

# ANNALES DE L'I. H. P.

A. SOMMERFELD

## Sur quelques problèmes de mécanique ondulatoire

*Annales de l'I. H. P.*, tome 2, n° 1 (1932), p. 1-24

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1932\\_\\_2\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_1_1_0)

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Sur quelques problèmes de mécanique ondulatoire

PAR

A. SOMMERFELD

---

## I. — Symétrie spatiale de l'effet photo-électrique

Considérons le problème de la distribution angulaire des électrons provenant d'un atome d'hydrogène sous l'influence d'une onde de lumière ou, mieux, de rayons X.

Soit une onde incidente, représentée par

$$e^{iqx}, \quad q = \frac{2\pi}{\lambda};$$

elle est polarisée dans la direction  $y$ . L'état de l'atome est donné par

$$\psi_0 = e^{-br}, \quad b = \frac{Z}{a},$$

où  $Z$  signifie le numéro atomique et  $a$  le rayon de l'orbite de BOHR pour la couche K. Dans le cas de la couche L, il faudra modifier quelque peu les définitions.

L'état  $\psi_0$  est perturbé par l'onde incidente. Nous porterons notre attention exclusivement sur le spectre continu, c'est-à-dire, sur les électrons émis par l'atome sous l'influence de la lumière. Les électrons sont représentés par la fonction suivante :

$$(3) \quad \psi = \sum_{l, m} A_{lm} \psi_l P_l^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\frac{2\pi i}{h} \varepsilon t},$$

— I —

A. SOMMERFELD

$\psi_l$  est la fonction propre radiale du spectre continu ; c'est une fonction du type de LAGUERRE, donnée par

$$(4) \quad \psi_l = \frac{(-2kr)^{-l-1}}{2\pi} \int \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{n-l-1} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-n-l-1} e^{-2i\xi kr} d\xi.$$

Si le nombre  $n$  qui intervient était entier,  $\psi_l$  serait un polynôme de Laguerre. Mais dans notre cas  $n$  est imaginaire

$$n = \frac{Z}{i\hbar ka}$$

et la fonction  $\psi_l$  devient transcendante mais reste holomorphe dans tout le plan.

$k$  se rattache au point du spectre continu, qui correspond à l'équation d'Einstein et s'exprime en fonction de la vitesse  $v$  de l'électron, par la formule de de BROGLIE :

$$(5) \quad k = \frac{2\pi}{h} \mu v.$$

En effet, l'expression (3) peut s'obtenir comme résidu d'une intégrale complexe au point du spectre continu, correspondant à la loi photoélectrique d'EINSTEIN (1). Quant au coefficient  $A_{lm}$ , il est donné par l'intégrale réelle du type FOURIER

$$(6) \quad A_{lm} = \int e^{iqx} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \psi_l^* P_l^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} d\tau,$$

$\frac{\partial \psi_0}{\partial y}$  étant proportionnel à  $\frac{y}{r} = \sin \theta \cos \varphi$  on voit immédiatement que  $A_{lm} = 0$  pour  $m \neq 1$  et même pour  $m = 1$  dans le cas du facteur  $\sin m\varphi$ . Il s'en suit que la double somme en (3) se réduit à une somme simple et que l'expression de  $\psi$  devient

$$(3a) \quad \psi = f(r, t) \cos \varphi \sum_l A_l B_l P_l^1(\cos \theta).$$

Dans cette expression on a substitué à  $\psi_l$  sa valeur asymptotique pour  $r \rightarrow \infty$ , qui est indépendante de  $l$ , à un facteur constant près, (désigné par  $\beta_l$ ) et on a réuni les éléments dépendant de  $r$  et de  $t$  en un seul facteur  $f(r, t)$ . La manière dont  $\psi$  dépend de  $\varphi$  suivant (3a)

(1) Voir A. SOMMERFELD et G. SCHUR, *Ann.d. Physik*, **4**, 1930, p. 409.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE ONDULATOIRE

a été vérifiée expérimentalement par KIRCHNER au moyen d'expériences sur les rayons X polarisés.

Dans mon article antérieur, déjà cité, j'ai posé approximativement

$$(7) \quad e^{iqx} = 1 + iqx = 1 + iqr \cos \theta.$$

Lorsqu'il en est ainsi, on voit aisément que  $A_n = 0$  pour toutes les valeurs de  $l > 1$ , à cause des propriétés d'orthogonalité de la fonction  $P_l^1$ . Par conséquent la somme (3a) se réduit à deux termes, à savoir les termes pour lesquels  $l = 0$  et  $l = 1$ . On obtient ainsi (1)

$$(8) \quad \psi = f \sin \theta \cos \varphi \left( 1 + \frac{2v}{c} \cos \theta \right).$$

Le terme en  $\cos \theta$  donne le déplacement du maximum de l'émission photoélectrique dans le sens de l'onde incidente. En effet l'intensité du courant électronique est donnée par

$$(8a) \quad \psi\psi^* = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \left( 1 + \frac{2v}{c} \cos \theta \right)^2.$$

Le facteur 2 en (8) est très surprenant. Du point de vue classique — pression de la lumière — on devait s'attendre à trouver le facteur 1 plutôt que 2. Mais plusieurs observateurs, AUGER, KIRCHNER, WILLIAMS etc., ont constaté que l'avancement du maximum est en effet plus grand que ne le prévoit la théorie classique. Ainsi dans ce cas comme dans d'autres seule la mécanique ondulatoire nous fournit une description correcte de l'atome.

Mais la formule (8) n'est pas suffisante pour les grandes vitesses. On le voit immédiatement en observant que, si  $v$  est plus grand que  $\frac{1}{2}c$  (8) s'anule pour

$$\cos \theta = - \frac{c}{2v},$$

ce qui est absurde. La raison réside évidemment dans le fait que le développement (7) n'est plus valable dans ce cas.

Je suis obligé à M. F. SAUTER (2) d'avoir bien voulu s'occuper de ce problème et de l'étudier d'une manière plus rigoureuse. Il s'agit d'évaluer exactement l'intégrale (6) sans admettre le développement

(1) L'intégration par rapport à  $\xi$ , contenu dans (4) et (6) peut être faite par la méthode des résidus après avoir effectué au préalable l'intégration réelle par rapport à  $r$ .

(2) Voir son mémoire dans *Annalen der Physik*, 9, 1931, p. 217.

A. SOMMERFELD

7). Le premier pas à faire est le même qu'auparavant : on constate que  $A_{lm}$  n'est différent de zéro que pour  $m = l$ . Le deuxième pas consiste à évaluer le résultat de l'intégration par rapport à  $r$ . Après quelques simplifications (intégrations par parties) cette intégrale se présente sous la forme suivante :

$$\int_0^{\infty} e^{-br - 2ikr\zeta + iqr \cos \theta} dr.$$

Maintenant on peut effectuer également l'intégration complexe en  $\zeta$  par la méthode des résidus. L'intégration par rapport à  $\theta$  s'effectuera ensuite simultanément avec l'évaluation de la somme (3a). Celle-ci s'écrit simplement, à des facteurs constants près :

$$\psi = f(r, t) \cdot \cos \varphi \sin \theta \frac{d}{d \cos \theta} \times \sum P_l(\cos \theta)^{\frac{2l+1}{2}} \int_{-1}^{+1} P_l(\zeta) d\zeta \left( 2\zeta - \frac{k}{q} - \frac{q}{k} - \frac{b^2}{kq} \right)^{n+1}.$$

Mais cette somme n'est pas autre chose, d'après le théorème fondamental du développement en fonctions sphériques, que la valeur du dernier facteur pour  $\zeta = \cos \theta$ . Il s'en suit que

$$\psi = f(r, t) \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\left( 2 \cos \theta - \frac{k}{q} - \frac{q}{k} - \frac{b^2}{kq} \right)^{n+2}}.$$

Nous concluons donc, en tenant compte de la signification de  $k$  c'est-à-dire de la loi photoélectrique d'EINSTEIN, qui donne une relation entre  $k$ ,  $q$ ,  $b$  et  $v$ , que le courant des photoélectrons est donné par :

$$(9) \quad \psi\psi^* = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta + \frac{hv}{2\mu c^2} \right)^2}.$$

Cette formule est en accord avec (8a) en première approximation, et ne présente pas l'inconvénient de s'anuller comme (8a) pour une certaine valeur de  $\theta$ . Elle conduit à des résultats en parfaite concor-

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE ONDULATOIRE

dance avec ceux des expériences de M. LUTZE <sup>(1)</sup> qui a utilisé des rayons X très durs,  $\lambda = 0,135 \text{ \AA}$ ,  $\frac{v}{c} = 0,585$ .

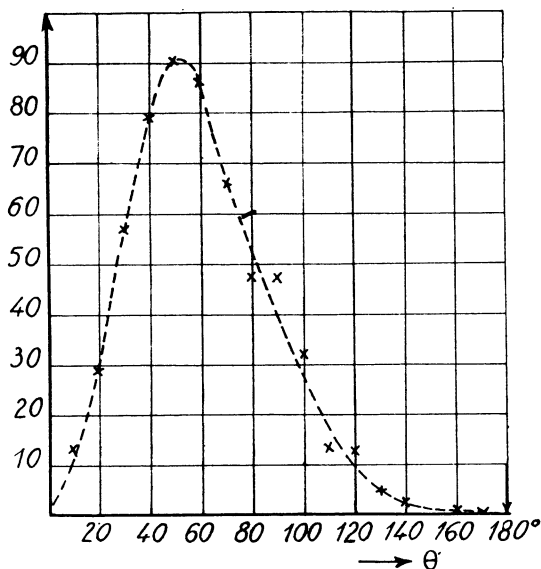


Fig. 1.

Distribution angulaire différentielle des photoélectrons émis dans l'argon sous l'influence d'un rayonnement de longueur d'onde  $\lambda = 0,135 \text{ \AA}$ .

En réalité, cette formule n'est pas tout à fait nouvelle. Elle a déjà été trouvée auparavant par un élève de WENTZEL, M. FISCHER <sup>(2)</sup> lequel a employé les coordonnées paraboliques au lieu des coordonnées polaires. Les coordonnées paraboliques sont très commodes, comme on le sait, dans la théorie de l'effet STARK et se montrent tout aussi avantageuses dans notre problème, qui possède une symétrie semblable au problème STARK. Mais il y a aussi quelques inconvénients : si l'on veut passer de la couche K aux couches L, M etc., les fonctions propres sont données primitivement en coordonnées polaires et n'offrent pas la symétrie des coordonnées paraboliques. De plus, si l'on veut passer de l'équation de SCHRÖDINGER à l'équation de DIRAC, le problème

(1) *Ann. der Physik.* **9**, 1931, p. 853.

(2) *Ann. der Physik.* **8**, 1931, p. 821.

A. SOMMERFELD

n'est plus séparable si l'on emploie les coordonnées paraboliques. La même circonstance se présente aussi bien ici, que dans la théorie antérieure des quanta. Le problème de KEPLER classique peut être séparé en coordonnées paraboliques aussi bien qu'en coordonnées polaires ou elliptiques. Mais pour le problème de KEPLER relativiste

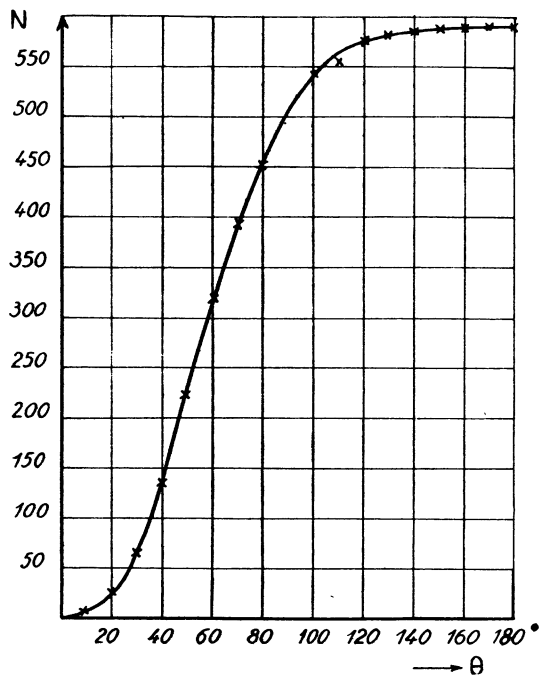


Fig. 2.

Distribution angulaire intégrale des photoélectrons émis dans l'argon par un rayonnement de longueur d'onde  $\lambda = 0,135 \text{ \AA}$ .

La courbe tracée a pour équation 
$$N \propto \int_0^\theta \frac{\sin^3 w}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta + \frac{h\nu}{2\mu c^2}\right)} dw \quad (\beta = 0,585).$$

des coordonnées polaires sont indispensables et s'imposent par la symétrie même du cas traité.

Nous n'insisterons pas ici sur le problème relativiste. M. SAUTER a indiqué son traitement (1). Mais il faut remarquer que dans notre for-

(1) *Ann. der Physik.* **11**, 1931, p. 454.

mule (9) le terme  $\frac{h\nu}{2\mu c^2}$  est de l'ordre de grandeur des effets relativistes et ne peut donc pas être garanti, notre traitement ne poussant pas l'approximation aussi loin.

Cependant nous voudrions indiquer rapidement comment notre discussion de l'effet photoélectrique dans la couche K se généralise à la couche L. Dans ce cas, l'état de l'atome ne sera plus décrit par la fonction  $\psi_0 = e^{-br}$  comme auparavant mais par des fonctions différentes pour chacune des diverses couches L<sub>I</sub>, L<sub>II</sub>, L<sub>III</sub>. Considérons seulement la fonction particulière

$$\psi_0 = br e^{-br} \sin \theta \cos \varphi = e^{-br y} \quad \text{avec} \quad b = \frac{Z}{2a}.$$

La dérivée par rapport à y devient

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = -br e^{-br} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + e^{-br}.$$

Le dernier terme de cette expression a la symétrie sphérique et donne naissance à une partie isotrope dans l'émission photoélectrique. Comme contribution de ce terme on obtient, par des calculs semblables aux précédents, au lieu de (9)

$$(10) \quad \psi \psi^* = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta + \frac{h\nu}{2\mu c^2}\right)^2}.$$

Cette expression est indépendante de  $\varphi$  et dépend de  $\theta$  uniquement par l'intermédiaire de termes correctifs. Il est très remarquable que M. AUGER ait pu déduire de ses expériences très exactes sur l'effet photoélectrique de la couche L, l'existence d'une émission de ce genre. Il est bien entendu qu'il existe d'autres parties dans l'émission L qui ne sont pas isotropes dans le sens indiqué ici. En particulier l'émission provenant de la couche L<sub>I</sub> a le même caractère que l'émission K ; elle est donnée, comme on aurait pu s'attendre *a priori*, par une formule de structure essentiellement identique à (9).

## II. — Sur le diamètre apparent des atomes pour les électrons de faibles vitesses

Il est bien connu, qu'on peut traiter la théorie de la diffraction des ondes lumineuses par deux méthodes différentes. La première déve-



loppée par FRAUNHOFER et FRESNEL et d'une façon plus exacte par KIRCHHOFF, part du principe d'HUYGHENS, tandis que la seconde utilise des développements en série, convenablement choisis, suivant la forme particulière du corpuscule diffractant, par exemple des développements en série de fonctions sphériques si cette forme est elle-même sphérique. La première méthode constitue une approximation convenable pour le cas des *longueurs d'onde très petites*, l'autre converge pratiquement pour des *longueurs d'onde plus grandes que le diamètre de la particule*.

Dans la théorie de la diffraction des *ondes matérielles* on ne connaît jusqu'à présent que l'analogie de la première méthode, à savoir un procédé indiqué pour la première fois par BORN, et appliqué depuis à beaucoup de problèmes de collisions. Il reste donc à trouver l'analogie de la seconde méthode, valable dans le cas où la longueur d'onde est grande par rapport au diamètre de l'atome. J'ai posé le problème à plusieurs de mes élèves et je suis heureux d'annoncer que M. W. ALLIS est arrivé en collaboration avec M. Ph. MORSE, à trouver une solution simple et directement applicable aux remarquables résultats expérimentaux de RAMSAUER.

Dans le procédé de BORN, ainsi d'ailleurs que dans le traitement du problème optique correspondant, on se limite en général au premier terme, lorsqu'on calcule l'effet de la perturbation. Mais il est intéressant de se poser le problème de la convergence de ce processus d'approximation et d'examiner les termes plus élevés du développement. On constate alors que si l'on fait abstraction de facteurs peu importants le rapport de deux termes successifs est égal à  $\frac{v_k}{v}$ ,  $v$  étant la vitesse de la particule incidente et  $v_k$  la vitesse des électrons de la couche K dans le modèle de l'atome d'hydrogène de BOHR. Il y a convergence seulement si

$$(1) \quad \frac{v_k}{v} < 1.$$

Mais cette condition diffère sensiblement de celle à laquelle on devrait s'attendre à savoir

$$(2) \quad \frac{\lambda}{a} < 1,$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de de BROGLIE, associée à la vitesse  $v$ , et  $a$  le rayon de la couche K. En effet la condition (2) donnerait, à cause

de  $mav_k = \frac{h}{2\pi}$ ,  $M\lambda v = h$ ,

$$(3) \quad \frac{m v_k}{M v} < 1,$$

si  $M$  est la masse de la particule incidente, et  $m$  la masse de l'électron. (3) est identique à (1) uniquement dans le cas où les particules incidentes sont des électrons. Dans le cas des protons ou des particules  $\alpha$  la limite de convergence donnée par (1) est beaucoup plus petite que la limite donnée par (3). C'est ce qu'a remarqué M. MOELLER (1) un collaborateur de M. BOHR, et en même temps M. DISTEL dans sa thèse (München, 1931). Mais même dans le cas des rayons purement électroniques la méthode de BORN n'est applicable que pour des vitesses assez grandes, ou à des atomes assez légères. La contradiction entre les deux conditions (1) et (2) est très surprenante ; on en trouve une explication qualitative dans la dissertation citée de M. DISTEL.

Passons maintenant à des vitesses très faibles. Pour pouvoir effectuer jusqu'au bout les calculs, il nous faudra choisir un modèle d'atome suffisamment simple. Nous admettrons que :

- a) le champ de l'atome est nul pour  $r \geq r_0$  ;
- b) le potentiel de l'atome est donné par

$$-V = e^2 \left( \frac{Z}{r} - \frac{Z}{r_0} \right) \quad \text{pour} \quad r < r_0,$$

donc que  $rV$  est une fonction linéaire de  $r$ , s'annulant pour  $r = r_0$ .

Par conséquent, à l'extérieur de l'atome l'équation des ondes est

$$a) \quad \Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

et a comme solutions particulières :

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} (C_l J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + D_l J_{-l-\frac{1}{2}}(kr)) P_l(\cos \theta).$$

$J_p$  étant les fonctions de BESSEL.

A l'intérieur, nous pouvons écrire, en utilisant les unités atomiques de HARTREE

$$b) \quad \psi = R(r)P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - 2V - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0.$$

(1) *Zs. für. Phys.*, **66**, 1930, p. 513.

A. SOMMERFELD

La solution de cette équation est une fonction du type de LAGUERRE déterminée par la condition de ne pas devenir infinie à l'origine, mais qui n'est pas polynôme de LAGUERRE.

Pour  $r = r_0$  on a les conditions de continuité

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = C_l J_{l+\frac{1}{2}}(z) + D_l J_{-l-\frac{1}{2}}(z) \\ G_1 = C_l J_{l-\frac{1}{2}}(z) - D_l J_{-l+\frac{1}{2}}(z) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} z = kr_0 = \frac{2\pi r_0}{\lambda} \\ G = \sqrt{\frac{2k\bar{r}}{\pi}} R. \end{array}$$

Pour écrire ces conditions nous avons utilisé la relation

$$J_p' = J_{p-1} - \frac{p}{z} J_p = -J_{p+1} + \frac{p}{z} J_p$$

et nous avons défini  $G_1$  par

$$(4a) \quad G_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2k\bar{r}}{\pi}} \left( \frac{dR}{dr} + (l+1) \frac{R}{r} \right) = \frac{dG}{dz} + \frac{l+\frac{1}{2}}{z} G.$$

Nous pouvons calculer le rapport  $\frac{D_l}{C_l}$  au moyen de (4). Si l'on pose

$$(4b) \quad g_l = \frac{D_l}{C_l} z,$$

on obtient :

$$\frac{D_l}{C_l} = \frac{z J_{l-\frac{1}{2}} - g_l J_{l+\frac{1}{2}}}{z J_{-l+\frac{1}{2}} + g_l J_{-l-\frac{1}{2}}}$$

ou encore en nous servant des expressions qui donnent les fonctions de BESSEL d'ordre demi entier en fonction des lignes trigonométriques

$$(5) \quad \frac{D_l}{C_l} = (-1)^l \frac{a_l \cos z + b_l \sin z}{a_l \sin z - b_l \cos z}$$

$$\begin{array}{ll} a_0 = -z & b_0 = g_0 \\ a_1 = -g_1 & b_1 = \frac{g_1}{z} - z \\ a_2 = -\frac{3g_2}{z} + z & b_2 = g_2 \left( 3\frac{z}{z^2} - 1 \right). \end{array}$$

(5) nous donne *une seule* relation entre les coefficients  $C_l$  et  $D_l$ ; nous en obtenons *une autre* en postulant que  $\psi$  doit correspondre pour  $r \rightarrow \infty$

à l'onde incidente et à une onde qui diverge en s'éloignant de l'atome. De cette façon  $\psi$  est complètement déterminée.

Posons le rapport (5) égal à  $(-1)^l \operatorname{tg} \theta_l$  et exprimons la valeur asymptotique de  $\psi$  pour  $r \rightarrow \infty$  en fonction de  $\theta_l$ . Le carré de la valeur absolue de  $\psi$  multipliée par  $r^2$  donnera alors le rapport de la densité des électrons diffractés par unité d'angle solide à la densité dans l'onde incidente. En intégrant sur toute la sphère on obtient l'aire apparente

$$Q_l = 4\pi(2l + 1) \left( \frac{\sin \theta_l}{k} \right)^2,$$

pour la distribution partielle des électrons caractérisée par l'indice  $l$ . De là on obtient l'aire apparente totale

$$Q = \sum Q_l.$$

Il est commode d'utiliser comme sphère de référence la sphère atomique  $4\pi r_0^2$  elle-même et de poser :

$$q_l = \frac{Q_l}{4\pi r_0^2} = (2l + 1) \left( \frac{\sin \theta_l}{z} \right)^2 = \frac{2l + 1}{z^2} \frac{(a_l \cos z + b_l \sin z)^2}{a_l^2 + b_l^2}.$$

La somme  $q = \sum q_l$  converge très rapidement pour des petites vitesses. En effet on trouve pour les termes successifs

$$\begin{aligned} q_0 &= \left( \frac{g_0 - 1}{g_0} \right)^2 + \dots \\ q_1 &= \left( \frac{g_1 - 3}{g_1} \right)^2 \frac{z^4}{3} + \dots \\ q_2 &= \left( \frac{g_2 - 5}{g_2} \right)^2 \frac{z^8}{405} + \dots \end{aligned}$$

Comme  $z$  est proportionnel à  $\frac{r_0}{\lambda}$  ce résultat nous montre l'analogie parfaite de notre procédé avec la deuxième méthode optique mentionnée dans l'introduction ; nous avons obtenu, en effet un développement suivant les puissances croissantes de  $\frac{r_0}{\lambda}$ , valable pour les longueurs d'onde électroniques de  $\lambda > r_0$ .

Il faut calculer maintenant les quantités  $g$ . D'après (4a, b) elles sont données par la pente de la courbe G (ou R) au point d'intersection avec la périphérie de l'atome. La courbe G oscille dans l'intérieur de l'atome et la pente de la courbe pour l'abscisse  $z$  se reproduit à peu

près périodiquement si l'on fait varier le potentiel  $V$  à l'intérieur de l'atome.

On a donc, pour parler d'une façon approchée, une quasi-périodicité des  $g$  et en conséquence une propriété analogue des  $q$ . Si cette quasi-périodicité coïncide avec la périodicité des éléments, dans la table de MENDÉLÉJEFF, on a l'explication du fait remarquable, que les aires apparentes de tous les éléments d'une même colonne sont du même type quand on les envisage comme fonctions de la vitesse électronique. On connaît le type des gaz inertes, des alcalins et de la colonne du zinc par les expériences de RAMSAUER, BRODE, TOWNSEND.

Pour démontrer la coïncidence de la quasi-périodicité de l'aire apparente avec la périodicité des éléments chimiques on emploie un modèle très hardi d'atome, donné par J. C. SLATER. La figure (3) en

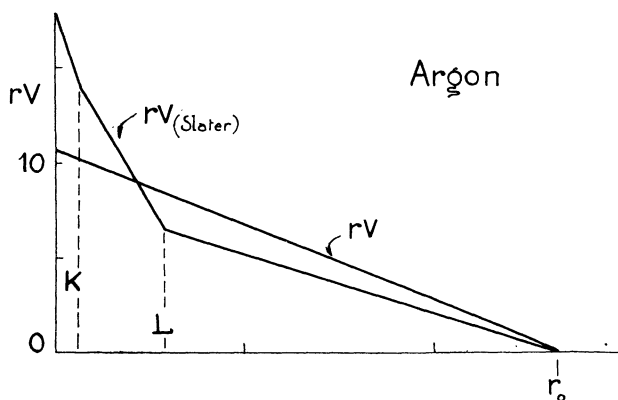


Fig. 3.

donne une idée. Elle représente l'atome d'ARGON avec les couches K, L, M. Le rayon de M définit notre rayon atomique  $r_0$ . Le potentiel  $V$  a une pente différente dans les diverses couches dépendant des différentes « constantes d'écran ». Le modèle SLATER donne des règles numériques simples, d'ailleurs très grossières, pour la détermination de ces rayons et de ces constantes. Si nous portons en ordonnées les valeurs de  $rV$ , le modèle de SLATER sera représenté par une ligne brisée. Nous la remplaçons par une ligne droite unique, donnant la même aire que la ligne brisée ; soit  $\beta^2$  cette aire. De cette façon un atome particulier sera caractérisé par deux paramètres, le rayon atomique  $r_0$  et

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE ONDULATOIRE

la quantité  $\beta$ , tous les deux mesurés en unités atomiques. C'est dans  $\beta$  que se manifeste la quasi-périodicité de l'aire apparente, la période étant égale à l'unité. Mais si nous calculons maintenant

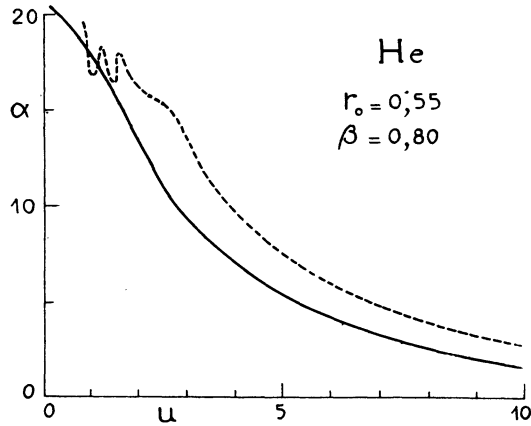


Fig. 4

les divers atomes d'après SLATER, nous constatons, que les paramètres  $\beta$  de deux atomes analogues comme par exemple ceux du

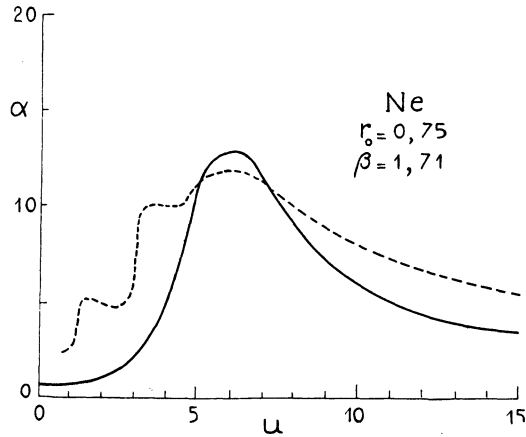


Fig. 5

NÉON et de l'ARGON ne diffèrent que par une unité à très peu près. On trouve par exemple :

$$\text{Neon } \beta = 1,71, \quad \text{Argon } \beta = 2,7.$$

A. SOMMERFELD

Regardons maintenant les diagrammes des divers atomes. Dans les figures ci-contre l'abscisse représente la vitesse  $u$  de l'électron, mesu-

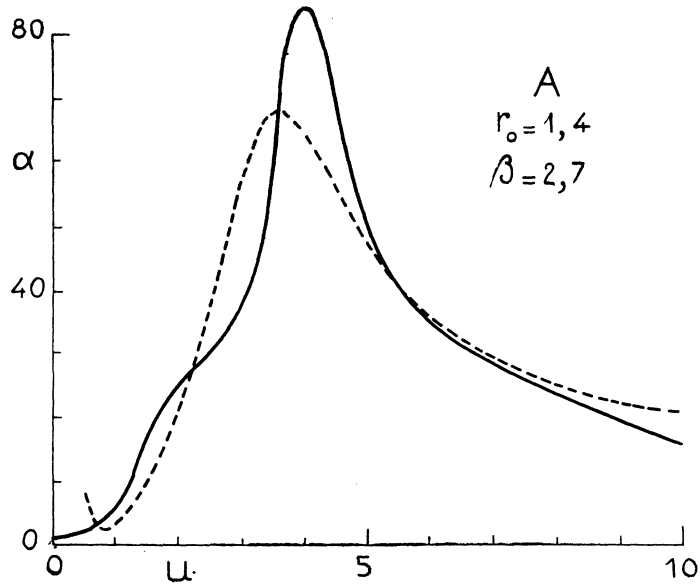


Fig. 6

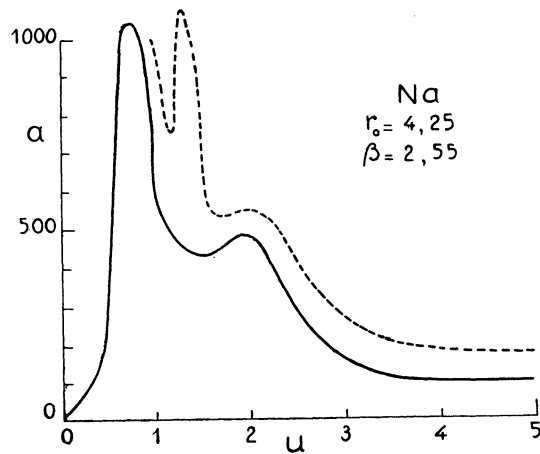


Fig. 7

rée en  $\sqrt{\text{volt}}$ .  $u$  est proportionnel à  $\frac{z}{r_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$ . L'ordonnée représente

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE ONDULATOIRE

le coefficient d'absorption, qui est proportionnel à notre  $q$ . On voit que le maximum de l'absorption est très fort dans le cas du sodium et du zinc, et par contre très petit dans le cas de Hélium et du Neon.

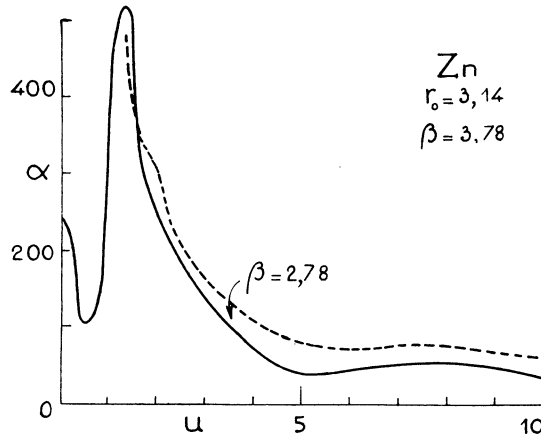


Fig. 8

La courbe théorique et la courbe expérimentale (tracée en pointillée) ont dans tous les cas la même allure. Dans le cas de zinc on a fait le

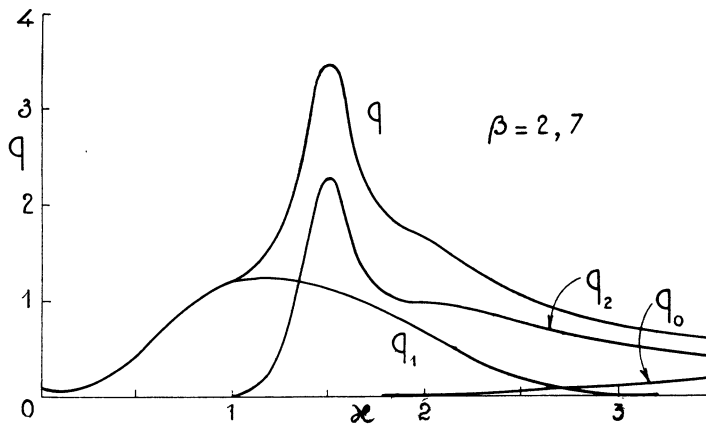


Fig. 9

calcul avec  $\beta = 2,78$ , tandis que le modèle de SLATER donne  $\beta = 3,78$ , Le calcul avec  $\beta = 3,78$  étant fastidieux on a profité de la périodicité des courbes et on a substitué à ce chiffre la valeur  $\beta = 2,78$  avec



A. SOMMERFELD

laquelle on a poursuivi les calculs. Il faut remarquer ici, que nos calculs n'ont pas été faits avec les valeurs exactes données par le modèle de SLATER, mais qu'on en a modifié un peu la dernière

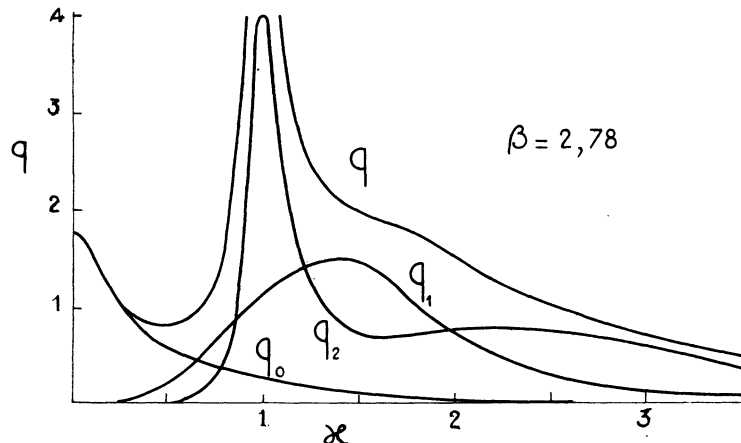


Fig. 10

décimale pour se rapprocher des données de l'expérience. Nos formules sont extrêmement sensibles à des changements minimes

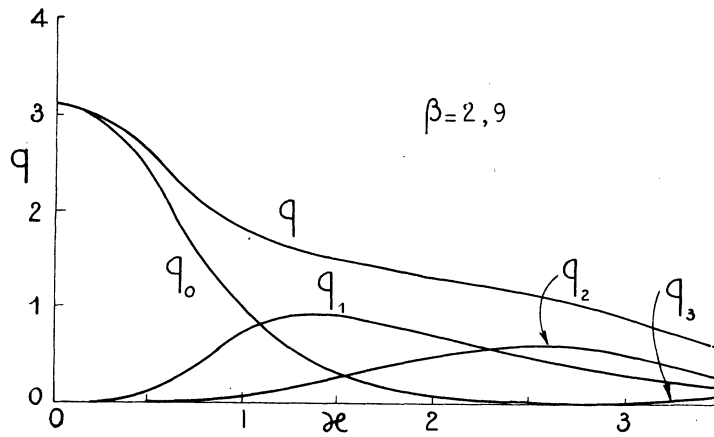


Fig. 11

dans les valeurs des constantes qu'elles renferment. Pour nous en convaincre et pour voir comment l'aire totale  $q$  se compose des

aires partielles  $q_i$  comparons les trois diagrammes correspondant à  $\beta = 2,7; 2,78; 2,9$ . (Figures 9, 10 et 11). Le maximum est devenu plus grand dans la seconde figure et a complètement disparu dans la troisième. L'ordonnée au point 0 croît continuellement quand on passe d'une figure à l'autre. Les contributions des aires partielles  $q_0, q_1, q_2$  dans les trois cas sont tout à fait différentes entre elles. On comprend de cette façon comment il peut se faire, que les types des aires apparentes correspondant à des atomes voisins dans le tableau périodique soient essentiellement différents, et même dans certains cas, tout à fait opposés comme par exemple pour le Néon et le Na.

En concluant nous constatons un merveilleux succès de plus à l'actif de la mécanique ondulatoire, même dans ce problème extrêmement délicat des aires apparentes des atomes.

### III. — Sur la production des rayons X

Considérons le problème du spectre continu des rayons X, c'est-à-dire le problème de ce que j'ai appelé, il y a plus de vingt ans, « *Bremsstrahlung* ». Il est très instructif de comparer le traitement antérieur de ce problème, basé sur des notions classiques, au traitement moderne, basé sur la nouvelle mécanique ondulatoire.

Le traitement primitif exigeait des hypothèses particulières tout à fait arbitraires. Il fallait supposer par exemple que les électrons lancés contre une anticathode étaient arrêtés par celle-ci au bout d'un parcours déterminé, rectiligne et en prolongement de la direction d'incidence, et, en outre, que leur vitesse diminuait uniformément jusqu'à zéro. La nature du rayonnement émis, ainsi que sa polarisation dépendaient essentiellement de ces suppositions arbitraires.

Quand on traite le même problème par les méthodes nouvelles, toute hypothèse de ce genre devient superflue. Il suffit simplement de comparer l'état initial  $\psi_1$ , représenté par l'onde plane incidente, à l'état final  $\psi_2$  représenté par l'onde plane émise s'éloignant dans une direction quelconque. Pour les rayons de courte longueur d'onde on peut, sans erreur appréciable, remplacer l'atome réel par un atome idéal, constitué

A. SOMMERFELD

uniquement par son noyau de numéro atomique  $Z$ . Il doit, en outre être entendu que nous ne devons pas employer l'expression des ondes planes ordinaires pour décrire les électrons incidents et émis, mais qu'il faut inclure dans les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  l'effet de diffraction (ou de diffusion) par le noyau.

Pour arriver à introduire cet effet de la manière la plus simple, il est indispensable d'employer des coordonnées paraboliques  $\xi, \eta$ . Les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  s'écrivent dans ce cas

$$(1) \quad \psi_1 = e^{ik_1x} L_1(ik_1r_1, n_1), \quad \psi_2 = e^{ik_2x'} L_2(ik_2r_2', n_2).$$

L'axe  $x$  est dirigé suivant la direction d'arrivée de l'électron incident et l'axe  $x'$  suivant celle de l'électron qui s'éloigne ; les paraboles  $\eta'$  sont situées par rapport à  $x'$  de la même façon que les paraboles  $\eta$  par rapport à  $x$ . La direction de  $x'$  par rapport à  $x$  est déterminée par les angles polaires  $\alpha$  et  $\beta$ . La signification de  $L$  et  $n$  sera indiquée un peu plus loin.  $k_1$  et  $k_2$  sont les nombres d'ondes

$$(2) \quad k_1 = \frac{2\pi}{h} mv_1, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} mv_2, \quad v_1 > v_2.$$

La fréquence émise est donnée par

$$(3) \quad h\nu = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2m} \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 (k_1^2 - k_2^2).$$

La probabilité d'émission est donnée par l'élément de matrice

$$(4) \quad \mathbb{M}_q = \int q \psi_1 \psi_2^* d\tau \quad (q = x, y, z).$$

Enfin il faut faire varier la direction relative de  $x'$  par rapport à  $x$  et il faut intégrer pour toutes les directions possibles. On passe de cette sorte des  $\mathbb{M}_q$  aux carrés moyens

$$(5) \quad M_q^2 = \frac{1}{4\pi} \int \mathbb{M}_q \mathbb{M}_q^* d\omega \quad d\omega = \sin \alpha d\alpha d\varphi.$$

Les problèmes relatifs à la polarisation se résolvent en considérant

les rapports

$$(6) \quad M_x : M_y : M_z.$$

Les questions relatives à l'intensité émise dans la direction  $y$ , par exemple, ne dépendent que du calcul de l'expression

$$(7) \quad M_x^2 + M_z^2.$$

Le point essentiel de cette façon d'attaquer le problème est l'absence de toute hypothèse particulière concernant le freinage et l'arrêt des électrons dans l'anticathode. On ne particularise en aucune façon dans les formules ni le mécanisme de ce freinage, ni le passage de l'état initial à l'état final. Pour décrire le rayonnement qu'on observe on ne fait, au fond, que confronter ces deux états au moyen de l'élément de matrice considéré. Remarquons que dans cet élément de matrice l'état initial intervient non seulement par des valeurs correspondant à la région  $x < 0$ , c'est-à-dire qui se trouve devant le noyau, mais aussi par ses valeurs pour  $x > 0$ , c'est-à-dire pour la région qui se trouve derrière lui ; de la même façon au calcul de l'onde émise participent simultanément, tant les valeurs de  $x' < 0$  que celles du domaine  $x' > 0$ .

Tout cela est en contradiction absolue avec l'idée d'un mécanisme causal du phénomène et avec ce que nous avons considéré jusqu'ici comme étant la réalité physique élémentaire. Notre procédé a un caractère purement abstrait, mathématique.

Il existe un autre procédé de calcul plus abstrait encore, suivi par MM. OPPENHEIMER et SUGIURA dans leur discussion du spectre continu. Dans cette méthode l'état final est composé de fonctions propres qu'on caractérise par les diverses valeurs des paramètres de séparation intervenant dans l'équation différentielle en coordonnées paraboliques ; par contre, dans le procédé que nous avons indiqué au début, ce même numérotage des fonctions propres de l'état final se fait au moyen des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans notre manière de procéder la solution particulière employée a la signification d'une onde plane diffractée et il faut faire la somme pour toutes les directions  $\alpha$  et  $\beta$  de cette onde. Dans l'autre méthode la solution particulière n'a pas de sens physique simple, et il faut sommer par rapport à un paramètre de séparation, lequel n'a qu'une signification purement mathématique. Cependant

A. SOMMERFELD

ces deux méthodes doivent conduire aux mêmes résultats ; nous en sommes sûrs à cause de l'orthogonalité des fonctions propres, qui subsiste aussi bien pour nos ondes planes que pour les fonctions propres d'OPPENHEIMER et SUGIURA. On saisit ici sur le vif la différence des deux méthodes.

Donnons quelques précisions sur le type (1) de nos solutions  $\psi$ . Si l'on employait les coordonnées polaires, l'onde incidente et l'onde émise seraient données par une série

$$(8) \quad \sum_l A_{l,l}(kr) P_l(\cos \theta).$$

Dans le cas d'une onde plane harmonique  $e^{ikx}$ , les  $Z$  seraient des fonctions de BESSEL à indice demi entier ; dans notre cas d'une onde diffractée par le noyau, les  $\psi$  seraient les fonctions propres de l'atome d'hydrogène. On doit remarquer que le problème de l'arrivée d'un électron incident sur un noyau atomique isolé est en réalité un problème du type de celui d'un atome d'hydrogène. De même le système électron incident plus atome d'hydrogène conduit rigoureusement à un problème du type de l'hélium, avec deux électrons, etc. La somme (8) ne convient pas pour l'évaluation des éléments de matrice ; en coordonnées paraboliques toute cette somme se réduit à un seul terme, c'est-à-dire à l'expression (1). Les paramètres  $n_1, n_2$  qui y apparaissent sont données par

$$n_1 = \frac{Z}{ik_1 a}, \quad n_2 = \frac{Z}{ik_2 a}$$

comme dans les calculs du § I.

Considérons maintenant la représentation de notre fonction  $L$  dans les équations (1). On sait que le polynôme de LAGUERRE peut être représenté par l'expression

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

D'après le théorème de CAUCHY on peut substituer à cette expression la suivante

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} e^x \int \frac{y^n e^{-y}}{(y-x)^{n+1}} dy,$$

le chemin d'intégration devant nécessairement entourer le point  $y = x$ . Cette représentation peut être généralisée immédiatement au cas où  $n$  n'est pas entier, mais dans ce cas le chemin d'intégration doit entourer les deux points de ramification  $y = x$  et  $y = o$ . Si de plus on fait la substitution

$$y = x\left(u + \frac{1}{2}\right),$$

on aboutit à une forme plus symétrique pour l'expression de  $L$ , analogue à celle de l'équation (4) du premier paragraphe

$$L = e^{2\frac{x}{2\pi i}} \int \left(u + \frac{1}{2}\right)^n \left(u - \frac{1}{2}\right)^{-n-1} e^{-ux} du,$$

le chemin d'intégration entourant maintenant les deux points singuliers  $u = \pm \frac{1}{2}$ .

Notre problème se résout donc de cette façon par de simples quadratures. Pour évaluer l'élément de matrice (4), il faut effectuer l'intégration  $d\tau$  par rapport aux trois coordonnées paraboliques  $\xi$ ,  $\eta$ , et  $\varphi$ , plus les deux intégrations par rapport à  $u$  et à la variable analogue  $v$ , contenues dans  $\psi_1$  et  $\psi_2$  c'est-à-dire dans  $L_1(ik_1\eta, n_1)$  et  $L_2(ik_2\eta', n_2)$ , donc 5 intégrations. Il s'y ajoutent deux autres par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  si l'on passe de  $\mathbb{N}$  à  $\mathbb{M}$ , ce qui fait en tout 7 quadratures. Le calcul est un peu long, mais au fond pas trop difficile. Il est impossible de le suivre en détail ; je me bornerai à en indiquer les résultats.

Le cas le plus simple c'est le cas limite des petites longueurs d'onde, correspondant donc à une vitesse nulle de l'électron émis, c'est-à-dire à

$$k_2 = 0, \quad n_2 = \infty, \quad h\nu = h\nu_{\max.} = \frac{m}{2}v_1^2.$$

Dans ce cas la fonction  $L(x, n_2)$  se réduit à la fonction  $J_0(2\sqrt{x})$ , comme on peut le constater aisément au moyen de son développement en série de puissances. Les  $\mathbb{N}_q$  sont alors complètement représentés par  $L(w, n_1)$  et  $L'(w, n_1)$ , fonctions de l'argument  $w = 4n_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .

En supposant que l'observation soit faite dans la direction  $y$  nous

A. SOMMERFELD

appellerons « dépolarisation »  $D$  le rapport  $M_z : M_x$ ; la « polarisation » sera alors

$$P = \frac{1 - D}{1 + D}.$$

On a  $D = 0$  pour des rayons assez durs ( $n_1 \ll 1$ ). On doit s'y attendre parce que si  $v_2 = 0$  la direction de  $v_1$  joue le rôle décisif; cependant cela n'est pas exact dans le cas général. Pour des vitesses  $v_1$  plus petites,  $D$  croît jusqu'à la valeur asymptotique  $\frac{1}{4}$ . Quant à l'intensité  $J_\nu$  du rayonnement rapporté à l'unité de fréquence, elle est bien déterminée et finie pour la limite envisagée du spectre  $\nu = \nu_{\max}$  de façon que la courbe de distribution spectrale tracée en fonction des  $\nu$  subit une chute brusque pour  $\nu = \nu_{\max}$ .

En général, c'est-à-dire pour  $v_2 \neq 0$  les  $M_q$  sont représentés par des fonctions hypergéométriques, dont les paramètres sont données par  $n_1$  et  $n_2$ . La dépolarisation croît et la polarisation décroît lorsqu'on parcourt le spectre dans le sens des longueurs d'onde croissantes;  $v_2 = v_1$  correspond évidemment à la limite infrarouge  $\nu = 0$ . En même temps l'intensité ne varie pas beaucoup, sauf dans des cas extrêmes. La courbe spectrale a donc approximativement une forme rectangulaire.

Il existe des observations très précises du spectre continu, effectuées par mon collègue KULENKAMPF avec des anticathodes extrêmement minces formées par des films d'aluminium ayant seulement quelques  $\mu$  comme épaisseur. Dans ces conditions on peut espérer avoir réalisé expérimentalement les conditions requises par la théorie pour sa validité, c'est-à-dire l'intervention d'un seul atome (ou noyau). Ces observations confirment les lignes générales de la théorie, c'est-à-dire permettent de retrouver la forme rectangulaire de la courbe spectrale, ainsi que la polarisation presque totale vers la limite du spectre, et sa décroissance continue à mesure qu'on s'éloigne de cette limite. Mais ce ne sont pas là les résultats les plus intéressants, ni de l'expérience, ni de la théorie.

Le point sur lequel j'avais particulièrement insisté dans ma théorie de 1903 était le déplacement en avant du maximum de l'émission, en fonction de la dureté du tube. Pour en tenir compte il

faut une analyse plus approfondie. Il faut en particulier prendre en considération le retard des phases dans l'émission des rayons X et passer des éléments de matrice  $\mathbb{M}_g$  aux potentiels électromagnétiques retardés, par exemple au potentiel vecteur

$$\vec{A} = \int e^{-ik(\vec{r} \cdot \vec{n})} \vec{J}_{12} d\tau,$$

où  $J_{12}$  signifie le courant électrique composé, de l'état initial  $\psi_1$  et de l'état final  $\psi_2$ , et où  $(\vec{r} \cdot \vec{n})$  donne la phase pour la direction  $\vec{n}$  dans laquelle on fait l'observation et pour le rayon vecteur  $\vec{r}$  du point où l'on effectue l'intégration.  $k$  est égal à  $\frac{2\pi\nu}{c}$ .

De  $\mathbb{A}$  on passe à l'A moyen par une formule analogue à celle qui donnait M en fonction de  $\mathbb{A}$

$$A_q^2 = \frac{1}{4\pi} \int \mathbb{A}_q \mathbb{A}_q^* d\omega.$$

Si l'on connaît A on connaît le champ électromagnétique, donné par E et H.

Pour les rayons durs ( $n_1 < 1$ ) et pour la limite des petites longueurs d'onde ( $\nu_2 = 0$ ), on obtient pour  $\mathbb{A}_x$  l'expression approchée

$$\mathbb{A}_x = \frac{8\pi n_1}{k^2 (1 - \frac{1}{2}\beta \cos \theta)^3}, \quad \beta = \frac{v_1}{c},$$

formule pareille à celle que j'ai déjà publiée il y a deux ans, en Amérique, aux *Proc. Nat. Acad.*, comme résultat d'un raisonnement provisoire.

Si l'on passe de  $\mathbb{A}_x$  à  $A_x$  et si l'on prend aussi les expressions analogues pour  $A_y$  et  $A_z$  on peut calculer le déplacement en avant du maximum pour les rayons durs. La comparaison avec les expériences de KULENKAMPF montre une concordance satisfaisante.

Je tiens à accentuer une fois de plus l'intérêt de cette recherche au point de vue de la méthode employée. Grâce à la mécanique ondu-



A. SOMMERFELD

latoire, on n'a nullement besoin d'hypothèses particulières sur le mécanisme de l'arrêt d'un électron par le noyau. Le calcul se développe de lui-même et donne des résultats précis et qualitativement conformes aux résultats expérimentaux.

(Conférences faites à l'Institut Henri-Poincaré en Avril 1931).

Manuscrit reçu le 25 Avril 1931.