ANNALES DE L'I. H. P.

MARCEL BRILLOUIN

Quelques propriétés d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique

Annales de l'I. H. P., tome 1, nº 3 (1930), p. 265-283

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_3_265_0>

Quelques propriétés d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique

PAR

MARCEL BRILLOUIN

---

1. — Dans tout problème de Physique mathématique, l'intégration des équations aux dérivées partielles qui définissent l'état interne présente des difficultés très inégales suivant la forme des frontières et les conditions imposées le long de ces frontières.

Les propriétés générales sont assez simples pour l'équation de LAPLACE, et plus généralement pour les équations du type elliptique ; on sait en outre traiter toutes sortes de problèmes à frontières sphériques, en hydrodynamique, en élasticité, en électromagnétisme, soit à l'aide des diverses fonctions de GREEN, *connues*, soit par des développements en fonctions sphériques, très étudiés, soit même à l'aide d'équations intégrales. Ce qui facilite le travail, c'est l'accord des symétries de l'équation de LAPLACE d'une part, de la forme sphérique de la frontière, d'autre part. Cet accord est en partie conservé quand on passe aux frontières ellipsoïdes, mais la perte de l'isotropie spatiale de la frontière crée des difficultés souvent sérieuses. Pour d'autres formes, le travail est beaucoup moins avancé et souvent très difficile.

On peut faire des remarques analogues pour les équations aux dérivées partielles de type *hyperbolique* rencontrées dès le milieu du XVIIIe siècle par les géomètres qui se sont attaqués à la théorie de la propagation du son (Note I). — Dans ces questions acoustiques les plus simples, les conditions aux limites, en temps et en espace, se présentent aussi avec une symétrie analogue à celle de l'équation aux dérivées partielles On peut alors obtenir des solutions satisfaisantes soit sous forme finie, soit à l'aide d'intégrales, soit par des développements en séries, qui sont bien connus.

Mais les difficultés apparaissent, et considérables, dès qu'on associe une frontière sphérique à une équation aux dérivées partielles hyperbolique, comme cela se présente dans un problème hydrodynamique très simple, qui va servir de thème à ces conférences.

2. — Un globe sphérique (le globe terrestre simplifié), animé d'un mouvement de rotation uniforme (vitesse ω), est entièrement recouvert par un liquide pesant ; on suppose que la surface libre du liquide est une sphère de rayon R, lorsqu'il tourne avec le globe. Sous l'action d'un champ de gravitation externe, de potentiel $P^e e^{i\theta t}$, le liquide peut prendre un mouvement d'oscillation contraint, avec soulèvement périodique ($2\pi : \theta$). (Note II).

On veut étudier ce mouvement *lorsque la période est plus longue que la demi-période de rotation* : $\theta < 2\omega$.

Réduit à sa forme la plus simple, ce problème de marées se ramène à l'intégration de l'Equation aux dérivés partielles *hyperbolique*

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(\frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

avec des conditions frontières

$$i\theta(P - P^e) + g\left|\frac{x(i\theta P_x' - 2\omega P_y') + y(2\omega P_x' + i\theta P_y')}{R(4\omega^2 - \theta^2)} - \frac{izP_z'}{R\theta}\right| = 0$$

sur la sphère extérieure

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et

$$\frac{x[i\theta P_x' - 2\omega P_y'] + y[2\omega P_x' + i\theta P_y']}{R(4\omega^2 - \theta^2)} - \frac{izP_z'}{R\theta} = 0$$

sur le fond sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R - h)^2$$

h constant.

Ce problème, je ne sais pas le résoudre. Je vais étudier avec quelque minutie les difficultés auxquelles on se heurte quand on l'attaque par les différents procédés les plus naturels ; cela servira d'exemple, et montrera quelques-unes, au moins, des questions qu'il faudrait avoir d'abord bien étudiées, pour attaquer utilement ce problème, — et les problèmes réels plus difficiles — avec chances de succès.

Si la vitesse de rotation ω était nulle ou simplement plus petite que $\frac{\theta}{2}$, l'équation serait elliptique, et, on sait que la solution serait unique et bien déterminée — c'est dans ce cas que s'est placé POINCARÉ dans son célèbre mémoire des *Acta Mat.* (t. 7), de 1885 « sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. »

3. — Mais, dans le cas que je veux examiner, l'équation étant hyperbolique, il n'y a pas de résultats mathématiques généraux, nous apprenant si les conditions frontières déterminent une solution, en déterminent une seule, ou sont incompatibles.

Précisons cette difficulté en examinant le cas où le potentiel perturbateur a la période $2\pi : k$ en longitude :

$$P_e = P_k e^{ik\alpha}.$$

Cherchons P_k en coordonnées cylindriques α, z, $\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$. Avec ces variables, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial \varpi^2} - \frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2} \frac{\partial^2 P_k}{\partial z^2} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial P_k}{\partial \varpi} - \frac{k^2}{\varpi^2} P_k = 0$$

Elle admet pour *caractéristiques* les droites :

$$\varpi + \frac{z}{c} = \xi$$

$$\varpi - \frac{z}{c} = -\eta$$

en posant

$$c = \frac{\sqrt{4\omega^2 - \theta^2}}{\theta}$$

ξ, η étant des paramètres variables. Notons en passant que l'équation obtenue en prenant ξ, η pour variables, soit :

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial P_k}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial P_k}{\partial \eta} + \frac{k^2}{(\xi - \eta)^2} P_k = 0$$

est, sous le nom d' « Equation d'EULER et de POISSON », la mieux étudiée des équations hyperboliques à deux variables (1), sans que nous puissions ici en profiter.

Supposons pour simplifier qu'il s'agisse, dans le plan méridien, d'un problème à frontière circulaire unique. Dans le cas d'une équation elliptique, une relation linéaire entre P_k et la dérivée normale $\frac{\partial P_k}{\partial n}$ en chaque point de la frontière détermine en général une solution unique à l'intérieur. Par ailleurs, la donnée de P_k *et* $\frac{\partial P_k}{\partial n}$ sur un arc ouvert quelconque détermine, si elle existe, la solution dans tout le domaine où elle est analytique.

Dans le cas qui nous occupe, menons les caractéristiques tangentes au cercle, et celles qui passent par les points de contact (fig. 1). *Sur*

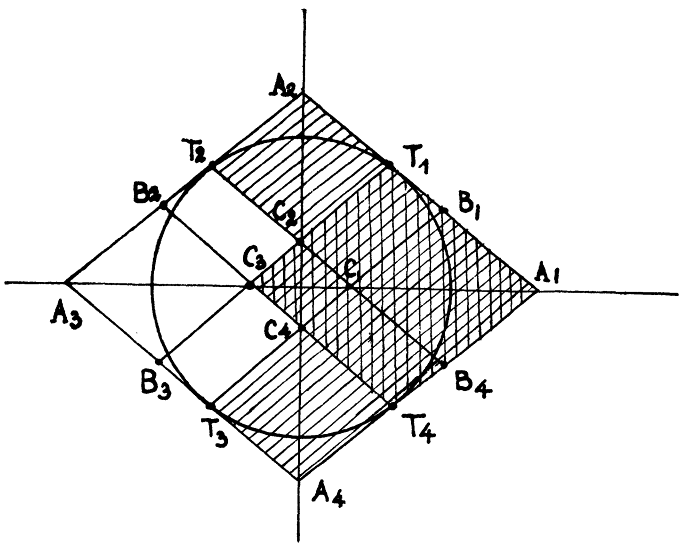

Fig. 1.

l'arc T_4, T_1, *on peut se donner* P_k *et* $\frac{\partial P_k}{\partial n}$. On détermine ainsi une solution unique (2) dans le losange quadrillé $A_1T_1C_3T_4$. *Sur les arcs* T_1T_2 *et* T_3 T_4, *on ne peut se donner que* P_k. En effet P_k est déjà connu sur les segments de caractéristiques T_1 C_2 et T_4C_4, et ce sont là des don-

(1) Cf. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des Surfaces*, t. II, L. III.
(2) Cf. E. PICARD, *loc. cit.*, XIIe leçon et suivante.

nées suffisantes pour obtenir la solution dans les losanges hachurés $T_1A_2T_2C_2$, $T_4C_4T_3A_4$. *Enfin sur l'arc* $T_2 T_3$, *il ne reste plus aucune quantité arbitraire disponible.* La solution est en effet déterminée dans les parallélogrammes $C_2T_2B_2C_3$, $C_4C_3B_3T_3$ puisqu'elle est connue sur C_2T_2 et C_2C_3, C_4C_3 et C_4T_3. Enfin elle est déterminée dans le losange C_3B_2 A_3B_3 puisqu'elle est connue sur C_3B_2 et C_2B_3.

Ainsi, pour les seules conditions à la frontière qui aient fait l'objet d'une étude approfondie des mathématiciens et qu'on sache aujourd'hui utiliser, interviennent nécessairement les points de contact des caractéristiques, dans le plan méridien, qui correspondent dans le problème à trois dimensions, à certains parrallèles critiques.

Laissons donc de côté ces remarques — plus ou moins inspirées par les problèmes acoustiques (z remplacé par t) et cherchons directement une solution au problème posé, au moyen de *développements en séries de solutions simples*. Cette recherche présente des points intéressants, qu'il importerait d'approfondir et de généraliser.

4. — En coordonnées sphériques, l'équation (A) est fort compliquée, mais permet de reconnaître aisément l'existence de solutions simples de la forme :

$$P = Ar^n e^{ik\alpha} M_n{}^k(\mu).$$

A est une constante imaginaire, k un entier ; n pourrait être pris quelconque, mais nous ne considérerons que des valeurs entières. On trouve pour $M_n{}^k$ une équation différentielle (Note III) analogue à celle des fonctions tessérales (harmoniques sphériques), mais beaucoup plus compliquée.

Pour en voir la signification, prenons pour coordonnées

$$x, y, \text{ et } \zeta = \frac{i\theta z}{\sqrt{4\omega^2 - \theta^2}} = \frac{iz}{c}.$$

On ramène ainsi l'équation (A) à l'équation de LAPLACE. A toute intégrale de l'équation de LAPLACE correspondra donc une intégrale de l'équation précédente. En particulier, posons :

$$\mathfrak{R}^2 = x^2 + y^2 + \zeta^2 \equiv x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2}, \qquad \nu = \frac{\zeta}{\mathfrak{R}} \equiv \frac{iz}{c\mathfrak{R}},$$

nous aurons des solutions de la forme :

$$Ae^{ik\alpha}\mathfrak{R}^n T_n^k(\nu) \quad \text{et : } \quad Be^{ik\alpha} \frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} T_n^k(\nu).$$

A et B étant des constantes complexes. Ces solutions s'expriment aisément en fonction de r et μ. On a en effet :

$$\mathfrak{R} = r\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{4\omega^2 - \theta^2}\mu^2} \qquad \nu = \frac{i\theta\mu}{\sqrt{4\omega^2 - \theta^2 - 4\omega^2\mu^2}}.$$

Posons

$$\mu_1^2 = \frac{4\omega^2 - \theta^2}{4\omega^2}; \qquad \mathfrak{R} = r\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\mu_1^2}}, \qquad \nu = \frac{i\theta}{2\omega}\frac{\mu}{\sqrt{\mu_1^2 - \mu^2}}.$$

$\mathfrak{R}$ et ν sont réels dans la bande équatoriale comprise entre les parallèles $\pm \mu_1$, imaginaires purs dans les régions polaires correspondantes. Pour $\mu = \mu_1$, $\mathfrak{R}$ est nul, ν est infini. Ces parallèles correspondent, dans chaque plan méridien, aux points d'intersection du cercle avec les caractéristiques passant par l'origine. Ils ne s'étaient donc pas introduits jusqu'ici.

Les solutions simples obtenues s'écrivent ainsi :

$$\text{(3)} \qquad A e^{ik\alpha} r^n \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} T_n^k \left(\frac{i\theta}{2\omega}\frac{\mu}{\sqrt{\mu_1^2 - \mu^2}}\right)$$

$$\text{(4)} \qquad B e^{ik\alpha} \frac{1}{r^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{\mu_1^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} T_n^k \left(\frac{i\theta}{2\omega}\frac{\mu}{\sqrt{\mu_1^2 - \mu^2}}\right).$$

Il semble que nous ayons obtenu ce que nous cherchions. Les solutions (3) sont celles qui conviennent pour un problème intérieur, les solutions (4) pour un problème extérieur, comme le montrent les puissances de r qui y figurent. Pour le problème qui nous occupe (océan compris entre deux sphères), les séries devraient comprendre des termes des deux espèces, ainsi qu'il arrive dans le problème laplacien, sans rotation.

Deux propriétés des fonctions T_n^k les rendent utiles dans le problème elliptique $\left(\omega < \frac{\theta}{2}\right)$:

1) Chaque fonction T_n^k permet de satisfaire à toutes les conditions internes et frontières, et donne ainsi une solution particulière.

2) Ces solutions particulières sont *orthogonales*, ce qui permet de trouver facilement les coefficients qu'il faut leur attribuer, pour obtenir, par leur addition, la solution qui correspond à un potentiel perturbateur $P^e(\alpha, \mu)e^{i\theta t}$ quelconque. Ces deux propriétés font défaut aux fonctions M_n^k.

1) L'ensemble des deux termes

$$[A_n^k r^n M_n^k + B_n^k r^{-(n+1)} M^k_{-(n+1)}] e^{ika}$$

ne permet certainement pas de satisfaire aux deux conditions frontières $r = R$, $r = R - h$, par un simple choix des deux *constantes* A_n^k, B_n^k en fonction de celle qui définit le terme correspondant de P^c, parce que μ reste encore dans les deux équations (quelque simplification qu'on imagine dans la forme des conditions frontière) en raison de la différence de forme de M^k_n et de $M^k_{-(n+1)}$. On le reconnaîtra sans difficulté, malgré des longueurs d'écriture, en essayant divers cas algébriques simples, par exemple le plus simple de tous

$$\begin{array}{ll} P = P^c & r = R \\ P = 0 & r = R - h \end{array}$$

sans se préoccuper de la signification physique. P^c doit être développé en $r^n M_n^k$ (sans $M_{-(n+1)}$).

2) On s'assure facilement en examinant la forme de M^k_n, que l'on *n'a pas* sur le demi-méridien entier de pôle à pôle

$$\int_{-1}^{+1} M_n^k(\mu) M_m^h(\mu) d\mu = 0.$$

Pour écrire une condition d'orthogonalité, il faudrait multiplier par un *facteur d'importance*, ou *poids*, dépendant de $(\mu^2 - \mu_1^2)$, et faisant jouer un rôle, tantôt nul, tantôt infini, aux parallèles critiques. Il paraît inutile de nous attarder à cette discussion, qui ramène aux variables $\mathfrak{R}$, ν.

Insistons plutôt sur la différence entre les M_n et les $M_{-(n+1)}$.

On a :

$$T_n^k(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{\partial^k P_n(\nu)}{\partial \nu^k} = \left[\frac{\mu_1^2(1 - \mu^2)}{\mu_1^2 - \mu^2}\right]^{\frac{k}{2}} \frac{\partial^k P_n(\nu)}{\partial \nu^k}.$$

On en déduit que les solutions (3) se composent de polynômes en μ, avec le facteur $\sqrt{1 - \mu^2}$ si k est impair, tout comme les fonctions tessérales ordinaires. En effet $\frac{\partial^k P_n(\nu)}{\partial \nu^k}$ est un polynôme en ν, ou en $\frac{\mu}{\sqrt{\mu_1^2 - \mu^2}}$, de degré $n - k$; $T_n^k(\nu)$ contient donc $[\sqrt{\mu_1^2 - \mu^2}]^k$ en dénominateur, mais ce terme disparaît dans (3) avec le coefficient qui le précède.

Indiquons les premières fonctions prises parmi celles qui sont indépendantes de la longitude, et généralisent les polynômes de LEGENDRE :

$$M_0^0 = 1$$
$$M_1^0 = \frac{i\theta}{2\omega}\frac{\mu}{\mu_1}$$
$$M_2^0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3\theta^2}{4\omega^2} + 1\right)\frac{\mu^2}{\mu_1^2} - 1\right]$$
$$M_3^0 = -\frac{i}{2}\left[\left(\frac{5\theta^3}{8\omega^3} - \frac{3\theta}{2\omega}\right)\frac{\mu^3}{\mu_1^3} + \frac{3\theta}{2\omega}\frac{\mu}{\mu_1}\right].$$

Les solutions (4), au contraire, qui sont :

$$M^k_{-(n+1)} = M_n^k \times \left(\frac{\theta}{2\omega}\right)^{2n+1} (\mu_1^2 - \mu^2)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

deviennent toutes infinies pour $\mu = \mu_1$ et sont à rejeter pour tout problème concernant la surface entière de la sphère.

Voici où nous en sommes :

Si la sphère est entièrement liquide, sans fond, chaque fonction

$$A_n^k r^n e^{ik\alpha} M_n^k(\mu) e^{i\theta t}$$

fournit la solution d'un problème particulier dû à un potentiel perturbateur

$$P_n^k r^n e^{ik\alpha} M_n^k(\mu) e^{i\theta t}$$

si l'équation à la surface libre est $P = P^e$.

Si l'équation à la surface est de la forme plus générale où apparaissent aussi les dérivées $\frac{\partial P}{\partial \mu}$, il faudra former les équations de récurrence entre les M et les $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ à l'aide de celles des T ; mais le défaut d'orthogonalité des M en rendra l'utilisation difficile, et fera probablement intervenir les parallèles critiques μ_1.

Pour le fond sphérique, la solution paraît impuissante.

On ne voit même pas quelle forme de fond équatorial ($\mu^2 < \mu_1^2$) ou polaire ($\mu^2 > \mu_1^2$) excluant les parallèles critiques, *et indépendant de n, k,* pourrait être traitée à l'aide de la solution en $r^{-(n+1)}$.

Il faut donc chercher autre chose.

5. — Pour écrire facilement les conditions aux frontières, toutes deux sphériques, il suffirait que ces deux sphères, R et R — h, fissent partie de l'une des familles de surfaces coordonnées, sans que toutes les surfaces de la même famille fussent sphériques, comme dans l'essai précédent. On pourrait donc chercher des solutions de l'équation hyperbolique à l'aide de coordonnées curvilignes formées de trois familles de surfaces dont l'une comprendrait les deux sphères frontières. Mais, il se présente, dès que les coordonnées ne sont pas orthogonales, des particularités qu'il vaut mieux mettre en évidence sur un exemple plus simple, celui du globe sphérique entièrement liquide. Je vais étudier une solution toute différente de la précédente, dans laquelle figure une famille d'ellipsoïdes, comprenant la sphère de surface libre.

Reprenons les variables

$$x,\ y,\ \text{et}\ \zeta = \frac{iz}{c}$$

qui transforment l'équation hyperbolique en équation laplacienne.

L'équation de LAPLACE en x, y, ζ admet parmi ses solutions des familles bien connues d'ellipsoïdes homofocaux de révolution autour de oz. Si l'on revient à z, on trouve qu'on peut prendre des coordonnées u, v dans un plan méridien, définies par :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi &= A\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)} \\ z &= Acuv, \end{aligned} \right.$$

ϖ étant comme précédemment le rayon cylindrique.

Les courbes u constant sont les coniques :

$$(2) \qquad \frac{\varpi^2}{A^2(1-u^2)} + \frac{z^2}{A^2c^2u^2} = 1.$$

On obtient un cercle pour

$$A^2(1-u_1{}^2) = A^2c^2u_1{}^2 = R^2,$$

ce qui donne

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{\theta}{2\omega}, \qquad R = +A\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = A\sqrt{1-\frac{\theta}{4\omega^2}}.$$

C'est la sphère frontière cherchée. Si on cherche la famille des courbes v constant, la symétrie des formules (1) montre qu'on retombera sur l'équation (2). Il est impossible de séparer, comme dans le cas de l'équation, de LAPLACE les deux familles de lignes coordonnées en une famille d'hyperboles et une famille d'ellipses, deux courbes de la même famille n'ayant aucun point commun.

Si nous cherchons alors à satisfaire à notre équation par une expression de la forme :

$$P = U(u)V(v)e^{ik\alpha},$$

nous obtenons :

$$V \left\{ \left[\frac{d}{du}(1-u^2)\frac{dv}{du}\right] - \frac{k^2U}{1-u^2} \right\} - U \left\{ \frac{d}{dv}\left[(1-v^2)\frac{dV}{dv}\right] - \frac{k^2V}{1-v^2} \right\} = 0.$$

Nous savons d'avance que nous pouvons obtenir deux équations différentielles séparées pour U et V. Il suffit d'ajouter et retrancher $n(n+1)UV$, n étant une constante que nous prendrons entière, et de diviser par UV. On obtient ainsi pour U :

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{dU}{du}\right] - \frac{k^2U}{1-u^2} + n(n+1)U = 0\,;$$

c'est l'équation connue des fonctions sphériques tessérales : $U = T_n^k(u)$.

On obtiendrait de même la solution $V = T_n^k(v)$.

En outre, *sur la sphère* $u = u_1$ on a

$$z = Acu_1v = Rv,$$

et la variable v y devient égale au sinus de la latitude $\frac{z}{R}$.

On aura donc une solution particulière de l'Equation hyperbolique en prenant

$$P_n^k = A_n^k e^{ik\alpha} T_n^k(u) T_n^k(v),$$

qui donnera sur la sphère u_1

$$P_n^k = A_n^k T_n^k(u_1) e^{ik\alpha} T_n^k\left(\frac{z}{R}\right),$$

où les fonctions $T_n^k\left(\frac{z}{R}\right)$ *sont orthogonales,* avec tout l'avantage qui en résulte pour l'identification d'une série $\Sigma \cdot P_n^k$ avec le potentiel troublant P^e donné.

L'avantage se conserve pour les dérivées $\frac{\partial P}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial P}{\partial \mu}$; mais avec ces coordonnées u, v qui ne se coupent plus à angle droit, comment formerons-nous la dérivée normale, qui intervient nécessairement dans l'ensemble de la solution ?

Etudions donc de près la définition d'un point au moyen des coordonnées u, v. La première question à examiner est évidemment celle de la réalité de u. Ce n'est en effet que pour u réel que nous pourr[illegible] employer aisément les fonctions tessérales.

L'équation des courbes u constant, résolue en u^2, montre de suite que u^2 est réel pour :

$$(c\varpi - z - cA)\,(c\varpi - z + cA)\,(c\varpi + z - cA)\,(c\varpi + z + cA) > 0$$

ce sont là les premiers membres des équations de 4 caractéristiques

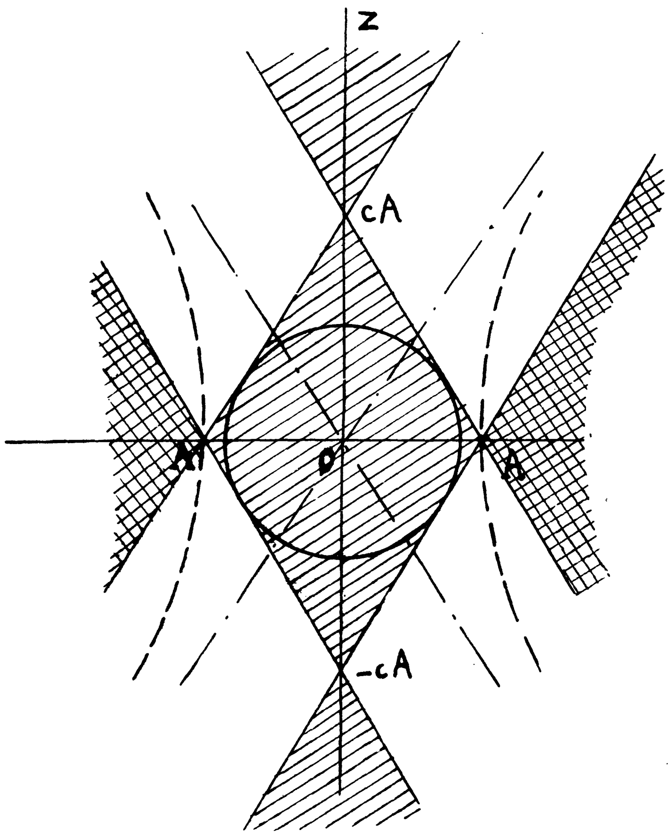

Fig. 2.

(fig. 2) formant un losange qui a les axes pour diagonales ; u^2 est réel dans les portions ombrées du plan. Il est positif pour

$$c^2(\varpi^2 - A^2) - z^2 < 0,$$

donc à l'intérieur d'une hyperbole ayant ses sommets au sommet du losange, ce qui exclut la portion quadrillée du plan.

Il est clair que les coniques admettent pour enveloppes ces 4 caractéristiques (1). La circonférence en particulier leur est tangente aux points

$$\left\{\begin{aligned} z &= \pm A \frac{c}{1+c^2} \\ \varpi &= A \frac{c^2}{1+c^2}. \end{aligned}\right.$$

Nous retrouvons les points que nous avait donnés l'examen préalable des conditions de détermination de la solution. Ils correspondent aux « parallèles critiques » de la théorie des marées.

Si nous nous rappelons que $c^2 = \frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2}$, nous voyons que pour, les marées semi-diurnes, c est très petit. Comme il représente le coefficient angulaire des caractéristiques, les latitudes critiques sont dans les régions polaires. Elles pourront n'être pas gênantes dans des problèmes qui excluraient ces régions, ce qui est physiquement acceptable. Par contre, pour les marées diurnes, c est voisin de $\sqrt{3}$, les latitudes critiques sont d'environ 30°, et les difficultés que nous allons exposer ne peuvent être tournées.

Seuls nous intéressent les points intérieurs au losange. En ce cas toutes les coniques sont des ellipses. Celles qui correspondent à $u > u_1$ (ou $v > v_1$) ont leur grand axe suivant oz, les autres suivant $o\varpi$. Un point intérieur au cercle est obtenu par l'intersection d'une ellipse d'une espèce avec une ellipse de l'autre, et correspond à $u < u_1 < v$ (ou $v < u_1 < u$). On obtient un point extérieur, dans la région polaire en prenant $u > u_1$ et $v > u_1$, dans la région équatoriale en prenant $u < u_1$ et $v < u_1$. *Mais au voisinage du point de contact avec le cercle, il est impossible de « sortir » du cercle.* Les coordonnées u, v ne se prêtent pas à la représentation d'un point extérieur le long d'un parallèle critique.

Les points intérieurs eux-mêmes donnent lieu à des difficultés. Au voisinage du point de contact les ellipses sont près de leur enveloppe. La profondeur de leur point d'intersection est petite du second ordre

(1) Cette propriété correspond d'ailleurs à celles d'être homofocales pour les coniques fournies par l'équation de Laplace (tangentes à un quadrilatère isotrope).

par rapport à la variation de u (ou de v) à partir de u_1. Pour obtenir par exemple une variation h suivant le rayon, il faut faire varier u et v de quantités équivalentes à $\sqrt{\frac{h}{R}}\sqrt{\frac{1-u_1^2}{2}}$, et $-\sqrt{\frac{h}{R}}\sqrt{\frac{1-u_1^2}{2}}$.

Partout ailleurs une variation δr du rayon vecteur est linéaire en δu, δv ; la dérivée $\frac{\partial P}{\partial r}$ est linéaire en $\frac{\partial P}{\partial u}$, $\frac{\partial P}{\partial v}$. Mais à la latitude de contact ($v = u_1$), une variation δr est proportionnelle à $(u - u_1)^2$, $(v - u_1)^2$.

A cette latitude (Note IV), la dérivée $\frac{\partial P}{\partial r}$ devient linéaire en $\frac{\partial P}{\partial v}$ et

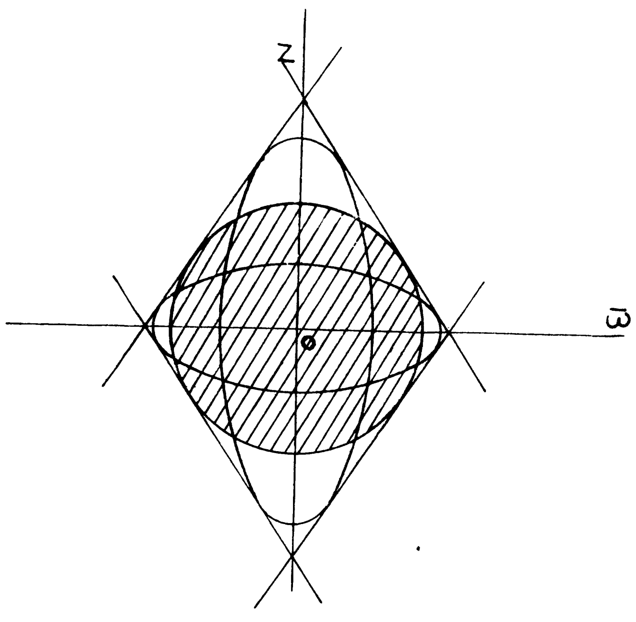

Fig. 3.

$\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$. De là résulte la nécessité d'une discussion spéciale de toute la solution et de la condition frontière, au voisinage de cette latitude.

La même circonstance complique l'écriture de la condition au fond, quand on essaie d'utiliser cette solution pour l'étude (approximative) d'un océan de faible profondeur. Loin des latitudes critiques, une *faible* profondeur est proportionnelle à $(u - u_1)$; aux latitudes critiques elle est proportionnelle à $(u - u_1)^2$; cela exige des précautions dans l'approximation.

6. — Pour terminer, nous allons montrer que nous sommes loin d'avoir épuisé toutes les formes possibles de développements en fonctions simples.

Partons pour simplifier de l'équation de LAPLACE

$$\Delta P = 0,$$

et supposons que nous écrivions la solution P sous forme d'un produit de deux fonctions. Pour voir à quelles équations on peut assujettir celles-ci, posons :

$$P = e^{\Phi} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] e^{\Phi}.$$

L'équation en Φ est :

$$\Delta\Phi + \Delta_1\Phi = 0,$$

en posant

$$\Delta_1\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2.$$

La division de P en produit se traduit par le partage de Φ en somme, soit :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

On a alors :

$$\Delta\Phi_1 + \Delta_1\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta_1\Phi_2 = -2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Toutes les solutions qu'on a l'habitude d'examiner sont telles que le second membre soit nul, c'est-à-dire telles que les surfaces Φ_1 constant, Φ_2 constant soient orthogonales Φ_1 et Φ_2 sont alors des solutions de :

$$\begin{cases} \Delta\Phi_1 + \Delta_1\Phi_1 = A \\ \Delta\Phi_2 + \Delta_1\Phi_2 = -A, \end{cases}$$

(A étant une constante arbitraire), assujetties à la condition simple précédente.

Mais on pourrait aussi rechercher des solutions telles que le second membre de (3) soit la somme d'une expression fonctionnelle dépendant de Φ_1 et d'une expression dépendant de Φ_2.

$$\begin{cases} A_1F_1\left(\Phi_1, \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \dots \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}, \dots\right) \\ + A_2F_2\left(\Phi_2, \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}, \dots \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}, \dots\right) \end{cases}$$

Ces expressions pourraient être des fonctions de Φ_1 (ou Φ_2), de ses diverses dérivées, des variables indépendantes, comprendre au besoin des intégrales.

Par exemple si l'on prenait :

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right) &= A_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + B_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + C_2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} \\
&\quad + A_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + B_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} + C_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2},
\end{aligned}
\right.
$$

A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 étant des constantes, Φ_1 et Φ_2 satisferaient aux équations :

$$
(1 + A_1)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + (1 + B_1)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + (1 + C_1)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + \Delta_1\Phi_1 = A
$$

$$
(1 + A_1)\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + (1 + B_2)\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} + (1 + C_2)\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} + \Delta_2\Phi_2 = -A,
$$

qui ne sont guère plus compliquées que les précédentes. *La difficulté consisterait, bien entendu, à choisir des solutions qui vérifient la condition* (4). Il semble probable que pour certaines formes de condition remplaçant la condition d'orthogonalité on aurait encore des résultats simples. Leur étude systématique présenterait le plus grand intérêt.

Les mêmes idées sont applicables à notre équation hyperbolique. Voyons seulement *par quoi est remplacée la condition d'orthogonalité.* Si on change z en $\frac{iz}{c}$ dans la condition d'orthogonalité, elle donne :

$$
\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - c^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0.
$$

Supposons que l'on cherche des solutions qui soient de révolution autour de oz ; la condition se réduit à :

$$
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varpi}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varpi} - c^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0.
$$

Elle exprime qu'en chaque point les courbes Φ_1 constant, Φ_2 constant et les caractéristiques forment un *faisceau harmonique* (1). En particulier si l'une des courbes devient tangente à une caractéristique, l'autre lui est tangente au même point. On retrouve, généralisée, une des propritées de notre dernier développement en série.

Quant à la condition d'orthogonalité vraie, satisfaite par les termes

(1) Il en serait évidemment de même dans toute transformation homographique.

de notre premier développement, c'est ici un exemple de condition plus compliquée imposée aux fonctions Φ_1 et Φ_2. On vient de voir que c'est un cas particulier parmi l'infinité des conditions possibles.

7. — Mon but, dans ces conférences a été d'attirer l'attention des jeunes mathématiciens sur quelques difficultés, intéressantes en elles-mêmes, et plus encore pour les applications hydrodynamiques, qui se présentent dans l'étude de l'équation hyperbolique la plus simple, dès que la frontière n'est plus celle que les mathématiciens ont pris l'habitude d'étudier. J'espère que ces difficultés exciteront la curiosité de quelques-uns d'entre eux.

Note I. — Dès la fin du XVIII^e siècle, les géomètres qui se sont occupés de la théorie du son ont rencontré des équations *hyperboliques*, et se sont occupés de leur « intégration générale » à l'aide de fonctions arbitraires, ou de la détermination de solutions particulières convenant à des conditions aux limites données (problèmes pour lesquels l'intégrale générale fut reconnue être rarement efficace). On pourra parcourir avec intérêt le vieux traité de calcul intégral de Léonard EULER, les *Œuvres* de POISSON, certains mémoires de DU BOIS-REYMOND (1864; 1883) et enfin de RIEMANNN (1860). Leurs résultats généraux se trouvent résumés, par exemple, dans le *Traité d'Analyse* » d'E. GOURSAT, t. III et les « Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles » de E. PICARD (*Cahiers scientifiques*, 1927). Le cas de plusieurs fonctions variables et plusieurs équations aux dérivées partielles a été étudié par VOLTERRA (Membranes), [*Acta Math.* 1894].

Note II. — Considérons donc le mouvement relatif d'un fluide par rapport à des axes *oxyz* tournant autour de *oz* avec une vitesse uniforme ω. En variables d'EULER, les équations du mouvement sont du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

X, Y, Z représente la force totale, comprenant la force de CORIOLIS. — $2\omega v$, $2\omega u$, 0, et les forces attractives dépendant d'un potentiel V. Nous poserons :

$$P = V - p,$$

et nous supposerons les vitesses assez faibles pour que les termes du second ordre soient négligeables. Les équations se réduisent alors à :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + 2\omega v = \frac{\partial P}{\partial x} \\ &\frac{\partial v}{\partial t} - 2\omega u = \frac{\partial P}{\partial y} \\ &\frac{\partial w}{\partial t} \qquad\quad = \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Si on élimine u, v w entre ces équations et l'équation de incompressibilité,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on obtient l'équation en P :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta P) + 4\omega^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Supposons alors que P, u, v, w soient des fonctions périodiques du temps, que nous écrirons (en changeant la signfication des lettres), $Pe^{i\theta t}$, $ue^{i\theta t}$, $ve^{i\theta i}$, $we^{i\theta t}$. Nous obtenons enfin l'équation :

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

donnée dans le texte (1).

Précisons les conditions du problème. Le liquide est supposé recouvrir un globe sphérique. La vitesse de rotation étant faible, nous supposons que la surface du liquide tournant et gravitant ne s'écarte pas sensiblement d'une sphère concentrique au fond. Des forces perturbatrices données dépendant du potentiel $P^e e^{i\theta t}$ sont alors introduites, imposant (2) la période $\frac{2\pi}{\theta}$. Nous négligerons l'attraction exercée sur le liquide par le bourrelet (positif à certains endroits, négatif à d'autres) qui se forme alors. Les forces sont donc toutes connues. Il reste à écrire les conditions aux frontières, savoir l'uniformité de la pression à la surface libre, et la condition au fond. Il est commode pour cela d'introduire les coordonnées polaires : r (rayon), μ sinus de la latitude), α (longitude). Elles permettent d'écrire la composante de la vitesse suivant le rayon sous la forme :

$$U_r = \frac{i\theta}{\theta^2(4\omega^2 - \theta^2)} \left[4\omega^2\mu(1 - \mu^2) \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \mu} + (\theta^2 - 4\omega^2\mu^2) \frac{\partial P}{\partial r} - i2\omega\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right],$$

qui s'obtient aisément à partir des équations (1).

La condition à la surface libre donne alors (compte tenu de la condition correspondante avant l'établissement du potentiel P^e) :

$$i\theta(P - P^e) + gU_R = 0,$$

toutes les quantités étant prises à la surface libre de repos : $r = R$. Dans cette formule, il faut choisir *convenablement* l'intensité de la pesanteur g, en fonction de la latitude.

La condition au fond s'écrit simplement :

$$U_{R-h} = 0,$$

h étant la profondeur du liquide.

(1) Cf. POINCARÉ, *Acta Mathematica*, t. VII (1885), p. 356.
(1) Au bout d'un temps suffisamment long, en vertu des résistances passives.

Enfin, si l'on veut avoir le soulèvement ε en chaque point de la surface, ce qui est le but ordinaire des problèmes de marées, il suffira, P étant supposé connu, de remarquer que :

$$U_R = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = i\theta\varepsilon.$$

Ainsi tout revient à déterminer une solution P de l'équation (2), régulière entre deux sphères concentriques, et satisfaisant sur chacune d'elles à une condition linéaire par rapport à P et à ses dérivées partielles. C'est *un problème classique dans le cas de l'équation de Laplace à laquelle se réduit l'équation* (2) *pour* $\omega = 0$. Mais l'équation (2) est une équation hyperbolique, au moins dans tous les cas suggérés par les marées terrestres. Pour les marées semi-diurnes luni-solaires, θ est en effet très voisin de ω, mais plus petit. Pour les marées diurnes θ est voisin de ω. A fortiori, pour les marées semi-mensuelles, mensuelles, etc., le coefficient $\frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2}$ est toujours positif.

Dans ce cas, rien de classique ne permet de former la solution cherchée. Dans les problèmes étudiés de propagation du son, la variable t remplace la variable z, et rien d'analogue à la distance, aucune expression de la forme $x^2 + y^2 + c^2t^2$, ne saurait intervenir. Dans les travaux de POINCARÉ sur la même équation [1], la nature de l'équation n'intervient pas, elle est traitée partout comme elliptique. Enfin la forme sphérique des frontières n'apporte pas de simplification importante, comme dans le cas de l'équation de LAPLACE, laquelle possède, peut-on dire, la symétrie sphérique.

Note III. — Posant

$$\frac{z}{r} = \mu, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\left.\begin{aligned}&(\theta^2 + 4\omega^2\mu^2 - 4\omega^2)(1 - \mu^2)\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} + [\omega^2(12 - 8n)(1 - \mu^2) - 2\theta^2]\mu\frac{\partial M}{\partial \mu} \\ &\quad + \left[n[3\theta^2 - 4\omega^2] + n(n-2)(\theta^2 - 4^2\omega^2\mu^2) - \frac{\theta^2 k_2}{1 - r_1^2}\right]M\end{aligned}\right\} = 0.$$

Remarque : Une fonction M^k ne convient qu'à une seule valeur de n, puisque n apparaît dans deux coefficients — et linéairement dans l'un d'eux. L'équation correspondante du problème elliptique (fonctions tessérales T_n^k) ne contient n que pour le produit $n(n + 1)$, qui ne change pas si on remplace n par $-(n + 1)$, de sorte que l'on a $T_n^k \equiv T^k_{-(n+1)}$

Note IV. — Des formules

$$\varpi = A\sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}, \qquad z = Acuv$$

(1) *Loc. cit.*

on tire

$$du = \frac{cu\varpi d\varpi + Av(1 - u^2)dz}{cA^2(v^2 - u^2)}$$

$$dv = -\frac{cv\varpi d\varpi + Au(1 - v^2)dz}{cA^2(v^2 - u^2)}$$

$$r^2 = A^2[1 - u^2 - v^2 + (1 + c^2)u^2v^2]$$

et, à $\frac{z}{r}$ constant

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{(1 - u^2)u\frac{\partial}{\partial u} - (1 - v^2)v\frac{\partial}{\partial v}}{(v^2 - u^2)A\sqrt{1 - u^2 - v^2 + (1 + c^2)u^2v^2}}.$$

Le dénominateur v^2-u^2 crée évidemment une difficulté pour $v = u$, c'est-à-dire au point de contact avec le losange des caractéristiques.

En particulier, pour la solution $T_n^k(u)\cdot T_n^k(v)$, $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ deviennent égales, pour $u = v$; de sorte que le numérateur s'annule aussi ; $\frac{\partial P_n^k}{\partial r}$ prend un aspect indérerminé. Mais si, pour la même valeur de u, par exemple u_1, on développe en $(v - u)$ le numérateur, on obtient sans difficulté

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{v=u} = \frac{(1 - 3u^2)\frac{\partial P}{\partial v} + u(1 - u^2)\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}}{A\cdot 2u\sqrt{1 - 2u^2 + (1 + c^2)u^4}}.$$

(Deux conférences données à l'Institut H. Poincaré le 28 et le 31 Mai 1930 et rédigées par M. Coulonel).