loi telle que le potentiel se conserve à l'extérieur, mais soit diminué à l'intérieur et cette loi est unique. La loi de distribution se définit par une fonction d'aire $\mu(S)$ qui exprime la masse portée par une portion quelconque S de la surface désignée précédemment par cette même lettre. Le potentiel résultant de cette couche s'exprime par l'intégrale

$$V(P) = \int_S \frac{d\mu(S)}{r},$$

où $d\mu(S)$ est la masse portée par l'élément d'aire de diamètre infiniment petit dS. Ces éléments dS doivent être sans point commun deux à deux.

On prouve que l'intégrale V(P) est encore continue sur la frontière S en observant que tous les points de la surface satisfont à une condition que nous appellerons *la condition de* POINCARÉ, parce que c'est lui qui a montré l'importance de cette condition dans son mémoire de 1890.

Un point d'une surface S *bornant un domaine* A *vérifie la condition de* POINCARÉ *s'il peut être considéré comme le sommet d'un cône de révolution dont la pointe est tout entière extérieure au domaine* A.

Ce cône tient la place de l'angle qui a été utilisé pour la démonstration analogue dans le cas du plan (nº 7).

39. — BALAYAGE D'UN DOMAINE BORNÉ PAR DES SURFACES RÉGULIÈRES. — Soit D un domaine d'un seul tenant borné par des surfaces régulières. Ce domaine et ces surfaces peuvent être d'un ordre de connexion quelconque. La méthode exposée pour le plan se généralise encore naturellement et permet de balayer sur les frontières les masses (supposées positives) répandues dans le domaine D. Voici la manière de procéder.

On peut inscrire dans le domaine D et faire tendre vers D un volume Ω somme de sphères. Ce volume est borné par une surface Σ que l'on fait tendre vers la frontière S de D. Mais nous représenterons aussi par S et Σ non seulement les surfaces entières, mais les portions correspondantes de ces surfaces, en convenant de faire correspondre entre elles les portions qui tendent l'une vers l'autre et qui sont comprises à l'intérieur d'une même normalie à S. Le balayage du domaine Ω répartit alors sur un morceau bien déterminé Σ de sa surface frontière une certaine masse dont la mesure peut être considérée comme une fonction de l'aire Σ et, par conséquent, aussi de l'aire correspondante S. Nous pouvons donc représenter cette fonction d'aire par $\mu(S)$.

Considérons une suite de volumes $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n, \cdots$ tendant vers D et la suite correspondante des surfaces qui les bornent $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n, \cdots$ lesquelles tendent uniformément vers S. A chaque surface Σ_n correspond par le balayage de Ω_n une distribution $\mu_n(S)$. Ces fonctions d'aires sont uniformément continues dans leur ensemble, c'est-à-dire que $\mu_n(S)$ tend uniformément vers zéro avec le diamètre de S pour tous les indices à la fois. En effet, il se produirait, dans le cas contraire, des accumulations de masses faisant croître indéfiniment le potentiel, contrairement à l'hypothèse.

De la suite des fonctions d'aire $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ qui sont positives et uniformément bornées, on peut extraire une suite qui converge vers une fonction déterminée $\mu(S)$ et celle-ci sera continue puisque la suite l'est uniformément. Ce théorème pourrait se ramener au théorème sur les fonctions d'ensemble linéaire utilisé dans la première partie du Mémoire, par la transformation bien connue fournie par la courbe de PÉANO. Mais cette transformation exige certaines précautions. Ce théorème n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un théorème général sur les fonctions positives et complètement additives d'ensemble : Toute suite illimitée de telles fonctions bornées dans leur ensemble est *normale*, c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite convergente. On en trouvera la démonstration dans la Note I à la fin du Mémoire, et aussi la justification du passage à la limite sous le signe d'intégration.

Avec la fonction limite $\mu(S)$, continue comme les précédentes, formons l'intégrale de STIELTJÈS

$$V(P) = \int_S \frac{d\mu(S)}{r}.$$

Comme dans le cas du plan, cette intégrale converge et définit une fonction continue de P dans l'espace entier, parce que la condition de POINCARÉ (nº 38) se vérifie sur S. Cette intégrale est égale au potentiel initial U à l'extérieur du domaine A et sur sa frontière. A l'intérieur elle représente la fonction harmonique qui prend la valeur U sur la frontière. Enfin la distribution $\mu(S)$ qui conduit à ce résultat est unique.

40. — BALAYAGE D'UN DOMAINE BORNÉ PAR DES SURFACES IRRÉGULIÈRES. — Si la surface S n'est pas régulière, nous construisons une surface régulière S′ donnant une image (non conforme) de S et nous étendons la correspondance au voisinage. Nous inscrivons dans S des volumes Ω_n sommes de sphères, bornés par des surfaces Σ_n comme dans le cas précédent. Nous faisons correspondre entre elles les portions de S et de Σ_n dont les images sont comprises à l'intérieur d'une même normalie à la surface régulière S′. Le balayage du volume Ω_n amène sur Σ_n une masse dont la loi de répartition se définit encore par une fonction $\mu_n(S)$ où la portion S de surface est considérée comme un ensemble de points. Ces fonctions sont encore uniformément continues dans leur ensemble. On peut en extraire une suite convergente vers une fonction continue limite $\mu(S)$ et former l'intégrale

$$V(P) = \int_S \frac{d\mu(S)}{r}.$$

Celle-ci sera égale au potentiel initial U à l'extérieur de A et sera $<$ U à l'intérieur. Mais on ne peut plus affirmer sans condition supplémentaire qu'elle soit continue à travers la surface. De plus s'il y a discontinuité, il n'est plus établi que la distribution $\mu(S)$ soit la seule qui jouisse des propriétés indiquées.

On peut assurer ces résultats en introduisant la *condition de* POINCARÉ (nº 38), ce qui conduit aux théorèmes suivants :

1º *La fonction* V(P) *est continue en tout point* Q_0 *de la surface* S *qui vérifie la condition de* POINCARÉ ;

2° *Si tous les points de la surface* S *vérifient la condition de* POINCARÉ, *la fonction* V(P) *sera continue dans tout l'espace, et la distribution* $\mu(S)$ *de la masse balayée qui engendre un potentiel jouissant des propriétés reconnues à* V(P) *sera unique.*

Les démonstrations se font comme pour le plan. On suppose que le potentiel initial U est continu sur la surface S.

41. — SUITE DU PRÉCÉDENT. AUTRES CONDITIONS DE CONTINUITÉ DE V(P). — On peut établir la continuité de V(P) sous des conditions plus générales, mais en supposant toujours la continuité du potentiel initial U sur la surface S. Il y a lieu de remarquer, en particulier, les théorèmes suivants qui comportent celui d'unicité.

1° *La fonction* V(P) *sera continue sur la surface* S *si elle est continue sur son bord intérieur.*

Pour le montrer, rappelons d'abord que la fonction V, étant égale à U sur le bord extérieur de S, est déjà continue sur ce bord par hypothèse. D'autre part, les points qui satisfont à la condition de POINCARÉ et où V est, en conséquence, continue forment un ensemble dense sur la surface S. Donc si la fonction V est continue sur le bord intérieur, elle est constamment égale à U sur ce bord. Donc elle prend la même suite continue de valeurs U sur les deux bords.

La fonction V est encore égale à U sur la surface S elle-même, mais la démonstration est un peu plus délicate.

Supposons, par impossible, que V diffère de U en un point Q_0 de S ; on aura $V(Q_0) < U(Q_0)$, car l'intégrale V est semi-continue inférieurement. Enfermons le point Q_0 dans une surface fermée infiniment petite Σ qui coupe S suivant une ligne de JORDAN L, simple et passant par deux points au moins de continuité de V. C'est évidemment possible puisqu'on suppose que S admet une image régulière. Enfermons encore la surface Σ dans une sphère γ. Balayons alors les masses portées par la surface S, d'une part à l'intérieur de la surface Σ, et d'autre part, dans l'espace compris entre les surfaces Σ et γ. Le potentiel devient harmonique dans l'intérieur de Σ, il reste égal à U sur cette surface sauf peut-être sur la ligne L, mais il devient *à fortiori* $< U(Q_0)$ au point Q_0. Si ce dernier potentiel V' est continu sur la ligne L, il sera donc infiniment voisin de $U(Q_0)$ sur Σ et en différera d'une quantité finie au point Q_0, ce qui est impossible.

Mais la démonstration est générale, parce que ce dernier potentiel V' est nécessairement égal à U sur la ligne L. Supposons, par impossible, que V' diffère de U et soit, par conséquent, $<$ U (à cause de la semi-continuité) en un point p_0 de la ligne L. Enfermons le point p_0 dans une surface fermée σ, infiniment petite, intérieure à la sphère γ et coupant la ligne L en deux points de continuité de V, donc de V'. Balayons la couche répandue sur Σ à l'intérieur de σ ; le potentiel, devenu harmonique dans σ, sera plus petit qu'il ne l'est sur σ au point intérieur p_0. ce qui est impossible.

2° *La fonction* V(P) *sera continue à travers la surface* S *si le domaine* A *balayé est un de ceux pour lesquels on peut résoudre complétement le problème de* DIRICHLET.

En effet, on peut alors déterminer une fonction U', harmonique dans A et qui prend la valeur U sur S. Tous les potentiels dus aux distributions dans A de masses positives $\mu_n(S)$ sont $>$ U' et $\gtreqless$ U dans l'intérieur de A. La fonction V qui est leur limite prend donc nécessairement la même valeur que U', à savoir U, sur le bord intérieur de S. On est ramené au cas précédent.

42. — PROBLÈME DE ROBIN ET MINIMUM CORRESPONDANT. — *Soit* A *un domaine d'un seul tenant, simplement connexe. Il est toujours possible de répartir sur cette surface une masse positive donnée m de manière qu'elle soit sans action sur un point intérieur à* A.

Enfermons le volume A à l'intérieur d'une sphère Γ de rayon R et répartissons uniformément une masse égale à l'unité sur la surface de la sphère. Cette masse détermine un potentiel constant à l'intérieur de la sphère et, en particulier, dans le domaine A. Traçons une seconde sphère concentrique Γ' de rayon R' $>$ R et balayons l'espace compris entre les surfaces S et Γ'. Nous répartissons ainsi sur S une partie de la masse *un* suivant une loi $\mu'(S)$ et le potentiel dans A n'a pas changé. Faisons croître R' indéfiniment ; la fonction $\mu'(S)$ augmente constamment sur toutes les parties de S et tend vers une limite $\mu(S)$. La masse rejetée à l'infini donne un potentiel nul et la couche étendue sur S donne un potentiel constant dans l'intérieur de l'aire A. La masse ainsi répartie sur S est $<$ 1 ; en multipliant la fonction $\mu(S)$ par un facteur constant, on donnera à la masse répartie la valeur *m* que l'on voudra.

Le théorème est donc établi, mais il n'est pas prouvé que le potentiel ne soit pas discontinu sur la surface, ni que la solution du problème de

ROBIN soit unique. Il faut pour cela de nouvelles conditions. Elles seront certainement remplies, en vertu des propositions du numéro précédent, si tous les points de la surface S satisfont à la condition de POINCARÉ, et plus généralement si le domaine A est un de ceux pour lesquels on peut résoudre le problème de DIRICHLET (1). Sous ces conditions, la distribution $\mu(S)$ jouit de la même *propriété de minimum* que dans le cas du plan (n° 25).

Nous avons considéré ci-dessus un domaine A d'un seul tenant, mais le théorème s'applique aussi bien à l'ensemble de plusieurs domaines d'un seul tenant extérieurs les uns aux autres.

§ 8. — Balayage d'une masse ponctuelle unité. Résolution du problème de Dirichlet.

43. — DÉFINITION DE LA RÉPARTITION SUPERFICIELLE $\mu(S, P)$. — Considérons un domaine A d'un seul tenant, borné par une surface ou un système de surfaces que nous appellerons la surface S. Nous ne faisons sur ces surfaces que les hypothèses générales du début (n° 37), nous ne postulons donc pas que la distribution résultant d'un balayage du domaine A soit unique.

Soit P un point du domaine portant la masse unité qu'il s'agit de balayer sur la frontière. Définissons au préalable et indépendamment de la position du point P, le système de sphères qui servira au balayage, et en même temps, le volumes successifs $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n, \cdots$ inscrits dans A et leurs surfaces frontières $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n \cdots$, Ces surfaces, formées d'aires sphériques, satisfont à la condition de POINCARÉ. Par conséquent, le balayage du volume Ω_n conduit à une distribution $\mu_n(S, P)$ indépendante du procédé suivi pour l'obtenir. Il s'ensuit que la fonction d'aire $\mu_n(S, P)$ est une fonction harmonique du point P dans le domaine ouvert Ω_n car la démonstration faite pour le plan se généralise d'elle-même. De la suite des fonctions $\mu_1, \mu_2, \cdots$ nous pouvons, le point P étant donné, extraire une suite convergente de fonctions de l'aire S. Mais la suite de ces fonctions d'aire restera convergente pour tout point P du domaine ouvert A, car cette suite est positive et bornée et, par con-

(1) L'unicité de la solution est assurée si la frontière est de mesure spatiale nulle. On le démontre dans la Note II à la fin du Mémoire.

séquent, le *théorème de* HARNACK (1) sur la convergence (uniforme) des suites positives est applicable quand on considère la suite des fonctions de P. Nous désignerons une fonction limite particulière par $\mu(S, P)$.

La distribution $\mu(S, P)$ engendre le potentiel $\frac{1}{r}$ hors de A et aux points de S qui vérifient la condition de POINCARÉ. Mais le théorème d'unicité n'est établi que si tous les points de S vérifient la condition de POINCARÉ et nous ne faisons pas encore cette hypothèse.

Si nous considérons une fonction limite particulière $\mu(S, P)$, elle jouit des propriétés suivantes :

43. THÉORÈME. — *La fonction* $\mu(S, P)$ *est, pour chaque* S, *une fonction harmonique du point* P *dans le domaine ouvert* A.

En effet, soit A' un domaine intérieur à A ; les fonctions $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ qui tendent vers μ, sont définies et harmoniques dans A' à partir d'un certain indice, donc leur limite μ est harmonique dans A' et, par conséquent, dans le domaine ouvert A.

44. — THÉORÈME. — *Si le point* P *intérieur à* A *tend vers un point* Q_0 *de la frontière* S *et que ce point vérifie la condition de* POINCARÉ, *la masse répartie suivant la loi* $\mu(S, P)$ *tend vers l'unité sur la portion* σ *de* S *intérieure à une sphère, si petite qu'elle soit, de centre* Q_0. *Elle tend, en conséquence, vers zéro sur toute portion de* S *qui est extérieure à cette sphère.*

On dit que le point Q_0 de S vérifie *la condition de* POINCARÉ s'il est accessible par le sommet d'une pointe de cône de révolution située tout entière hors du domaine A (nº 38).

Si le point P s'approche de Q_0, la distribution $\mu(S, P)$ est une fonction également continue de l'aire S dans tout domaine excluant le point Q_0. Donc, si $\mu(S, P)$ ne tend pas vers zéro sur toute aire S excluant ce point, on peut faire converger le point P vers Q_0 de manière à obtenir une distribution limite $\mu(S, Q_0)$ continue sur toute la surface S sauf peut-être au point Q_0. Dans ce cas, elle prendra sur ce point une valeur $m' < 1$. Cette valeur m' est la discontinuité de la fonction $\mu(S, P)$ au point Q_0.

Supposons que la condition de POINCARÉ soit réalisée, c'est-à-dire

(1) *Math. Ann.*, 35, p. 23 (1886). — *Grundlugen der Theorie der Logar. Potentiales*, Leipzig (1887), p. 67. — Voir PICARD, *Traité d'analyse*, t. II, chap. II, art 6.

que l'on puisse placer, en dehors de A, un cône de révolution ayant son sommet au point Q_0. Soit α l'inclinaison de la génératrice sur l'axe de ce cône.

Soit P' un point situé, hors de A, sur l'axe du cône à une distance infiniment petite x du point Q_0. Quand le point P arrive en Q_0, l'action exercée en P' par la masse unité portée par P est infiniment grande de la forme $1 : x^2$. L'action exercée par la distribution $\mu(S, Q_0)$ doit être la même. Donc si la masse concentrée en Q_0 est $m' < 1$, la masse superficielle complémentaire devra exercer l'action infiniment grande

$$\frac{1 - m'}{x^2},$$

Comme nous raisonnons sur la valeur principale de ces actions, nous pouvons faire abstraction des masses extérieures à une sphère fixe γ de centre Q_0 et coupant la pointe du cône extérieure à A, car l'action de ces masses est finie. Balayons maintenant les masses superficielles comprise entre la sphère et le cône ; elles se répartiront sur ces deux surfaces et il nous suffira encore de tenir compte de la couche superficielle répartie sur le cône. Soit $\varphi(x)$ la masse portée par la partie de la pointe du cône qui dépasse le plan normal à son axe passant par P'. L'attraction produite par cette masse $\varphi(x)$ sur le point P' sera supérieure à $(1 - m') : x^2$, car les masses situées de l'autre côté du plan agissent en sens contraire. D'ailleurs toute la masse $\varphi(x)$ est à une distance $< x \sin \alpha$ du point P'. On a donc la condition

$$\frac{\varphi(x)}{x^2 \sin^2\alpha} > \frac{1 - m'}{x^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(x) > (1 - m') \sin^2\alpha.$$

Or ceci est impossible, car nous avons soustrait de $\varphi(x)$ la masse éventuellement localisée en Q_0 et, par conséquent, $\varphi(x)$ tend vers zéro avec x.

Remarque. — Pour justifier l'emploi du criterium de POINCARÉ, nous venons de démontrer qu'une couche superficielle étalée sur le cône et une masse ponctuelle localisée au sommet Q_0 ne peuvent engendrer le même potentiel. — Toute autre surface dont un point Q_0 jouit de la propriété analogue, peut remplacer le cône et fournir un criterium analogue, lequel se justifiera par le balayage correspondant. On peut ainsi généraliser le théorème énoncé de la manière suivante : Ce théorème s'appliquera quand le point P tendra vers un point Q_0 de la surface S, si le point Q_0 peut appartenir à une surface S' extérieure à A et telle qu'aucune couche étalée sur cette surface ne puisse y déterminer un potentiel de même valeur principale qu'une masse ponctuelle localisée en Q_0.

45. — PROBLÈME INTÉRIEUR DE DIRICHLET. — *Soit* A *un domaine d'un seul tenant, borné par une surface simple ou multiple* S. *On donne une fonction continue* U(Q) *sur cette surface. Il existe une fonction* U(P) *harmonique dans* A *et qui tend vers* U(Q) *quand le point* P *tend vers le point* Q *de* S, *pourvu que ce point satisfasse à la condition de* POINCARÉ. *Cette fonction s'exprime par l'intégrale de* STIÉLJÈS *étendue à la surface entière,*

$$U(P) = \int_S U(Q)\, d\mu(S, P).$$

Si, de plus, tous les points de S *satisfont à la condition de* POINCARÉ, *la fonction* U(P) *converge vers la valeur assignée* U(Q) *sur toute la frontière et la fonction qui satisfait à cette condition est unique.*

Ces propositions sont la conséquence immédiate des théorèmes précédents.

La question se pose maintenant de savoir si le théorème d'unicité subsiste quand la surface S possède des points qui échappent à la condition de POINCARÉ. Pour étudier l'influence de ces points exceptionnels, il est utile d'introduire la notion d'*ensemble de capacité nulle.*

46. — ENSEMBLE DE CAPACITÉ NULLE [1]. — Nous disons qu'*un ensemble de points de l'espace est de capacité nulle si toute charge positive, si petite soit-elle, attribuée à l'ensemble engendre un potentiel non borné.*

On s'assure immédiatement qu'*un point isolé est de capacité nulle.*

Un arc de courbe rectifiable de longueur l est de capacité nulle. En effet, soit μ la charge de cet arc. Divisons l'arc en deux parties égales et choisissons la moitié qui porte la plus grande part μ_1 de la charge. Divisons cette partie en deux autres et choisissons la moitié qui porte la plus grande part μ_2 de la charge. Continuons ainsi indéfiniment. Ces parties emboîtées ont pour limite un point P. Au point P le potentiel dû aux masses successivement négligées est supérieur à

$$\frac{\mu - \mu_1}{l} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\frac{l}{2}} + \frac{\mu_2 - \mu_3}{\frac{l}{2^2}} + \cdots = \frac{1}{l}(\mu + \mu_1 + 2\mu_2 + 2^2\mu_3 + \cdots).$$

(1) La notion générale de capacité est étudiée dans la Note II à la fin du Mémoire.

Comme chaque masse μ_n surpasse la moitié de la précédente, ce potentiel est infini.

Il suit des propositions précédentes que *toute infinité dénombrable de points ou de lignes rectifiables est de capacité nulle.*

Nous aurons aussi à utiliser le théorème suivant :

Si l'on considère une distribution donnée de la masse positive dans l'espace qui engendre un potentiel borné, et si un ensemble ouvert variable O *a pour limite un ensemble fermé* E *de capacité nulle, la charge portée par* O *tend vers zéro.*

En effet, d'après les propriétés générales des fonctions d'ensemble, la charge portée par E est la limite de celle portée par O, la première devant être nulle, la seconde tend vers zéro.

Plus généralement, si l'on envisage un système de distributions différentes de masses dans l'espace engendrant des potentiels bornés dans leur ensemble, la masse portée par O *tend uniformément vers zéro (quand* O *tend vers* E *de capacité nulle) pour toutes les distributions à la fois.*

En effet, ces distributions sont bornées dans leur ensemble et on peut en extraire une suite convergente. Si la masse ne tendait pas vers zéro *uniformément* quand O tend vers E, on pourrait choisir cette suite de manière que dans la distribution limite, la masse eût une limite différente de zéro sur O, donc fût différente de zéro sur E, ce qui est impossible.

47. — GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'UNICITÉ DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET. — *Si la surface* S *qui borne le domaine* A *présente des points exceptionnels (échappant à la condition de* POINCARÉ), *la fonction harmonique qui prend les valeurs assignées sur la frontière, sauf éventuellement aux points exceptionnels, sera unique, pourvu que l'ensemble* E *des points exceptionnels soit dénombrable ou encore contenu dans un ensemble fermé de capacité nulle.*

Soit U(P) une fonction harmonique qui prend, sauf sur E, les valeurs assignées U(Q) sur le bord du domaine A. Reprenons la suite des domaines Ω_n sommes de sphères, bornés par des surfaces Σ_n, qui convergent vers A, et la suite des distributions correspondantes sur ces surfaces $\mu_n(\Sigma_n, \text{P})$, lesquelles convergent vers $\mu(\text{S}, \text{P})$. En un point donné P_0 du domaine Ω_n, on a, car il n'y a pas de points exceptionnels sur Σ_n,

$$\text{U}(\text{P}_o) = \int_{\Sigma_n} \text{U}(\text{P}) d\mu_n(\Sigma, \text{P}_o).$$

Enfermons l'ensemble E dans un ensemble ouvert O, somme d'une infinité dénombrable de cubes et assez petit pour que la charge de cet ensemble soit $< \varepsilon$ pour toutes les distributions $\mu_n(\Sigma_n, P_0)$, ce qui est possible (comme on l'a dit au nº précédent). Soient σ_n et σ les portions des frontières de Ω_n et de A comprises dans cet ensemble O. Si n tend vers l'infini, dans l'intégrale précédente, U(P) tend vers U(Q) suivant la loi de correspondance convenue entre les surfaces Σ et S (nº 38), sauf sur σ_n. Il vient donc, à la limite,

$$U(P_o) = \int_{S - \sigma} U(Q) d\mu(S, P_o) + \lim \int_{\sigma_n} U(P) d\mu_n(\sigma_n, P_o).$$

Mais l'intégrale sur σ est inférieure à ε max. $|U|$; elle tend donc vers zéro avec ε et l'on obtient, à la limite, quand σ tend vers zéro,

$$U(P_o) = \int_S U(Q) d\mu(S, P_o)$$

Donc la fonction U est déterminée d'une manière unique, car la distribution $\mu(S, P)$ ne dépend pas du choix de cette fonction.

48. — Corollaire. Unicité de la distribution μ. — *Sous les conditions imposées à la surface* S *dans le théorème précédent, la distribution* $\mu(S, P)$ *provenant du balayage de la masse localisée en* P, *est unique pour chaque position de ce point.*

En effet, s'il existait deux lois différentes de distribution, on pourrait choisir les valeurs U(Q) sur S, de manière qu'à ces deux lois correspondent deux fonctions différentes U(P) dans A.

49. — Problème extérieur. — Le balayage du domaine extérieur à une surface fermée S ou à plusieurs surfaces séparées, consiste à balayer l'espace compris entre S et une sphère Γ de rayon infiniment grand. En particulier, on peut balayer la masse unité placée au point P du domaine. La masse rejetée à l'infini donne un potentiel nul et une partie seulement de la masse du point P est balayée sur S, de manière que le potentiel reste le même à l'intérieur. Si le point P s'éloigne à l'infini, la masse distribuée sur S tend vers zéro, puisque le potentiel dû au point P tend vers zéro.

Nous désignerons encore par $\mu(S, P)$ la distribution provenant du balayage sur S de la masse 1 du point P.

Si l'on donne une fonction continue U(Q) sur S, il existe une fonction U harmonique dans le domaine extérieur, et qui prend la valeur U(Q) en tout point Q de S qui vérifie la condition de POINCARÉ (l'intérieur de S devenant ici le domaine extérieur à celui où U est harmonique). Cette fonction harmonique U s'exprime par l'intégrale de STIELTJÈS

$$U(P) = \int_S U(Q) d\mu(S, P).$$

Cette fonction s'annule à l'infini. On prouve, comme dans le cas du plan, que c'est la seule fonction harmonique prenant les valeurs assignées sur S qui soit régulière (c'est-à-dire bornée) à l'infini, mais ceci suppose l'unicité de la distribution $\mu(S, P)$, ce qui aura lieu, en particulier, si tous les points de S satisfont à la condition de POINCARÉ.

Si le point P s'éloigne à l'infini, la masse m balayée sur S tend vers zéro. On démontre aisément, par un raisonnement voisin de celui fait dans le plan (n° 28), que le quotient U : m a, dans ce cas, pour limite la moyenne harmonique des valeurs de U sur S, à savoir celle qui est définie par la distribution d'équilibre de la masse 1 sur cette surface.

La surface S étant une de celles pour lesquelles on peut résoudre le problème de ROBIN, la *capacité* de cette surface est la masse positive nécessaire pour déterminer un potentiel constant égal à l'unité à l'intérieur de la surface [1]. Quand le point P s'éloigne à la distance R d'une origine fixe, il détermine sur la surface le potentiel 1 : R pour R infiniment grand (à un infiniment petit près du second ordre). Donc, si k est la capacité de S, la masse m qui détermine ce potentiel 1 : R est égale à k : R. Donc, quand P tend vers l'infini et que R croît indéfiniment, la limite du produit RU est égale au produit de la moyenne harmonique de U sur S par la capacité k de cette surface.

§ 9. — Résolution du problème intérieur de Dirichlet par un potentiel de simple couche

50. — DÉMONSTRATION D'UN LEMME PRÉLIMINAIRE. — Soit D_0 un domaine d'un seul tenant limité par une surface S_0 d'un seul tenant également et supposée régulière (n° 36). Soit donnée une fonc-

[1] Voir la Note II à la fin du Mémoire.

tion $F(x, y, z)$ continue dans le domaine D_0, douée de dérivées premières continues et dont les trois dérivées secondes F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{zz} sont également bornées et continues dans le domaine D_0.

Supposons que des masses agissantes soient réparties dans le domaine D_0 suivant la densité ρ définie par la formule

$$\rho = -\frac{\Delta F}{4\pi}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ces masses engendreront un potentiel que nous désignerons par U.

Posons

$$u = U - F\ ;$$

je dis que l'on aura [1]

$$\text{(1)} \qquad \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] d\omega = \iint_{S_0} u \frac{du}{dn_i} d\sigma,$$

où $d\omega$ et $d\sigma$ sont les éléments de volume et d'aire, et où $\frac{du}{dn_i}$ est la dérivée suivant la normale intérieure à la surface S_0.

Pour établir la formule (1), nous devons utiliser la formule de POISSON [2]

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

La continuité de ρ ne suffit pas pour justifier cette formule, dont la démonstration classique suppose ρ dérivable. Pour tourner la difficulté, définissons une fonction dérivable ρ' infiniment voisine de ρ, ce qui est toujours possible. Soit U' le potentiel dû à la densité ρ'. Si ρ' tend vers ρ, U' tend vers U et ses dérivées premières vers celles de U, car ces dérivées, dont l'expression est de la forme $\iiint \rho' D \frac{1}{r} d\omega$, varient d'une manière continue avec ρ'.

Posons

$$u = U - F \qquad u' = U' - F.$$

(1) Cette formule qui nous servira à l'identification des potentiels, a été utilisée dans le même but par MATHIEU, *Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme*, chap. 1, art. 15 (Paris, 1885).

(2) *N. Bull. Philom.* 3 (1883). POISSON suppose ρ constant. La démonstration générale est due à GAUSS, *Allg. Lehrsätze*, art. 10 (1840). Œuvres complètes, t. V.

La formule classique de GREEN (1) (où l'on fait $U = V$) nous donne, en appelant dn l'élément de la normale intérieure,

$$(2) \quad \iiint_{D_0} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2\right] d\omega = \iint_{S_0} u' \frac{du'}{dn} d\sigma - \iiint_{D_0} u' \Delta u' d\omega.$$

Mais $\Delta u'$ est (sans difficulté pour u') égal à $\rho' - \rho$. Or $\rho' - \rho$ devient inférieur à tout nombre positif donné ε. Donc la dernière intégrale disparaît à la limite, et, u' devenant égal à u, on obtient la formule (1).

La formule analogue à (1) se démontre aussi pour le plan et nous supposerons cette démonstration faite un peu plus loin.

51. — IDENTIFICATION D'UNE FONCTION DONNÉE AVEC UN POTENTIEL. — *Premier cas.* — Soit $F(x, y, z)$ une fonction donnée, continue ainsi que ses dérivées premières dans tout l'espace, mais nulle en dehors du domaine simplement connexe D_0 limité par une surface régulière S_0. On suppose que les dérivées secondes F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{zz} sont continues dans le domaine D_0. Soit U la fonction potentielle définie au moyen de F comme au numéro précédent, je dis que $F = U$.

En effet, appliquons la formule (1) à une sphère Σ de rayon R infiniment grand. Il vient, les intégrales s'étendant respectivement au volume et à la surface de la sphère,

$$(3) \qquad \iiint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\omega = \iint_{\Sigma} u \frac{du}{dn} d\sigma.$$

Mais, sur la surface Σ, F est nul et u se réduit à U. Or U est le potentiel de masses finies, il est infiniment petit de l'ordre de $1 : R$ sur Σ et sa dérivée l'est de l'ordre de $1 : R^2$; donc la dernière intégrale est infiniment petite de l'ordre de $1 : R$ et elle s'annule à la limite. Il s'ensuit que la somme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

est nécessairement nulle dans l'espace entier, ce qui exige que chacune des trois dérivées premières le soit aussi, et alors u est une constante et cette constante est nulle, puisque u s'annule à l'infini. Donc $F = U$.

(1) PICARD, t. I, chap. V, art. 10.

Deuxième cas. — Supposons, plus généralement, que la fonction $F(x, y, z)$, supposée comme précédemment nulle hors de D_0, satisfasse encore aux conditions de continuité que nous venons de stipuler, sauf sur un certain nombre de surfaces régulières (nº 36), d'abord la surface S_0, ensuite des surfaces $S_1, S_2, \cdots S_k$, formant des cloisons qui décomposent le domaine D_0 en un certain nombre de cellules distinctes. La fonction $F(x, y, z)$ sera encore supposée continue à travers les cloisons, mais ses dérivées premières ne le seront plus : elles seront seulement continues sur chacun des deux bords des cloisons et de la surface frontière S_0.

Nous allons montrer que F est le potentiel dû à des masses spatiales continues réparties dans les cellules et à des masses superficielles continues réparties sur S_0 et sur les cloisons.

Soient respectivement

$$\rho_1 = -\frac{1}{4\pi}\Delta F, \qquad \rho_2 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dF}{dn} + \frac{dF}{dn'}\right)$$

les densités de masses spatiales et de masses superficielles supposées réparties comme on vient de le dire, et nous représentons ici par $\frac{dF}{dn}$ et $\frac{dF}{dn'}$ les deux dérivées normales de sens opposé élevées aux deux bords de S_0 et des cloisons. Les masses ainsi définies engendreront un potentiel U. Considérons la fonction $u = U - F$; elle est harmonique à l'intérieur d'une même cellule et ses dérivées sont continues sur S_0 et les cloisons, de sorte que les dérivées opposées $\frac{du}{dn}$ et $\frac{du}{dn'}$, sont égales et de signes contraires le long de ces surfaces. Menons encore une sphère Σ de rayon R infiniment grand ; appliquons la formule (1) à toutes les cellules intérieures à S_0 et à la nouvelle cellule comprise entre S_0 et Σ, puis ajoutons les résultats. Les intégrales de surface se détruisent deux à deux sur les cloisons internes, reste seule celle étendue à la surface extérieure Σ. Nous retrouvons donc la formule (3) du premier cas et la démonstration s'achève de la même façon.

Remarque. — Dans ce cas comme dans le précédent, *le potentiel* U *est dû à des masses dont la somme algébrique est nulle.* En effet, on a $U = F = 0$ hors de D_0. Donc l'intégrale de $\frac{dU}{dn}d\sigma$ est nulle sur la sphère Σ et, par conséquent, la somme des masses contenues dans cette sphère est nulle, en vertu du théorème de GAUSS. — On peut en donner une autre démonstration. On a, dans chaque cellule, par la formule de GREEN,

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \Delta F d\omega + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{dF}{dn_i} d\sigma = 0.$$

Ajoutons entre elles les équations relatives à toutes les cellules. Ajoutons encore au premier membre l'intégrale de $\frac{dF}{dn_e} d\sigma$ étendue à la surface de la sphère Σ, qui est nulle, car la dérivée normale de F est nulle hors de D_0. Les masses spatiales et superficielles ont respectivement pour sommes les sommes de ces intégrales de volume et de ces intégrales de surface changées de signe. Donc leur somme totale est nulle aussi. Cette nouvelle démonstration a sur la première l'avantage de s'étendre au cas du plan, ce que nous supposerons fait.

52. — EXTENSION DE LA MÉTHODE AU CAS DU PLAN. — La méthode d'identification précédente est applicable au potentiel logarithmique dans le plan. Les surfaces S sont remplacées par des courbes régulières et la sphère Σ par une circonférence infiniment grande Γ. On donne la fonction continue $F(x, y)$, supposée nulle hors d'un domaine borné D_0. On en déduit le potentiel U par le calcul des densités et l'on a $U = F$ comme dans le cas précédent. En effet, on pose $u = U - F$. On constate que U et $dU : dn$ tendent vers zéro sur la circonférence Γ, parce que U est le potentiel dû à des masses dont la somme est nulle (condition qu'on pouvait passer sous silence dans l'espace). On en déduit que u est constant et, par conséquent, nul puisqu'il est nul à l'infini.

53. — RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS L'ESPACE PAR UN POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE (1). — La résolution du problème de DIRICHLET dans l'espace par un potentiel de simple couche est toujours possible si le domaine est borné par des surfaces régulières et si la fonction donnée sur la frontière admet des dérivées des deux premiers ordres, donc, en particulier, si les données sont analytiques. C'est ce que nous allons montrer. Mais la simple continuité des

(1) La représentation des fonctions par des potentiels a été étudiée récemment, mais à un point de vue différent, par M. Frédéric RIESZ. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. *Acta mathemaitca* t. XLVIII (1926), et t. LIV (1930).

données ne suffit pas et ce nouveau procédé exige certainement des conditions plus étroites que la méthode basée sur le balayage de la masse unité. Nous serons cependant conduits à des conclusions qui paraissent dignes d'intérêt.

Soit D un domaine d'un seul tenant, limité par une ou plusieurs surfaces fermées S, régulières ou non. On donne les valeurs d'une fonction continue U(Q) en tout point Q de la surface (simple ou multiple) S et l'on demande de répartir une masse active convenable en couche superficielle sur la surface S de manière à engendrer un potentiel égal à U(Q) sur cette surface.

Enfermons le domaine D à l'intérieur d'une surface fermée simple S_0, régulière comme dans le problème précédent et limitant un domaine intérieur D_0. Si l'on peut définir une fonction continue $F(x, y, z)$ s'annulant sur S_0, prenant les valeurs proposées U(Q) sur la surface S et satisfaisant aux conditions de la démonstration précédente, avec intervention éventuelle du cloisonnement, le problème de DIRICHLET sera résolu.

Il suffira , en effet, de déterminer les masses spatiales et superficielles qu'il faut répartir dans le domaine D_0 pour engendrer le potentiel $F(x, y, z)$. Après cela, il n'y aura plus qu'à balayer séparément l'intérieur et l'extérieur de la surface proposée S. Ce balayage déterminera la distribution, U(S), de la masse sur S qui engendre le potentiel demandé et qui répond à la question.

54. — APPLICATION A UN DOMAINE BORNÉ PAR DES SURFACES RÉGULIÈRES. — Soit d'abord une surface fermée S entièrement régulière, c'est-à-dire à courbures principales bornées. Soit ensuite F(Q) une fonction donnée sur cette surface et continue sur elle, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. Le problème de DIRICHLET se résout par le procédé du cloisonnement comme nous allons le montrer.

Le rayon de courbure principal admet sur la surface S un minimum que nous désignerons par λ. Prenons en chaque point de cette surface et de part et d'autre sur la normale, une longueur $\lambda' < \lambda$ de manière à former deux surfaces S_1 et S_2 parallèles à S et prenons λ' assez petit pour que ces deux surfaces ne se coupent pas elles-mêmes. Définissons maintenant, sur chaque normale, la fonction $F(x, y, z)$ par la condition de varier linéairement de F(Q) à zéro entre S et S_1 et aussi entre S et S_2. Au delà, $F(x, y, z)$ sera nul. Il est clair que la fonction ainsi obtenue satisfait aux conditions du théorème précédent. Elle définit une masse spatiale continue dans les cellules comprises entre S et S_1 et entre S et S_2. Elle définit une couche superficielle sur S, une seconde sur S_1 et une troisième sur S_2. Le calcul de leur densité est immédiat.

55. — APPLICATION A UN DOMAINE ÉTOILÉ. — Considérons une surface fermée simple S dont tous les points soient visibles d'un point intérieur O convenablement choisi. Autrement dit, les rayons vecteurs issus du pôle O ne rencontrent la surface qu'en un point, auquel cas l'on dit que le domaine intérieur à la surface est *étoilé*. Nous supposons que tous les points de la surface satisfont à la condition de POINCARÉ. On donne la fonction continue F(Q) sur la surface. Il s'agit de résoudre le problème intérieur de DIRICHLET.

Donnons-nous arbitrairement une sphère de centre O et projetons les valeurs de F(Q) par les rayons (prolongés au besoin) sur la surface de cette sphère. Nous définissons ainsi une fonction $F_1(Q')$ du point Q' sur la sphère. Nous pouvons maintenant distinguer deux cas différents.

Premier cas. — Si la fonction $F_1(Q')$ admet sur la sphère des dérivées continues des deux premiers ordres, le problème de DIRICHLET peut être résolu.

Menons, en effet, quatre sphères de centre O, deux de rayons R_1 et R_2 intérieures à S et deux autres de rayons R_3 et R_4 extérieures à S. Définissons $F(x, y, z)$ sur chaque rayon par la condition de garder, entre les deux sphères moyennes, la valeur F(Q) assignée sur S, et de varier linéairement de F(Q) à zéro entre les deux sphères intérieures à S ainsi qu'entre les deux sphères extérieures. La fonction sera nulle dans le reste de l'espace. Cette fonction satisfait aux conditions de la démonstration. Elle définit une masse spatiale continue dans les intervalles des sphères et une masse superficielle sur chacune d'elles.

Deuxième cas. — Si les dérivées secondes de $F_1(Q')$ ne sont pas continues sur la sphère, mais ne cessent de l'être qu'à la traversée de certaines lignes régulières sur la sphère, le problème pourra encore être résolu, pourvu que les dérivées premières soient bornées sur ces lignes singulières et continues sur chaque bord. Dans ce cas, il faut faire intervenir un cloisonnage transversal par des cônes de sommet O passant par les lignes singulières. La fonction $F(x, y, z)$ (construite comme précédemment) définit des masses superficielles réparties sur ces cônes et il y aura lieu d'en tenir compte dans le balayage.

56. — APPLICATION A UN DOMAINE PLUS GÉNÉRAL. DOMAINES POLYÉDRIQUES. — Soit D un domaine borné par une surface fermée S. Supposons que l'on puisse tracer une surface régulière S′ suffisamment voisine de S pour qu'aucun centre de courbure principal de S′ ne tombe entre les deux surfaces. Dans ce cas, les normales à la surface S′ peuvent être utilisées comme les rayons vecteurs dans le cas du domaine étoilé. On mènera quatre surfaces S_1, S_2, S_3, S_4 orthogonales à ces normales, propres à remplacer les quatre sphères de la méthode précédente, deux S_1 et S_2 à l'intérieur de S, et deux S_3 et S_4 à l'extérieur de S. Si la fonction F(Q) se projette par la normale sur l'une de ces surfaces suivant une fonction $F_1(Q')$ dont les dérivées secondes sont continues sur la surface, le problème de DIRICHLET sera résolu. Il le sera encore, si cette continuité n'est mise en défaut que sur certaines lignes singulières, pourvu que les dérivées premières de $F_1(Q')$ restent continues sur chacun des deux bords de ces lignes singulières, la discontinuité ne se produisant qu'à la traversée. Ces lignes définiront alors les normalies qui serviront au cloisonnement transversal et remplaceront les cônes utilisés au numéro précédent.

Si le domaine D est borné par plusieurs surfaces fermées séparées, le problème pourra encore se résoudre si chacune de ces surfaces permet une construction analogue à la précédente et satisfaisant aux mêmes conditions.

D'après ce qui précède, le procédé exposé permet de résoudre le problème de DIRICHLET par un potentiel de simple couche pour un *domaine d'un ordre quelconque de connexion, borné par des surfaces polyédriques d'un ordre de connexion également quelconque,* pourvu que la donnée F(Q) soit continue sur chaque polyèdre séparément et que ses dérivées secondes soient continues sur chaque face séparément.

57. — GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS. — La formule (1) sur laquelle s'appuie l'analyse précédente n'exige pas la continuité des dérivées secondes de $F(x, y, z)$ que nous avons supposée et nous pouvons nous affranchir de cette condition. Il suffit, comme nous allons le montrer, d'imposer à F'_x, F'_y et F'_z une condition de LIPSCHITZ.

Soit $F(x, y, z)$ une fonction continue et dérivable dans le domaine D_0 borné par la surface régulière S_0. Donnons à x, y et z les accroissements Δx, Δy et Δz, déterminant respectivement les différences partielles $\Delta_x F'_x$, $\Delta_y F'_y$, $\Delta_z F'_z$ des dérivées de même indice. Nous supposons que les quotients

$$\frac{\Delta_x F'_x}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta_y F'_y}{\Delta y}, \quad \frac{\Delta_z F'_z}{\Delta z}$$

restent de module inférieur à un nombre fixe M pour tous les points du domaine D_0. Dans ce cas, chacun des trois quotients tend, en restant borné, vers la dérivée correspondante F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{zz}, dont l'existence est assurée, sauf au plus dans un ensemble de mesure spatiale nulle. Mais nous pouvons faire abstraction d'un tel ensemble dans le calcul d'une intégrale de volume.

Soit U le potentiel engendré par des masses réparties suivant la densité

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}\right).$$

Substituons d'abord à U le potentiel voisin U' engendré par des masses réparties suivant une densité voisine ρ'. Cette densité ρ' sera définie par la formule

$$\rho' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\Delta F'_x}{\Delta x} + \frac{\Delta F'_y}{\Delta y} + \frac{\Delta F'_z}{\Delta z}\right)$$

où l'on donnera à Δx, Δy et Δz la même valeur positive h tant que cet accroissement h ne conduit pas à l'extérieur de D_0, et la plus grande valeur qui n'y conduit pas dans le cas contraire. La densité ρ' est alors continue dans le domaine ouvert D_0 et tend vers ρ en restant bornée quand h tend vers zéro.

Nous avons

$$U' = \iiint_{D_0} \rho' \frac{d\omega}{r}, \qquad U'_x = -\iiint_{D_0} \rho' \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\omega}{r^2}$$

et des valeurs analogues pour U'_y et U'_z. Les éléments de ces intégrales de volume sont respectivement dans un rapport borné avec les éléments positifs $d\omega : r$ et $d\omega : r^2$ qui sont ceux de deux intégrales convergentes indépendantes de ρ'. Par conséquent, quand ρ' tend vers ρ, on peut, à la limite, remplacer ρ' par ρ dans ces intégrales. Ainsi, U', $U'_x, \cdots$ tendent en restant bornés vers U, $U'_x, \cdots$ quand h tend vers zéro.

Posons

$$u' = U' - F, \qquad u = U - F.$$

Si h tend vers zéro, u', $\frac{\partial u'}{\partial x}, \cdots$ tendent vers u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ en restant bornés. Or, ρ' étant continue, la formule (2) est, comme nous l'avons prouvé (n° 50), applicable à u', ce qui donne

$$\iiint_{D_0} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)\right] d\omega = \iint_{S_0} u' \frac{du'}{dn}\, d\sigma - \iiint_{D_0} u'(\rho' - \rho)\, d\omega.$$

A la limite, $\rho' - \rho$ s'annule et le dernier terme disparaît. D'autre part, u' et ses dérivées tendent vers u et ses dérivées en restant bornées. On peut donc remplacer u' par u dans la formule précédente et l'on retrouve la formule (1).

En même temps que la formule (1), nous avons généralisé tous les énoncés des théorèmes précédents. Dans chacun d'eux la condition de continuité des dérivées secondes de la donnée peut être remplacée par la condition que les dérivées premières soient uniformément lipschitziennes.

En particulier, *on peut résoudre le problème de* DIRICHLET *par un potentiel de simple couche dans un domaine borné d'une manière quelconque par des surfaces polyédriques, pourvu que la fonction donnée* F(Q) *soit continue sur ces surfaces et que ses dérivées premières soient lipschitziennes sur chacune des faces isolément.*

On peut aller plus loin. Le passage à la limite qui ramène à la formule (1) n'exige pas que les dérivées de u' soient bornées et, par conséquent, la solution du problème de DIRICHLET ne l'exige pas non plus. Mais cette simple remarque suffira pour le moment.

58. — RÉSOLUTION PAR DES POTENTIELS DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE PLAN. — La théorie précédente s'étend au plan à une différence près. Étant donnée la fonction F(Q) sur le contour C d'un domaine simplement connexe dans le plan, on peut engendrer le potentiel F sur C au moyen de masses superficielles et linéaires en complète correspondance avec le procédé suivi pour l'espace. Si l'on balaye le domaine intérieur à C, on résout le problème intérieur de DIRICHLET par des potentiels de masses dont la somme algébrique est nulle, ce qui est encore conforme à ce qui arrive dans l'espace. Seul, le balayage du domaine extérieur différencie les deux problèmes.

Le balayage du domaine extérieur dans l'espace conserve le potentiel à l'intérieur, mais fait varier les masses, dont la somme cesse, par conséquent, d'être nulle. Dans le plan, le balayage conserve les masses et fait croître ou décroître le potentiel d'une constante suivant que les masses sont positives ou négatives. Ainsi, dans le plan, le problème de DIRICHLET se résout, à une constante près, par un potentiel de simple couche et avec des masses dont la somme algébrique est nulle.

Pour faire disparaître cette différence constante, il faut donc ajouter ou retrancher une charge en équilibre déterminant un potentiel constant égal à cette différence. Mais il y a un cas d'exception où cette opération est impossible, c'est celui où le contour est de capacité infinie, c'est-à-dire celui où le potentiel d'équilibre est nul quelle que soit la charge. Tel serait le cas pour un cercle de rayon *un*.

Il est facile, connaissant la donnée F(Q), de fixer *à priori* le potentiel qu'il faudra ajouter à celui U que donne la charge nulle obtenue par le balayage. Soit, en effet, U_1 la fonction harmonique qui résout le problème extérieur avec la même donnée. La différence $U_1 - U$ est constante sur C et régulière à l'infini, donc elle est constante dans le domaine extérieur. Sa valeur est celle de U_1 à l'infini, car celle de U est alors nulle : c'est donc la moyenne harmonique de F(Q) sur le contour C

Nous avons considéré jusqu'ici un domaine simplement connexe. Si le domaine entier se compose de plusieurs domaines simplement connexes, extérieurs les uns aux autres, limités chacun par un contour simple, le domaine extérieur est à connexion multiple et borné par l'ensemble C de ces contours. Il n'en résulte aucune difficulté nouvelle.

Si le domaine considéré est à connexion multiple, il sera borné par des contours externes C_1 et des contours internes C_2. Le domaine extérieur se compose de plusieurs régions, les unes finies et bornées par C_2 et une seule infinie limitée par C_1. Les considérations précédentes sur le domaine extérieur s'appliqueront exclusivement à la région infinie et à son contour C_1.

La méthode précédente permet, dans des cas très généraux, de résoudre le problème de DIRICHLET pour des aires bornées par des contours présentant toutes sortes d'irrégularité. Elle conviendrait moins bien à la détermination de conditions nécessaires et suffisantes imposées à la donnée pour que le problème soit possible avec un contour régulier donné. Dans certains cas simples, comme celui du cercle, l'étude directe de l'équation intégrale peut alors conduire à des résultats précis, comme l'a prouvé M. E. PICARD dans un *Mémoire* remarquable publié en 1910 et reproduit dans les *Selecta* de 1928 [1].

NOTE I

Suites convergentes de fonctions d'ensemble. Passage à la limite sous le signe d'intégration. Balayage d'un ensemble ouvert.

59. — CORRESPONDANCE ENTRE LES FONCTIONS POSITIVES D'ENSEMBLE ET LES FONCTIONS DE POINT. — Nous considérerons d'abord des fonctions d'une variable et des ensembles linéaires.

Toute fonction positive, $F(e)$, d'ensemble linéaire dans un intervalle (a, A) de valeurs de x définit immédiatement une fonction $f(x)$ du point x qui est positive et non décroissante dans cet intervalle. Il suffit de donner à $f(x)$ la valeur de F sur l'intervalle (a, x).

Réciproquement, une fonction $f(x)$ non décroissante dans l'intervalle (a, A) définit une fonction positive et additive d'ensemble dans cet intervalle. C'est ce que nous allons brièvement montrer [2].

Nous remarquons d'abord que $f(x)$ admet, au plus, une infinité dénombrable de points de discontinuité dans l'intervalle considéré, à savoir les points x_1, x_2,... Excluant ces points, nous appellerons *intervalle régulier* un intervalle borné par des points de continuité (ou *points réguliers*).

La fonction $f(x)$ définit, pour commencer, une fonction positive d'intervalles réguliers, qui sera, comme on le constate immédiatement, additive sur les intervalles contigus. Désignons, en effet, par i un intervalle régulier $(x, x+h)$, nous posons

$$F(i) = f(x+h) - f(x).$$

(1) Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique. *Rendiconti del circolo mathicmatico di Palermo*, t. XXIX (1910), p. 79-97.

(2) On consultera pour de plus amples détails notre ouvrage *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, chap. IV, Coll. Borel, Paris, 1916.

L'intervalle entier (a, A) sera, par extension, considéré comme régulier, et la fonction F prendra sur cet intervalle la valeur $f(A) - f(a)$.

Ceci fait, il existe une fonction complètement additive d'ensemble et une seule, $F(e)$, qui coïncide avec $F(i)$ sur les intervales réguliers. Cette fonction est, en effet, déterminée sur les ensembles ouverts, car ce sont des sommes d'intervalles réguliers. Elle l'est aussi sur les ensembles fermés, car ce sont les différences d'un intervalle régulier et d'un ensemble ouvert. Elle est ainsi déterminée, de proche en proche, sur tous les ensembles mesurables (B), ce qui nous suffit.

Nous avons utilisé dans cette construction les intervalles réguliers, parce que la valeur de la fonction d'ensemble $F(e)$ est alors la même que l'intervalle soit ouvert ou fermé. Il n'en est pas ainsi sur un intervalle irrégulier $(x_1\, x_2)$, auquel cas la valeur de F sera généralement différente de $f(x_2) - f(x_1)$, comme il est facile de s'en assurer, en vertu des définitions précédentes.

Passons maintenant aux fonctions de deux variables et aux ensembles à deux dimensions.

Soit $F(e)$ une fonction positive d'ensemble, définie pour tous les ensembles e compris dans un rectangle R. Ce rectangle s'étend à l'intervalle (a, A) de x et à l'intervalle (b, B) de y. La fonction $F(e)$ définit une fonction $f(x, y)$ dans R. Il suffit de donner à $f(x, y)$ la valeur de F sur le rectangle étendu aux intervalles (a, x) et (b, y).

La fonction $f(x,y)$ ainsi définie est évidemment une fonction non décroissante de x et de y, mais c'est, en outre, une *fonction positive d'intervalle* dans le plan. On donne ici le nom *d'intervalle* à l'ensemble de deux intervalles linéaires $(x, x + h)$ et $(y, y + k)$. La valeur de $f(x, y)$ sur cet intervalle est, par définition,

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y),$$

et elle coïncide avec celle de F qui est positive.

Réciproquement, toute fonction $f(x, y)$ bornée, non décroissante de x et de y et qui est une fonction positive d'intervalle dans R définit une fonction positive et additive d'ensemble dans ce domaine. En effet, d'après la définition précédente, la valeur de la fonction $f(x,y)$ sur un intervalle somme de deux autres est la somme de ses valeurs sur chacun de ceux-ci. Il s'ensuit que $f(x,y)$ croît d'autant plus vite avec x ou avec y que l'autre variable a une valeur plus grande. Donc $f(x, y)$ croît moins vite avec x que $f(x, B)$ et moins vite avec y que $f(A, y)$ dans le rectangle R. Or la fonction croissante $f(x, B)$ ne peut admettre, au plus, qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité $x_1, x_2, \cdots, f(A,y)$ ne peut admettre, au plus, qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité $y_1, y_2, \cdots$, Il en résulte que $f(x, y)$ est fonction continue de x et de y, sauf au plus sur une infinité dénombrable de *droites singulières* $x = x_r$, $y = y_s$.

Nous appellerons *intervalles réguliers* dans le plan, ceux qui sont des rectangles limités par des droites non singulières.

La fonction $f(x, y)$ définit d'abord une fonction $F(i)$ positive et additive d'intervalles réguliers i, prenant, par définition, la valeur de $f(x, y)$ sur ces intervalles. Alors, comme dans le cas précédent, il existe une fonction complètement additive d'ensemble et une seule, $F(e)$, qui coïncide avec $F(i)$ sur les intervalles réguliers.

Cette correspondance entre les fonctions de point et celles d'ensemble subsiste quel que soit le nombre des dimensions. Il nous suffira de la préciser dans l'espace.

Une fonction $f(x, y, z)$, ou $f(P)$, qui est définie dans uu intervalle à trois dimensions (a, A), (b, B) (c, C), qui s'annule dans les plans $x = a$, $y = b$, $z = c$ et qui est une fonction positive d'intervalle, c'est-à-dire qui prend une valeur positive $\Delta_x\Delta_y\Delta_z f$ sur tout intervalle $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ compris dans le précédent, définit une fonction positive d'ensemble $F(e)$. En effet, la fonction $f(x, y, z)$ sera continue sauf, au plus, sur une infinité dénombrable de *plans singuliers* $x = x_r$, $y = y_s$, $z = z_t$. Les *intervalles réguliers* étant limités par des plans non singuliers, cette fonction $f(P)$ définit d'abord une fonction $F(i)$ d'intervalle régulier, et la fonction d'ensemble cherchée $F(e)$ est celle qui coïncide avec $F(i)$ sur les intervalles réguliers.

Réciproquement, la fonction positive d'ensemble $F(e)$ définit une fonction de points $f(P)$ jouissant des propriétés supposées ci-dessus, en donnant à $f(P)$ la valeur de F sur l'intervalle (a, x), (b, y), (c, z).

60. — Convergence des suites de fonctions d'ensemble. — Considérons une suite de fonctions positives d'ensemble

$$F_1(e),\ F_2(e),\ \cdots\ F_n(e),\ \cdots \tag{1}$$

définies dans un intervalle R à une ou plusieurs dimensions, et la suite des fonctions correspondantes de point

$$f_2(P),\ f_2(P),\ \cdots\ f_n(P),\ \cdots \tag{2}$$

qui sont nulles par construction sur les frontières initiales de l'intervalle R. S'il existe une fonction de point $f(P)$ qui s'annule sur ces mêmes frontières, qui est une fonction positive d'intervalle et qui définit, par conséquent, une fonction d'ensemble $F(e)$, si enfin $f(P)$ est, en tous ses points de continuité, la limite de la suite (2), on dira que la suite (1) est convergente et qu'elle a pour limite la fonction d'ensemble $F(e)$.

Avec cette définition nous avons le théorème suivant :

Si la suite (1) *est convergente et converge vers* $F(e)$, *on a, quand n tend vers l'infini,*

$$\lim F_n(e) = F(e),$$

mais sous la condition que F *s'annule sur la frontière de e.*

Ce théorème se vérifie directement si l'ensemble e est, pour tous les f_n, un intervalle régulier i [1]. En effet, $F_n(i)$ s'exprime linéairement au moyen des valeurs de f en un certain nombre de points de continuité $P_1, P_2, \cdots$ On peut écrire, en abrégé,

$$\lim F_n(i) = \lim \Sigma [\pm f_n(P)] = \Sigma [\pm f(P)] = F(i).$$

Pour étendre le théorème à l'ensemble e dans le cas général, désignons par O l'ensemble ouvert étendu à tout e, frontière exclue ; on a, par hypothèse, $F(e) = F(O)$. Soit O' un ensemble somme d'un nombre fini d'intervalles réguliers (pour tout f_n) et qui embrasse progressivement tout O. On a, quand n tend vers l'infini,

$$F_n(e) \gtreqless F_n(O'), \qquad \lim F_n(O') = F(O')$$

Donc, à la limite, quand O' tend vers O,

$$\lim F(O') = F(O) = F(e), \qquad \lim_{n=\infty} F_n(e) \gtreqless F(e).$$

Mais, dans cette dernière relation, l'égalité seule est possible, car on établit une relation de même sens pour le complémentaire Ce relativement à R. Si l'inégalité avait lieu, on en déduirait, par l'addition des deux relations analogues,

$$\lim_{n=\infty} [F_n(e) + F_n(Ce)] > F(e) + F(Ce),$$

ce qui est impossible, les deux membres valant F(R).

61. — Passage a la limite sous le signe d'intégration. — Considérons encore la suite des fonctions $F_n(e)$ ayant pour limite $F(e)$ dans un intervalle R et, en même temps, une suite de fonctions continues de point $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n(P), \cdots$ convergeant vers une fonction continue $\varphi(P)$ dans R. Supposons que les fonctions d'ensemble $F_n(e)$ soient toutes nulles en dehors d'un ensemble fermé E intérieur à R (au sens étroit) et formons l'intégrale

$$(1) \qquad \int_E \varphi_n(P) dF_n(e),$$

dans laquelle P est un point de l'ensemble de diamètre infiniment petit de. Je dis que si n tend vers l'infini, cette intégrale a pour limite

$$(2) \qquad \int_E \varphi(P) dF(e).$$

(1) On observera que la suite des fonctions f_n n'admet, dans son ensemble, qu'une infinité dénombrable de lignes ou de plans singuliers.

L'intégrale (I) est la même que

$$\int_R \varphi(P) dF_n(e).$$

Pour la calculer, décomposons R en ensembles e_k de diamètres aussi petits qu'on voudra. Soient m_k^n et M_k^n les deux bornes de $\varphi_n(P)$ dans e_k. Cette intégrale est intermédiaire entre les deux sommes

$$\Sigma\, m_k^n F_n(e_k), \qquad \Sigma\, M_k^n F_n(e_k),$$

qui, pour n infini, ont pour limites respectives

$$\Sigma\, m_k F(e_k), \qquad \Sigma\, M_k F(e_k),$$

où m_k et M_k sont les bornes de $\varphi(P)$ dans e_k. Mais ces deux dernières sommes sont aussi voisines que l'on veut de l'intégrale

$$\int_R \varphi(P) dF(e),$$

et telle est donc la limite de l'intégrale (I).

Mais l'ensemble E étant fermé, son complémentaire relativement à R est une somme d'intervalles *réguliers* sur chacun desquels F (limite des F_n) est nul. Donc F s'annule sur ce complémentaire et la dernière intégrale est la même que (2), ce qui prouve le théorème.

62. — Suite normale de fonctions d'ensemble. — Une famille de fonctions positives d'ensemble sera dite *normale*, si de toute infinité de fonctions appartenant à la famille on peut extraire une suite convergente. Nous avons alors le théorème suivant :

Toute suite illimitée de fonctions positives d'ensemble également bornées (admettant une borne commune) est une suite normale.

Considérons une suite illimitée de fonctions positives d'ensemble satisfaisant à cette condition

$$(1) \qquad F_1(e),\ F_2(e),\ \cdots\ F_n(e),\ \cdots$$

Nous supposerons, pour fixer les idées, que les ensembles sont à deux dimensions et contenus dans un intervalle R, mais le raisonnement est général, Nous choisirons l'origine des axes et l'échelle de façon que l'intervalle R se compose des intervalles (0,1) pour x et (0,1) pour y.

A la suite (1) correspond une suite de fonctions de points qui s'annulent sur les axes coordonnés et sont des fonctions positives d'intervalle, à savoir

$$(2) \qquad f_1(P),\ f_2(P),\ \cdots\ f_n(P),\ \cdots$$

Ces fonctions sont également bornées. On peut donc en extraire une suite convergente en un point particulier P_0. De proche en proche, on peut donc en extraire, par le procédé de la diagonale, une suite convergente pour l'infinité dénombrable des points de coordonnées rationnelles. Soit $f(P)$ la fonction égale à la limite de la suite en un point P rationnel. Achevons la définition de $f(P)$ dans R en donnant à $f(P)$ en un point P non rationnel la valeur limite de $f(P')$, quand P' tend vers P avec des coordonnées rationnelles simultanément décroissantes. Cette limite est unique, car $f(P'')$ sera $\gtreqless f(P')$ si les deux coordonnées de P'' sont inférieures à celles de P'. La fonction $f(P)$ maintenant partout définie est une fonction positive d'intervalle. Elle est additive, comme les fonctions f_n, sur les intervalles contigus qui sont rationnels. Elle l'est encore sur les non rationnels, car deux intervalles contigus quelconques sont les limites d'intervalles contigus rationnels dont les sommets tendent vers leur limite de la manière supposée dans la définition précédente. Donc, comme on l'a déjà expliqué (n° 59), la fonction $f(P)$ est continue, sauf, au plus, sur une infinité de droites singulières $x = x_r$ et $y = y_s$.

Considérons la suite extraite de (2) qui tend vers $f(P)$ aux points rationnels, à savoir

$$(3) \qquad f_{11}(P),\ f_{12}(P),\ \cdots f_{1n}(P),\ \cdots$$

Je dis que cette suite tend encore vers $f(P)$ en tout point de continuité de cette dernière fonction.

En effet, soient P' et P'' deux points rationnels qui tendent vers un point de continuité P, le premier avec des coordonnées plus petites et le second avec des coordonnées plus grandes. La valeur de $f_{1n}(P)$ est intermédiaire entre $f_{1n}(P')$ et $f_{1n}(P'')$ qui ont pour limites respectives $f(P')$ et $f(P'')$. Mais ces deux valeurs sont aussi voisines que l'on veut de $f(P)$, en vertu de la continuité supposée, donc $f_{1n}(P)$ a pour limite $f(P)$.

Extrayons donc de la suite (1) la suite ds fonctions qui correspondent à celles de la suite (3)

$$F_{11}(e),\ F_{12}(e),\ \cdots F_{1n}(e),\ \cdots$$

Cette suite est convergente et elle a pour limite la fonction $F(e)$ définie, par $f(P)$, conformément aux définitions (n° 60).

63. — Ensembles sur une surface courbe. — Les ensembles sur une surface courbe sont des ensembles particuliers à trois dimensions et tombent comme tels sous l'application des théorèmes précédents. Mais ces théorèmes s'appliquent aussi sans sortir des deux dimensions de la surface.

Si l'on considère des ensembles sur un morceau de surface simplement connexe, limité sur un seul contour simple, il suffit de faire une représentation bicontinue de l'aire sur le plan. Les coordonnées cartésiennes x. y dans le plan deviennent des coordonnées curvilignes sur la surface et les théorèmes s'appliquent sur la surface comme dans le plan.

Si les ensembles sont portés par une surface fermée ou à connexion multiple, on la décompose en morceaux satisfaisant aux conditions du cas précédent. En même temps, chaque fonction d'ensemble sera décomposée en une somme d'autres s'évanouissant chacune sur tous les morceaux sauf un. Les théorèmes s'appliquent à chaque composante et, par conséquent, à leur somme.

La normalité des suites de fonctions d'aires qui a été admise dans la théorie du balayage et les passages à la limite qui s'en déduisent (n^{os} 38, 39 et 40) se justifient par les considérations précédentes.

64. — BALAYAGE D'UN DOMAINE OUVERT ET BORNÉ QUELCONQUE. — Les principes précédents permettent de définir le balayage d'un domaine ouvert A sans faire aucune hypothèse sur la frontière, mais en renonçant à une partie des résultats obtenus avec les conditions antérieures.

Soit U le potentiel engendré par des masses positives réparties d'une manière quelconque dans le domaine ouvert A et soit F la frontière de A. On peut toujours balayer les masses de l'intérieur sur la frontière suivant une loi $\mu(e)$ telle que le potentiel dû à cette répartition.

$$V(P) = \int_F \frac{d\mu(e)}{r},$$

soit égal au potentiel primitif U dans le complémentaire de $A + F$. Il suffit, en effet, de considérer $A + F$ comme la limite d'une suite de domaines A_n bornés par des surfaces régulières S_n, celles-ci ayant pour limite F. Les distributions $\mu_n(e)$ sur les surfaces S_n provenant du balayage des domaines D_n, sont bornées et on peut en extraire une suite convergente (dans l'espace) ayant pour limite une distribution spatiale $\mu(e)$ sur la frontière F. Le potentiel U sera toujours exprimé hors de $A + F$ par l'intégrale V précédente. La valeur de V sera inférieure à U dans A et peut-être aussi sur F, mais nous ne pouvons rien dire de plus pour le moment.

NOTE II

Sur la définition de la capacité.

65. — BIBLIOGRAPHIE. — C'est M. H. LEBESGUE qui a montré le premier le rôle des *ensembles de capacité nulle* (n° 46) dans la théorie des fonctions harmoniques. Son article sous le titre : Sur les singularités des fonctions harmoniques a paru dans les *Comptes rendus*, t. CLXXVI (1923). Toutefois M. LEBESGUE ne donne pas à ces ensembles le nom précédent et il n'en donne pas non plus la définition que nous avons proposée (nº 46). La notion de *capacité d'un ensemble* a été introduite par M. WIENER : Certains notions of potential theory (*Journ. of math. and physic of the Mass. Inst. of techn.* t. III, 1924) et par M. BOULIGAND : Sur le problème de DIRICHLET (*Ann. de la Soc. polonaise de math.*, 1925, p. 80). Elle a été utilisée par M. KELLOG : On the classical DIRICHLET probleme for general domains (*Proc. of the nation. Acad. of sciences*, t. XII, VI, juin 1926, p. 402). M. F. VASILESCO a fait une analyse approfondie de la notion de capacité dans son Mémoire sur les singularités des fonctions harmoniques (*Journ. de Villat*, t. IX, 1930, pp. 81-111). Plus récemment encore, M. BOULIGAND a fait usage de cette notion dans une Note : *Sur les ensembles impropres dans le problème de Dirichlet pour une équation du type elliptique* (*Bull. Ac. des Sciences de Belgique*, 5e série, t. XVII, 1931, pp. 40-41 (1).

Les auteurs précédents ont donné de la capacité d'un ensemble une définition indirecte. Nous vous proposons ici d'en donner une nouvelle définition, d'ailleurs équivalente pour les ensemble fermés, mais fondée sur la considération des masses.

66. — CAPACITÉ. — *La capacité d'un ensemble borné* E *est la borne supérieure des charges qu'il peut soutenir sans que son potentiel surpasse l'unité.*

Si l'ensemble E est un domaine fermé, simplement connexe, borné par une surface vérifiant partout la condition de POINCARÉ, ou si E se compose de plusieurs domaines tels extérieurs les uns aux autres, c'est un domaine pour lequel le problème de ROBIN admet une solution unique, minimant la borne du potentiel (nº 42). La charge égale à la capacité se répartit sur la surface de manière à déterminer un potentiel égal à 1 dans le domaine entier. Si le domaine est à connexion multiple, les vides ne jouent aucun rôle et la charge se porte tout entière sur la frontière externe. Si le domaine est ouvert, sa capacité est encore déterminée, mais la charge limite est rejetée en dehors sur la frontière et la borne assignée dans la définition est inaccessible. Nous allons voir que cette dernière éventualité ne peut se présenter si l'ensembl E est fermé.

67. — THÉORÈME. — *La capacité d'un ensemble fermé et borné* E *est la limite de celle d'une suite de domaines* D_n $(n = 1, 2, \cdots)$, *dont les frontières sont des surfaces assujetties à la condition de Poincaré qui contiennent* E *et qui ont* E *pour limite quand n tend vers l'infini.*

Nous observons d'abord que si un ensemble E est contenu dans un autre,

(1) Signalons encore les articles suivants : O. D. KELLOG et VASILESCO, *A contribution to the theory of capacity. Amer. Journ. of Mathematisc*, Vol. LI, 1928. O. D. KELLOG, *On capacity of sets of Cantor type*. Id. Vol. LIII, No 2, 1931.

il n'est pas de capacité supérieure, puisque toute charge portée par le premier ensemble l'est par le second. Nous avons donc une première relation.

$$\text{capac. E} \overline{\gtrless} \lim \text{capac. } D_n.$$

Nous allons établir une relation de sens opposé.

Considérons la suite des domaines $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$; nous supposons que chacun d'eux est intérieur au précédent et qu'ils ont pour limite E. Leurs capacités $m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots$ forment une suite non croissante ayant une limite m. Désignons par $\mu_n(e)$ la fonction exprimant la distribution de m_n dans D_n. Cette distribution sur la frontière peut toujours être considérée comme spatiale. Les fonctions d'ensemble μ_n étant également bornées, forment une suite normale dans D_1. Nous pouvons en extraire une suite convergente dans D_1 et nous pouvons encore admettre que ce soit précisément la suite $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ et qu'elle ait pour limite la distribution $\mu(e)$. Soit maintenant P un point extérieur à E, il l'est aussi à un domaine Δ qu'on se donnera et qui contiendra tous les D_n à partir d'un certain rang. Nous ne conserverons que ceux-là.

Soit $U_n(P)$ le potentiel dû à la charge m_n, qui détermine le potentiel 1 sur D_n ; nous avons, au point extérieur P,

$$U_n(P) = \int_\Delta \frac{d\mu_n(e)}{r} < 1,$$

et, à la limite, par le théorème du n° 61,

$$\lim U_n(P) = \int_\Delta \frac{d\mu(e)}{r} < 1.$$

Mais $\mu(e)$ exprime la distribution sur E de la charge m (limite de m_n) et celle-ci engendre un potentiel inférieur à l'unité hors de E. Nous avons donc

$$\text{capac. E} \overline{\gtrless} \lim \text{capac. } D_n,$$

ce qui achève la démonstration.

Le théorème que nous venons de démontrer prouve, pour les ensembles fermés, l'équivalence de notre définition de la capacité avec celle proposée par M. WIENER dans le Mémoire cité.

68. — THÉORÈME. — *Si l'ensemble* E *est borné et fermé, il existe au moins une répartition sur sa frontière externe d'une masse égale à sa capacité et dont le potentiel ne surpasse pas l'unité.*

La frontière externe de E est celle du domaine d'un seul tenant extérieur à E qui s'étend à l'infini.

Ce théorème résulte de la démonstration précédente.

La distribution limite obtenue $\mu(e)$ est celle d'une masse m égale à la capacité de E et, par suite de sa définition, elle est, comme pour un domaine, entièrement portée par la frontière externe de l'ensemble.

Il suit de là que la capacité d'un ensemble est la même que celle de sa frontière externe. Ce résultat était immédiat, car on n'augmente pas le potentiel en balayant les masses de l'intérieur d'un domaine sur sa frontière.

69. — THÉORÈME. — *S'il existe diverses répartitions possibles sur l'ensemble* E *d'une masse m égale à sa capacité n'élevant pas le potentiel au-dessus de* 1, *elles engendrent toutes le même potentiel* U *dans le domaine infini d'un seul tenant extérieur à* E.

Soit U le potentiel engendré par la répartition $\mu(e)$, limite des répartitions μ_n considérées ci-dessus, et soit U_n le potentiel dû à μ_n. Soit ensuite $\nu(e)$ une autre répartition sur E de la même masse m (capacité de E) et V le potentiel $\leqq 1$ dû à cette nouvelle répartition ; V est certainement < 1 sur la surface qui borne D_n (car elle est extérieure à E), et l'on a, par conséquent, dans tout le domaine infini extérieur à D_n, la relation $V < U_n$, d'où

$$V \leqq \lim U_n = U.$$

Il suit de là que la distribution sur E, suivant la loi $\mu(e) - \nu(e)$, d'une masse $(m - m)$ algébriquement nulle, engendre un potentiel U — V nul ou positif sur toute surface S enfermant E. Je dis que U — V est constamment nul sur cette surface. En effet, si le point P s'éloigne à la distance R infiniment grande de l'origine, le produit R(U — V) tend (à un facteur positif constant près) vers une moyenne entre les valeurs de U — V sur S (n° 49), moyenne qui sera positive si U — V n'est pas toujours nul. Mais R(U — V) tend vers zéro, parce que la masse totale est nulle. Donc U = V.

70. — ENSEMBLE RÉDUIT. — Un ensemble est de capacité nulle, si toute charge positive lui donne un potentiel non borné. La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité nulle est donc aussi de capacité nulle.

Un point P d'un ensemble fermé E sera dit *capable* si toute sphère de centre P et de rayon si petit soit-il, contient une portion de E de capacité non nulle. Il est *incapable* si la portion de E contenue dans cette sphère est de capacité nulle dès que le rayon de la sphère est suffisamment petit.

Alors un point incapable peut aussi être enfermé dans une sphère de rayon rationnel et dont le centre est de coordonnées rationnelles, dans laquelle E est de capacité nulle.

Il suit de là que l'emsemble des points incapables de E peut être enfermé dans une infinité dénombrable de sphères dans lesquelies E est de capacfté nulle. Donc l'ensemble des points incapables de E est de capacité nulle.

L'ensemble des points capables d'un ensemble est un nouvel ensemble fermé contenu dans le premier et auquel M. VASILESCO [1] a donné le nom

(1) Mémoire cité, n° 19.

d'*ensemble réduit*. Nous dirons, avec lui, qu'un ensemble dont tous les points sont capables est un ensemble réduit. Donc *la capacité d'un ensemble fermé est la même que celle de l'ensemble réduit.*

71. — THÉORÈME. — *Supposons que la répartition sur un ensemble* E *borné et fermé d'une masse égale à sa capacité engendre un potentiel non supérieur à l'unité. Ce potentiel* U(P) *a pour borne supérieure l'unité dans toute sphère centrée sur un point capable de l'ensemble.*

Soit Σ une sphère centrée sur un point capable et circonscrivant une portion E_1 (fermée) de E. La capacité de E_1 ne sera pas nulle. Nous allons montrer que si U(P) n'admettait pas la borne 1 dans Σ, la capacité de E_1 ne serait pas la limite de celle d'un domaine variable Δ_n ayant pour limite E_1, ce qui est en contradiction avec un théorème antérieur (n° 67).

Considérons, comme précédemment, une suite de domaines $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$ décroissants ayant pour limite E ; leurs capacités $m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots$ ont pour limite celle m de E. Soient $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ les répartitions d'équilibre de ces masses sur les domaines correspondants, admettant (ce que nous pouvons supposer), une limite μ, qui est la répartition de la masse m sur E.

Nous admettons que la surface de la sphère Σ ne porte aucune charge dans la distribution μ. Au besoin, on remplacerait la sphère Σ par une autre plus petite satisfaisant à cette condition, ce qui est possible, car il ne peut y avoir qu'une infinité dénombrable de sphères exceptionnelles (sinon la masse serait infinie).

Désignons par $U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$ et U les potentiels dus aux distributions $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ et μ. Nous avons, les intégrales s'étendant au volume Σ de la sphère et à l'espace complémentaire $C\Sigma$,

$$U_n(P) = \int_\Sigma \frac{d\mu_n(e)}{r} + \int_{C\Sigma} \frac{d\mu_n(e)}{r}, \qquad U(P) = \int_\Sigma \frac{d\mu(e)}{r} + \int_{C\Sigma} \frac{d\mu(e)}{r}.$$

Considérons uniquement les points P intérieurs au sens strict à la sphère Σ. Pour ceux-ci, leur distance r à de ne tend pas vers zéro dans $C\Sigma$; donc, quand n tend vers l'infini, le second terme dans la valeur de $U_n(P)$ tend vers le second terme dans la valeur de U(P).

Nous avons donc

$$\lim U_n(P) - U(P) = \lim \int_\Sigma \frac{d\mu_n(e)}{r} - \int_\Sigma \frac{d\mu(e)}{r},$$

Il y a lieu d'observer que la définition de la limite $\mu(e)$ n'a pas été altérée par la division de l'espace en deux parties Σ et $C\Sigma$, parce que $\mu(e)$ est supposé s'annuler sur la frontière commune.

Procédons maintenant avec le domaine partiel E_1 comme nous avons procédé avec E.

Enfermons E_1 dans une suite de domaines Δ_n ayant E_1 pour limite. Définissons Δ_n comme étant la portion de D_n circonscrite par la sphère Σ. La distribution sur Δ_n de la charge d'équilibre égale à sa capacité peut être considérée comme la somme de deux autres : la charge précédente $\mu_n(e)$ et une seconde charge $\nu_n(e)$ provenant du balayage des masses que la distribution $\mu_n(e)$ laisse à l'extérieur de la sphère Σ. Cette distribution d'équilibre de la masse égale à la capacité de Δ_n engendre le potentiel

$$u_n(\mathrm{P}) = \int_\Sigma \frac{d\mu_n(e)}{r} + \int_\Sigma \frac{d\nu_n(e)}{r}.$$

Quand n tend vers l'infini, la dernière intégrale tend vers une limite égale ou supérieure à celle que lui donnerait la distribution $\nu(e)$, limite des ν_n (que l'on peut supposer existante). Cela pour la raison que cette limite est semi-continue inférieurement (n° 1). Nous avons donc, en appelant $u(\mathrm{P})$ le potentiel dû à la distribution limite $\mu + \nu$,

$$\lim u_n(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \gtreqless \lim \int_\Sigma \frac{d\mu_n(e)}{r} - \int_\Sigma \frac{d\mu(e)}{r}.$$

Donc, en utilisant la première relation, il vient

$$\lim u_n(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \gtreqless \lim \mathrm{U}_n(\mathrm{P}) - \mathrm{U}(\mathrm{P}).$$

Remarquons enfin que u_n est $\leqq \mathrm{U}_n$ dans Σ, car le balayage des masses extérieures à E maintient ou abaisse le potentiel. Il vient donc, dans l'intérieur de Σ,

$$u(\mathrm{P}) \gtreqless \mathrm{U}(\mathrm{P}) + \lim (u_n - \mathrm{U}_n) \gtreqless \mathrm{U}(\mathrm{P}).$$

On voit que si $\mathrm{U}(\mathrm{P})$ est supposé $< h < 1$ dans Σ, le potentiel $u(\mathrm{P})$, qui est celui dû à la répartition sur E_1 d'une masse égale à la capacité limite des Δ_n, l'est aussi. Si cette condition reste vérifiée sur la surface et à l'extérieur de la sphère Σ, elle a lieu partout et la capacité limite des Δ_n n'est pas celle de E_1 puisqu'il en résulterait un potentiel trop bas.

Or cette condition reste effectivement vérifiée. En effet, u qui est $< h$ dans la sphère, ne surpassera pas h sur sa surface, puisque cette fonction est semi-continue inférieurement, et encore moins à l'extérieur, car r augmente pour toutes les masses en cause quand le point P s'écarte de la sphère. Le théorème est établi.

Il peut arriver que Σ soit intérieur à E. La démonstration subsiste en se simplifiant. Comme $d\mu_n$ et $d\mu$ sont alors nuls dans Σ, les intégrales dans Σ qui dépendent de ces éléments sont nulles aussi et disparaissent des formules précédentes.

Ce théorème a été établi par M. Vasilesco par une méthode très différente (Mémoire cité, n° 35). M. Vasilesco l'énonce seulement pour les points de la rontière, ce qui est la conséquence de son point de vue.

72. — Théorème. — *Supposons que la répartition sur un ensemble* E, *borné et fermé, d'une masse égale à sa capacité engendre un potentiel qui ne* *surpasse pas l'unité. Ce potentiel sera égal à l'unité dans tout domaine enfermé par la frontière externe de cet ensemble et la masse qui produit ce potentiel sera portée tout entière par cette frontière externe. Si la frontière externe est un ensemble qui peut être réduit, c'est l'ensemble réduit qui prend la place de la frontière externe dans l'énoncé précédent.*

Soit U le potentiel $\leqq 1$ engendré par la répartition sur E d'une masse égale à sa capacité. Ce potentiel est égal à l'unité en tout point intérieur de E écarté des masses, car c'est un point capable et le potentiel y étant continu, est égal à sa borne 1 en ce point. Il suit de là que toutes les masses sont portées par la frontière externe, sinon on balayerait les masses de l'intérieur sur cette frontière externe, ce qui ramènerait au cas précédent en diminuant le potentiel ; et ceci est impossible, car le potentiel atteignant encore la valeur 1 après le balayage, aurait dû dépasser cette valeur avant.

Si E enferme des vides, l'ensemble E_1 formé par l'adjonction de ces vides à E a la même capacité et la même frontière extérieure que E. Le potentiel U qui convient à l'un convient à l'autre, donc U est égal à 1 en tout point intérieur à E_1, c'est-à-dire dans tout le domaine ouvert intérieur à la frontière externe de E.

Enfin si la frontière externe contient des points incapables, on peut les négliger, puisque leur ensemble, de capacité nulle, ne peut porter aucune masse.

73. — THÉORÈME. — *Si la frontière externe* F *d'un ensemble borné et fermé* E *est de mesure spatiale nulle, la distribution sur* E *d'une masse donnée qui minime la borne supérieure du potentiel est unique.*

Soient $\mu(e)$ et $\nu(e)$ deux distributions de la même masse sur F minimant le potentiel. D'après ce qui précède, elles déterminent le même potentiel dans le complémentaire de F, et, par conséquent, la distribution $\mu(e) - \nu(e)$ détermine un potentiel nul, $u - v$, sauf éventuellement sur F.

Considérons les sections de l'ensemble F par des plans parallèles. Ce sont des ensembles superficiels de mesure et de charge nulle (dans la distribution $\mu - \nu$), sauf au plus pour une infinité dénombrable d'entre eux, sinon la mesure de F serait infinie et les masses aussi. Convenons d'écarter ces plans exceptionnels et divisons l'espace en intervalles prismatiques par trois systèmes de plans parallèles aux plans coordonnés. La masse introduite par la distribution $\mu - \nu$ dans une cellule s'exprime par l'intégrale de GAUSS étendue à sa frontière, qui est dépourvue de masses et sur laquelle on peut négliger un ensemble de mesure nulle. Il vient ainsi, car $u - v$ peut être traité comme nul,

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{d(u-v)}{dn}\, d\sigma = 0.$$

Donc la masse distribuée est de somme nulle dans tous les intervalles ainsi conditionnés. La fonction d'ensemble $u - v$ qui est nulle sur ces intervalles, le sera sur les ensembles ouverts qui sont sommes des précédents, sur les ensembles fermés, etc. Donc les distributions $\mu(e)$ et $\nu(e)$ sont identiques.

74. — CONCLUSION. — La solution du problème de ROBIN est maintenant étendue à un ensemble borné et fermé. On peut distribuer sur sa frontière externe F une charge positive donnée de manière à minimer la borne du potentiel, cette borne étant 1 pour une charge égale à la capacité. Il n'est pas certain que la distribution soit unique, mais elle engendre toujours le même potentiel dans le complémentaire de F. Ce potentiel est égal à son maximum dans tout le domaine intérieur à F si ce domaine existe et alors on voit aisément qu'il atteint aussi son maximum sur un ensemble dense de points appartenant à la frontière du domaine intérieur. Mais s'il n'y a pas de points intérieurs, on ne sait pas si le potentiel atteint nécessairement sa borne sur la frontière F.

Le théorème d'unicité concernant la solution n'est établi que si la frontière F est de mesure spatiale nulle, mais il est possible que le théorème soit général.

(Conférences faites à l'Institut Henri-Poincaré en avril 1931).

Manuscrit reçut le 20 juin 1931