

# ANNALES DE L'I. H. P.

L. ROSENFELD

## La théorie quantique des champs

*Annales de l'I. H. P.*, tome 2, n° 1 (1932), p. 25-91

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1932\\_\\_2\\_1\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_1_25_0)

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# La théorie quantique des champs

PAR

L. ROSENFELD

---

## Introduction

Si nous considérons le domaine de la Mécanique quantique non relativiste, nous nous trouvons en présence d'une théorie reposant sur un schéma formel parfaitement cohérent et susceptible d'une interprétation physique univoque. La Mécanique classique nous fournit une fonction hamiltonienne exprimée en fonction des coordonnées canoniques  $q$ ,  $p$  du système considéré, et on en déduit les équations canoniques du mouvement ; ce schéma canonique reste valable pour le système quantique correspondant, à condition d'y considérer les variables  $q$ ,  $p$  non plus comme des nombres ordinaires ou nombres- $c$ , mais bien comme des « nombres- $q$  » ou « observables » pour lesquels la multiplication n'est plus en général commutative. Il faut alors préciser le schéma canonique en y ajoutant des relations de commutabilité entre les variables  $q$  et  $p$  : c'est par là que s'introduit, avec la constante  $\hbar$ , le caractère quantique du système. La théorie des transformations canoniques fournit enfin, d'une manière bien connue, l'interprétation physique de ce schéma ; le caractère statistique de cette interprétation est mis en lumière par le principe d'indétermination de HEISENBERG et les profondes considérations de BOHR qui s'y rattachent.

La beauté de cette théorie, autant que les nombreuses confirmations expérimentales qui viennent chaque jour l'étayer, ont paru justifier l'espoir que sa portée ne se limiterait pas aux systèmes non relativistes de points matériels, mais qu'elle pourrait s'étendre aux

systèmes soumis à des actions se propageant de proche en proche avec une vitesse finie. A vrai dire, le concept d'énergie potentielle disparaissant, la théorie hamiltonienne classique ne peut plus subsister sous sa forme primitive, mais on peut essayer de se tirer d'embarras en englobant dans le système considéré, à côté des points matériels chargés électriquement, le champ de rayonnement (et éventuellement de gravitation) qui transmet les actions que ces points exercent les uns sur les autres : pour ce système total il existe effectivement une fonction de LAGRANGE et par suite (abstraction faite de certaines difficultés sur lesquelles nous reviendrons) un schéma canonique. Dans un tel schéma, il faudra, d'une manière conséquente, introduire la partie matérielle du système, non plus par des variables corpusculaires (positions et impulsions), mais bien par les variables  $\psi$  de DE BROGLIE-SCHRÖDINGER décrivant le « champ matériel ». Formellement on obtient de la sorte un système à une infinité continue de degrés de liberté, chacune des variables des divers champs considérés étant une fonction des 4 coordonnées  $x^1, x^2, x^3, x^4$ , utilisées pour le repérage des points d'Univers. Ayant ainsi construit un modèle classique du système de champs réagissant entre eux, on emploiera, pour passer à la théorie quantique correspondante, la méthode de quantification esquissée tout à l'heure ; on considérera les variables de champs et leurs moments conjugués comme des nombres- $q$  et on introduira entre ceux-ci des relations de commutabilité convenablement choisies. Les fonctions définissant les transformations canoniques, c'est-à-dire les amplitudes de probabilité, deviendront des fonctions des variables de champs, c'est-à-dire des « fonctionnelles » en  $x^1, x^2, x^3, x^4$ .

Telle est l'idée générale de la théorie quantique des champs, telle qu'elle s'est précisée peu à peu au cours des dernières années. Rappelons rapidement les principales étapes de ce développement. Déjà dans leur mémoire fondamentale sur la théorie des matrices, BORN, HEISENBERG et JORDAN [1] (1) ont remarqué qu'en considérant les composantes du champ de rayonnement comme des nombres  $q$ , on retrouvait par le calcul direct l'expression des fluctuations de l'énergie qui se déduit de la formule de PLANCK : ceci était une preuve de la cohérence logique de cette méthode de quantification du champ. Ensuite, DIRAC [2] l'appliqua avec succès à l'étude de l'absorption, de l'émission et de la disper-

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin.

sion du rayonnement par un atome ; au cours de ce travail, il montra que le champ quantifié était équivalent à un système de corpuscules (photons) en réaction avec l'atome, c'est-à-dire soumis à un même champ de forces extérieur, et obéissant à la statistique de BOSE-EINSTEIN. Ces considérations furent bientôt étendues par JORDAN et KLEIN [3] au cas où les corpuscules réagissent entre eux d'une manière non relativiste, puis par JORDAN et WIGNER [4] au cas de la statistique de FERMI. De cette manière, dans le domaine (systèmes dynamiques non relativistes et rayonnement pur) où la description corpusculaire est possible, l'équivalence des deux méthodes était démontrée [5]. Enfin, JORDAN et PAULI montraient encore que, dans le cas du rayonnement pur, il était possible d'écrire les relations de commutabilité sous forme relativistiquement covariante [6].

Tous ces travaux d'approche aboutissent au premier mémoire de HEISENBERG et PAULI [7], qui dégage dans toute leur généralité les principes de la méthode de quantification des champs et qui en démontre (d'ailleurs assez péniblement) la covariance relativiste. Ce travail fondamental fut rapidement suivi de plusieurs autres, dont les uns s'efforcèrent de perfectionner le formalisme, tandis que les autres s'appliquèrent à développer les conséquences physiques de la théorie. A ce dernier point de vue, des difficultés très profondes apparurent de suite, et on n'a maintenant encore aucune idée de la manière dont on parviendra à les lever.

L'exposé suivant, moins le dernier paragraphe, constitue, à part quelques additions relatives aux plus récentes publications, le texte de leçons faites à l'Institut Henri Poincaré en février 1931 ; il se divise en deux parties : dans la première nous examinerons le côté formel, dans la seconde le côté physique de la théorie. Quant au § 14, écrit à Copenhague en juin 1931, il contient une esquisse des idées de N. BOHR sur la situation actuelle de la mécanique quantique. On y voit comment l'échec même de la tentative que nous allons étudier a été fécond en nous amenant à préciser les bases physiques de l'interprétation du formalisme quantique et les limites de son domaine d'application.

## CHAPITRE I

## Théorie générale

§ I. *Extension de la méthode hamiltonienne aux milieux continus* [7, 8].

— Les champs que nous considérons sont définis par un certain nombre de fonctions  $Q_x(x^1, x^2, x^3, x^4)$  des coordonnées spatiales  $x^1, x^2, x^3$  et de la coordonnée temporelle  $x^4 = ct$  ; ces coordonnées jouent d'ailleurs le rôle de simples indices ou paramètres et sont par suite des nombres  $c$  ; les  $Q_x$  au contraire sont des observables. La fonction de LAGRANGE <sup>(1)</sup>  $L(Q_x, \frac{\partial Q_x}{\partial x_\nu})$  sera donc une fonctionnelle en  $x^1, \dots, x^4$ . Pour nous orienter, reprenons d'abord la théorie classique, c'est-à-dire supposons toutes les grandeurs commutables. Les équations de champ se déduiront du principe variationnel

$$(1) \quad \delta \int L dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0,$$

en supposant les  $\delta Q_x$  nuls aux frontières du domaine d'intégration. Sur ce domaine nous ferons l'hypothèse que les  $Q_x$  prennent aux frontières des valeurs constantes, qui annulent la fonction  $L$ . Nous poserons pour une fonctionnelle  $A$  quelconque

$$(2) \quad \bar{A} = \int A dx^1 dx^2 dx^3,$$

de sorte que nous pourrions écrire

$$(3) \quad \delta \int \bar{L} dx^i = 0,$$

ce qui fait ressortir l'analogie avec le cas des systèmes ponctuels.

Nous poserons encore

$$(4) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x^\nu} \equiv Q_{x,\nu} \quad \text{et} \quad Q_{x,4} \equiv \dot{Q}_x.$$

(1) Les indices  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  se rapportent aux grandeurs de champ comme  $Q_x$ , les indices  $\mu, \nu, \dots$  aux coordonnées  $x^1, \dots, x^4$ . Tandis qu'un indice  $\mu, \nu, \dots$  peut varier de 1 à 4, le même indice surmonté d'un trait :  $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \dots$  ne varie que de 1 à 3. Dans tous les cas, on appliquera la règle bien connue relative à la suppression du signe de sommation.

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

En introduisant la dérivée variationnelle

$$(5) \quad \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_x} = \frac{\partial L}{\partial Q_x} - \frac{d}{dx^\nu} \frac{\partial L}{\partial Q_{x,\nu}},$$

les équations de champ s'écrivent, d'après (1) ou (3),

$$(6c^{(1)}) \quad \frac{d}{dx^\nu} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_x} \right) = \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_x}.$$

*Formellement*, nous pouvons passer aux variables canoniquement conjuguées en posant

$$(7) \quad P^x = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_x},$$

et en introduisant la fonction hamiltonienne

$$(8c) \quad H(Q_x; P^x; Q_{x,\nu}) = P^x \dot{Q}_x - L;$$

ceci suppose que les équations (7) sont résolubles univoquement par rapport aux  $\dot{Q}_x$ ; nous verrons bientôt qu'il n'en est pas toujours ainsi et nous aurons à modifier la théorie en conséquence. Provisoirement, admettons que cette difficulté ne se présente pas pour la fonction de LAGRANGE que nous considérons.

Nous avons, moyennant (7),

$$\left( \frac{\partial L}{\partial Q_{x,\nu}} \right)_{P^x} = \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{x,\nu}} \right)_{\dot{Q}_x} + P^\nu \left( \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial Q_{x,\nu}} \right)_{P^x},$$

donc, d'après (8c),

$$(9) \quad \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{x,\nu}} \right)_{\dot{Q}_x} = - \frac{\partial H}{\partial Q_{x,\nu}}.$$

De même on trouve que

$$\frac{\partial L}{\partial Q_x} = - \frac{\partial H}{\partial Q_x} \quad \text{et} \quad \dot{Q}_x = \frac{\partial H}{\partial P^x} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P^x},$$

(1) Les numéros des formules qui ne sont valables en toute généralité que dans la théorie classique sont suivis de la lettre  $c$ .

de sorte que les équations de LAGRANGE (6c) sont équivalentes aux équations hamiltoniennes

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{Q}_x = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P^x}, \\ \dot{P}^x = \frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_x}. \end{cases}$$

Si maintenant nous voulons répéter les calculs qui précèdent en tenant compte de la non-commutativité de la multiplication, nous constatons que nous sommes tout de suite arrêtés par le fait que le théorème de la dérivation des fonctions de fonctions cesse d'être valable d'une manière générale. Nous ne pouvons plus déduire les équations de LAGRANGE du principe variationnel, ni les équations de HAMILTON de celles de LAGRANGE. A vrai dire, nous pourrions admettre comme hypothèse l'existence d'une fonction hamiltonienne  $H$  de certaines variables (non commutatives)  $Q$  et  $P$ , puis la forme (10) des équations de champ, sans nous soucier de la fonction de LAGRANGE. Cependant, si nous adoptons ce point de vue, nous devons, pour démontrer la covariance du schéma hamiltonien, faire une hypothèse sur la manière dont se transforment les  $P^x$  lors de la transformation considérée, et cette hypothèse, nous ne pourrions la choisir qu'en nous inspirant de la définition (7) des  $P^x$  en fonction des  $Q_x, Q_{x,\nu}$  par l'intermédiaire de  $L$ . Dès lors, il me paraît préférable de maintenir à la base de la théorie la fonction de LAGRANGE, quitte à restreindre sa généralité de manière à pouvoir effectuer sans l'aide du théorème des fonctions de fonctions le passage au schéma hamiltonien. La covariance de ce schéma devra alors se déduire d'une hypothèse sur les propriétés de transformation de la fonction de LAGRANGE.

Un peu de réflexion montre qu'il sera nécessaire de se limiter pour  $L$  à une fonction quadratique en les  $Q_{x,\nu}$ ; il faudra de plus choisir convenablement l'ordre des facteurs; nous montrerons qu'on peut se tirer d'affaire avec la fonction suivante :

$$(11) \quad 2L = Q_{x,\nu} A^{x\nu, \beta\mu}(Q) Q_{\beta,\mu} + Q_{x,\nu} B^{x\nu}(Q) + B^{x\nu}(Q) Q_{x,\nu} + L(Q).$$

Au point de vue des applications physiques, cette hypothèse est d'ailleurs, comme nous le verrons, suffisamment générale.

La définition (7) des  $P^x$  subsiste, tandis que celle de  $H$  devra être

un peu modifiée, de manière à assurer la validité de la formule (9), dont nous aurons besoin dans la démonstration de la covariance du schéma.

D'une manière générale introduisons la notation

$$(12) \quad \underline{A} = \frac{1}{2}(A + A^{\dagger}),$$

$A^{\dagger}$  désignant la quantité hermitiquement conjuguée à  $A$  ; d'après cela nous posons pour  $H$  :

$$(13) \quad H = \underline{P^x \dot{Q}_x} - L,$$

toujours sous réserve que les  $\dot{Q}_x$  ( $Q, P$ ) aient un sens. Ayant ainsi la fonction hamiltonienne, nous poserons les équations de champ sous la forme (10).

§ 2. *Les relations canoniques de commutabilité pour les milieux continus* [7]. — Il reste, pour compléter le schéma canonique, à adjoindre aux équations (10) les relations canoniques de commutabilité. Pour un système ponctuel, de variables canoniques  $q_i, p_i$ , ces relations sont <sup>(1)</sup>

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} [q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \\ [p_i, q_k] = \omega \delta_{ik}, \quad \omega = \frac{\hbar c}{2\pi i}, \end{array} \right.$$

où  $\delta_{ik}$  représente 0 ou 1 suivant que  $i \neq k$  ou  $i = k$ . Pour trouver ce que ces relations deviennent dans le cas d'un milieu continu, considérons celui-ci comme un cas-limite d'un système de cellules de volume  $\Delta V$ , les  $Q_x$  prenant dans chacune de ces cellules des valeurs déterminées  $Q_{x,i}$ . La fonction de LAGRANGE de ce système sera  $\bar{L}$ , et  $Q_{x,i}$  aura pour moment conjugué

$$p_i^x = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_{x,i}} = \Delta V \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{x,i}},$$

de sorte qu'à la limite

$$(15) \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{p_i^x}{\Delta V} = P^x(\mathbf{r}),$$

(1) Le facteur  $c$  dans  $\omega$  provient du fait que les  $p_i$  sont définis au moyen de  $x^i$  et non de  $z$ .

$\mathbf{r}$  désignant le point  $x^1, x^2, x^3$  auquel se réduit la cellule d'indice  $i$ . Entre les  $Q_{x,i}$  et les  $p_k^{\dot{x}}$  on a notamment les dernières relations (14),

$$(16) \quad [p_k^{\dot{x}}, Q_{x,i}] = \omega \dot{\delta}_x^{\dot{x}} \delta_{ik}.$$

Cela posé, si on associe à chaque cellule d'un volume  $V$  un nombre  $f_i$  de telle manière que la somme  $\sum_i f_i \Delta V$  converge à la limite vers l'intégrale  $\int_V f(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 dx^3$  d'une fonction continue  $f(x^1, x^2, x^3)$ , on peut écrire d'après (16)

$$\sum_i f_i \Delta V [p_k^{\dot{x}}, Q_{x,i}] = \omega \dot{\delta}_x^{\dot{x}} \cdot \begin{cases} f_k, & \text{si la cellule } k \text{ est dans } V, \\ 0, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

En passant à la limite moyennant (15), ceci devient

$$(17) \quad \int_V f(\mathbf{r}') dx^1 dx^2 dx^3 [P^{\dot{x}}(\mathbf{r}), Q_x(\mathbf{r}')] = \omega \dot{\delta}_x^{\dot{x}} \cdot \begin{cases} f(\mathbf{r}), & \text{si } \mathbf{r} \text{ est dans } V, \\ 0, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Introduisons la fonction singulière  $\delta(x)$  de DIRAC par la propriété

$$(18) \quad \int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0) & \text{si } x=0 \text{ est dans } (a, b), \\ 0, & \text{dans le cas contraire;} \end{cases}$$

posons de plus

$$(19) \quad \begin{cases} \delta(\mathbf{r}) = \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3). \\ \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{cases}$$

Alors nous concluons de (17) que les relations cherchées s'écrivent

$$(20) \quad [P^{\dot{x}}(\mathbf{r}), Q_x(\mathbf{r}')] = \omega \dot{\delta}_x^{\dot{x}} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

auxquelles il faut naturellement ajouter

$$(20') \quad [Q_x(\mathbf{r}), Q_{\dot{x}}(\mathbf{r}')] = 0, \quad [P^{\dot{x}}(\mathbf{r}), P^{\dot{x}}(\mathbf{r}')] = 0.$$

Il importe de noter que ces relations font intervenir les valeurs des  $Q$  et des  $P$  en des points différents de l'espace, mais *pour un même instant*. Ceci soulève de suite deux questions importantes : D'abord, si nous supposons les relations (20), (20') satisfaites à un instant initial  $t_0$ , le resteront-elles à tout instant ultérieur, alors que les grandeurs qui y interviennent varient avec le temps suivant les équations (10) ? c'est

ce que nous aurons à démontrer. Ensuite, la coordonnée temporelle étant privilégiée dans cet énoncé, il n'est pas évident que celui-ci soit covariant : c'est un second point qui devra également nous occuper.

Tirons d'abord quelques conséquences des relations canoniques (20), (20').

On démontre sans peine que, si  $F$  est une [fonction quelconque des  $Q_x, P^x, Q_{x,\bar{\nu}}$ ,

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} [F(\mathbf{r}), Q_x(\mathbf{r}')] = \omega \frac{\partial F}{\partial P^x} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ [P^x(\mathbf{r}'), F(\mathbf{r})] = \omega \left[ \frac{\partial F}{\partial Q_x} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial F}{\partial Q_{x,\bar{\nu}}} \frac{d}{dx^{\bar{\nu}}} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]; \end{array} \right.$$

on en tire, avec la notation (2),

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\bar{F}, Q_x] = \omega \frac{\partial \bar{F}}{\partial P^x}, \\ [P^x, \bar{F}] = \omega \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_x} - \frac{d}{dx^{\bar{\nu}}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_{x,\bar{\nu}}} \right], \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, moyennant (5),

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\bar{F}, Q_x] = \omega \frac{\delta \bar{F}}{\delta P^x}, \\ [\bar{F}, P^x] = -\omega \frac{\delta \bar{F}}{\delta Q_x}. \end{array} \right.$$

En particulier, les équations de HAMILTON (10) prennent la forme

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega \dot{Q}_x = [\bar{H}, Q_x], \\ \omega \dot{P}^x = [\bar{H}, P^x]. \end{array} \right.$$

Il en résulte de nouveau pour la fonction quelconque  $F$  (ne contenant pas explicitement  $x^4$ )

$$(25) \quad \omega \dot{F} = [\bar{H}, F].$$

A cette relation (25), qui permet de calculer la dérivée temporelle de  $F$  indépendamment du théorème des fonctions de fonctions, on peut adjoindre trois expressions analogues relatives aux dérivées spatiales. Posons en effet

$$(26) \quad P^{x\nu} = \frac{\partial L}{\partial Q_{x,\bar{\nu}}},$$

(de sorte que  $P^x \equiv P^{x4}$ ), puis

$$(27) \quad G_\mu^\nu = \underline{P^{x\nu} Q_{x,\mu}} - \delta_\mu^\nu L.$$

enfin

$$(28) \quad G_\mu \equiv G_\mu^4 = \underline{P^x Q_{x,\mu}} - \delta_\mu^4 L.$$

(On a  $G_4 \equiv G_4^4 \equiv H$ ). Les  $\overline{G_\mu}$  s'interprètent comme les composantes de l'impulsion totale du système,  $\overline{H}$  comme l'énergie totale. On a

$$(29) \quad \begin{cases} [\overline{G_\nu}(\mathbf{r}), Q_x(\mathbf{r}')] = \omega Q_{x,\nu} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\ [\overline{G_\nu}(\mathbf{r}), P^x(\mathbf{r}')] = \omega P^x \frac{d}{dx^\nu} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{cases}$$

d'où

$$(30) \quad [\overline{G_\nu}, F] = \omega \frac{dF}{dx^\nu}.$$

D'une manière générale, si F dépend aussi explicitement des  $x^\nu$ , on a donc d'après (25) et (30)

$$(31) \quad \omega \frac{dF}{dx^\nu} = \omega \frac{\delta F}{\delta x^\nu} + [\overline{G_\nu}, F].$$

De là on tire immédiatement

$$(32) \quad [\overline{G_\nu}, \overline{G_\mu}] = 0,$$

ce qui exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion totales du système, en vertu du schéma canonique (24), (20), (20').

Si maintenant on introduit pour F dans (25) un des crochets  $[Q_x, Q_\beta]$ ,  $[P^x, P^\beta]$ ,  $[Q_x, P^\beta]$ , on voit de suite qu'ils restent constants dans le temps ; ainsi se trouve résolue la première question posée plus haut, et démontrée la compatibilité des relations de commutabilité et des équations hamiltoniennes.

§ 3. *Les groupes attachés à la fonction de Lagrange et les identités qui en résultent* — Les fonctions de LAGRANGE des champs qui se présentent en physique admettent (dans un sens que nous préciserons bientôt) certains groupes *continus* de transformations. Cette circonstance entraîne une difficulté dans le passage de la fonction de LAGRANGE à

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

celle de HAMILTON. Pour comprendre de quoi il s'agit, le mieux est de discuter d'abord en détail un exemple simple, celui du champ de rayonnement [7, 8, 9, 10].

Prenons pour variables  $Q_x$  les composantes du potentiel électromagnétique :  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sont les composantes du potentiel vecteur et  $\varphi_4 = -\varphi$ , où  $\varphi$  est le potentiel scalaire. Le tenseur de champ est défini par

$$(33) \quad E_{\mu\nu} = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu},$$

et la fonction de LAGRANGE correspondante s'écrit

$$(34) \quad L = -\frac{1}{4} E_{\mu\nu} E_{\mu\nu} + \frac{1}{2} E_{\mu 4}^2.$$

Cette fonction est invariante par rapport au groupe de l'*Eichinvarianz*, défini par la transformation infinitésimale

$$(35) \quad \delta\varphi_\nu = \frac{\partial\xi}{\partial x^\nu},$$

$\xi$  étant une fonction paramétrique arbitraire.

Calculons les moments  $P^\nu$  conjugués aux  $\varphi_\nu$ . On a

$$P^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = E_{\bar{\mu}\bar{\nu}},$$

et par suite

$$(36) \quad P^{\bar{\nu}} = E_{4\nu},$$

$$(37) \quad P^4 = 0.$$

Le moment  $P^4$  étant identiquement nul, il n'est plus possible d'exprimer univoquement tous les  $\varphi_\nu$  en fonction des  $P^\nu$  et la méthode hamiltonienne est en défaut. Quant à cette identité (37), on peut aisément se rendre compte qu'elle est due à l'invariance de  $L$  par le groupe (35). Exprimons en effet que  $\delta L = 0$  ; nous obtenons

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial\varphi_{\nu,\mu}} \delta\varphi_{\nu,\mu} = (P^{\nu\mu} + P^{\mu\nu}) \frac{\partial^2\xi}{\partial x^\nu \partial x^\mu},$$

d'où

$$(38) \quad P^{\mu\nu} + P^{\nu\mu} = 0,$$

et en particulier  $P^4 = 0$ . Les autres identités (38) qui contiennent les  $P^v$  renferment aussi les  $\dot{\varphi}_v$  et sont par suite sans influence sur la résolution du système (36), (37) par rapport aux  $\dot{\varphi}_v$ . L'identité (37), qui est de la forme  $f(Q, P) = 0$ , sera appelée une *identité proprement dite*. Plusieurs méthodes ont été proposées pour tourner la difficulté soulevée par l'existence de l'identité proprement dite (37).

La première, employée par HEISENBERG et PAULI [7, 10], consiste à modifier la fonction de LAGRANGE par l'adjonction de termes détruisant l'*Eichinvarianz* ; par exemple, on peut prendre

$$L' = L + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \varphi_v}{\partial x^v} \right)^2 ;$$

dans le résultat final des calculs, on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro. Nous n'insisterons pas sur cette méthode, qui non seulement est peu satisfaisante pour l'esprit, mais conduit en outre à des calculs très compliqués.

Une manière plus élégante d'éviter l'invariance de la fonction de LAGRANGE est due à FERMI [9]. Il prend pour fonction de LAGRANGE

$$L' = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} ;$$

les équations de champ sont alors

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{(\partial x^\nu)^2} = 0 ;$$

elles coïncident avec les équations de MAXWELL si on impose la condition supplémentaire

$$K \equiv \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\nu} = 0.$$

Des équations de champ on tire d'ailleurs

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 K}{(\partial x^\nu)^2} = 0.$$

Il suffit donc de supposer sur une section  $x^4 = \text{const.}$

$$K = 0 \quad \text{et} \quad \dot{K} = 0 ;$$

dès lors ces conditions se propagent pour les instants ultérieurs en vertu des équations de champ.

Il importe de noter que ces conditions ne peuvent être traitées comme des relations ordinaires entre nombres- $q$ , puisqu'elles ne sont pas compatibles avec les relations canoniques de commutabilité. Elles s'interprètent comme des restrictions imposées aux solutions (amplitudes de probabilité) de l'équation de SCHRÖDINGER (équivalente au schéma canonique).

Néanmoins la méthode de FERMI a le désavantage de détruire l'*Eichinvarianz* de la fonction de LAGRANGE, alors qu'il semble bien préférable d'essayer précisément d'en tirer parti pour lever la difficulté. C'est ce que proposent HEISENBERG et PAULI dans leur second mémoire [9]. Malheureusement ils commencent par une spécialisation dans le choix des composantes du potentiel ; ils posent  $\varphi_4 = 0$  ; à cause du caractère quadrivectoriel de  $\varphi_\nu$ , ceci revient à privilégier un système de référence et entraîne des difficultés dans la démonstration de la covariance de la méthode par rapport au groupe de LORENTZ. Si nous n'avons plus que les 3 variables  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , nous n'obtiendrons plus tout d'abord que 3 équations de MAXWELL ; l'équation

$$C \equiv \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

ne sera plus nécessairement satisfaite.

Mais cette grandeur  $C = \operatorname{div} \mathbf{E}$  est étroitement liée à la transformation infinitésimale (35). Posons en effet

$$\overline{\mathfrak{U}} = \int \mathfrak{C} dx^1 dx^2 dx^3 ;$$

nous avons alors

$$\omega \delta \varphi_\nu = [\overline{\mathfrak{U}}, \varphi_\nu],$$

et par suite, pour une fonction  $F$  quelconque

$$\omega \delta F = [\overline{\mathfrak{U}}, F].$$

Nous voyons donc que  $\overline{\mathfrak{U}}$ , et par suite  $C$ , est commutable avec toutes les grandeurs  $F$  eichinvariantes, en particulier avec la fonction hamiltonienne. Par conséquent, nous pouvons imposer (sur une section  $x^4 = \text{const.}$ ) la condition supplémentaire

$$C = 0,$$

en spécifiant qu'elle ne peut pas être traitée comme une relation ordi-

naire entre nombres- $q$ , puisqu'elle n'est commutable qu'avec les grandeurs eichinvariantes : elle joue un rôle tout à fait semblable à celui des conditions accessoires de la méthode de FERMI. Comme les grandeurs physiques directement mesurables sont eichinvariantes, on peut dire qu'aux diverses valeurs propres de  $C$  correspondent des systèmes physiques entre lesquels aucune transition n'est possible ; le choix  $C = 0$  fixe le système satisfaisant à toutes les équations de MAXWELL.

Dans des cas simples comme celui que nous venons d'étudier, la méthode de FERMI ou la seconde méthode de HEISENBERG et PAULI sont assez maniables, mais il n'en est plus de même par exemple pour le champ de gravitation, lorsqu'on a affaire au groupe de la relativité générale. De plus, ces méthodes ne se prêtent pas à un traitement théorique indépendant de la forme particulière de la fonction de LAGRANGE et des identités proprement dites. Nous leur préférons donc une quatrième méthode qui n'a pas ces inconvénients et qui met clairement en relief l'importance des groupes de transformations attachés à la fonction de LAGRANGE.

§ 4. *Méthode générale* [8]. — Nous considérerons une classe étendue de groupes donnant lieu à des identités proprement dites et englobant les groupes les plus importants de la physique ; nous les définirons par une transformation infinitésimale de la forme

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x^\nu = a_\nu^\gamma(x) \xi^r(x) \\ \delta Q_x = c_{x\nu}^0(x, Q) \xi^r(x) + c_{x\nu}^\sigma(x, Q) \frac{\partial \xi^r}{\partial x^\sigma} \end{array} \right.$$

dans ces formules, on somme <sup>(1)</sup> par rapport à  $r$  de 1 à  $r_0$  ; le groupe dépend de  $r_0$  fonctions paramétriques arbitraires (nombres- $c$ )  $\xi^r(x)$  ; les fonctions  $a_\nu^\gamma$  sont des nombres- $c$ , qui ne dépendent que des  $x^\nu$ , tandis que les  $c_{x\nu}^0, c_{x\nu}^\sigma$  sont en général des nombres- $q$ , qui ne dépendent pas des  $Q_{x, \nu}$  ; on pourrait introduire des ordres de dérivation plus élevés relatifs aux  $\xi^r$ , à condition que l'ordre le plus haut

(1) Les grandeurs que nous considérons dépendent d'indices  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  et d'indices  $\mu, \nu, \dots$  ; l'indice  $r$  représente un ou plusieurs systèmes d'indices ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots ; \mu, \nu, \rho, \dots$ ), numérotés d'une manière quelconque en une suite à une dimension. Les indices  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  peuvent à leur tour être multiples et en particulier contenir des indices  $\mu, \nu, \dots$

n'intervienne que dans l'expression des  $\delta Q_x$  (et non des  $\delta x$ ) ; mais il nous suffira de traiter le cas particulier (39) pour illustrer les traits essentiels de la méthode.

A côté de la variation infinitésimale « substantielle »

$$(40) \quad \delta F = F[x', Q'(x'), \dots] - F[x, Q(x), \dots],$$

nous introduirons la variation « locale »

$$(41) \quad \delta^* F = F[x, Q(x), \dots] - F[x, Q(x), \dots];$$

on a immédiatement

$$(42) \quad \delta^* F = \delta F - \frac{dF}{dx^\nu} \delta x^\nu,$$

puis

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^* \frac{dF}{dx^\nu} = \frac{d}{dx^\nu} \delta^* F \\ \delta \frac{dF}{dx^\nu} = \frac{d}{dx^\nu} \delta F - \frac{dF}{dx^\rho} \frac{d\delta x^\rho}{dx^\nu}. \end{array} \right.$$

Une grandeur  $R$  s'appelle un multiplicateur quand elle possède la propriété de transformation suivante :

$$(44) \quad \delta^* R + \frac{d}{dx^\nu} (R \delta x^\nu) = 0,$$

ou encore, d'après (42),

$$(44') \quad \delta R + R \frac{d\delta x^\nu}{dx^\nu} = 0.$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse fondamentale que l'intégrale

$$\int L dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

est invariante par le groupe (39). Il s'ensuit que, à une divergence

$L' \equiv \frac{dR^\nu}{dx^\nu}$  près,  $L$  doit être un multiplicateur :

$$\delta(L + L') + (L + L') \frac{d\delta x^\nu}{dx^\nu} = 0;$$

nous nous contenterons de traiter le cas particulier où  $L' = 0$ , c'est-à-dire où  $L$  elle-même est un multiplicateur :

$$(45) \quad \delta L + L \frac{d\delta x^\nu}{dx^\nu} = 0.$$

L. ROSENFELD

De l'hypothèse (45) on déduit de suite, moyennant (39), l'existence d'identités proprement dites. Si l'on introduit (39) dans (45), on peut annuler séparément les coefficients des  $\xi^r$  et de leurs dérivées ; seuls les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé  $\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}$  pourront fournir des identités proprement dites ; ces coefficients sont (1)

$$\underline{P^{\nu\sigma} c_{\nu\sigma}^r + P^{\alpha\sigma} c_{\alpha\sigma}^\nu = 0,}$$

et pour  $\nu = \sigma = 4$ , ils donnent  $r_0$  identités proprement dites :

$$(46) \quad F_r \equiv \underline{P^\alpha c_{\alpha r}^4} = 0.$$

Nous avons d'ailleurs

$$(47) \quad 2(P^\alpha - D^\alpha) = A^{\alpha\beta} \dot{Q}_\beta + \dot{Q}_\beta A^{\beta\alpha},$$

avec

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha} \equiv A^{\alpha 4, \beta 4}, \\ D^\alpha \equiv A^{\alpha 4, \beta \bar{\mu}} \dot{Q}_{\beta, \bar{\mu}} + B^{\alpha 4}. \end{array} \right.$$

Les identités (46) ayant lieu, si on y introduit (47), identiquement en les  $\dot{Q}_\alpha$ , on a aussi

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{\alpha r}^4 A^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{\alpha r}^4 D^\alpha = 0. \end{array} \right.$$

$$(50)$$

Il résulte de (49) que les équations (47), qui doivent donner les  $\dot{Q}_\alpha$  en fonction des  $P^\alpha$ , ne sont pas linéairement indépendantes, mais que leur déterminant  $|A^{\alpha\beta}|$  est de rang  $N - r_0$  ( $N$  étant le nombre des variables de champ). Soit  $|A^{\alpha'\beta'}|$  un mineur d'ordre  $N - r_0$  différent de zéro ; nous affecterons d'un accent les indices qui s'y rapportent, de deux accents :  $\alpha'', \beta'', \dots$  les autres indices. Soit  $|A_{\alpha''\beta''}|$  le déterminant réciproque de  $|A^{\alpha'\beta'}|$ , défini par

$$(51) \quad A^{\alpha'\beta'} A_{\beta''\alpha''} = \delta_{\alpha''}^{\alpha'}.$$

(1) Il n'est pas immédiatement évident, à cause de l'ordre de certains facteurs, que les identités puissent se mettre sous la forme indiquée. Mais cela résulte sans peine, *en vertu des relations canoniques de commutabilité*, de la remarque que, d'après (47), toute solution  $\dot{Q}_\alpha(P)$  (s'il en existe) est linéaire en les  $P^\alpha$ .

Si maintenant nous parvenons à trouver une solution particulière  $\dot{Q}_\beta^0$  du système (47) (moyennant les relations canoniques de commutabilité), la solution la plus générale (compatible avec ces relations) aura la forme

$$\dot{Q}_\beta = \dot{Q}_\beta^0 + \lambda^r x_{\beta r},$$

les  $\lambda^r$  étant  $r_0$  paramètres (fonctions spatio-temporelles) arbitraires et les  $x_{\beta r}$ ,  $r_0$  solutions indépendantes des équations homogènes :

$$A^{\alpha\beta} x_{\beta r} + x_{\beta r} A^{\beta\alpha} = 0;$$

d'après (49) nous pouvons prendre

$$x_{\beta r} = c_{\beta r}^4,$$

et écrire pour la solution cherchée

$$(52) \quad \dot{Q}_\beta = \dot{Q}_\beta^0 + \lambda^r c_{\beta r}^4.$$

Maintenant il est facile de vérifier, en utilisant les identités (46), (49), (50) et les relations canoniques de commutabilité que

$$(53) \quad \left. \begin{array}{l} \dot{Q}_{\beta'}^0 = \frac{A_{\beta'\gamma'}(P^{\gamma'} - D^{\gamma'})}{A_{\beta'\gamma'}(P^{\gamma'} - D^{\gamma'})} \\ \dot{Q}_{\beta'}^0 = 0 \end{array} \right\}$$

est bien une solution particulière de (47).

Nous voyons donc que l'existence d'identités proprement dites (46) conduit à exprimer les  $\dot{Q}_x$  en fonction des  $P^x$  et de  $r_0$  paramètres arbitraires  $\lambda^r$ . Rien ne nous empêche, au moins formellement, d'utiliser ces expressions des  $\dot{Q}_x$  pour établir comme aux §§ 1 et 2 le schéma hamiltonien : les relations canoniques de commutabilité restent telles quelles ; quant aux équations de champ, elles contiennent les paramètres arbitraires  $\lambda^r$ . Mais il faut ajouter les  $r_0$  identités (46) comme conditions accessoires, présentant un caractère analogue à celui des conditions qui interviennent dans les méthodes du § 3. Telle est la méthode générale qui permet de construire un schéma hamiltonien malgré l'existence d'identités proprement dites.

Mais deux points fondamentaux restent à élucider pour assurer la légitimité de cette méthode. Il faut tout d'abord montrer que les conditions accessoires  $F_r = 0$  sont compatibles entre elles, c'est-à-dire

que les  $F_r$  sont commutables entre eux, sinon identiquement, du moins en vertu des conditions  $F_r = 0$  elles-mêmes. Ensuite il s'agit de prouver que la méthode est covariante par rapport au groupe <sup>(1)</sup> de transformations (39). C'est ce que nous allons faire successivement.

§ 5. *Compatibilité et covariance du schéma canonique* [8]. — Nous allons d'abord énoncer un lemme important : Si l'hypothèse (45) que  $L$  est un multiplicateur pour le groupe (39) est satisfaite, la transformation infinitésimale peut se mettre, en vertu des équations canoniques et des relations de commutabilité, sous la forme

$$(54) \quad \omega \delta^* F(Q, P) = [\bar{\mathbb{A}}, F],$$

avec

$$(55) \quad \bar{\mathbb{A}} = \underline{P^2 \delta Q_x} - G_\mu \delta x^\mu.$$

( $G_\mu$  est défini par (28).

Pour le prouver, il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} \omega \delta^* Q_x = [\bar{\mathbb{A}}, Q_x] \\ \omega \delta^* P^2 = [\bar{\mathbb{A}}, P^2]; \end{cases}$$

or ceci résulte d'un calcul qui ne présente pas de difficultés spéciales et qui s'appuie essentiellement sur les équations hamiltoniennes, l'hypothèse (45), les conséquences (22) des relations de commutabilité et la formule (9), qui est valable pour notre choix (II) de la fonction de LAGRANGE.

Il reste maintenant un mot à ajouter relativement au schéma canonique. Aux conditions  $F_r = 0$  on peut ajouter celles qui en résultent en les dérivant successivement par rapport au temps :

$$\frac{dF_r}{dx^i} = 0, \quad \frac{d^2 F_r}{(dx^i)^2} = 0, \dots$$

Obtient-on de cette manière des relations nouvelles, et dans ce cas, quel est le rôle de ces relations ? Pour répondre à cette question, nous

<sup>(1)</sup> Ce groupe (39) peut être considéré comme le produit direct de tous les groupes intervenant physiquement ; par exemple, pour le champ électromagnétique, ce sera le produit du groupe de Lorentz et du groupe de l'*Eichinvarianz*.

établirons une propriété remarquable de notre fonction  $\overline{\mathbb{M}}$  :  $\overline{\mathbb{M}}$  est une intégrale du mouvement, c'est-à-dire qu' n a

$$(56) \quad \frac{d\overline{\mathbb{M}}}{dx^i} = 0,$$

en vertu des équations de champ.

Prenons d'abord le cas de la théorie classique (nombres- $c$ ). Si on pose

$$\mathbb{M}^y = \overline{P^{zy} \delta Q_z} - G_{ij}^y \delta x^j,$$

on peut mettre l'hypothèse (45) sous la forme

$$(57c) \quad \frac{d\mathbb{M}^y}{dx^y} + \delta^* Q_x \left( \frac{\delta \overline{L}}{\delta Q_x} - \frac{d}{dx^i} \left( \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_x} \right) \right) = 0;$$

puisque

$$\frac{d\overline{\mathbb{M}^y}}{dx^y} = 0,$$

et que

$$\mathbb{M}^i \equiv \mathbb{M},$$

on en déduit

$$\frac{d\overline{\mathbb{M}}}{dx^i} = - \overline{\delta^* Q_x \left( \frac{\delta \overline{L}}{\delta Q_x} - \frac{d}{dx^i} \left( \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_x} \right) \right)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\overline{\mathbb{M}}}{dx^i} = 0,$$

en vertu des équations de LAGRANGE (6c).

Dans la théorie quantique, on ne peut plus écrire l'équation (57c). On peut cependant arriver à (56), soit par le calcul direct, assez pénible, soit en montrant d'abord que  $\frac{d\overline{\mathbb{M}}}{dx^i}$  est un nombre- $c$ , lequel ne peut, comme somme de nombres- $q$ , être autre que zéro. Pour voir que

$$\left[ \frac{d\overline{\mathbb{M}}}{dx^i}, F \right] = 0,$$

quele que soit  $F$ , il suffit d'exprimer la première identité (43) au moyen des formules (30) et (54) :

$$[\bar{\mathbb{b}}, [\bar{G}_\nu, F]] = [\bar{G}_\nu, [\bar{\mathbb{b}}, F]] + [\omega \frac{\partial \bar{\mathbb{b}}}{\partial x^\nu}, F],$$

puis de tenir compte de l'identité de JACOBI :

$$[[\bar{G}_\nu, \bar{\mathbb{b}}] + \omega \frac{\partial \bar{\mathbb{b}}}{\partial x^\nu}, F] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left[ \frac{d\bar{\mathbb{b}}}{dx^\nu}, F \right] = 0.$$

De la formule (56), on peut tirer des conclusions intéressantes sur la manière dont la fonction  $\bar{\mathbb{b}}$  s'exprime au moyen des  $F_r$  et de leurs dérivées temporelles. Tout d'abord, des intégrations par parties mettent  $\bar{\mathbb{b}}$  sous la forme

$$\bar{\mathbb{b}} = \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \mathfrak{b}_r \dot{z}^r + F_r \frac{\partial \dot{z}^r}{\partial x^4} \right\};$$

alors (56) s'exprime par

$$\int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \mathfrak{b}_r \frac{\partial \dot{z}^r}{\partial x^4} + F_r \frac{\partial^2 \dot{z}^r}{(\partial x^4)^2} \right\} = - \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \frac{d\mathfrak{b}_r}{dx^4} \dot{z}^r + \frac{dF_r}{dx^4} \frac{\partial \dot{z}^r}{\partial x^4} \right\}.$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} \mathfrak{b}_r \equiv - \frac{dF_r}{dx^4} \\ F_r \equiv 0 \\ \frac{d\mathfrak{b}_r}{dx^4} \equiv 0. \end{cases}$$

Nous voyons d'abord que  $\bar{\mathbb{b}}$  prend la forme remarquable

$$(58) \quad \bar{\mathbb{b}} = \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ - \frac{dF_r}{dx^4} \dot{z}^r + F_r \frac{\partial \dot{z}^r}{\partial x^4} \right\},$$

et ensuite que l'on a

$$\frac{d^2 F_r}{(dx^4)^2} = 0,$$

comme conséquence du schéma canonique. Seules donc les équations

$$(59) \quad \frac{dF_r}{dx^4} = 0$$

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

fournissent  $r_0$  relations nouvelles <sup>(1)</sup> : ce sont justement les  $r_0$  équations de champ de la forme  $\omega\dot{P}^\alpha = [\bar{H}, P^\alpha]$  qui nous manquent par suite de l'indétermination des  $\lambda^r$ .

Reprenons, pour illustrer ce qui précède, l'exemple du champ de rayonnement traité par les autres méthodes au § 3. Nous avons une seule identité proprement dite, c'est

$$P^4 = 0;$$

la fonction hamiltonienne a donc la forme

$$H = H_0 + \lambda P^4,$$

$H_0$  correspondant à un choix particulier quelconque des variables. Les équations de champ sont

$$\left. \begin{aligned} \omega\dot{Q}_\nu &= [\bar{H}_0, Q_\nu], \\ \dot{Q}_4 &= \lambda, \\ \omega\dot{P}^\nu &= [\bar{H}_0, P^\nu]; \end{aligned} \right\}$$

la quatrième équation

$$\omega\dot{P}^4 = [\bar{H}_0, P^4],$$

est remplacée par  $\frac{dP^4}{dx^4} = 0$ , c'est-à-dire par

$$[\bar{H}_0, P^4] = 0,$$

qui n'est autre que

$$C = 0,$$

avec la notation du § 3.

Cela étant, considérons l'ensemble des transformations du groupe (39) qui laisse invariants tous les points d'une section déterminée quelconque  $x^4 = x_0^4$  : cet ensemble est évidemment un sous-groupe, et même un sous-groupe invariant, du groupe (39). La condition

$$\partial x^\nu = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = x_0^4,$$

signifie

$$(60) \quad (\xi^r)_{x^i} = x_0^i = 0.$$

(1) On peut voir que si l'on tient compte des conditions  $F_r = 0$ , les relations  $\frac{dF_r}{dx^4} = 0$  ne contiennent pas les  $\lambda^r$ .

La transformation infinitésimale  $\bar{S}$  peut donc s'écrire, d'après (58),

$$\bar{S} = \varepsilon^r \bar{F}_r,$$

où les  $F_r$  sont pris pour  $x^A = x_0^A$  et les  $\varepsilon^r \equiv \left( \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \right)_{x^i = x_0^i}$  sont des fonctions arbitraires des variables spatiales.

Le sous-groupe  $\bar{S}$  étant invariant, nous avons, pour une transformation quelconque  $\bar{\mathbb{B}}$  du groupe, grâce à l'identité de JACOBI,

$$(61) \quad [\bar{\mathbb{B}}, F_s] = x_{st} F_t.$$

En particulier,

$$(62) \quad [F_r, F_s] = c_{rst} F_t;$$

nous voyons ainsi que les  $F_r$  sont commutables entre eux *en vertu des conditions*  $F_r = 0$ . C'est bien ce que nous voulions établir.

Maintenant, il est facile de voir que la formule (54) n'est pas seulement valable pour une fonction arbitraire  $F(Q, P)$ , mais également pour les transformations infinitésimales  $\bar{\mathbb{B}}$  (qui peuvent dépendre explicitement des  $x^y$ ), c'est-à-dire qu'on a, si on opère la transformation infinitésimale  $\bar{\mathbb{B}}$ ,

$$(63) \quad \omega \delta^* \bar{\mathbb{B}} = [\bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbb{B}}].$$

En particulier

$$(64) \quad \omega \delta^* \bar{S} = [\bar{\mathbb{B}}, \bar{S}],$$

et aussi

$$(65) \quad \omega \delta^* F_r = [\bar{\mathbb{B}}, F_r].$$

Comparant (61) et (65), on en tire que, *en vertu des conditions*  $F_r = 0$ , on a

$$\delta^* F_r = 0,$$

c'est-à-dire que les conditions  $F_r = 0$  sont invariantes par rapport au groupe (39). L'invariance des relations canoniques de commutabilité résulte immédiatement de (54) ; quant à celle des équations canoniques, on la déduit de (54), (56) et (64) en observant que la fonction hamiltonienne  $\bar{H}$  est de la forme  $\bar{H}_0(Q, P) + \bar{\lambda}^r F_r$ . Nous avons ainsi achevé la démonstration de l'invariance de notre schéma canonique par rapport au groupe (39).

§ 6. *Les statistiques* [7, 8]. — Dans la théorie qui précède, nous avons employé les relations canoniques de commutabilité, c'est-à-dire que nous avons attribué au crochet  $[a, b]$  la signification  $ab - ba$  conforme au principe de correspondance pour la mécanique des systèmes ponctuels. On sait d'ailleurs [2] que l'introduction de ces relations dans la théorie quantique d'un champ correspond, pour le système corpusculaire associé, à la statistique de BOSE-EINSTEIN, tandis que la statistique de FERMI s'obtient [4] en interprétant, dans les relations de commutabilité entre les  $Q$  et les  $P$ , les crochets  $[a, b]$  comme représentant  $ab + ba$ . Nous poserons, pour distinguer ces deux cas,

$$\begin{aligned} [a, b]_- &= ab - ba, \\ [a, b]_+ &= ab + ba. \end{aligned}$$

Soient maintenant  $F_1, F_2$  deux fonctions linéaires des  $Q$  et des  $P$ . On a évidemment dans le cas de BOSE-EINSTEIN

$$\begin{aligned} [F_1, Q_x]_- &= F_1 Q_x - Q_x F_1, \\ [F_1, P^x]_- &= F_1 P^x - P^x F_1, \end{aligned}$$

et dans celui de FERMI

$$\begin{aligned} [F_1, Q_x]_+ &= F_1 Q_x + Q_x F_1, \\ [F_1, P^x]_+ &= F_1 P^x + P^x F_1. \end{aligned}$$

Mais il n'en est plus de même si l'on considère le produit  $F_1 F_2$ . Tandis que dans le cas de BOSE-EINSTEIN

$$(66) \quad \begin{aligned} [F_1 F_2, Q_x]_- &= [F_1, Q_x]_- F_2 + F_1 [F_2, Q_x]_-, \\ [P^x, F_1 F_2]_- &= [P^x, F_1]_- F_2 + F_1 [P^x, F_2]_-, \end{aligned}$$

on trouve dans le cas de FERMI

$$(67) \quad \begin{aligned} [F_1 F_2, Q_x]_- &= - [F_1, Q_x]_+ F_2 + F_1 [F_2, Q_x]_+, \\ [P^x, F_1 F_2]_- &= [P^x, F_1]_+ F_2 - F_1 [P^x, F_2]_+; \end{aligned}$$

les expressions  $[F_1 F_2, Q_x]_+$ ,  $[P^x, F_1 F_2]_+$  ne se laissent pas ramener à des fonctions de  $[F_1, Q_x]_+$ ,  $[P^x, F_1]_+$ , etc.

Comme les expressions (28) des  $G_\mu$  sont au moins quadratiques en les  $Q_x, P^x, Q_x, \mu$ , les relations (24) et (29), qui sont fondamentales pour toute la théorie, ne peuvent subsister telles quelles (y compris le signe — dans le crochet !) dans le cas de FERMI que moyennant une

forme très spéciale de la fonction de LAGRANGE, telle que les formules (66), (67) donnent le même résultat ; ceci veut dire que seuls les champs dont les variables interviennent de cette manière particulière dans la fonction de LAGRANGE (ou de HAMILTON) seront susceptibles d'obéir à la statistique de FERMI. Nous avons ainsi un critérium purement formel nous permettant de décider si un champ donné peut obéir à la statistique de FERMI ; mais ceci ne nous fournit naturellement aucune explication du fait que, dans le cas où la statistique de FERMI est possible, c'est justement elle qui est réalisée dans la nature (principe de PAULI).

Il est facile d'appliquer le critérium précédent aux champs électromagnétique, matériel [7] et gravifique [8] : on trouve que la statistique de FERMI est possible seulement pour le champ matériel (électrons et protons), où l'expérience montre qu'elle est réalisée.

## CHAPITRE II

### Applications physiques

§ 7. *Champ électromagnétique.* — Nous allons maintenant appliquer la théorie précédente à l'étude des réactions entre matière et rayonnement ; nous nous heurterons à toute une série de graves difficultés, qui sont loin d'être résolues, mais qu'il est intéressant de discuter, parce qu'elles nous mènent à des problèmes très profonds relatifs à la nature de la matière et du rayonnement.

La seule méthode praticable pour l'intégration des équations de champ consiste à développer les grandeurs de champ en séries de fonctions fondamentales convenablement choisies. Nous commencerons par le cas bien connu du champ électromagnétique pur contenu dans une enceinte (*Hohlraum*). Pour avoir un spectre discret, nous supposons que notre enceinte est un cube de côté  $L$ , que nous pourrions d'ailleurs faire tendre vers l'infini le cas échéant. Nous choisirons, pour tenir compte de l'*Eichinvarianz*, la seconde méthode de HEISENBERG et PAULI, c'est-à-dire que nous poserons  $\varphi_4 = 0$  et nous introduirons la condition supplémentaire  $C \equiv \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ .

Nous choisirons naturellement comme système orthogonal complet les oscillations propres du *Hohlraum* [cf. 10] :

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1^{(r)} &= \sqrt{\frac{8}{L}} \cos \frac{\pi k_1^{(r)} x^1}{L} \sin \frac{\pi k_2^{(r)} x^2}{L} \sin \frac{\pi k_3^{(r)} x^3}{L}, \\ u_2^{(r)} &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{\pi k_1^{(r)} x^1}{L} \cos \frac{\pi k_2^{(r)} x^2}{L} \sin \frac{\pi k_3^{(r)} x^3}{L}, \\ u_3^{(r)} &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{\pi k_1^{(r)} x^1}{L} \sin \frac{\pi k_2^{(r)} x^2}{L} \cos \frac{\pi k_3^{(r)} x^3}{L}, \end{aligned} \right.$$

etc. Il en résulte pour les composantes  $\varphi_{\bar{\nu}}$  du potentiel vecteur et les composantes  $-P^{\bar{\nu}}$  du champ électrique, si on tient compte des conditions aux frontières,

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{\bar{\nu}} &= \sum_r q_{\bar{\nu}}^{(r)} u_{\bar{\nu}}^{(r)} \\ P^{\bar{\nu}} &= \sum_r p_{\bar{\nu}}^{(r)} u_{\bar{\nu}}^{(r)} \end{aligned} \right.$$

(sans sommation par rapport à  $\bar{\nu}$  !) Dans ces formules, les  $u_{\bar{\nu}}^{(r)}$  sont des nombres- $c$ , les amplitudes  $q, p$  sont des nombres- $q$ . Des relations de commutabilité entre les  $\varphi$  et les  $P$ , on déduit, en tenant compte des relations d'orthogonalité

$$(71) \quad \sum_r u_{\bar{\nu}}^{(r)}(\mathbf{r}) u_{\bar{\nu}}^{(r)}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

celles qui doivent exister entre les  $q$  et les  $p$  :

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} [q_{\bar{\nu}}^{(r)}, q_{\bar{\mu}}^{(s)}] &= [p_{\bar{\nu}}^{(r)}, p_{\bar{\mu}}^{(s)}] = 0, \\ [p_{\bar{\nu}}^{(r)}, q_{\bar{\mu}}^{(s)}] &= \omega \delta_{rs} \delta_{\bar{\nu}\bar{\mu}} : \end{aligned} \right.$$

donc les  $q$  et  $p$  sont canoniquement conjugués.

En fonction des  $q$  et des  $p$ , la fonction hamiltonienne

$$\bar{H}_S = \frac{1}{2} \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_{\bar{\nu}}}{\partial x^{\bar{\mu}}} - \frac{\partial \varphi_{\bar{\mu}}}{\partial x^{\bar{\nu}}} \right)^2 + (P^{\bar{\nu}})^2 \right\}$$

s'écrit

$$\bar{H}_S = \sum_r \left\{ \frac{1}{2} p^{(r)2} + \frac{\pi^2}{2L^2} (\mathbf{q}^{(r)} \times \mathbf{k}^{(r)})^2 \right\} ;$$

dans cette formule,  $\mathbf{p}^{(r)}$ ,  $\mathbf{q}^{(r)}$  et  $\mathbf{k}^{(r)}$  désignent respectivement les vecteurs de composantes  $(p_1^{(r)}, p_2^{(r)}, p_3^{(r)})$ ,  $(q_1^{(r)}, q_2^{(r)}, q_3^{(r)})$ ,  $(k_1^{(r)}, k_2^{(r)}, k_3^{(r)})$ . Soit  $(D_{lm}^{(r)})$  une rotation du système des coordonnées spatiales  $(x^1, x^2, x^3)$  amenant l'axe des  $x^3$  dans la direction  $\mathbf{k}^{(r)}$ ; les nouvelles composantes de  $\mathbf{k}^{(r)}$  sont donc  $(0, 0, |\mathbf{k}^{(r)}|)$ . Si nous appelons respectivement  $a_{\nu}^{(r)}$ ,  $b_{\nu}^{(r)}$  les nouvelles composantes de  $\mathbf{q}^{(r)}$ ,  $\mathbf{p}^{(r)}$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{\nu}^{(r)} = D_{\nu\mu}^{(r)} a_{\mu}^{(r)}, \\ p_{\nu}^{(r)} = D_{\nu\mu}^{(r)} b_{\mu}^{(r)}, \end{array} \right.$$

de sorte que

$$(73) \quad \bar{H}_S = \sum_r \left\{ \frac{1}{2} (b_1^{(r)2} + b_2^{(r)2} + b_3^{(r)2}) + \frac{\pi^2 |\mathbf{k}^{(r)}|^2}{2L_r^2} (a_1^{(r)2} + a_2^{(r)2}) \right\}.$$

Nous avons ainsi séparé, pour chaque valeur de  $\mathbf{k}^{(r)}$ , les 3 degrés de liberté en 2 oscillations transversales polarisées à angle droit,  $a_1^{(r)}$  et  $a_2^{(r)}$ , et une solution longitudinale  $a_3^{(r)}$ .

Cette dernière ne joue un rôle que lorsque le champ de rayonnement réagit avec un champ matériel. En effet, dans le cas du rayonnement pur, la condition  $C = 0$  s'écrit

$$\mathbf{p}^{(r)} \cdot \mathbf{k}^{(r)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(74) \quad b_3^{(r)} = 0.$$

Quant aux deux oscillations transversales, elles ont la fréquence

$$(75) \quad \nu^{(r)} = \frac{c |\mathbf{k}^{(r)}|}{2L_r};$$

pour les amplitudes  $a_{\lambda}^{(r)}$ ,  $b_{\lambda}^{(r)}$  ( $\lambda = 1, 2$ ), qui doivent satisfaire à des relations de commutabilité de la forme (72), nous poserons

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{\lambda}^{(r)} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{8\pi^2 \nu^{(r)}}} (A_{r, \lambda} - A_{r, \lambda}^{\dagger}), \\ b_{\lambda}^{(r)} = \sqrt{\frac{\hbar \nu^{(r)}}{2}} (A_{r, \lambda} + A_{r, \lambda}^{\dagger}), \end{array} \right.$$

avec (1)

$$(77) \quad A_{r,\lambda} = M_{r,\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} \gamma_{r,\lambda}}, \quad A_{r,\lambda}^\dagger = e^{-\frac{2\pi i}{h} \gamma_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2};$$

on a d'après (77)

$$(78) \quad \begin{cases} A_{r,\lambda} A_{r,\lambda}^\dagger = M_{r,\lambda}, \\ A_{r,\lambda}^\dagger A_{r,\lambda} = M_{r,\lambda} + 1; \end{cases}$$

quant aux facteurs de proportionnalité dans (76), leurs valeurs résultent des équations de champ et des relations de commutabilité. Introduisant (74) et (76) dans (73), on obtient

$$(79) \quad \bar{H}_S = \sum_{r,\lambda} h\nu^{(r)} \cdot \frac{1}{2} (A_{r,\lambda} A_{r,\lambda}^\dagger + A_{r,\lambda}^\dagger A_{r,\lambda}),$$

c'est-à-dire, d'après (78),

$$(80) \quad \bar{H}_S = \sum_{r,\lambda} \left( M_{r,\lambda} + \frac{1}{2} \right) h\nu^{(r)}.$$

Nous voyons donc que l'énergie du champ est la somme de toutes les énergies  $h\nu^{(r)}$  des  $M_{r,\lambda}$  photons de diverses fréquences et polarisations et de plus d'une énergie supplémentaire

$$\sum_{r,\lambda} \frac{h\nu^{(r)}}{2} = \infty,$$

qui est présente même quand il n'y a aucun photon ( $M_{r,\lambda} = 0$ ), au zéro absolu. L'apparition de cette énergie infinie du rayonnement au zéro absolu est sans doute peu satisfaisante, mais ce n'est pas une difficulté très grave pour la théorie, car on peut convenir de retrancher de l'énergie totale d'un système quelconque contenant du rayonnement l'énergie au zéro absolu de celui-ci, puisque, bien qu'infinie, elle est du moins *constante*, c'est-à-dire indépendante de l'état du système.

On pourrait même s'en débarrasser par un artifice formel [cf. II]. D'après (78), le terme infini s'introduit dans (79) par le terme  $A_{r,\lambda}^\dagger A_{r,\lambda}$ , qui ne diffère de l'autre,  $A_{r,\lambda} A_{r,\lambda}^\dagger$  que par l'ordre des facteurs ; on

(1) On a  $e^{\frac{2\pi i}{h} \gamma_{r,\lambda}} f(M_{r,\lambda}) = f(M_{r,\lambda} - 1)$ .

L. ROSENFELD

ne sera donc pas en conflit avec le principe de correspondance si l'on prend pour valeur quantique de  $\bar{H}_S$ , au lieu de (79), l'expression

$$\bar{H}_S = \sum_{r, \lambda} h\nu^{(r)} A_{r, \lambda} A_{r, \lambda}^\dagger = \sum_{r, \lambda} h\nu^{(r)} M_{r, \lambda};$$

mais ce choix a l'inconvénient de ne pouvoir se ramener, comme (79), aux grandeurs de champ  $\varphi_{\bar{\nu}}$ ,  $P^{\bar{\nu}}$ , indépendamment de toute décomposition en oscillations propres.

Une solution plus satisfaisante a été proposée récemment par L. ROSENFELD et J. SOLOMON [33] : ils ont montré qu'il était possible de formuler une théorie du rayonnement sans énergie au zéro absolu, en introduisant comme grandeurs de champ certaines combinaisons complexes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , et en définissant convenablement la fonction hamiltonienne en fonction de ces grandeurs. Ceci fait ressortir le caractère purement formel de l'apparition de l'énergie au zéro absolu.

§ 8. *Electron plongé dans un champ électromagnétique donné.* — Avant de passer à la quantification des interactions entre matière et rayonnement, examinons les équations qui régissent le champ d'ondes (nombres- $c$  !) représentant un électron plongé dans un champ électromagnétique donné : ces équations constituent ce que nous appellerons le « modèle classique », auquel nous aurons à appliquer la méthode de quantification pour en déduire la description des systèmes de plusieurs électrons.

On sait que c'est la théorie de DIRAC [12] qui a résolu avec un succès complet le problème du spin, mais on sait aussi que cette théorie, aussi bien que celles qui l'ont précédée, souffre d'une grande difficulté, due au fait qu'elle fournit, outre les niveaux d'énergie conformes à l'expérience, d'autres niveaux correspondant à un comportement inadmissible de l'électron.

Pour écrire l'équation de DIRAC, nous partirons, pour fixer les idées, des matrices de PAULI

$$(81) \quad \varrho_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \varrho_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

au moyen desquelles nous formerons des matrices du 4<sup>e</sup> ordre

$$(82) \quad \alpha_{\bar{\nu}} = +i \begin{pmatrix} 0 & \varrho_{\bar{\nu}} \\ \varrho_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix};$$

nous poserons encore

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \mathbf{I}, \\ \sigma = - \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(dans  $\sigma$ , les symboles  $\mathbf{I}$  représentent la matrice-unité du 2<sup>e</sup> ordre).

Cela posé, si  $e$  est la charge de l'électron (prise avec son signe), l'équation de DIRAC peut s'écrire

$$(84) \quad D\psi \equiv \alpha_\sigma \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - e\varphi_\sigma \psi \right) - mc^2 \sigma \psi = 0.$$

Pour fonction de LAGRANGE, on peut prendre

$$(85) \quad W = - \psi^* D\psi,$$

de sorte que le moment conjugué à  $\psi$  est  $P_\psi = - \omega \psi^*$ .

Pour nous rendre compte de la difficulté de la théorie de DIRAC, à laquelle nous venons de faire allusion, considérons le cas particulier [13] d'un électron se mouvant dans la direction  $x^1 \equiv x$  dans un champ défini par

$$\varphi_0 = 0, \quad e\varphi_1 = - \mathbf{E} = \text{const.}$$

Ecrivant  $\alpha$  au lieu de  $-\alpha_1$ , l'équation de DIRAC se réduit à

$$-\alpha \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{E} - mc^2 \sigma) \psi = 0;$$

essayons une solution d'onde plane d'impulsion  $p$  et d'énergie  $W$  :

$$(86) \quad \psi = u e^{\frac{c}{\omega} (px - Wt)};$$

nous devons alors avoir pour les composantes de l'amplitude  $u$

$$(87) \quad (\alpha c p + W - \mathbf{E} + mc^2 \sigma) u = 0.$$

Pour que ces équations homogènes aient une solution non identiquement nulle, il faut que leur déterminant soit nul, ce qui donne

$$(88) \quad (W - \mathbf{E})^2 = (mc^2)^2 + c^2 p^2;$$

ceci n'est autre que la relation relativiste entre l'impulsion  $p$  et l'énergie cinétique  $W - \mathbf{E}$ . Elle montre qu'à une valeur (vectorielle) donnée de  $p$  correspond non seulement une solution avec énergie cinétique positive  $W - \mathbf{E}$ , mais également une autre solution avec énergie cinétique négative  $-(W - \mathbf{E}) \leq -mc^2$ . Cette dernière solution ne saurait

correspondre à une propriété observable de l'électron. Dans la théorie classique, où la relation (88) existe et conduit aux mêmes conclusions, on pouvait se tirer d'affaire en faisant appel à la continuité des variables classiques et en remarquant qu'une énergie initialement positive et  $\geq mc^2$  ne peut devenir négative et  $\leq -mc^2$  (puisque les valeurs intermédiaires sont impossibles). Mais il n'en est plus ainsi dans la théorie quantique, où un passage discontinu d'un niveau quelconque à un autre a toujours une probabilité finie et ne peut être exclu arbitrairement ; dans le cas qui nous occupe, on peut sans peine donner des exemples où la probabilité des transitions d'états d'énergie positive à des états d'énergie négative peut devenir non seulement différente de zéro, mais même très grande ; nous allons en traiter un, le « paradoxe de KLEIN » [14], qui est particulièrement frappant.

Le problème de KLEIN est simplement celui de la réflexion et de la réfraction d'une onde électronique par un plan de discontinuité du potentiel électrostatique. Nous supposons qu'à gauche du plan  $x = 0$  notre constante  $E$  est nulle, tandis qu'elle prend à droite une valeur positive déterminée. Une onde venant de gauche et tombant perpendiculairement sur le plan  $x = 0$  sera représentée d'après (86), par

$$(89) \quad \psi_i = u_i e^{\frac{c}{\omega}(px - Wt)},$$

avec

$$(90) \quad (xcp + W + mc^2\sigma)u_i = 0$$

et

$$(91) \quad W^2 = m^2c^4 + c^2p^2.$$

D'après (91) l'onde réfléchie a pour impulsion  $-\hat{p}$ , c'est-à-dire est représentée par

$$(92) \quad \psi_r = u_r e^{\frac{c}{\omega}(-px - Wt)},$$

avec

$$(93) \quad (-xcp + W + mc^2\sigma)u_r = 0.$$

Enfin l'onde transmise a la forme

$$(94) \quad \psi_t = u_t e^{\frac{c}{\omega}(\bar{p}x - Wt)},$$

avec

$$(95) \quad (xc\bar{p} + W - E + mc^2\sigma)u_i = 0$$

et

$$(96) \quad (W - E)^2 = m^2c^4 + c^2\bar{p}^2.$$

Les conditions aux limites sont simplement

$$(97) \quad u_i + u_r = u_i.$$

Pour chacune des ondes, deux composantes de l'amplitude  $u$  sont arbitraires (ceci correspond à la polarisation du spin) ; si donc nous nous donnons l'onde incidente et si nous tenons compte de (93) et (95), il nous reste quatre inconnues, que nous pouvons tirer des quatre équations (97).

Un calcul algébrique simple, conduit par KLEIN [14] d'une manière très élégante, fournit pour le coefficient de réflexion (1)

$$(98) \quad \rho = \frac{|u_r|^2}{|u_i|^2} = \left( \frac{2Em}{\frac{E^2}{c^2} - (p + \bar{p})^2} \right)^2.$$

Voyons ce que donne cette formule lorsque  $E$  croît de 0 à l'infini.

1° En tenant compte de (91) et (96), on voit d'abord aisément que  $\rho$  augmente de 0 à 1 lorsque  $E$  croît de 0 à  $W - mc^2$ .

2° Lorsque  $E$  est compris entre  $W - mc^2$  et  $W + mc^2$ ,  $\bar{p}$  est imaginaire ; c'est le domaine de la réflexion totale ; comme en optique, il y a à droite du plan de discontinuité une onde exponentiellement amortie.

3° Si maintenant  $E$  dépasse la valeur  $W + mc^2$ ,  $\bar{p}$  redevient réel, il y a donc à droite du plan de discontinuité une onde transmise. Mais l'énergie cinétique  $W - E$  correspondant à cette onde est négative et  $\leq -mc^2$  : nous nous trouvons dans le domaine des énergies négatives de la théorie de DIRAC. Il est intéressant de calculer la vitesse de groupe de l'onde transmise ; on trouve, d'après (96),

$$(99) \quad \frac{dW}{d\bar{p}} = \frac{c^2\bar{p}}{W - E} = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{W - E}\right)^2};$$

on remarque tout d'abord que la vitesse de groupe est de signe contraire à la quantité de mouvement  $\bar{p}$ , c'est-à-dire que nous devons

(1) On a posé  $|u|^2 \equiv \sum_{k=1}^4 u_k u_k^*$ .

prendre pour  $\bar{p}$  une valeur négative. Pour  $E = W + mc^2$ , la vitesse de groupe est nulle et elle tend, pour  $E = \infty$ , vers la vitesse de la lumière. Quant au coefficient de réflexion, il décroît de la valeur 1 pour  $E = W + mc^2$  jusqu'à la valeur limite

$$(100) \quad r_{\infty} = \frac{W - pc}{W + pc}$$

pour  $E = \infty$ . Pour  $p = mc$ , par exemple, ce qui correspond pour la vitesse des électrons incidents à  $\approx 70\%$  de la vitesse de la lumière, la fraction limite réfléchie n'est que  $\approx \frac{1}{6}$ , c'est-à-dire que  $\approx \frac{5}{6}$  des électrons incidents franchissent la discontinuité de potentiel en passant à des états d'énergie négative.

Comme le remarque KLEIN, il n'est pas essentiel d'avoir une discontinuité de potentiel pour provoquer l'apparition du paradoxe. Cela tient à l'existence du domaine de « réflexion totale ». Si le potentiel croît par exemple uniformément de 0 à  $E$ , il y a une zone où il passe de la valeur  $W - mc^2$  à la valeur  $W + mc^2$  : dans cette zone la solution  $\psi_i$  est exponentiellement amortie, de sorte qu'au-delà de cette zone il reste toujours une onde d'énergie négative ayant une amplitude non nulle. On peut [38] établir ce résultat d'une manière rigoureuse, et l'étendre à un champ variable  $E(x)$  ; le cas particulier de l'oscillateur,  $E(x) = Kx^2$ , a été traité explicitement par NIKOLSKY [30].

Nous discuterons à présent d'autres particularités de ces états d'énergie négative ainsi que la récente tentative d'interprétation physique qu'en a donnée DIRAC.

Tout d'abord, les états d'énergie négative jouent un rôle important, bien que purement formel, dans la théorie de la dispersion. On sait que la formule de dispersion (aussi bien celle de RAYLEIGH que celle de RAMAN) comporte une sommation portant sur tous les états d'énergie dont est susceptible le corps diffusant. On peut dire d'une manière imagée, mais qui n'est pas justifiée par les préceptes généraux de l'interprétation physique de la mécanique quantique, que le phénomène de la diffusion consiste en une double transition du corps diffusant : d'abord absorption avec transition de l'état initial à un état intermédiaire, puis émission avec transition de l'état intermédiaire à l'état final ; tandis que l'énergie totale est la même dans les états initial et final, elle peut avoir une valeur (possible)

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

quelconque dans l'état intermédiaire, et le phénomène total est la somme de toutes ces doubles transitions pour tous les états intermédiaires possibles. En prenant pour corps diffusant un électron (lié ou libre) satisfaisant à l'équation de DIRAC, WALLER [15] et TAMM [35] ont montré que l'on n'obtenait les formules correctes de dispersion que si on comptait également comme états intermédiaires possibles les états d'énergie négative.

Retournons maintenant à l'équation (84), que nous écrirons, en posant pour un instant

$$p_\sigma = \omega \frac{\partial}{\partial x^\sigma},$$

sous la forme

$$\{ \alpha_\sigma (p_\sigma - e\varphi_\sigma) - mc^2 \} \psi = 0.$$

Si nous observons que la matrice

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

(où les  $\mathbf{1}$  représentent des matrices-unités du second ordre) donne lieu aux relations

$$\begin{cases} \tau \alpha_\sigma \tau = \alpha_\sigma \\ \tau \sigma_\tau = -\sigma_\tau \end{cases}$$

nous en concluons que la fonction

$$(101) \quad \psi' = \tau \psi$$

est une solution de l'équation

$$\{ \alpha_\sigma (-p_\sigma + e\varphi_\sigma) - mc^2 \} \psi' = 0,$$

qui ne diffère de la précédente que par les signes de l'impulsion-énergie  $p_\sigma$  et de la charge  $e$ . Ainsi, si la fonction  $\psi$  représentait un électron d'énergie négative, la fonction  $\psi'$  définie par (101) représentera un « électron » de charge positive et d'énergie positive.

On serait dès lors peut-être tenté d'identifier les électrons d'énergie négative aux protons. Mais plusieurs objections s'opposent à cette interprétation : tout d'abord, elle ne rend pas compte de la grande différence de masse entre électron et proton ; en outre, elle donne lieu à de graves paradoxes [16] :

1° Une transition d'un état d'énergie positive à un état d'énergie négative correspondrait à une transformation d'un électron en proton, contrairement à la loi de conservation de la charge.

2° Nous venons de voir que l'électron d'énergie négative se meut dans un champ extérieur comme si sa charge était positive. Mais le champ qu'il produit est celui qui correspond à une charge négative. Car s'il est *attiré* par un électron ordinaire, son impulsion étant de sens contraire à sa vitesse, il devra, d'après la loi de conservation de l'impulsion, *repousser* l'électron ordinaire ;

3° Pour *ralentir* son mouvement, l'électron d'énergie négative doit *absorber* de l'énergie, ce qui est contraire au comportement de toute particule matérielle observée.

Pour échapper à ces paradoxes, DIRAC [16] suggère l'interprétation suivante : Les états d'énergie les plus stables étant ceux d'énergie négative, les électrons auront tendance à les occuper, mais en vertu du principe de PAULI, chaque état ne pourra être occupé que par un électron au plus. Si nous supposons que tous les états d'énergie négative sont ainsi occupés, sauf quelques-uns (de faible vitesse), nous voyons qu'un électron d'énergie positive aura peu de chance de passer à un état d'énergie négative et se comportera donc d'une manière normale. A vrai dire, notre hypothèse implique une densité infinie d'électrons d'énergie négative dans tout l'univers ; il faut donc bien que nous fassions une autre hypothèse pour neutraliser cette conséquence de la première : nous admettrons que cette distribution de charge électrique, étant uniforme, échappe à notre observation, de sorte que la densité électrique qui intervient dans les équations de MAXWELL ne représente que l'écart à partir de cette distribution uniforme, les électrons ordinaires étant tous comptés comme des charges négatives, les lacunes dans la distribution des électrons d'énergie négative comme des charges positives.

Maintenant nous voyons que, sauf la différence de masse, ces lacunes se comportent comme des protons. Nous venons de dire qu'une telle lacune correspondait à une charge positive. Elle correspond aussi à une énergie positive, puisque pour la combler il faut fournir une énergie négative (l'annihilation d'un proton donne de l'énergie). Enfin le mouvement d'une lacune est le même que celui d'un électron d'énergie négative, c'est-à-dire d'un corps de charge positive. Les trois paradoxes auxquels conduisaient la tentative d'identification directe sont

donc levés. Mais que de difficultés subsistent ! Avant de les examiner voyons comment l'interprétation de DIRAC s'applique à la théorie de la dispersion.

Les passages directs de l'électron diffusant d'un état d'énergie positive à un état intermédiaire d'énergie négative sont maintenant exclus par le principe de PAULI. Mais d'autres processus de double transition les remplacent, qui suffisent à interpréter complètement tous les termes de la formule de dispersion contenant un état intermédiaire d'énergie négative : la première transition est celle d'un électron de l'état intermédiaire (d'énergie négative) à l'état final, avec absorption d'un photon ; la seconde est celle de l'électron diffusant de l'état initial à l'état intermédiaire devenu libre, avec émission d'un photon. Quant à la diffusion par un proton, elle s'interprète par une double transition d'un seul électron : de l'état final (d'énergie négative) à l'état intermédiaire (d'énergie positive), puis de cet état à l'état initial (d'énergie négative, inoccupé).

La plus grave difficulté de cette théorie est évidemment qu'elle ne rend pas compte de la différence de masse entre proton et électron. DIRAC suggère que les interactions entre les électrons, que nous avons négligées dans ce qui précède, pourraient bien introduire la dissymétrie nécessaire ; mais nous verrons (p. 48-50) que cette conjecture est bien improbable.

D'ailleurs, comme le remarque OPPENHEIMER [17], même la considération des interactions n'empêcherait pas la théorie de donner le même coefficient de diffusion pour l'électron et le proton, comme le montre la comparaison des mécanismes de double transition que nous venons d'esquisser : or les coefficients devraient être entre eux dans le rapport inverse des carrés des masses.

De plus, les transitions encore possibles des états d'énergie positive aux états inoccupés d'énergie négative, consistant physiquement en l'annihilation simultanée d'un électron et d'un proton (avec émission d'au moins deux photons, à cause de la conservation de l'impulsion), devraient être très rares. Or leur probabilité a été calculée, par des méthodes différentes (sans tenir compte de la différence de la masse), par OPPENHEIMER [18], DIRAC [19] et TAMM [35] et le résultat est absolument inadmissible ; il est d'ailleurs extrêmement improbable que l'introduction des interactions puisse le ramener à un ordre de grandeur acceptable.

Enfin, la seconde hypothèse de DIRAC, d'après laquelle la distribution uniforme des charges n'est pas observable, est elle aussi fort peu satisfaisante. D'abord (1) elle rompt délibérément avec le principe de correspondance, qui s'est pourtant montré jusqu'ici un guide si sûr. De plus [17], l'explication de la dispersion met en jeu également les électrons qui occupent les états d'énergie négative ; eux aussi doivent réagir avec le champ électromagnétique et il serait dès lors plus naturel d'introduire également leur densité dans les équations de MAXWELL.

Pour tourner toutes ces difficultés, OPPENHEIMER [17] propose la modification suivante de l'idée de DIRAC : il faut d'abord introduire les électrons et les protons comme deux entités distinctes, satisfaisant à des équations de DIRAC avec masses différentes et charges de signes contraires ; puis il faut admettre que, aussi bien pour les protons que pour les électrons, tous les états d'énergie négative sont constamment occupés. Il n'y a plus besoin de modifier l'interprétation des équations de MAXWELL, les deux densités uniformes infinies, mais de signes contraires, se neutralisant.

Mais il faut bien avouer que, dans la version d'OPPENHEIMER comme dans celle de DIRAC, l'application du principe de PAULI à une infinité d'états sans limite inférieure apparaît comme une extension abusive du formalisme.

Dans ce qui suit, nous nous contenterons donc de quantifier l'équation de DIRAC séparément pour les électrons et pour les protons, en introduisant dans les coefficients des équations les masses différentes et les charges de signes contraires, mais nous ne ferons pas d'hypothèse sur les états d'énergie négative, nous résignant ainsi à toutes les difficultés que nous venons de discuter.

§ 9. *Equation générale.* — Pour décrire un système tout à fait général d'électrons, de protons et de photons réagissant les uns sur les autres, nous juxtaposerons simplement (c'est-à-dire que nous ajouterons l'une à l'autre) les fonctions de LAGRANGE (34) et (85) se rapportant respectivement au champ électromagnétique pur et au champ matériel. Cette dernière partie (85) contient non seulement un terme relatif au champ matériel pur (électrons ou protons libres), mais aussi un terme d'interaction entre les deux champs : c'est la forme de ce

(1) Je dois cette remarque au Professeur Bohr.

terme qui constitue l'hypothèse physique essentielle de la théorie. Le choix que nous faisons consiste simplement à transposer l'expression classique ; bien qu'à première vue ce choix paraisse le plus naturel, nous allons voir qu'il entraîne de grosses difficultés dont il faut, semble-t-il bien, chercher la source dans l'imperfection du « modèle classique ».

La fonction hamiltonienne du champ de rayonnement est donnée, d'après (73) et (80), par

$$(102) \quad \overline{H}_s = \sum_{r, \lambda} h\nu^{(r)} M_{r\lambda} + \frac{1}{2} \sum_r b_3^{(r)2},$$

en convenant de ne pas tenir compte de l'énergie au zéro absolu.

Construisons de la même façon la fonction hamiltonienne  $\overline{H}_M$  du champ matériel. En vue des applications, il est commode d'écrire le potentiel  $\varphi_v$  sous la forme  $\varphi_v^0 + \varphi_v$ ,  $\varphi_v^0$ , les  $\varphi_v^0$  étant des nombres- $c$  indépendants du temps : physiquement, ils représentent l'influence des champs « extérieurs », dont les sources ne sont pas comprises dans le système étudié. Nous poserons

$$(103) \quad \overline{H}_M = \overline{H}_M^0 + \overline{H}_W,$$

$\overline{H}_M^0$  étant ce que devient  $\overline{H}_M$  quand on y remplace  $\varphi_v$  par  $\varphi_v^0$ , le terme restant  $\overline{H}_W$  représentant dès lors l'énergie d'interaction proprement dite entre le champ matériel et le champ de rayonnement. Considérons maintenant, en nombres- $c$  (c'est-à-dire pour *un* électron), l'équation de champ  $D^0\psi = 0$  correspondant à la fonction hamiltonienne  $\overline{H}_M^0$  et cherchons-en les solutions stationnaires (à 4 composantes)  $v_s$  relatives aux valeurs fondamentales de l'énergie  $E_s$ . Cela fait, retournant à la théorie quantique, nous développons  $\psi$  et  $P_\psi$  en séries de fonctions fondamentales  $v_s$  :

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \sum_s g_s v_s, \\ P_\psi = -\omega \sum_s g_s^* v_s^* ; \end{array} \right.$$

les relations de commutabilité entre les  $g$  et  $g^*$  sont (§ 6):

1° pour la statistique de BOSE-EINSTEIN :

$$(105) \quad g_s g_t^* - g_t^* g_s = \delta_{st}, \quad \text{etc. ;}$$

2° pour la statistique de FERMI (1) :

$$(106) \quad g_s^* g_t + g_t g_s^* = \delta_{st}, \quad \text{etc.}$$

L'introduction des variables de nombres et de phases,  $N, \Theta$  (analogues aux  $M, \lambda$  du rayonnement) se fait, d'après (105) et (106), de la manière suivante :

1° pour la statistique de BOSE-EINSTEIN :

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_s^* = N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_s}, \quad g_s = e^{-\frac{2\pi i \Theta_s}{h}} N_s^{1/2}; \\ e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_s} f(N_s) = f(N_s - 1). \end{array} \right.$$

2° pour la statistique de FERMI :

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_s^* = N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_s} V_s, \quad g_s = V_s e^{-\frac{2\pi i \Theta_s}{h}} N_s^{1/2}; \\ e^{\frac{2\pi i \Theta_s}{h}} f(N_s) = f(1 - N_s); \end{array} \right.$$

les valeurs fondamentales des  $N_s$  sont ici 0 et 1 ; quant à  $V_s$ , c'est une fonction, de valeurs fondamentales + 1 et - 1, définie par

$$(109) \quad V_s = \prod_{t \leq s} (1 - 2N_t);$$

la numérotation des valeurs fondamentales  $E_s$  au moyen de l'indice  $s$  est d'ailleurs arbitraire, mais supposée fixée une fois pour toutes (2).

Dans les deux cas nous avons

$$(110) \quad \overline{H_M^0} = \sum_s N_s E_s.$$

Ensuite, moyennant (104) et (70), on tire de (85)

$$(111) \quad \overline{H_W} = e \sum_{r, s, t, \bar{\mu}} g_s^* g_t a_{\bar{\mu}}^{(r)} c_{st, \bar{\mu}}^{(r)},$$

avec

$$(112) \quad c_{st, \bar{\mu}}^{(r)} = - \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma} \bar{\mu}}^{(r)} \int v_s^* \alpha_{\bar{\sigma}} v_t \cdot u_{\bar{\sigma}}^{(r)} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Une expression analogue se rapporterait aux protons ; nous ne l'expliquerons pas.

(1) La formule (106) correspond à la convention  $-[a, b]_+ = ab + ba$ .

(2) Pour la justification de (108), (109), cf. § 10 ci-après.

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Cela étant, nous pouvons remplacer les équations hamiltoniennes de champ par une équation fonctionnelle équivalente de la forme de SCHRÖDINGER :

$$(113) \quad (\bar{H} - W)\Phi(M_{r,\lambda}; N_s; a_3^{(r)}) = 0,$$

où  $\bar{H}$  est la fonction hamiltonienne considérée comme un opérateur agissant sur les variables  $M_{r,\lambda}$ ,  $N_s$ ,  $a_3^{(r)}$ ;  $W$  est l'énergie totale du système et  $\Phi$  l'amplitude de la probabilité pour que  $M_{r,\lambda}$  photons soient dans l'état  $(r, \lambda)$ ,  $N_s$  électrons dans l'état  $E_s$  et que les grandeurs  $a_3^{(r)}$  aient des valeurs déterminées  $a_3^{(r)}$ . Dans l'opérateur  $\bar{H}$ , les opérateurs  $M_{r,\lambda}$ ,  $N_s$ ,  $a_3^{(r)}$  désignent la multiplication par les nombres  $M_{r,\lambda}$ ,  $N_s$ ,  $a_3^{(r)}$ , les opérateurs de phases  $\mathcal{L}$ ,  $\Theta$  ont les significations déjà connues; quant à  $b_3^{(r)}$ , on peut, en vertu de la relation de commutabilité

$$[b_3^{(r)}, a_3^{(r)}] = \omega,$$

l'interpréter comme l'opérateur différentiel

$$(114) \quad b_3^{(r)} = \omega \frac{\partial}{\partial a_3^{(r)}}.$$

Mais il reste à exprimer que la fonctionnelle  $\Phi$  doit aussi satisfaire à la condition supplémentaire

$$C\Phi = 0;$$

celle-ci est, comme le montre un simple calcul, équivalente à

$$(115) \quad \left( \frac{2\pi\nu^{(r)}}{c} b_3^{(r)} - e \sum_{st} g_s^* g_t d_{st}^{(r)} \right) \Phi = 0,$$

avec

$$(116) \quad \begin{cases} d_{st}^{(r)} = \int v_s^* v_t u_4^{(r)} dx^1 dx^2 dx^3, \\ u_4^{(r)} = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{k_1^{(r)} x^1}{L} \sin \frac{k_2^{(r)} x^2}{L} \sin \frac{k_3^{(r)} x^3}{L}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant [cf. 20] tirer parti de la condition (115) pour

nous débarrasser complètement des variables  $a_3^{(r)}$ . Nous poserons pour abrégier l'écriture

$$(117) \quad \left. \begin{aligned} K_r &\equiv e \sum_{st} g_s^* g_t a_{st}^{(r)}, \\ K_r' &\equiv e \sum_{st} g_s^* g_t c_{st,3}^{(r)}. \end{aligned} \right\}$$

Comme  $b_3^{(r)}$  est commutable avec  $K_r$ , nous tirons d'abord de (115)

$$(118) \quad \left[ \left( \frac{2\pi\nu^{(r)}}{c} \right)^2 b_3^{(r)2} - K_r^2 \right] \Phi = 0,$$

ce qui nous permet déjà d'éliminer le terme en  $b_3^{(r)2}$  contenu dans  $\overline{H}_s$ . La fonction  $\overline{H}$  ne contenant plus les  $b_3^{(r)}$ , on en déduit que les  $a_3^{(r)}$  sont des constantes du mouvement :

$$(119) \quad \dot{a}_3^{(r)} = 0.$$

D'autre part, en dérivant (115) par rapport au temps, nous obtenons

$$\left( \frac{2\pi\nu^{(r)}}{c} \dot{b}_3^{(r)} - \dot{K}_r \right) \Phi = 0;$$

en même temps, une équation hamiltonienne donne

$$\dot{b}_3^{(r)} = -K_r'$$

de sorte que (1)

$$(120) \quad \left( \dot{K}_r + \frac{2\pi\nu^{(r)}}{c} K_r' \right) \Phi = 0.$$

Si donc nous posons

$$(121) \quad X = \sum_r \frac{a_3^{(r)} K_r}{i h \nu^{(r)}},$$

nous voyons que, moyennant (119) et (120), le terme de la fonction hamiltonienne  $\overline{H}$  contenant  $a_3^{(r)}$  peut se mettre sous la forme

$$\sum_r a_3^{(r)} K_r' = \omega \dot{X},$$

(1) On vérifie facilement cette relation par un calcul direct utilisant les équations hamiltoniennes. C'est bien ce à quoi il faut s'attendre d'après la théorie générale (p. 20-21).

de sorte que [cf. (102), (118), (110), (111)]

$$(122) \quad \bar{H} = \bar{H}_1 + \omega \dot{X},$$

avec

$$(123) \quad \begin{cases} \bar{H}_1 = W_0 + \frac{1}{2} \sum_r \left( \frac{cK_r}{2\pi\nu(r)} \right)^2 + e \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{r,s,t} g_s^* g_t a_\lambda^{(r)} c_{st,\lambda}^{(r)}, \\ W_0 = \sum_{r,\lambda} M_{r,\lambda} h\nu^{(r)} + \sum_s N_s E_s. \end{cases}$$

Si maintenant nous posons

$$(124) \quad \Phi = e^{-X\Psi},$$

nous concluons d'abord de la condition (115), moyennant (114), que  $\Psi$  est indépendant des  $a_3^{(r)}$ . En effet, les  $K_r$  et les  $K_r'$  étant tous commutables entre eux, on peut écrire d'après (124) et (121)

$$-ih\nu^{(r)} \frac{\partial \Phi}{\partial a_3^{(r)}} = K_r \Phi - ih\nu^{(r)} e^{-X} \frac{\partial \Psi}{\partial a_3^{(r)}},$$

d'où, en comparant avec (115), qui s'écrit

$$-ih\nu^{(r)} \frac{\partial \Phi}{\partial a_3^{(r)}} = K_r \Phi,$$

on tire bien

$$(125) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a_3^{(r)}} = 0.$$

De plus, nous avons, d'après (122),

$$\bar{H}\Phi = \bar{H}e^{-X\Psi} = e^{-X}\bar{H}_1\Psi + e^{-X}\omega\dot{X}\Psi + [\bar{H}, e^{-X}]\Psi = e^{-X}\bar{H}_1\Psi;$$

par suite l'équation (113) est équivalente à

$$(126) \quad (\bar{H}_1 - W)\Psi = 0,$$

qui ne contient plus les variables  $a_3^{(r)}$ ,  $b_3^{(r)}$ .

§ 10. *Passage à l'espace de configuration.* — Il peut être utile de passer de l'image ondulatoire (théorie des champs) que nous avons considérée jusqu'ici à l'image corpusculaire : ce passage consiste, mathématiquement, en une transformation canonique effectuée sur l'équa-

tion (126) et conduisant des variables  $M, N$  aux variables de position des particules considérées (« espace de configuration » du système corpusculaire). C'est cette transformation que nous allons examiner maintenant.

Considérons, avec HEISENBERG [5], un système de  $N$  corpuscules, dont la fonction hamiltonienne est de la forme

$$(127) \quad H = \sum_{n=1}^N O(P_n) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N O(P_n, P_m) + \dots$$

les  $O$  étant des opérateurs agissant sur les variables de position  $P_n \equiv (x_n^1, x_n^2, x_n^3)$  des corpuscules. L'équation de SCHRÖDINGER correspondante est

$$(128) \quad \left( H + \omega \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Omega(P_1, \dots, P_N; x^i) = 0.$$

Soit  $u_r(P)$  un système orthogonal complet quelconque ; à cause de la symétrie de la fonction  $H$  par rapport aux  $N$  corpuscules, nous pouvons définir les éléments de matrice

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} O_{rs} = \int u_r^*(P) O(P) u_s(P) dP \\ O_{rr', ss'} = \int u_r^*(P) u_{r'}^*(P') O(P, P') u_s(P) u_{s'}(P') dP dP' \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

indépendants des  $n, m, \dots$  Si nous développons  $\Omega(P_1, \dots, P_N; x^i)$  d'après le même système de fonctions, nous obtenons

$$(130) \quad \Omega(P_1, \dots, P_N; x^i) = \sum_{r_1, \dots, r_N} b(r_1, \dots, r_N; x^i) u_{r_1}(P_1) \dots u_{r_N}(P_N),$$

et l'équation (128) est équivalente à la suivante :

$$(131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega \frac{\partial b(s_1, \dots, s_N)}{\partial x^i} + \sum_{n=1}^N \sum_{r_n} O_{s_n r_n} b(s_1 \dots r_n \dots s_N) \\ + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{r_n, r_m} O_{s_n s_m, r_n r_m} b(s_1 \dots r_n \dots r_m \dots s_N) + \dots = 0, \end{array} \right.$$

dont la solution  $b(s_1, \dots, s_N)$  est l'amplitude de la probabilité pour trouver le corpuscule n° 1 dans l'état  $s_1, \dots$ , le corpuscule n°  $N$  dans l'état  $s_N$ .

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Notre but est de démontrer l'équivalence de cette équation (131) et de l'équation quantique [analogue à (126)] obtenue par la méthode du § 9 :

$$(132) \quad \left( \omega \frac{\partial}{\partial x^4} + \sum_{s,r} g_s^* g_r O_{sr} + \sum_{s,s';r,r'} g_s^* g_r g_{s'}^* g_{r'} O_{ss',rr'} + \dots \right) \Psi = 0$$

dont la solution  $\Psi(N_s; x^4)$  est l'amplitude de la probabilité pour trouver  $N_s$  corpuscules dans l'état  $s$ .

Tout revient à établir la relation qui existe entre les  $b$  et les  $\Psi$ . Cette relation est essentiellement différente selon que les corpuscules suivent la statistique de BOSE-EINSTEIN ou celle de FERMI, c'est-à-dire selon que l'on impose à la solution  $\Omega(P_1, \dots, P_N; x^4)$  d'être symétrique ou antisymétrique par rapport aux  $P_n$ . Nous ne traiterons en détail que le premier cas, l'autre pouvant se traiter très simplement par la même méthode. Remarquons que la démonstration de l'équivalence de (131) et (132), utilisant, suivant le cas, les formules (105), (107) ou les formules (106), (108), (109), fournit précisément la justification de l'affirmation énoncée au § 6 et répétée au § 9, que ces deux groupes de formules correspondent bien respectivement aux cas de BOSE-EINSTEIN et de FERMI.

Dans le cas de BOSE-EINSTEIN, les  $b(s_1, \dots, s_N)$  étant des fonctions symétriques de leurs arguments, on a

$$|\Psi(N_1, N_2, \dots)|^2 = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} |b(s_1, \dots, s_N)|^2,$$

les nombres  $s_1, \dots, s_N$  représentant  $N_1$  fois le nombre 1,  $N_2$  fois 2, ... ; on peut donc poser

$$\Psi(N_1, N_2, \dots) = \left( \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} \right)^{1/2} b(s_1, \dots, s_N),$$

ce qui, introduit dans (131), donne moyennant (107),

$$\left. \begin{aligned} & \left( \omega \frac{\partial}{\partial x^4} + \sum_{s,r} N_s O_{sr} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\theta_s - \theta_r)} \right. \\ & + \sum_{s,s';r,r'} N_s (N_{s'} - \delta_{ss'} + \delta_{s'r'}) O_{ss',rr'} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} \\ & \left. + \dots \right) \left( \frac{N_1! N_2! \dots}{N!} \right)^{1/2} \Psi(N_1, N_2, \dots) = 0, \end{aligned} \right\}$$

ou encore, en multipliant à gauche par  $\left(\frac{N_1! N_2! \dots}{N!}\right)^{1/2}$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{s,r} N_s^{1/2} O_{sr} e^{\frac{2\pi i}{h}(\theta_s - \theta_r)} N_r^{1/2} \\ & + \sum_{s,s';r,r'} N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}(\theta_s - \theta_r)} N_r^{1/2} N_{s'}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}(\theta_{s'} - \theta_{r'})} N_{r'}^{1/2} O_{ss',rr'} \\ & + \dots \left\{ \Psi(N_1, N_2, \dots) = 0, \right. \end{aligned} \right.$$

ce qui n'est autre chose que (I32).

Appliquons à l'équation (I26) le résultat que nous venons d'obtenir. Dans  $\bar{H}_1$  [cf. (I23)], nous conservons pour le rayonnement les variables  $M$ , tandis que nous voulons remplacer les variables  $N$  par les variables  $P_n$  [9, 20]. Nous avons, en vertu de

$$(I33) \quad E_s v_s \equiv D'_0 v_s = - \left\{ -\alpha_{\bar{\sigma}} \left( \omega \frac{\partial}{\partial x^{\bar{\sigma}}} - e\varphi_{\bar{\sigma}}^0 \right) + mc^2 \sigma + e\varphi_4^0 \right\} v_s$$

et de (II2), (II6), (II7),

$$(I34) \quad \left\{ \begin{aligned} O(P) &= D'_0 - e \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\bar{\sigma}} \sum_r D_{\bar{\sigma}\lambda}^{(r)} a_{\lambda}^{(r)} \alpha_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\sigma}}^{(r)}(P), \\ O(P, P') &= \frac{c^2 e^2}{8\pi^2} \sum_r \frac{u_4^{(r)}(P) u_4^{(r)}(P')}{\sqrt{(r)^2}}; \end{aligned} \right.$$

par suite (I26) est équivalente à

$$(I35) \quad \left\{ \begin{aligned} & -W + \sum_{r,\lambda} M_{r,\lambda} h\nu^{(r)} \\ & + \sum_{n=1}^N O(P_n) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N O(P_n, P_m) \left\{ \Omega(P_n; M_{r,\lambda}) = 0. \right. \end{aligned} \right.$$

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Évaluons  $O(P, P')$  ; pour cela [7, 10], calculons  $\Delta_P O(P, P')$  :

$$\begin{aligned} \Delta_P O(P, P') &= \frac{c^2 e^2}{8\pi^2} \sum_r \frac{\Delta_P u_4^{(r)}(P) \cdot u_4^{(r)}(P')}{\sqrt{r}^2} \\ &= - \frac{c^2 e^2}{8\pi^2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \sum_r \frac{|\mathbf{k}^{(r)}|^2 u_4^{(r)}(P) u_4^{(r)}(P')}{\sqrt{r}^2} \\ &= - \frac{c^2 e^2}{8\pi^2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{2L}{c} \right)^2 \sum_r u_4^{(r)}(P) u_4^{(r)}(P') \\ &= - 4\pi \cdot \frac{e^2}{8\pi} \cdot \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ; \end{aligned}$$

si  $L$  tend vers l'infini, la solution de cette équation est

$$(136) \quad O(P, P') = \frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Si nous portons cette valeur de  $O(P, P')$  dans (135), nous nous heurtons immédiatement à une difficulté très grave, sur laquelle nous aurons à revenir longuement plus loin : les termes  $O(P_n, P_n)$ , qui peuvent s'interpréter comme les énergies électrostatiques « propres » des corpuscules (provenant des forces électrostatiques qu'ils exercent sur eux-mêmes), sont infinis.

Formellement, nous pourrions faire disparaître ces termes en changeant légèrement l'ordre des facteurs  $g, g^*$  dans l'expression

$$(137) \quad \sum_{s, r; s', r'} g_s^* g_r g_{s'}^* g_{r'} O_{ss', rr'}.$$

En effet, les termes  $O(P, P)$  se retrouvent dans (137) pour  $r = s'$  et  $s = r'$  ; car le produit  $g_s g_{s'}^*$  introduit, dans le cas de BOSE-EINSTEIN comme dans celui de FERMI, un terme

$$(138) \quad \sum_s g_s^* g_s \sum_{s'} O_{ss', s's'}$$

et en vertu de (129),  $\sum_{ss', s's}$  n'est autre chose que  $O(P, P)$ . Pour se débarrasser des termes infinis, il suffirait donc de retrancher (138) de (137), c'est-à-dire de remplacer dans (137) le produit  $g_s^* g_r g_{s'}^* g_{r'}$  par

$$g_s^* (g_r g_{s'}^* - \delta_{rs'}) g_{r'},$$

c'est-à-dire, d'après (105) et (106), par :

a) cas de BOSE-EINSTEIN [3],

$$g_s^* g_s' g_r g_r';$$

b) cas de FERMI [4],

$$g_s^* g_s' g_r' g_r.$$

Seulement la manière dont l'expression  $K_r^2$  de la forme (137) s'introduit dans notre équation (135) ne nous permet pas de recourir à cet artifice formel, qui avait réussi dans les théories non relativistes, et la difficulté reste entière.

On peut encore se demander s'il est possible d'introduire un espace de configuration pour les photons, la différence essentielle avec le cas des corpuscules matériels étant qu'il n'y a pas conservation du nombre des photons, de sorte qu'on n'a pas affaire à un espace de configuration d'un nombre déterminé,  $3N$ , de dimensions. (Cette circonstance se présente d'ailleurs également pour un système de corpuscules matériels pour lequel des processus d'annihilation avec émission de radiation sont possibles). Il faut dans des cas semblables [9] remplacer l'équation (128) par un système d'équations ayant pour inconnues des fonctions  $\Omega(x^4)$ ,  $\Omega(P_1; x^4)$ ,  $\Omega(P_1, P_2; x^4)$ ,  $\dots$ ,  $\Omega(P_1, \dots, P_n; x^4)$ ,  $\dots$ , se rapportant successivement à 0, 1, 2, ...,  $n, \dots$  corpuscules.

Pour les photons, le problème a été résolu par LANDAU et PEIERLS [21] (1). Soit d'abord un photon de fréquence  $\nu$  et de polarisation donnée; nous introduisons une fonction (vectorielle)  $F$  telle que la densité d'énergie du photon soit représentée par le produit scalaire  $F^*F$ : c'est cette fonction  $F$  qui jouera le rôle de l'amplitude de probabilité  $\Omega$  relative aux corpuscules matériels. En raison de la différence de définition, la condition de normalisation sera différente: dans notre cas, la probabilité que le photon soit dans un élément de volume déterminé sera  $\frac{F^*F}{h\nu}$ . Pour généraliser, considérons une fonction  $F$  non monochromatique et développons-la en intégrale (ou série) de FOURIER :

$$F = \int j(\mathbf{k}) e^{i(kr)} d\mathbf{k};$$

(1) Le but de LANDAU et de PEIERLS était plutôt d'établir inductivement les équations dans l'espace de configuration, dans l'espoir qu'elles ne fussent pas équivalentes aux équations quantiques de champ et fissent ainsi disparaître les difficultés auxquelles celles-ci donnent lieu. Mais cette conjecture ne s'est pas confirmée.

posons alors

$$(139) \quad (-\Delta)^n F = \int |\mathbf{k}|^{2n} f(\mathbf{k}) e^{i(kr)} d\mathbf{k},$$

$n$  étant un nombre quelconque. Avec cette notation, notre condition de normalisation deviendra

$$-\frac{1}{\omega} \int F^* \frac{1}{\sqrt{+\Delta}} F dx^1 dx^2 dx^3 = 1.$$

Pour  $M$  photons et  $N$  électrons, nous aurons une fonction vectorielle  $F^M$  à  $3^M \cdot 4^N$  composantes, qui dépendra des coordonnées de position  $Q_n$  des photons et  $P_n$  des électrons. L'intégrale

$$(140) \quad J_M = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^M \int F^{M*} \frac{1}{\sqrt{+\Delta_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{+\Delta_M}} F^M dQ_1 \dots dQ_M dP_1 \dots dP_N$$

ne sera pas égale à 1, mais sera proportionnelle à la probabilité pour que le système comporte justement  $M$  photons. Nous choisirons la normalisation de manière que

$$(141) \quad \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} J_M = 1.$$

Cela posé, si nous reprenons les fonctions  $\Omega(M_{r,\lambda}; P_n)$ , solutions de (135), normalisées par

$$(142) \quad \sum_{M_{1,1}} \dots \sum_{M_{r,\lambda}} \dots \int \Omega^*(M_{r,\lambda}; P_n) \Omega(M_{r,\lambda}; P_n) dP_1 \dots dP_N = 1,$$

nous voyons que la connexion suivante entre les  $F$  et les  $\Omega$  satisfait à la condition (140), (141) moyennant (142) :

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_M}^M = \sum_{M_1 + M_2 + \dots = M} \sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_M \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M}} [(M_1! M_2! \dots)^{1/2} \times \\ \Omega(M_1, M_2, \dots; P_n) \cdot D_{\sigma_1 \lambda_1}^{(r_1)} u_{\sigma_1}^{(r_1)}(Q_1) \sqrt{h\nu^{(r_1)}} \cdot D_{\sigma_2 \lambda_2}^{(r_2)} u_{\sigma_2}^{(r_2)}(Q_2) \sqrt{h\nu^{(r_2)}} \dots] \end{array} \right.$$

L'équation (135) prend alors, comme le montre un calcul simple, la forme :

$$(144) \left\{ \begin{aligned} & -W - \omega \sum_{i=1}^M \sqrt{\Delta_i} + \sum_{n=1}^N D'_0(P_n) + \sum_{n,m=1}^N O(P_n, P_m) \left\{ F_{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_M}^M \right. \\ & - \frac{e}{\sqrt{2}} \sum_{\bar{\sigma}} \sum_{n=1}^N \alpha_{\bar{\sigma}}^{(n)} \frac{1}{\sqrt{\Delta_{M+1}}} F_{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_M, \bar{\sigma}}^{M+1}(Q_1, \dots, Q_M, P_n; P_k) \\ & \left. - \frac{e\omega}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N \alpha_{\bar{\sigma}}^{(n)} + \sum_{\bar{\sigma}} \alpha_{\bar{\sigma}}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_{\bar{\sigma}}^{(n)}} \frac{\partial}{\partial q_i^{\bar{\sigma}_i}} \left\{ \times \right. \right. \\ & \left. \left. \delta(Q_i, P_n) F_{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{i-1}, \bar{\sigma}_{i+1}, \dots, \bar{\sigma}_M}^{M-1}(Q_1, \dots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \dots, Q_M; P_k) = 0. \right. \right. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant <sup>(1)</sup> faire une petite digression sur la théorie des protons de DIRAC (p. 34). Pour formuler les deux hypothèses qui sont à la base de cette théorie, le plus commode est de recourir à l'espace de configuration. Soient <sup>(2)</sup>  $v_l$  les fonctions fondamentales relatives aux états d'énergie positive  $E_l$ ,  $w_s$  celles des états d'énergie négative  $-E'_s$  ( $E'_s > 0$ ).

Si, dès lors, on désigne par  $P_n$  les coordonnées des électrons, par  $\alpha_{\bar{\sigma}}^{(+n)}$  une matrice qui opère sur les fonctions  $v_{l_n}(P_n)$ , et par  $\alpha_{\bar{\sigma}}^{(-n)}$  une matrice qui opère sur les fonctions  $w_{s_n}(P_n)$ , les hypothèses de la théorie de DIRAC se traduisent par la fonction hamiltonienne

$$H = \sum_{r, \lambda} M_{r, \lambda} h\nu^{(r)} + \sum_n (E_{l_n} + E'_{s_n}) - e \sum_r \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\lambda}^{(r)} \alpha_{\bar{\sigma}}^{(r)} \sum_n \left( \alpha_{\bar{\sigma}}^{(+n)} - \alpha_{\bar{\sigma}}^{(-n)} \right) u_{\bar{\sigma}}^{(r)}(P_n) + \frac{1}{2} \sum_r b_3^{(r)2},$$

où  $b_3^{(r)}$  est une abréviation pour l'opérateur défini par

$$\frac{2\pi\nu^{(r)}}{c} b_3^{(r)} = e \sum_n \left( \alpha_4^{(+n)} - \alpha_4^{(-n)} \right) u_4^{(r)}(P_n).$$

(1) Les considérations qui suivent sont dues à W. Pauli et R. Peierls et m'ont été aimablement communiquées par ce dernier.

(2) Aux états d'énergie positive correspondent des indices  $l_n, l'_n, \dots$ , relatifs au  $n^e$  électron ; aux états d'énergie négative correspondent de même des indices  $s_n, s'_n, \dots$ .

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

En utilisant les notations (II2), (II6), et en tenant compte du principe de PAULI, on trouve pour les équations aux amplitudes, analogues à (I3I),

$$\left\{ -W + \sum_{r, \lambda} M_{r, \lambda} h\nu^{(r)} + \sum_n (E_{l_n} + E'_{s_n}) + \frac{1}{2} \sum_r b_3^{(r)2} \left\{ B(l_1, \dots, l_N; s_1, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) + e \sum_r \sum_{\lambda} a_{\lambda}^{(r)} \sum_n \left\{ \sum_{l_n'} c_{l_n l_n', \lambda}^{(r)} B(l_1, \dots, l_n', \dots, l_N; s_1, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) - c_{l_n s_n, \lambda}^{(r)} B(l_1, \dots, l_{n-1}, l_{n+1}, \dots, l_N; s_1, \dots, s_{n-1}, s_{n+1}, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) + \sum_{s_n', l_n'} c_{s_n' l_n', \lambda}^{(r)} B(l_1, \dots, l_N, l_n'; s_1, \dots, s_{N'}, s_n'; M_{r, \lambda}) - \sum_{s_n'} c_{s_n' s_n, \lambda}^{(r)} B(l_1, \dots, l_N; s_1, \dots, s_n', \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) \right\} = 0. \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2\pi\nu^{(r)}}{c} b_3^{(r)} B(l_1, \dots, l_N; s_1, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) = \\ & = e \sum_n \left\{ \sum_{l_n'} d_{l_n' l_n}^{(r)} B(l_1, \dots, l_n', \dots, l_N; s_1, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) - d_{l_n s_n}^{(r)} B(l_1, \dots, l_{n-1}, l_{n+1}, \dots, l_N; s_1, \dots, s_{n-1}, s_{n+1}, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) + \sum_{s_n' l_n'} d_{s_n' l_n'}^{(r)} B(l_1, \dots, l_N, l_n'; s_1, \dots, s_{N'}, s_n'; M_{r, \lambda}) - \sum_{s_n'} d_{s_n' s_n}^{(r)} B(l_1, \dots, l_N; s_1, \dots, s_n', \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda}) \right\}; \end{aligned} \right.$$

dans l'argument de l'amplitude  $B(l_1, \dots, l_N; s_1, \dots, s_{N'}; M_{r, \lambda})$ , les  $l_1, \dots, l_N$  désignent les états occupés par les électrons d'énergie positive, tandis que les  $s_1, \dots, s_{N'}$  désignent les états *inoccupés* d'énergie négative, ou encore les états occupés par les protons.

Si maintenant nous nous reportons à l'équation (IOI), nous voyons qu'elle établit une correspondance entre un état (d'énergie positive ou

négative)  $l$  et un état  $\underline{l}$  dont l'énergie est de signe contraire. On a d'ailleurs

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{\underline{l}, \underline{p}}^{(r)} = c_{\underline{l}, \underline{p}}^{(r)} \\ d_{\underline{l}}^{(r)} = d_{\underline{l}}^{(r)} \end{array} \right.$$

Il résulte de là que si  $B(l_1, \dots, l_N; s_1, \dots, s_{N'}; M_r, \lambda)$  est une solution stationnaire d'énergie totale  $W$ , la fonction (1)

$$B^*(\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_N; \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{N'}; M_r, \lambda)(-1)^N,$$

est une autre solution de même énergie  $W$ ; cette solution représente  $N'$  électrons d'états  $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{N'}$  et  $N$  protons ou lacunes d'états  $\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_N$ .

Puisque les électrons et les protons peuvent ainsi échanger leurs rôles sans que l'énergie totale se modifie, il faut bien qu'ils aient même masse : la théorie de DIRAC est donc impuissante à expliquer la différence de masse entre électron et proton. Toutefois, cette conclusion ne serait plus nécessairement valable si on parvenait à se débarrasser des termes infinis d'énergie propre.

§ II. *Conséquences de l'équation générale.* — Si nous voulons maintenant tirer des conséquences de l'équation générale (135), nous sommes tout de suite arrêtés, comme nous l'avons déjà remarqué, par les termes infinis d'énergie électrostatique. Faute de mieux, nous commencerons par les négliger, ou plutôt par les retrancher arbitrairement de l'équation (135) et nous essayerons de poursuivre jusqu'à des résultats contrôlables la théorie ainsi modifiée.

Tout d'abord [20], il est intéressant de vérifier que la théorie non relativiste du problème des  $N$  corps est contenue dans l'équation (135) comme première approximation. S'il n'y a pas de rayonnement présent, l'équation se réduit, en tenant compte de (136), à

$$(145) \quad \left\{ -W + \sum_{n=1}^N D'_0(P_n) + \frac{e^2}{8\pi} \sum_{n,m} \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \right\} \Omega(P_n; 0) = 0$$

Mais si nous spécialisons dans  $D'_0$  les matrices  $\alpha, \sigma$  conformément à

$$(1) \quad \text{Il faut observer que } a_{\underline{p}}^{(r)*} = -a_{\underline{p}}^{(r)}, \quad c_{\underline{l}, \underline{p}}^{r*} = +c_{\underline{l}, \underline{p}}^{(r)}, \quad d_{\underline{l}}^{(r)*} = d_{\underline{l}}^{(r)}.$$

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

(82), (83), nous voyons aisément qu'une composante de  $\Omega$  ayant  $n$  indices 3 ou 4 est, comparée à une composante n'ayant que des indices 1 ou 2, de l'ordre de grandeur  $\left(\frac{v}{c}\right)^n$ ,  $v$  représentant l'ordre de grandeur des vitesses des points du système. Car, si nous supposons encore pour simplifier  $\varphi_4^0 = 0$ , l'équation

$$\left\{ D'_0 - E_s \right\} v_s = 0,$$

pour un électron, s'écrit, en désignant respectivement par  $v_s^1$ ,  $v_s^3$  l'ensemble des composantes 1, 2 et l'ensemble des composantes 3, 4 de  $v_s$ ,

$$(147) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_s v_s^1 = i\varphi_4^0 \omega \frac{\partial v_s^3}{\partial x^{\bar{s}}} + mc^2 v_s^1 - e\varphi_4^0 v_s^1 \\ E_s v_s^3 = i\varphi_4^0 \omega \frac{\partial v_s^1}{\partial x^{\bar{s}}} - mc^2 v_s^3 - e\varphi_4^0 v_s^3 \end{array} \right.$$

d'où

$$(148) \quad v_s^3 \approx \frac{1}{2mc^2} \cdot i\varphi_4^0 \omega \frac{\partial v_s^1}{\partial x^{\bar{s}}},$$

c'est-à-dire

$$v_s^3 \approx \left(\frac{v}{c}\right) v_s^1;$$

de plus, si l'on porte (148) dans la première équation (147), on obtient

$$(149) \quad -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{\bar{s}} \frac{\partial^2 v_s^1}{(\partial x^{\bar{s}})^2} = (E_s - mc^2 + e\varphi_4^0) v_s^1,$$

ce qui n'est autre que l'équation non relativiste de SCHRÖDINGER pour les deux composantes 1, 2.

Revenant à l'équation (145), nous voyons donc que la première approximation, relativement aux puissances de  $\left(\frac{v}{c}\right)$ , consiste à prendre égales à zéro toutes les composantes de  $\Omega$  contenant des indices 3 ou 4 et à déterminer les autres par l'équation

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} -W + \sum_{n=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{\bar{s}} \frac{\partial^2}{(\partial x^{\bar{s}})^2} + mc^2 - e\varphi_4^0 (P_n) \right. \\ \left. + \frac{e^2}{8\pi} \sum_{m=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \right] \end{array} \right\} \Omega = 0,$$

qui n'est autre que l'équation non relativiste de SCHRÖDINGER pour N corps.

Mais si l'on convient toujours d'exclure des doubles sommations  $\sum_{n,m}$  les termes  $n = m$ , on peut même, avec OPPENHEIMER [20], construire une solution exacte de (I35), à savoir :

$$(I51) \quad \Omega(P_n; M_{r,\lambda}) = \prod_{r,\lambda} \frac{1}{M_{r,\lambda}^{1/2}} \left\{ e \sqrt{\frac{hc^2}{8\pi^2 v(r)}} \cdot \frac{\sum \sum x_{\bar{\sigma}}^{(m)} u_{\bar{\sigma}}^{(r)}(P_m) D_{\lambda}^{(r)}(M_{r,\lambda})}{ihv(r)} \right\} \cdot \Omega_0(P),$$

où  $\Omega_0(P_n)$  satisfait à l'équation

$$(I52) \quad -W + \sum_n D_{on} + \frac{e^2}{8\pi} \sum_{n,m} \frac{1}{|r_n - r_m|} - \frac{e^2}{8\pi} \sum_{n,m} Q(P_n, P_m) \left\{ \Omega_0(P_n) = 0; \right.$$

la quantité  $Q(P_n, P_m)$  est définie par

$$Q(P_n, P_m) = \frac{c^2}{\pi} \sum_{r,\lambda} \sum_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1} D_{\bar{\sigma}\lambda}^{(r)} D_{\bar{\sigma}_1\lambda}^{(r)} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}_1}^{(m)} u_{\bar{\sigma}}^{(r)}(P_n) u_{\bar{\sigma}_1}^{(r)}(P_m) \cdot \frac{1}{v(r)^2},$$

et un calcul analogue à celui de  $O(P, P')$  [cf. (I34), (I36)] donne, moyennant (69) et (II6),

$$(I53) \quad \begin{aligned} Q(P_n, P_m) &= \sum_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}_1}^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_n^{\bar{\sigma}}} \frac{\partial}{\partial x_m^{\bar{\sigma}_1}} \left\{ \frac{c^2}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\pi} \right)^2 \sum_{r,\lambda} D_{\lambda\bar{\sigma}}^{(r)} D_{\bar{\sigma}_1\lambda}^{(r)} \frac{1}{k_{\bar{\sigma}}^{(r)} k_{\bar{\sigma}_1}^{(r)}} \frac{u_4^{(r)}(P_n) u_4^{(r)}(P_m)}{v(r)^2} \right\} \\ &= \sum_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}_1}^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_n^{\bar{\sigma}}} \frac{\partial}{\partial x_m^{\bar{\sigma}_1}} \left\{ \frac{c^2}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\pi} \right)^2 \sum_r \left[ \frac{\delta_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}_1}}{k_{\bar{\sigma}}^{(r)2} k_{\bar{\sigma}_1}^{(r)2}} - \frac{1}{|k^{(r)}|^2} \right] \frac{u_4^{(r)}(P_n) u_4^{(r)}(P_m)}{v(r)^2} \right\} \\ &= \sum_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}_1}^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_n^{\bar{\sigma}}} \frac{\partial}{\partial x_m^{\bar{\sigma}_1}} \left\{ \frac{c^2}{\pi} \frac{1}{\Delta_n} \sum_r \frac{u_4^{(r)}(P_n) u_4^{(r)}(P_m)}{v(r)^2} \right\} \\ &+ \sum_{\bar{\sigma}} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}}^{(m)} \cdot \frac{c^2}{\pi} \sum_r \frac{u_{\bar{\sigma}}^{(r)}(P_n) u_{\bar{\sigma}}^{(r)}(P_m)}{v(r)^2} \\ &= \sum_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}_1}^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_n^{\bar{\sigma}}} \frac{\partial}{\partial x_m^{\bar{\sigma}_1}} \left\{ \frac{1}{\Delta_n} \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \right\} + \sum_{\bar{\sigma}} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}}^{(m)} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} (x_n^{\bar{\sigma}} - x_m^{\bar{\sigma}}) x_{\bar{\sigma}_1}^{(m)} (x_n^{\bar{\sigma}_1} - x_m^{\bar{\sigma}_1}) \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|^3} + \sum_{\bar{\sigma}} x_{\bar{\sigma}}^{(n)} x_{\bar{\sigma}}^{(m)} \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \right\} \end{aligned}$$

L'équation (152) a été obtenue d'une autre manière (un peu moins générale) et étudiée par BREIT [22]. Elle présente plusieurs graves défauts : tout d'abord, elle n'est pas invariante pour le groupe de LORENTZ, c'est-à-dire que les termes infinis d'énergie propre ne sont pas invariants et ne peuvent donc pas être négligés comme nous l'avons fait ; ensuite, elle ne contient aucun terme pouvant décrire une réaction quelconque (absorption ou émission) avec le champ de rayonnement : de nouveau, ce sont les réactions des corpuscules avec leur propre champ qui jouent ici un rôle essentiel ; enfin, quand on fait tendre  $\hbar$  vers zéro, la fonction hamiltonienne ne tend pas vers la fonction classique correspondante : il reste un terme qui ne peut avoir de sens physique, et qui d'ailleurs, appliqué par exemple au calcul de la structure fine de l'hélium, fausse complètement l'accord numérique entre la théorie et l'expérience.

Pour ce qui concerne le rayonnement, il est clair que l'on retrouve en première approximation les résultats de DIRAC relatifs à l'émission, l'absorption et la dispersion [34]. HEISENBERG et PAULI [7] et OPPENHEIMER [18] ont étudié un effet qui n'avait pas encore été traité, se rapportant aux transitions entre états de même énergie (effet AUGER, désintégration radioactive, etc.) : la théorie prévoit non seulement les transitions normales avec conservation de l'énergie *pour la matière* (électron, particule  $\alpha$ , etc.), mais également des transitions où une partie de l'énergie matérielle initiale se retrouve sous forme de rayonnement ; le rapport des probabilités de ces deux espèces de transitions est de l'ordre de  $\frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$ . Au point de vue expérimental, ceci rendrait compte du fait que les spectres de particules  $\alpha$  sont fins, tandis que ceux des rayons  $\beta$  sont diffus ; mais le spectre de rayons  $\gamma$  qui devrait accompagner celui des rayons  $\beta$  n'a pas été décelé expérimentalement, ce qui constitue une difficulté de nature fondamentale pour toutes les théories qui garantissent la conservation de l'énergie. Signalons encore, comme autres applications de la méthode, un travail de KIKUCHI [23], établissant rigoureusement que la vitesse d'un signal lumineux est  $c$ , un autre travail de KIKUCHI [39] sur l'effet COMPTON, et un travail de WEIZSÄCKER [40] sur le microscope de HEISENBERG.

Cependant, la quantification entraîne dans la théorie du rayonnement (même non relativiste !) une nouvelle difficulté : la réaction des corpuscules avec leur champ de rayonnement doit avoir pour effet

un déplacement des valeurs fondamentales de l'énergie par rapport à leurs positions calculées en négligeant le champ de rayonnement ; or, OPPENHEIMER [20] a montré d'une manière générale, WALLER [24] dans le cas de l'électron libre, et ROSENFELD [36] dans le cas de l'oscillateur, que non seulement les déplacements des divers termes sont infinis, mais que même les différences entre ces déplacements pris deux à deux sont généralement infinies.

§ 12. *Discussion de la question de l'énergie propre infinie.* — Les termes infinis d'énergie propre proviennent évidemment de ce que le « modèle classique » dont la quantification fournit la théorie du champ d'ondes matérielles est l'électron ponctuel. Ces termes se présentent aussi dans la théorie classique, mais avec plusieurs différences importantes, sur lesquelles HEISENBERG [25] attire l'attention : l'électron quantique n'est pas simplement ponctuel, il a aussi un spin ; les grandeurs quantiques du champ électromagnétique de l'électron ne sont pas toutes commutables entre elles ; la valeur de l'énergie n'est pas, comme dans la théorie classique,  $\frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dx^1 dx^2 dx^3$ , mais il s'y ajoute le terme d'interaction des champs matériel et électromagnétique ; enfin, le paquet d'ondes qui représente l'électron quantique n'est pas stationnaire avec une singularité ponctuelle, comme la solution classique, mais il se diffuse en général au cours du temps. Cette dernière différence nous empêche évidemment de transposer dans la théorie quantique la notion classique d'un rayon  $r_0$  de l'électron, artifice qui permettait classiquement d'éviter les termes infinis d'énergie.

On peut penser à introduire d'une autre manière une longueur fondamentale  $r_0$  : c'est l'hypothèse du « Gitterwelt », suggérée indépendamment par HEISENBERG [25] et par AMBARZUMIAN et IWANENKO [26]. Divisons l'espace en cellules cubiques (par exemple) de côté  $r_0$  et supposons que les seules positions admissibles pour un électron soient les nœuds de ce réseau. Les équations différentielles sont alors remplacées par des équations aux différences et l'énergie propre de l'électron est finie. Ce modèle a le défaut fatal de n'être pas relativistiquement invariant.

Une difficulté analogue se présente encore, indépendamment de tout champ matériel, si l'on calcule [27] l'énergie du champ de gravitation

engendré par un photon : là aussi on trouve des termes infinis dus à une singularité ponctuelle.

Mais HEISENBERG [25] a fait observer que ces difficultés relatives à l'énergie ne dépendaient pas seulement du fait que le modèle classique n'introduit pas de longueur fondamentale  $r_0$  : il semble bien que la méthode même de quantification des champs soit également en cause. Pour nous en rendre compte, considérons un électron animé d'un mouvement tellement rapide que son énergie au repos  $mc^2$  puisse être négligée devant son énergie cinétique ; si nous faisons par suite  $m = 0$ , il ne reste plu : dans nos équations que les 3 constantes  $h, c, e$ , au moyen desquelles il est impossible (pour des raisons de dimensions) de définir une longueur fondamentale  $r_0$  : si donc l'énergie propre de l'électron ne peut être rendue finie dans ce cas, c'est pour des raisons qui n'ont certainement rien à voir avec la longueur  $r_0$ .

Dans le cas d'un seul électron, il existe une relation remarquable entre l'énergie totale  $\bar{H}$  et l'impulsion totale

$$\bar{G}_{\bar{\tau}} = \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \psi^* \left( \omega \frac{\partial}{\partial x^{\bar{\tau}}} - e \varphi_{\bar{\tau}} \right) \psi + \frac{1}{2} [(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \times \mathbf{E})]_{\bar{\tau}} \right\};$$

on a en effet, lorsque  $\varphi_4 = 0$  et  $m = 0$ ,

$$(154) \quad \bar{H} = \alpha_{\bar{\tau}} \bar{G}_{\bar{\tau}} + \varepsilon,$$

avec

$$(155) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 - \alpha_{\bar{\tau}} [(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \times \mathbf{E})]_{\bar{\tau}} \right\}.$$

Mais pour un électron libre, la théorie de DIRAC indique justement pour l'énergie l'expression  $\bar{H} = \alpha_{\bar{\tau}} \bar{G}_{\bar{\tau}}$  ; par suite le terme  $\varepsilon$  restant dans (154) peut s'interpréter comme l'énergie propre de l'électron et doit s'annuler dans une bonne théorie. Maintenant l'expression (155) de cette énergie propre peut se transformer en

$$(156) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \beta_{\bar{\tau}} (\mathbf{E} - i\tau\mathbf{H})_{\bar{\tau}} \right\}^2,$$

avec

$$(157) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{\bar{\tau}} = -i \begin{pmatrix} \beta_{\bar{\tau}} & 0 \\ 0 & -\beta_{\bar{\tau}} \end{pmatrix}, \\ \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

(Dans  $\tau$  les symboles  $\mathbf{1}$  représentent la matrice-unité du 2<sup>e</sup> ordre.)

Il résulte de là que la difficulté de l'énergie propre serait résolue si l'on pouvait trouver une fonctionnelle de SCHRÖDINGER  $\Omega(\mathbf{q}; \varphi)$  ( $\mathbf{q}$ , coordonnées de l'électron) satisfaisant aux conditions accessoires

$$(158) \quad \left\{ \operatorname{div} \mathbf{E}_r - e\delta(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\} \Omega = 0$$

et

$$(159) \quad \left\{ \beta_{\frac{\tau}{\sigma}} (\mathbf{E} - i\tau\mathbf{H})_{\frac{\tau}{\sigma}} \right\} \Omega = 0,$$

$$(160) \quad \left\{ \beta_{\frac{\tau}{\sigma}} (\mathbf{E} - i\tau\mathbf{H})_{\frac{\tau}{\sigma}} \right\} \alpha_{\nu} \bar{\mathbf{G}}_{\nu} \Omega = 0;$$

la condition (160) exprimant que (159) reste vraie au cours du temps dès qu'elle est satisfaite à un instant déterminé (1).

La discussion de ces équations peut se faire de la manière suivante. Un électron se mouvant avec l'impulsion  $p$  dans la direction  $Oq^1$  et ayant son spin dirigé suivant  $-Oq^1$  se représente, en vertu de notre choix (81), (82), (83) des matrices de DIRAC, par une fonction  $\Omega$  à 4 composantes de la forme

$$(161) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \Omega^{\circ} e^{\frac{c}{\omega} p q^1}, \\ \Omega_2^{\circ} = \Omega_4^{\circ} = 0, \quad \Omega_1^{\circ} = \Omega_3^{\circ} \equiv \omega^{\circ}; \end{array} \right.$$

l'amplitude  $\Omega_{\circ}(\varphi_{\nu}, q^{\nu})$  doit dès lors satisfaire aux conditions suivantes, déduites de l'équation de DIRAC et des conditions (158), (159) :

$$(162) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{G}}_{\nu} \omega^{\circ} = 0, \\ \left\{ \operatorname{div} \mathbf{E}_r - e\delta(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\} \omega^{\circ} = 0, \\ \beta_{\frac{\tau}{\sigma}} (\mathbf{E} - i\tau\mathbf{H})_{\frac{\tau}{\sigma}} \omega^{\circ} = 0; \end{array} \right.$$

la première équation (162) entraîne la condition (160). Quant à la dernière équation (162), elle résume les deux équations

$$(163) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-i\mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_1) \omega^{\circ} = 0, \\ (\mathbf{E}_2 + i\mathbf{E}_3 - \mathbf{H}_3 + i\mathbf{H}_2) \omega^{\circ} = 0. \end{array} \right.$$

(1) La relation (160) n'est autre que  $[\bar{\mathbf{H}}, \beta_{\frac{\tau}{\sigma}} (\mathbf{E} - i\tau\mathbf{H})_{\frac{\tau}{\sigma}}] \Omega = 0$ .

Considérons maintenant les équations auxiliaires *en nombres-c*

$$(I64) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E}_r^q = e\delta(r, \mathbf{q}), \\ -i\mathbf{E}_I^q + \mathbf{H}_I^q = 0, \\ \mathbf{E}_2^q + i\mathbf{E}_3^q - \mathbf{H}_2^q + i\mathbf{H}_2^q = 0; \end{cases}$$

elles ont pour solution (1)

$$(I65) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_I^q = \mathbf{H}_I^q = 0, \\ \mathbf{E}_2^q = \mathbf{H}_3^q = \frac{e(x^2 - q^2)}{2\pi[(x^2 - q^2)^2 + (x^3 - q^3)^2]} \delta(x^1 - q^1), \\ \mathbf{E}_3^q = -\mathbf{H}_2^q = \frac{e(x^2 - q^2)}{2\pi[(x^2 - q^2)^2 + (x^3 - q^3)^2]} \delta(x^1 - q^1); \end{cases}$$

le potentiel vecteur correspondant peut être choisi comme suit :

$$(I66) \quad \begin{cases} \varphi_2^q = \varphi_3^q = 0, \\ \varphi_I^q = -\frac{e}{4\pi} \delta(x^1 - q^1) \log [(x^2 - q^2)^2 + (x^3 - q^3)^2]. \end{cases}$$

De ces formules (I65), (I66) et de la signification de  $\bar{G}_v$ , il résulte que, appliqué à une fonctionnelle ne dépendant que des  $\varphi_{\bar{\sigma}}, \varphi_{\bar{\sigma}}^q, \mathbf{E}_{\bar{\sigma}}^q, G_{\bar{\sigma}}$  représente l'opération  $-\omega \frac{d}{dx^v}$ .

Cela posé, donnons à  $\omega^0$  la forme

$$\omega^0 = e^{-\frac{1}{\omega} \int \varphi_v \mathbf{E}_v^q dx^1 dx^2 dx^3} \chi^0 \left( \varphi_{\bar{\sigma}} - \varphi_{\bar{\sigma}}^q \right);$$

nous déduisons de (I62), (I63), moyennant (I64), les conditions suivantes pour  $\chi^0$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx^v} \chi^0 \left( \varphi_{\bar{\sigma}} - \varphi_{\bar{\sigma}}^q \right) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_r \chi^0 \left( \varphi_{\bar{\sigma}} - \varphi_{\bar{\sigma}}^q \right) = 0, \\ \mathcal{L}_v \left[ \mathbf{E} - i\tau(\mathbf{H} - \mathbf{H}^q) \right] \chi^0 \left( \varphi_{\bar{\sigma}} - \varphi_{\bar{\sigma}}^q \right) = 0, \end{cases}$$

(1) Classiquement, ce champ est ce que devient le champ de Coulomb pour un système se déplaçant avec la vitesse de la lumière dans la direction  $Oq^1$ .

ou encore

$$(168) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \chi^0(\varphi_{\bar{\sigma}}) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_\gamma \chi^0(\varphi_{\bar{\sigma}}) = 0, \\ \beta_\gamma (\mathbf{E} - i\tau \mathbf{H})_\gamma \chi^0(\varphi_{\bar{\sigma}}) = 0. \end{array} \right.$$

D'après (168), la fonction  $\chi_0(\varphi_{\bar{\sigma}})$  s'interprète donc comme une solution des équations du champ électromagnétique pur correspondant à une énergie et une impulsion nulles. S'il existait une telle solution, nous pourrions donc, moyennant (167), (161), en déduire une solution  $\Omega$  représentant un électron sans énergie propre. Malheureusement, à cause de la présence de l'énergie au zéro absolu du rayonnement, il n'existe pas de solution  $\chi^0$  satisfaisant aux conditions (168). Les artifices formels qui permettent de se débarrasser du terme d'énergie au zéro absolu détruisent d'autre part la forme de la fonction hamiltonienne du rayonnement sur laquelle se basent essentiellement les calculs précédents. L'échec de cette intéressante tentative de HEISENBERG montre donc aussi que même la méthode formelle de quantification du champ est inadéquate.

§ 13. *Relations d'incertitude pour le champ électromagnétique.* — Il nous reste à traiter un aspect de la théorie de la quantification du champ électromagnétique : c'est la question des relations d'incertitude relatives à la mesure des diverses composantes du champ.

Les relations de commutabilité entre les potentiels et les composantes du champ électrique <sup>(1)</sup> entraînent les relations suivantes entre les différentes composantes des champs électrique et magnétique :

$$(169) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{E}_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}), \mathbf{E}_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}')] = 0, \quad [\mathbf{H}_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}')] = 0, \quad [\mathbf{E}_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}')] = 0, \\ [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \mathbf{H}_2(\mathbf{r}')] = -[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{H}_1(\mathbf{r}')] = \omega \frac{d\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dx^3}, \quad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Les seules relations d'incertitude que nous puissions tirer de ces formules concernent la mesure simultanée de deux composantes telles

(1) Toutes les considérations du présent paragraphe s'appliquent sans modification à la théorie du champ de rayonnement de ROSENFELD et SOLOMON, puisqu'elle fournit les mêmes relations de commutabilité (169). Il doit d'ailleurs en être ainsi des résultats qui concernent uniquement une limitation dans l'applicabilité des concepts classiques à l'interprétation des mesures, indépendamment de tout formalisme.

que  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  dans le même volume élémentaire  $\Delta V = (\Delta l)^3$ , et elles ont la forme :

$$(170) \quad \Delta \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{H}_2 \approx \frac{hc}{(\Delta l)^4}, \text{ etc.} \quad \left( h = \frac{h}{2\pi} \right).$$

On peut, avec HEISENBERG [31], se rendre compte que ces relations (170) sont une conséquence de l'image corpusculaire du champ électromagnétique. D'après cette image, l'énergie

$$W = \Delta V \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$$

et l'impulsion

$$\mathbf{G} = \Delta V \cdot \frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

contenues dans le volume  $\Delta V$  doivent se composer d'un nombre entier d'énergies  $h\nu$  et d'impulsions  $\frac{h\nu}{c}$ . Mais puisque nous ne mesurons les champs électromagnétiques que dans des volumes finis  $\Delta V$ , une lumière de longueur d'onde inférieure à  $\Delta l$  ne pourra être décelée, ce qui implique pour  $W$  et  $\mathbf{G}$  des incertitudes minima respectives de l'ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta W \approx \frac{hc}{\Delta l} \\ \Delta \mathbf{G}_{\bar{x}} \approx \frac{h}{\Delta l} \end{array} \right.$$

D'autre part, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta W = \frac{\Delta V}{2} \{ 2|\mathbf{E}\Delta\mathbf{E}| + 2|\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}| + (\Delta\mathbf{E})^2 + (\Delta\mathbf{H})^2 \} \\ \Delta \mathbf{G}_3 = \frac{\Delta V}{c} \{ |(\mathbf{E} \times \Delta\mathbf{H})_3| + |(\Delta\mathbf{E} \times \mathbf{H})_3| + 2\Delta\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{H}_2 \}, \text{ etc.} \end{array} \right.$$

La comparaison des deux valeurs de  $\Delta \mathbf{G}_3$ , en supposant nulles les valeurs moyennes  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , donne

$$(171) \quad \Delta \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{H}_2 \approx \frac{hc}{2(\Delta l)^4},$$

ce qui ne diffère de (170) que par un facteur  $\pi$  sans importance. De

plus, on vérifie de suite, en observant que

$$\Delta \mathbf{E}_1^2 + \Delta \mathbf{H}_2^2 = 2\Delta \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{H}_2 + (\Delta \mathbf{E}_1 - \Delta \mathbf{H}_2)^2 \geq 2\Delta \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{H}_2,$$

que (171) est compatible avec la condition  $\Delta W \sim \frac{hc}{\Delta t}$ .

Quant aux dimensions  $\Delta l$ , elles sont déterminées en fonction du temps  $\Delta t$  que nécessite la mesure envisagée par la relation

$$\Delta l = c\Delta t,$$

de sorte que les relations (170) prennent définitivement la forme

$$(172) \quad \Delta \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{H}_2 \sim \frac{hc}{(c\Delta t)^4}, \text{ etc.}$$

Mais si d'autre part on analyse la mesure d'une composante quelconque d'un champ électromagnétique au moyen de corps d'épreuve, on est conduit, comme nous allons le voir, à une incertitude sur *chaque* composante séparément :

$$(173) \quad \Delta \mathbf{E}_1 > \frac{\sqrt{hc}}{(c\Delta t)^2}, \text{ etc ;}$$

les relations (172) se déduisent bien de (173), mais l'inverse n'a évidemment pas lieu : sous ce rapport également, la quantification des champs se révèle insuffisante.

Montrons, à titre d'exemple, comment les considérations si simples et si instructives de BOHR [28] sur les limitations fondamentales des mesures physiques conduisent à (173) dans le cas d'un champ électrique [29]. Si la mesure nécessite un temps  $\Delta t$ , l'incertitude  $\Delta p$  qui en résulte pour l'impulsion communiquée au corps d'épreuve entraîne pour le champ électrique l'incertitude

$$(174) \quad \Delta \mathbf{E}_1 = \frac{1}{e} \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

$e$  étant la charge du corps d'épreuve.

Maintenant une mesure d'impulsion d'une particule quelconque fait toujours intervenir un choc de la particule considérée avec une autre particule ou avec un photon. Si  $\Delta t$  est la durée du choc, c'est-à-dire si l'instant du choc n'est connu qu'avec l'incertitude  $\Delta t$ , il en

résulte pour l'incertitude  $\Delta |E - E'|$  de la variation d'énergie de la particule au cours du choc,

$$(175) \quad \Delta |E - E'| > \frac{h}{\Delta t},$$

si nous supposons que la variation d'énergie de l'autre particule (appareil de mesure) est exactement connue. Si de même la variation d'impulsion de l'appareil est déterminée exactement, nous déduisons de la condition de conservation de l'impulsion que les incertitudes  $\Delta p$ ,  $\Delta p'$  sur l'impulsion de la particule étudiée avant et après le choc sont égales. Comme d'autre part

$$\Delta E = v\Delta p, \quad \Delta E' = v'\Delta p',$$

$v$  et  $v'$  étant les vitesses avant et après le choc, on tire de (175) la relation

$$(176) \quad |v - v'| \Delta p > \frac{h}{\Delta t},$$

entre  $\Delta p$  et  $\Delta t$ . Dans une théorie non relativiste, cette relation n'implique aucune limitation essentielle pour  $\Delta p$ , la différence  $|v - v'|$  pouvant être rendue aussi grande que l'on veut ; si l'on tient compte de la relativité, au contraire, qui exige  $|v - v'| \leq c$ , on obtient

$$(177) \quad \Delta p > \frac{h}{c\Delta t}.$$

Mais il n'est pas permis (comme le font JORDAN et FOCK [32]) d'introduire la valeur (177) de  $\Delta p$  dans la formule (174), ce qui donnerait pour  $\Delta E_1$  une valeur inversement proportionnelle à la charge du corps d'épreuve. C'est que le fait que le corps d'épreuve est chargé électriquement entraîne une seconde incertitude sur  $\Delta p$  : l'accélération indéterminée communiquée au corps d'épreuve pendant le temps  $\Delta t$  du processus élémentaire provoque en effet une réaction de rayonnement également indéterminée. On sait seulement que l'accélération est au moins  $\frac{|v - v'|}{\Delta t}$ , de sorte que l'énergie rayonnée pendant le temps  $\Delta t$  est au moins de l'ordre de

$$\frac{e^2}{c^3} \frac{|v - v'|^2}{\Delta t^2} \cdot \Delta t;$$

si  $\Delta'p$  est l'incertitude qui en résulte pour l'impulsion, on peut donc écrire

$$\Delta'p |v - v'| > \frac{e^2}{c^3} \frac{|v - v'|^2}{\Delta t},$$

ou encore

$$\Delta'p > \frac{e^2}{c^3 \Delta t} |v - v'|.$$

Si on rapproche cette formule de (176), on trouve, pour l'incertitude d'impulsion d'une particule chargée,

$$(178) \quad \Delta p > \frac{e \sqrt{\hbar c}}{c \Delta t}.$$

Il suffit maintenant d'introduire (178) dans (174) pour trouver la formule (173) cherchée, d'où la charge  $e$  du corps d'épreuve a complètement disparu.

§ 14. — *Critique de la théorie de l'électron et du rayonnement* (1). — Dans les paragraphes précédents, nous avons développé les principales conséquences du formalisme de la quantification appliqué au champ matériel et au champ électromagnétique, et nous avons vu que, dans les deux cas, nous aboutissions à un échec complet. D'une part, la quantification du champ matériel conduit à un électron ponctuel d'énergie infinie ; de l'autre, la quantification du champ de rayonnement entraîne également, même sous la forme non relativiste, dès qu'on dépasse la première approximation, des résultats inacceptables, tels que des déplacements infinis des termes spectraux ou une énergie infinie du champ de gravitation engendré par un photon. Nous ne parlerons plus de l'énergie du rayonnement au zéro absolu, car ce n'est pas une réelle difficulté.

Cela étant, il importe d'abandonner le point de vue formel qui nous a ainsi fourvoyés, et d'analyser la situation en partant de considérations purement physiques.

L'exploration du domaine atomique a conduit à la découverte d'une

(1) *Note ajoutée à la correction* (novembre 1931). L'exposé suivant des idées de N. BOHR est précisé et complété sur plusieurs points importants par de nouveaux travaux de BOHR, en cours de publication dans le *Journal of the Chemical Society* (Faraday Lecture) et dans les Comptes-rendus du Congrès de physique nucléaire tenu à Rome en octobre 1931.

## LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

« stabilité » particulière des phénomènes atomiques fondamentaux (indivisibilité de l'électron, indivisibilité du quantum d'action), qui défie toute description au moyen des concepts de la mécanique et de l'électromagnétisme classiques, dérivés de l'étude des phénomènes macroscopiques. Naturellement, c'est au moyen de ces concepts classiques qu'on doit interpréter les expériences pour en tirer cette conclusion : mais l'existence de ce caractère nouveau de stabilité auquel on se heurte ainsi marque justement la limite d'applicabilité des concepts classiques à la description des phénomènes atomiques.

L'existence de l'électron se traduit dans la théorie classique (indépendamment du quantum d'action) par l'existence d'une longueur fondamentale, le « diamètre » de l'électron :

$$d = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm. ;}$$

à l'intérieur de domaines ayant une extension linéaire de l'ordre de grandeur de  $d$ , les concepts classiques n'ont plus un sens bien défini, car les forces de rayonnement cessent d'être négligeables vis-à-vis des forces d'inertie.

L'existence du quantum d'action introduit une nouvelle limitation d'un autre genre et d'un autre ordre de grandeur ; on peut la caractériser aussi par une longueur fondamentale, le rayon  $a$  de l'atome d'hydrogène :

$$a = \frac{h^2}{e^2 m} = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

C'est la petitesse du rapport

$$\frac{d}{a} = \alpha^2 = 5,3 \cdot 10^{-5}$$

(où  $\alpha = \frac{e^2}{hc} = 7,3 \cdot 10^{-3}$  désigne la constante de structure fine) qui explique comment le problème de la stabilité de l'atome a pu être résolu (par la mécanique quantique) indépendamment de celui de la stabilité de l'électron. Mais en même temps on voit clairement que ce n'est pas un simple traitement formel comme la méthode de quantification qui est capable d'introduire dans la mécanique quantique le trait qui lui manque pour rendre compte de la non-ponctualité de l'électron.

Quant aux réactions de rayonnement, on peut en première approximation, grâce à la petitesse de la constante  $\alpha$ , les négliger vis-à-vis des forces pondéromotrices s'exerçant entre les particules matérielles : il est essentiel de se rappeler que c'est cette circonstance qui rend possible la définition des états stationnaires caractérisant la stabilité de l'atome.

Moyennant donc cette double restriction (domaines de dimensions grandes par rapport à  $d$ , réactions de rayonnement faibles), la mécanique quantique fournit une interprétation très cohérente et très belle des phénomènes atomiques. La limitation de l'applicabilité des concepts classiques due à l'existence du quantum d'action s'exprime par le rapport bien connu de « complémentarité » qui existe entre la description spatio-temporelle et le bilan d'énergie-impulsion.

Comme l'a montré DIRAC, il est possible d'édifier, dans le cadre de cette interprétation, une théorie de l'électron qui satisfasse à la fois aux exigences fondamentales de la covariance relativiste et de l'atomicité de la charge. En même temps, la possibilité, dans cette théorie, de transitions à des états d'énergie négative nous indique la limite du domaine où il est permis de traiter la masse de l'électron comme une constante indépendante.

Nous avons déjà insisté sur le fait que la stabilité qui constitue le trait essentiel des systèmes atomiques est une idéalisation rendue possible par la petitesse des forces de rayonnement. D'autre part, chacun sait que ce sont justement les phénomènes (émission, absorption, dispersion) résultant de l'interaction des champs de rayonnement avec un système matériel qui nous fournissent les renseignements les plus précis et les plus complets sur les états stationnaires de ce dernier et sur les probabilités de transition entre ces états. Dès lors, la manière la plus naturelle de chercher à rendre compte de cette situation est de considérer les forces de rayonnement comme des forces perturbatrices du système atomique stable et de calculer leurs effets par une méthode d'approximation. L'idée directrice dans cette recherche est contenue dans le « principe de correspondance », exprimant que les lois quantiques doivent tendre, à la limite où les actions intervenant dans les phénomènes sont grandes par rapport à  $h$ , vers les lois classiques correspondantes. C'est le principe de correspondance qui est à la base de l'interprétation des éléments de matrice de HEISENBERG : quant à l'équation de SCHRÖDINGER, et au « principe de superposition des

états » qui résulte de sa linéarité, leur relation avec le principe de correspondance a été mise en relief d'une manière particulièrement claire et élégante par KLEIN [37].

Les premiers succès de la théorie de la quantification du champ de rayonnement ont pu faire un instant supposer que cette méthode fournissait, dans le cadre de la mécanique quantique, une expression mathématique rigoureuse du principe de correspondance. Mais en réalité, comme nous l'avons rappelé au début de ce paragraphe, une approximation plus poussée conduit de suite à des résultats dépourvus de signification, de sorte que le nouveau formalisme ne peut être considéré que comme un procédé symbolique de calcul ayant à peu près la même portée que la méthode de KLEIN. A ce propos, un travail récent de HEISENBERG [34] illustre d'une manière très intéressante la relation qu'on peut établir entre le principe de correspondance et la méthode de quantification : en fait, le procédé qu'il y expose pour arriver à la première approximation de la théorie quantique des champs peut s'interpréter comme un perfectionnement de la méthode de KLEIN. Il montre en effet qu'il est possible de conserver formellement toute la marche de cette dernière à condition de tenir compte simplement dans le résultat final de la non-commutabilité des diverses grandeurs de champ. On voit donc que, exactement comme dans le cas du rayonnement noir, la quantification du champ n'a d'autre rôle que de traduire d'une manière condensée et élégante les lois statistiques fondamentales relatives aux systèmes quantiques.

Mais rien ne nous autorise plus à penser que la même méthode soit susceptible de nous fournir une description adéquate des interactions entre particules matérielles, ou, pour exprimer la même idée en d'autres termes, que le concept de photon (qui résulte immédiatement de la quantification du champ électromagnétique) puisse être légitimement appliqué à l'analyse d'autres champs que les champs de rayonnement pur.

(Conférences faites à l'Institut Henri-Poincaré en février 1931).

Manuscrit reçu le 21 Février et le 9 Juillet 1931.

## BIBLIOGRAPHIE

---

1. M. BORN, W. HEISENBERG et P. JORDAN, *Zs. f. Phys.*, **35**, 557, 1926.  
Cf. M. BORN et P. JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*, 1930, Kap. VII.
2. P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc., A*, **114**, 243, 710, 1927.
3. P. JORDAN et O. KLEIN, *Zs. f. Phys.*, **45**, 571, 1928.
4. P. JORDAN et E. WIGNER, *Zs. f. Phys.*, **47**, 631, 1928.
5. Cf. H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928, § 20 et § 44.  
W. HEISENBERG, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, 1930, pp. 109 et suiv.
6. P. JORDAN et W. PAULI, *Zs. f. Phys.*, **47**, 151, 1928.
7. W. HEISENBERG et W. PAULI, *Zs. f. Phys.*, **56**, 1, 1929.  
Correction : L. ROSENFELD, *Zs. f. Phys.*, **63**, 574, 1930.
8. L. ROSENFELD, *Ann. der Phys.*, **5**, 113, 1930.
9. W. HEISENBERG et W. PAULI, *Zs. f. Phys.*, **59**, 168, 1930.
10. L. ROSENFELD, *Zs. f. Phys.*, **58**, 540, 1929.
11. F. MÖGLICH, *Ann. d. Phys.*, **2**, 676, 1929 ; W. WESSEL, *Zs. f. Phys.*, **67**, 54, 1931.
12. P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc. A*, **117**, 610, 1928 ; **118**, 351, 1928.
13. Cf. P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, 1930, § 79.
14. O. KLEIN, *Zs. f. Phys.*, **53**, 157, 1929.
15. I. WALLER, *Zs. f. Phys.*, **61**, 837, 1930.
16. P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc., A*, **126**, 360, 1930.
17. J. R. OPPENHEIMER, *Phys. Rev.*, **35**, 562, 1930.
18. J. R. OPPENHEIMER, *Phys. Rev.*, **35**, 939, 1930.
19. P. A. M. DIRAC, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **26**, 361, 1930.
20. J. R. OPPENHEIMER, *Phys. Rev.*, **35**, 461, 1930.
21. L. LANDAU et R. PEIERLS, *Zs. f. Phys.*, **62**, 188, 1930.
22. G. BREIT, *Phys. Rev.*, **34**, 553, 1929 ; **36**, 383, 1930 ; cf. D. R. INGLIS, *Phys. Rev.*, **37**, 795, 1931 ; H. C. WOLFE, *Phys. Rev.*, **37**, 591, 1930.
23. S. KIKUCHI, *Zs. f. Phys.*, **66**, 558, 1930.
24. I. WALLER, *Zs. f. Phys.*, **62**, 673, 1930.
25. W. HEISENBERG, *Zs. f. Phys.*, **65**, 4, 1930.

#### BIBLIOGRAPHIE

26. V. AMBARZUMIAN et D. IWANENKO, *Zs. f. Phys.*, **64**, 563, 1930.
27. L. ROSENFELD, *Zs. f. Phys.*, **65**, 589, 1930. Cf. J. SOLOMON, *Zs. f. Phys.*, **71**, 162, 1931.
28. N. BOHR, *Atomtheorie und Naturbeschreibung*, 1931.
29. L. LANDAU et R. PEIERLS, *Zs. f. Phys.*, **69**, 56, 1931.
30. K. NIKOLSKY, *Zs. f. Phys.*, **62**, 677, 1930.
31. W. HEISENBERG, *loc. cit.* [5], pp. 36 et suiv.
32. P. JORDAN et V. FOCK, *Zs. f. Phys.*, **66**, 206, 1930.
33. L. ROSENFELD et J. SOLOMON, *Naturw.*, **19**, 376, 1931 ; *Journ. de Phys.* **2**, 139, 1931.
34. W. HEISENBERG, *Ann. d. Phys.*, **9**, 338, 1931. Cf. L. ROSENFELD, *Zs. f. Phys.*, **71**, 273, 1931.
35. I. TAMM, *Zs. f. Phys.*, **62**, 545, 1930.
36. L. ROSENFELD, *Zs. f. Phys.*, **70**, 454, 1931.
37. O. KLEIN, *Zs. f. Phys.*, **41**, 407, 1927.
38. F. SAUTER, *Zs. f. Phys.*, **69**, 742, 1931.
39. S. KIKUCHI, *Zs. f. Phys.*, **68**, 803, 1931.
40. F. v. WEIZSÄCKER, *Zs. f. Phys.*, **70**, 114, 1931.

Cette bibliographie contient les travaux publiés jusqu'en septembre 1931, qui ont été utilisés dans le texte.