ANNALES DE L'I. H. P.

TH. DE DONDER

La Gravifique Einsteinienne Six conférences données à l'Institut Henri Poincaré

Annales de l'I. H. P., tome 1, n° 2 (1930), p. 77-116
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_2_77_0>

La Gravifique Einsteinienne

Six conférences données à l'Institut Henri Poincaré

PAR

TH. DE DONDER

Professeur à l'Université Libre de Bruxelles

Ces pages renferment un exposé succinct des six Conférences que j'ai eu l'honneur de donner à l'Institut Henri Poincaré en novembre et décembre 1929. Elles avaient respectivement pour objet :

I. Le champ gravifique massique.
II. Le champ gravifique électromagnétique.
III. Application à la mécanique ondulatoire.
IV. Electrodynamique des corps en mouvement.
V. Electromagnétostriction et thermodynamique relativistes.
VI. Synthèse.

Je me suis efforcé de montrer que la relativité générale fournit un instrument parfaitement adapté à l'étude de ces problèmes. Contrairement à une opinion assez répandue, la gravifique einsteinienne ne doit pas être modifiée : comprise dans un sens suffisamment large, elle demeure en harmonie avec les théories les plus modernes de la mécanique ondulatoire.

La Gravifique einsteinienne

1. LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DU CHAMP GRAVIFIQUE. — Considérons une fonction $\mathfrak{M}^g$ ne dépendant que des $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,i}$, ... Sa variance par rapport à un changement quelconque de variables x_1, x_2, x_3, x_4 est celle d'un multiplicateur ou facteur de densité. Nous appellons $\mathfrak{M}^g$ la *fonction caractéristique gravifique.*

Considérons, en outre, une fonction $\mathfrak{M}$, de même variance, mais qui peut dépendre, indépendamment des $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,i}$, d'autres fonctions telles u^α, A_α, etc. Cette fonction sera explicitée plus loin ; elle sera désignée sous le nom de *fonction caractéristique phénoménale.*

Le principe *variationnel* fondamental de la gravifique consiste à égaler à zéro, les dix dérivées variationnelles par rapport aux $g^{\alpha\beta}$. On obtient ainsi les *dix équations fondamentales* de la gravifique ; à savoir

$$\frac{\delta(\mathfrak{M}g + \mathfrak{M})}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0. \tag{1}$$

La dérivée variationnelle $\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}$ s'écrit :

$$\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta,j}}\right) + \frac{d^2}{dx_j dx_k}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta,jk}}\right) - \cdots \tag{2}$$

Posons

$$\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\delta\mathfrak{M}^g}{\delta g^{\alpha\beta}} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\delta\mathfrak{M}}{\delta g^{\alpha\beta}} \tag{3}$$

d'où

$$\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta} = \mathfrak{T}_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Nous appellerons $\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta}$ le *tenseur gravifique covariant symétrique,* $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ le *tenseur phénoménal covariant symétrique* ou simplement *le tenseur symétrique.*

Désignons par C *l'invariant de courbure* et par a et b deux constantes *universelles.* Prenons pour $\mathfrak{M}^g$ la valeur

$$\mathfrak{M}^g = (a + bC)\sqrt{-g}. \tag{5}$$

En effectuant les opérations indiquées en (9 II), on obtient

$$-\frac{1}{2}(a + bC)g_{\alpha\beta} + bC_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{6}$$

où

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\mathfrak{T}_{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \tag{7}$$

et $C_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de Riemann bien connu.

Remarque. — Le principe variationnel tel que nous venons de l'exposer revient évidemment à généraliser le *principe de Hamilton,* c'est-à-dire à annuler la variation

$$\delta \int_{\Omega} (\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0 \tag{8}$$

Ω étant une portion d'espace-temps sur les frontières de laquelle les variations doivent s'annuler.

2. Les identités gravifiques. — En appliquant à la fonction $\mathfrak{M}^g$ les identités de la gravifique (1), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\delta \mathfrak{M}^g}{\delta g^{\alpha j}} + \frac{1}{2} g^{ij,\alpha} \frac{\delta \mathfrak{M}^g}{\delta g^{ij}} \equiv 0. \tag{9}$$

ou encore, en vertu de (3),

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^{g\,i}_{\ \alpha}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}^g_{ij} = 0 \tag{10}$$

où

$$\mathfrak{T}^{g\,i}_{\ \alpha} = g^{ij} \mathfrak{T}^g_{\alpha j}. \tag{11}$$

3. Théorème de l'impulsion et de l'énergie. — Les dix équations (4) jointes aux quatre identités (10), donnent immédiatement les quatre *équations*

$$\mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{T}^i_{\alpha;i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{T}^i_\alpha}{\partial x_i} + \frac{1}{2} g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}_{ij} = 0 \tag{12}$$

où nous avons posé, comme en (24 II),

$$\mathfrak{T}^i_\alpha = g^{ij} \mathfrak{T}_{\alpha j}. \tag{13}$$

Nous dirons que les quatre équations (12) expriment le théorème *de l'impulsion et de l'énergie.* On peut aussi exprimer ce théorème en disant que la force généralisée $\mathfrak{F}_\alpha$ est nulle.

(1) Th. de Donder. *Théorie invariantive du Calcul des variations.* Bulletin A. R. Belg. Cl. des Sciences. 5e série, t. XV, 1929. Voir § 12.

4. ONDES ET RAYONS GRAVIFIQUES. — Choisissons de nouvelles variables x_1, x_2, x_3, x_4 telles que les nouveaux $g_{\alpha\beta}$ satisfassent aux quatre équations *complémentaires* [1]

$$g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{bmatrix} = 0. \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$g^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{Bmatrix} = 0. \tag{15}$$

En utilisant ces nouvelles variables, les équations fondamentales du champ gravifique deviennent

$$g^{\alpha\beta}g_{\sigma\tau,\alpha\beta} = (\sigma, \tau) \tag{16}$$

où les seconds membres (σ, τ) *ne* contiennent *pas* de dérivées secondes des potentiels einsteiniens. Remarquons de plus que chacun des premiers membres de (16) ne contient que des dérivées secondes d'*un seul* potentiel einsteinien.

Nous dirons, d'après HADAMARD et VESSIOT, que les solutions $f = f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ de

$$G \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^\beta} = 0 \tag{17}$$

fournissent des *variétés caractéristiques* ou *ondes gravifiques* (élémentaires) :

$$f = 0. \tag{18}$$

Considérons maintenant les caractéristiques (de CAUCHY) de $G = 0$; on aura ainsi les *bicaractéristiques* ou les *rayons gravifiques*. VESSIOT a montré [1] que ce sont des *géodésiques de longueur nulle* du champ gravifique.

5. CHAMP GRAVIFIQUE MASSIQUE. — Dans le cas d'un champ gravifique dû à des masses, nous posons

$$\mathfrak{M} \equiv -\, g^{\alpha\beta}(\mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \mathfrak{T}_{\alpha\beta}) \tag{19}$$

(1) Th. DE DONDER. *La Gravifique einsteinienne.* Annales de l'Observatoire R. de Belgique, 1921 (ou chez Gauthier-Villars, Paris). Voir § 29.

où $\mathfrak{M}$ est la densité massique généralisée, u_α les composantes covariantes de la vitesse et $\mathfrak{L}_{\alpha\beta}$ les tensions massiques.

En utilisant (3) et (13) on obtient le tenseur

(20) $$\mathfrak{T}_\alpha^\beta = \mathfrak{M} u_\alpha u^\beta + \mathfrak{L}_{\alpha}^{\beta}.$$

Le *théorème de l'impulsion et de l'énergie* (12) devient alors

(21) $$\mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha + \mathfrak{L}_\alpha = 0$$

où

(22) $$\mathfrak{M}_\alpha \equiv \mathfrak{M} A_\alpha + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\mathfrak{M} u^\beta\right)$$

et

(23) $$\mathfrak{L}_\alpha \equiv \mathfrak{L}^\beta_{\alpha;\beta} = \frac{\partial \mathfrak{L}^\beta_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\varepsilon\gamma,\alpha} \mathfrak{L}^\varepsilon_\beta.$$

En multipliant (21) par u^α et en sommant on obtient l'*équation de continuité* :

(24) $$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{M} u^\alpha\right) + \mathfrak{L}_\alpha u^\alpha = 0.$$

6. Champ gravifique électromagnétique et massique. — Considérons maintenant le cas où le champ gravifique est dû à des charges électriques et à des masses.

A cet effet, nous introduisons la fonction caractéristique :

(25) $$\mathcal{M} \equiv g^{\alpha\beta}\left[-\mathfrak{M} u_\alpha u_\beta - \mathfrak{L}_{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij} H_{\alpha i} H_{\beta j}\right].$$

Les fonctions $H_{\alpha i}$ sont les composantes de la force électromagnétique ; elles sont antisymétriques, c'est-à-dire que

(26) $$H_{\alpha i} = - H_{i\alpha}.$$

Grâce à (3) et (13), on aura le tenseur

(27) $$\mathfrak{T}^\beta_\alpha \equiv \mathfrak{M} u_\alpha u^\beta + \mathfrak{L}^\beta_\alpha + \frac{1}{4} \varepsilon^\beta_\alpha \sqrt{-g}\, H_{ij} H^{ij} + \sqrt{-g}\, H^i_\alpha H^\beta_i.$$

Il résulte immédiatement de là, le *théorème de l'impulsion et de l'énergie*

(28) $$\mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{M}_\alpha + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{F}^{(e)}_\alpha = 0$$

où $\mathfrak{M}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_\alpha$ ont été définis précédemment (22 et 23) et où

$$\mathcal{F}^{(e)}_\alpha \equiv \left[\sqrt{-g}\, \mathrm{H}^{\overline{\alpha j}} \frac{\partial \mathrm{H}_{\overline{ij}}}{\partial x_i} - \mathrm{H}_{\alpha j} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, \mathrm{H}^{ij})}{\partial x_i}\right]. \tag{29}$$

La notation $\mathrm{H}_{\overline{ij}}$ signifie qu'il faut affubler H de deux indices formant avec ij une permutation paire $ij\overline{ij}$ des indices 1234. En multipliant (28) par u^α et en sommant par rapport à α, on obtient l'*équation de continuité* [1] :

$$\frac{\partial(\mathfrak{M}u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \left(\mathfrak{L}_\alpha + \mathcal{F}^{(e)}_\alpha\right)u^\alpha = 0. \tag{30}$$

En multipliant (28) par A^α et en sommant par rapport à α, on obtient la relation [1]

$$\mathfrak{M} = \frac{-\mathrm{A}^\beta\left(\mathcal{F}^{(e)}_\beta + \mathfrak{L}_\beta\right)}{\mathrm{A}_\alpha \mathrm{A}^\alpha}. \tag{31}$$

7. Équations maxwelliennes. — Introduisons maintenant les équations *électromagnétiques maxwelliennes* :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\sqrt{-g}\, \mathrm{H}^{\alpha i})}{\partial x_i} = \sigma u^\alpha && (32)\\ &\frac{\partial \underset{*}{\mathcal{H}}{}^{\alpha i}}{\partial x_i} = 0 && (33)\end{aligned}\right.$$

où nous avons posé

$$\underset{*}{\mathcal{H}}{}^{\alpha i} = \mathrm{H}_{\overline{\alpha i}}. \tag{34}$$

De (33) et de (34), il résulte immédiatement que

$$\mathrm{H}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{35}$$

où Φ est le potentiel électromagnétique.

Il est important de noter que les équations de Maxwell (32) peuvent être tirées d'une fonction fondamentale

$$\mathfrak{D}^{(e)} = \sigma u^\alpha \Phi_\alpha + \frac{\sqrt{-g}}{4} g^{\alpha\beta} g^{ij} \mathrm{H}_{\alpha i} \mathrm{H}_{\beta j} \tag{36}$$

(1) Th. de Donder. *Théorie des Champs gravifiques*. Mémorial des Sciences mathématiques. Fasc. XIV. Paris 1926 (Voir chapitres III et VI).

en prenant la dérivée variationnelle par rapport à Φ_α et en supposant que les $H_{\alpha\beta}$ qui y figurent ont la forme (35). Le symbole σ est un facteur de densité électrique.

Il résulte immédiatement de (32) que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sigma u^\alpha\right) = 0 \tag{37}$$

qui exprime la *conservation de la charge électrique en mouvement.*

En tenant compte des équations (32) et (33), dans la valeur (29) de $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$, on trouve

$$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} \equiv + \sigma u^i H_{\alpha i}. \tag{38}$$

En multipliant $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ par u^α et en sommant, on obtient

$$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} u^\alpha \equiv 0. \tag{39}$$

Introduisons la valeur de $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ dans (31) ; nous obtenons ainsi une relation entre les facteurs de densité $\mathfrak{M}$ et σ ; à savoir [1].

$$\mathfrak{M} = \frac{-A^\beta(\sigma u^i H_{\beta i} + \mathfrak{X}_\beta)}{A_\alpha A^\alpha}. \tag{40}$$

On appelle, par définition, *équation complémentaire* de MAXWELL, la relation suivante entre les potentiels électromagnétiques

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\Phi^\alpha\right) = 0 \tag{41}$$

où nous avons écrit $\Phi^\alpha = g^{\alpha\beta}\Phi_\beta$. Les équations électromagnétiques de MAXWELL (32) peuvent alors être simplifiées. Après quelques calculs on obtient

$$\frac{\sigma u^\alpha}{\sqrt{-g}} = K_\alpha + g^{ij}\frac{\partial^2\Phi_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \tag{42}$$

où K_α ne contient pas de dérivées secondes de Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

8. FORME LAGRANGIENNE ET FORME CANONIQUE DU THÉORÈME DE L'IMPULSION ET DE L'ÉNERGIE. — Considérons le cas d'une masse

(1) *Loc. cit.*, éq. (341).

incohérente, c'est-à-dire où *les* $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$ *sont nuls*. Le théorème de l'impulsion et de l'énergie (28), si l'on tient compte de (38), peut s'écrire

$$(43) \quad \mathcal{F}_\alpha = \mathfrak{M}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \sigma\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)\right] = 0$$

où l'on a posé

$$(44) \qquad W^2 = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

$$(45) \qquad U = u^\alpha \Phi_\alpha.$$

Posons (¹)

$$(46) \qquad \delta\tau^{(m)} \equiv \mathfrak{M}\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4\,; \qquad \delta\tau^{(e)} \equiv \sigma \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4.$$

Il résulte alors des équations de continuité (30) et (37), en tenant compte de (39) et de ce que $\mathfrak{P}_{\alpha\beta} = 0$, que

$$(47) \qquad \frac{d}{ds}\int \delta\tau^{(m)} = 0\,; \qquad \frac{d}{ds}\int \delta\tau^{(e)} = 0.$$

En multipliant les deux derniers membres de (43) par un élément de volume et en intégrant, on obtient

$$(48) \quad \int \delta\tau^{(m)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial x_\alpha}\right] + \int \delta\tau^{(e)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right] = 0.$$

La mécanique ondulatoire de de Broglie-Schrodinger

9. MÉCANIQUE RELATIVISTE DES CHARGES PONCTUELLES. — Pour étudier la dynamique des charges ponctuelles dans l'espace-temps, nous introduisons grâce à (46), les deux *constantes* $\tau^{(m)}$ et $\tau^{(e)}$ qui caractérisent la particule au point de vue masse et charge.

Nous écrivons alors l'équation (48) sous la forme

$$(49) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}\right) = 0$$

où nous avons posé

$$(50) \qquad L = \tfrac{1}{2}W^2 + U\varepsilon$$

(1) *Loc. cit.*, équations (188) et (184).

et

(51) $$\varepsilon = \frac{\tau^{(m)}}{\tau^{(e)}}.$$

Introduisons les *variables canoniques*

(52) $$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = u_\alpha + \varepsilon\Phi_\alpha$$

et la *fonction hamiltonienne*

(53) $$H = -L + p_\alpha u^\alpha.$$

Il est facile de calculer la valeur de cette fonction, grâce à (52). On trouve

(54) $$H = \frac{1}{2}.$$

Les équations (49) jointes à (52) sont alors équivalentes au système

(55) $$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{ds} = -\frac{\partial H}{dx_\alpha}.$$

La fonction hamiltonienne (53) peut être exprimée en fonction des variables canoniques p_α grâce à (52) ; on obtient

(56) $$H \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(p_\alpha - \varepsilon\Phi_\alpha)(p_\beta - \varepsilon\Phi_\beta).$$

Proposons-nous maintenant de trouver l'équation de JACOBI du système (55) ; posons, à cet effet,

(57) $$p_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}.$$

D'où, en vertu de (56), l'*équation jacobienne* :

(58) $$\frac{\partial S}{ds} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - \varepsilon\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_\beta} - \varepsilon\Phi_\beta\right) = 0$$

où S est la fonction de JACOBI. La théorie classique de JACOBI nous apprend d'autre part que

(59) $$\frac{\partial S}{\partial s} = -H = -\frac{1}{2}.$$

En substituant dans (58), on obtient

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - \varepsilon\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_\beta} - \varepsilon\Phi_\beta\right) - 1 = 0. \tag{60}$$

Remarquons enfin que la fonction de JACOBI peut s'écrire, grâce à (59),

$$S = -\frac{1}{2}s + S_0(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{61}$$

10. ÉQUATION RELATIVISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — Posons

$$kS = \log \Psi \tag{62}$$

où k est une constante universelle dont la valeur sera donnée plus loin. On aura donc

$$\Psi = -\frac{2}{k}\frac{\partial \Psi}{\partial s} \tag{63}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}}{\dfrac{\partial \Psi}{\partial s}}. \tag{64}$$

Reprenons alors l'équation jacobienne (60). Celle-ci peut donc s'écrire

$$J \equiv g^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} + \varepsilon\Phi_\alpha\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\beta} + \varepsilon\Phi_\beta\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right)^2 = 0. \tag{65}$$

Pour obtenir l'équation relativiste de la mécanique ondulatoire, proposons-nous d'extrémer l'expression (65) ; écrivons donc

$$\frac{\delta(J\sqrt{-g})}{\delta\Psi} = 0 \tag{66}$$

où le symbole $\dfrac{\delta}{\delta\Psi}$ signifie qu'il faut prendre *la dérivée variationnelle* de $J\sqrt{-g}$ par rapport à Ψ, à savoir

$$\frac{\delta}{\delta\Psi} = \frac{\partial}{\partial\Psi} - \sum_{\sigma=0}^{4}\frac{d}{dx_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_\sigma}}\right). \qquad \left\{\begin{array}{l} x^\sigma = s, x_1, x_2, x_3, x_4 \\ 6 = 0, 1, 2, 3, 4. \end{array}\right. \tag{67}$$

L'équation (66) explicitée donne l'*équation de* DE BROGLIE-SCHRODINGER *généralisée* [1]

$$\boxed{\Box\Psi - 2k\varepsilon \sum_\alpha \Phi^\alpha \frac{\partial\Psi}{\partial x_\alpha} - k\varepsilon D\Psi + (k\varepsilon)^2 \left(F - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\Psi = 0} \tag{68}$$

où l'on a posé

$$\Box\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g} \sum_\beta g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial x_\beta}\right) \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{69}$$

$$D \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g} \sum_\beta g^{\alpha\beta}\Phi_\beta\right) \tag{70}$$

$$F \equiv \sum_\alpha \Phi_\alpha \Phi^\alpha. \tag{71}$$

La constante universelle k est donnée par

$$-k = 2i\pi \frac{m_0 c^2}{hc} \tag{72}$$

où m_0 est la masse de l'électron *au repos*. On aura, en vertu de (72),

$$\frac{2i\pi}{-k} = 2{,}42.10^{-2}\text{Å}. \tag{73}$$

Dans le second membre de (73) figure *la longueur d'onde correspondant à la transformation du contenu énergétique m_0c^2 d'un électron en un quantum lumineux.*

Champ de Minkowski. — Supposons que le champ gravifique soit de MINKOWSKI et que les composantes Φ_1. Φ_2, Φ_3 soient *nulles*. Posons, en outre

$$\Phi_4 = cV\,; \qquad \text{d'où} \qquad \Phi^4 = \frac{1}{c} V. \tag{74}$$

Le système considéré étant stationnaire, posons avec O. KLEIN,

$$\Psi \equiv \Theta e^{-\frac{2i\pi}{h} E\cdot t} \tag{75}$$

où Θ ne dépend plus de t et où E est une constante.

(1) Th. DE DONDER. Bull. Ac. Roy. Belgique. Cl. des Sc. 5e série, t. XIII. Séance du 5 février 1927.

Substituons dans l'équation (68) ; d'où, en vertu de (74),

(76) $$\triangle\Psi + \frac{4\pi^2}{c^2h^2}[(\mathcal{E} - e_0V)^2 + 2(\mathcal{E} - e_0V)m_0c^2]\Psi = 0$$

où l'on a posé

(77) $$\mathcal{E} = E - m_0c^2$$

Approximativement, l'équation précédente pourra s'écrire

(78) $$\triangle\Psi + \frac{8\pi^2}{c^2h^2}m_0c^2(\mathcal{E} - e_0V)\Psi = 0$$

où

(79) $$\triangle\Psi = \sum_i \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2}.$$

Cette dernière équation est l'*équation ordinaire de* DE BROGLIE-SCHRODINGER.

Electrodynamique des corps en mouvement

11. ÉQUATIONS GRAVIFIQUES. — Nous avons vu que les 10 équations fondamentales du champ gravifique pouvaient se déduire du principe variationnel (1). Nous poserons ici pour la fonction $\mathfrak{M}$:

(80) $$\boxed{\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}W^2 + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m)} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)} + \mathfrak{M}^{(e)}}$$

où $\mathfrak{N}$ est le facteur tensoriel massique, où

(81) $$W^2 \equiv g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1$$

et où $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m)}$, $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)}$, $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)}$ représentent respectivement les fonctions caractéristiques des phénomènes *massiques, massiques-électromagnétiques* et *purement électromagnétiques.* Nous dirons aussi que $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)}$ caractérise les phénomènes d'électromagnétostriction ou plus simplement la *striction.*

12. ÉQUATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES. — Nous écrivons les équations du champ maxwellien généralisées sous la forme

(82) $$\frac{d\mathfrak{H}^{\alpha\beta}}{dx_\beta} = \mathfrak{C}^\alpha$$

(83) $$\frac{d\underset{*}{\mathfrak{H}}^{\alpha\beta}}{dx_\alpha} = \underset{*}{\mathfrak{C}}^\alpha$$

où

(84) $$\mathcal{C}^{\alpha} \equiv \sigma_{(e)} u^{\alpha} + \mathfrak{L}^{\alpha}_{(e)}$$

(85) $$\mathcal{C}^{\alpha}_{*} \equiv \sigma_{(\mu)} u^{\alpha} + \mathfrak{L}^{\alpha}_{(\mu)}$$

où l'indice (e) signifie *électrique*, et l'indice (μ), *magnétique*. Les expressions σu^{α} et $\mathfrak{L}^{\alpha}$ représentent respectivement les composantes des courants de convection et de conduction généralisés.

Dans le cas le plus général, nous définissons la *force électromagnétique* par le tenseur antisymétrique

(86) $$\mathcal{K}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}^{\alpha\beta} - \mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)}$$

et la *force électromagnétique adjointe* par le tenseur antisymétrique

(87) $$\mathcal{K}^{\alpha\beta}_{*} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{*} - \mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(\mu)}$$

où

(88) $$\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{*} = \mathrm{H}_{\overline{\alpha\beta}}$$

Ecrivons maintenant avec Einstein, la *force de polarisation* définie par les six composantes $\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)}$ sous la forme

(89) $$\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)} \equiv \mathfrak{P}^{\alpha}_{(e)} u^{\beta} - \mathfrak{P}^{\beta}_{(e)} u^{\alpha}$$

où $\mathfrak{P}^{\alpha}_{(e)}$ sont les quatre composantes contravariantes tensorielles de l'*intensité de polarisation électrique*. Rappelons que $u^{\alpha} = \dfrac{dx_{\alpha}}{ds}$.

Exprimons de même la *force de polarisation magnétique* au moyen de l'*intensité de polarisation magnétique* par

(90) $$\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(\mu)} \equiv \mathfrak{P}^{\alpha}_{(\mu)} u^{\beta} - \mathfrak{P}^{\beta}_{(\mu)} u^{\alpha}.$$

De (82) et (83) on tire immédiatement

(91) $$\frac{d\mathcal{C}^{\alpha}}{dx_{\alpha}} = 0\,; \qquad \frac{d\mathcal{C}^{\alpha}_{*}}{dx_{\alpha}} = 0.$$

Afin de pouvoir donner facilement l'interprétation physique des termes ci-dessus,supposons que x_1, x_2, x_3 représentent des coordonnées rectangulaires dextrogyres, et que x_4 représente le temps t. Au lieu de x_1, x_2, x_3, nous emploierons aussi la notation x, y, z. Il est alors commode d'employer les notations habituelles de l'électromagnétisme, en posant :

$$(92)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}^{23} = c\mathcal{H}_x \\ \mathcal{K}^{31} = c\mathcal{H}_y \\ \mathcal{K}^{12} = c\mathcal{H}_z \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \underset{*}{\mathcal{K}}^{23} = c\overset{*}{\mathrm{H}}_x \\ \underset{*}{\mathcal{K}}^{31} = c\overset{*}{\mathrm{H}}_y \\ \underset{*}{\mathcal{K}}^{12} = c\overset{*}{\mathrm{H}}_z \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}^{14} = -\mathrm{B}_x \\ \mathcal{K}^{24} = -\mathrm{B}_y \\ \mathcal{K}^{34} = -\mathrm{B}_z \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \underset{*}{\mathcal{K}}^{14} = \mathcal{B}_x \\ \underset{*}{\mathcal{K}}^{24} = \mathcal{B}_y \\ \underset{*}{\mathcal{K}}^{34} = \mathcal{B}_z. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces tableaux, les symboles ont la signification physique suivante :

$(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z)$ = composantes de la force magnétique
$(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z)$ = composantes de l'induction magnétique.

D'autre part, on a posé

$$(93)\qquad \overset{*}{\mathrm{H}}_x \equiv \mathrm{H}_x - \mathrm{H}^a_x\,; \qquad \overset{*}{\mathrm{H}}_y \equiv \mathrm{H}_y - \mathrm{H}^a_y\,; \qquad \overset{*}{\mathrm{H}}_z \equiv \mathrm{H}_z - \mathrm{H}^a_z.$$

où

$(\mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y, \mathrm{H}_z)$ = composantes de la force électrique
$(\mathrm{H}^a_x, \mathrm{H}^a_y, \mathrm{H}^a_z)$ = composantes de la force électrique appliquée (eingeprägt).

Enfin

$(\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z)$ = composantes de l'induction électrique.

Il est presque inutile d'ajouter que toutes ces expressions doivent être entendues dans un sens *généralisé*.

Grâce aux notations (92), les équations électromagnétiques (82) et (83) des corps en mouvement, conservent la forme maxwellienne :

$$(94)\qquad \mathrm{div}\,\mathrm{B} = \sigma_{(e)}u^4 + \mathcal{L}^4_{(e)} \qquad \mathrm{rot}\,\mathcal{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} + \sigma_{(e)}u + \mathcal{L}_{(e)}\right)$$

$$(95)\qquad \mathrm{div}\,\mathcal{B} = \sigma_{(\mu)}u^4 + \mathcal{L}^4_{(\mu)} \qquad \mathrm{rot}\,\mathrm{H}^* = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \sigma_{(\mu)}u + \mathcal{L}_{(\mu)}\right).$$

Les composantes rectangulaires du vecteur $\sigma_{(e)}u + \mathcal{L}_{(e)}$ sont

$\sigma_{(e)}u^i + \mathfrak{L}^i_{(e)}$ $(i = 1, 2, 3)$. Il en sera de même pour le vecteur $\sigma_{(\mu)}u + \mathfrak{L}_{(\mu)}$.

13. Retour aux équations gravifiques. — Prenons la dérivée variationnelle de la fonction (80) par rapport à $g_{\alpha\beta}$ et posons

$$(96) \quad \mathfrak{T}^{(m)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\delta \mathfrak{M}^{(m)}_{*}}{\delta g^{\alpha\beta}}, \qquad \mathfrak{T}^{(m,e)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\delta \mathfrak{M}^{(m,e)}_{*}}{\delta g^{\alpha\beta}}, \qquad \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\delta \mathfrak{M}^{(e)}_{*}}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Nous aurons donc

$$(97) \qquad \mathfrak{T}_{\alpha\beta} = \mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \mathfrak{T}^{(m)}_{\alpha\beta} + \mathfrak{T}^{(m,e)}_{\alpha\beta} + \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta}.$$

Dans le cas d'un champ électromagnétique quelconque, nous posons (1)

$$(98) \qquad \boxed{\mathfrak{M}^{(e)}_{*} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta} g^{ij} \mathrm{K}_{\alpha i} \mathcal{K}^{\overline{\beta j}}_{*}.}$$

Il en résulte que

$$(99) \quad \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{i\gamma}\left(\mathrm{K}_{\alpha i}\mathcal{K}^{\overline{\beta\gamma}}_{*} + \mathrm{K}_{\beta i}\mathcal{K}^{\overline{\alpha\gamma}}_{*}\right) + \frac{\sqrt{-g}}{4}\, g_{\alpha\beta} g^{kl} g^{i\gamma} \mathrm{K}_{ki}\mathcal{K}^{l\gamma}_{*}.$$

Posons ensuite

$$(100) \qquad \mathrm{P}_{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{(m)}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}^{(m,e)}_{\alpha\beta}\,;$$

d'où

$$(101) \qquad \mathrm{T}_{\alpha\beta} = \mathrm{N} u_\alpha u_\beta + \mathrm{P}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}^{(e)}_{\alpha\beta}.$$

Il est facile de déduire de (99), (100) et (101) la valeur des composantes mixtes $\mathfrak{T}^{\beta(e)}_{\alpha}$, $\mathrm{P}^{\beta}_{\alpha}$, $\mathrm{T}^{\beta}_{\alpha}$. Le *théorème de l'impulsion et de l'énergie* (12) devient ici

$$(102) \qquad \mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{T}^{\beta}_{\alpha;\beta} \equiv \mathfrak{N}_\alpha + \mathfrak{L}_\alpha + \mathcal{F}^{(e)}_\alpha$$

où $\mathfrak{N}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_\alpha$ ont été définis respectivement en (22) et (23) en tenant compte de (100). On a, en outre,

$$(103) \quad \mathcal{F}^{(e)}_\alpha \equiv \mathfrak{T}^{\beta(e)}_{\alpha;\beta} \equiv -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_i}\Big[\sqrt{-g}\; g^{\varepsilon\nu} g^{\tau i}\left(\mathrm{K}_{\alpha\varepsilon}\mathcal{K}^{\overline{\tau\nu}}_{*} + \mathrm{K}_{\tau\varepsilon}\mathcal{K}^{\overline{\alpha\nu}}_{*}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{-g}\; g^{kl} g^{\varepsilon\nu}\frac{d}{dx_\alpha}\left(\mathrm{K}_{k\varepsilon}\mathcal{K}^{\overline{l\nu}}_{*}\right)\Big].$$

(1) Th. de Donder. *The mathematical Theory of Relativity* (Massachusetts Institute of Technoogy Cambridge. Mass. U. S. A., 1927). Voir page 77.

14. HYSTÉRÈSE ÉLECTROMAGNÉTIQUE. — Par définition, l'*hystérèse électromagnétique* est un quadri-vecteur $\mathcal{H}_\alpha^{(e)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) donné par [1]

$$\boxed{\mathcal{H}_\alpha^{(e)} \equiv \mathfrak{L}_\alpha - \mathcal{F}_\alpha^{(e)}} \tag{104}$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{L}_\alpha \equiv \mathcal{K}_*^{\overline{\alpha\beta}} \frac{d\mathcal{K}^{\beta\gamma}}{dx_\gamma} - \mathcal{K}^{\overline{\alpha\beta}} \frac{d\mathcal{K}_*^{\beta\gamma}}{dx_\gamma}. \tag{105}$$

ou, en vertu de (82) et (83),

$$\boxed{\mathfrak{L}_\alpha \equiv \mathcal{K}_*^{\overline{\alpha\beta}} \mathcal{C}^\beta - \mathcal{K}^{\overline{\alpha\beta}} \mathcal{C}_*^\beta}. \tag{106}$$

On voit que l'expression (105) est identique à (29) dans les systèmes dépourvus de polarisations électrique et magnétique de sorte que dans ce cas $\mathcal{H}_\alpha^{(e)} \equiv 0$. Il en résulte que l'*hystérèse,* telle que nous l'avons définie, *est essentiellement due à ces polarisations.*

En introduisant les notations (92) dans (106), il est facile de voir que les trois premières composantes de (106) peuvent se mettre sous forme vectorielle ; à savoir

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{L}_2 \\ \mathfrak{L}_3\end{matrix}\right\} \mathfrak{L} = [\mathcal{C}\cdot\mathbf{B}] + c\mathbf{H}^*\mathcal{C}^4 + [\mathcal{C}_*\cdot\mathbf{B}] + c\mathcal{H}\mathcal{C}_*^4. \tag{107}$$

Cette expression généralise l'expression classique de la *force de* LORENTZ (multipliée par c).

La quatrième composante peut s'écrire

$$\mathfrak{L}_4 = - c(\mathbf{H}^*\cdot\mathcal{C}) + c(\mathcal{H}\cdot\mathcal{C}_*) \tag{108}$$

ce qui est l'expression générale de l'*effet* JOULE.

15. ÉQUATION DE CONTINUITÉ. — Cette équation s'obtient en multipliant les composantes $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ par u^α et en sommant. On trouve

$$\frac{d(\mathfrak{M}u^\alpha)}{dx_\alpha} + \left(\mathfrak{L}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(e)}\right)u^\alpha = 0 \tag{109}$$

(1) Th. DE DONDER. C. R. Ac. des Sc. de Paris, 2 juillet 1928.

ou encore

$$\frac{d}{ds}\left[\mathfrak{M}\delta(x^1\cdots x^4)\right] = -\left(\mathfrak{L}_\alpha + \mathcal{F}^{(e)}_\alpha\right)u^\alpha\delta(x^1\cdots x^4). \tag{110}$$

Il est facile de transformer (109) et de le mettre sous la forme :

$$\frac{d(\mathfrak{M}u^\alpha)}{dx^\alpha} + \left(\mathfrak{T}^{\beta(m)}_{\alpha;\beta} + \mathfrak{T}^{\beta(m,e)}_{\alpha;\beta} + \mathfrak{T}^{\beta(e)}_{\alpha;\beta}\right)u^\alpha = 0. \tag{111}$$

Les expressions entre parenthèses peuvent s'intégrer par parties ; on aura par exemple

$$\mathfrak{T}^{\beta(m,e)}_{\alpha;\beta}u^\alpha = \frac{d\left(\mathfrak{T}^{\beta(m,e)}_\alpha u^\alpha\right)}{dx_\beta} + \mathcal{K}^{(m,e)} \tag{112}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{(m,e)} \equiv & -\frac{1}{4}\left(\mathfrak{T}^{\beta(m,e)}_\alpha + \mathfrak{T}^{\alpha(m,e)}_\beta\right)\left(\frac{du^\alpha}{dx_\beta} + \frac{du^\beta}{dx_\alpha}\right) \\ & -\frac{1}{4}\left(\mathfrak{T}^{\beta(m,e)}_\alpha - \mathfrak{T}^{\alpha(m,e)}_\beta\right)\left(\frac{du^\alpha}{dx_\beta} - \frac{du^\beta}{dx_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}_{(m,e)}.\end{aligned} \tag{113}$$

On aura des expressions analogues pour $\mathcal{K}^{(m)}$ et $\mathcal{K}^{(e)}$.

Grâce aux formules précédentes, l'équation de continuité peut donc enfin s'écrire

$$\frac{d\left[\left(\mathfrak{M} + \mathfrak{T}^{\alpha(m)}_\beta + \mathfrak{T}^{\alpha(m,e)}_\beta + \mathfrak{T}^{\alpha(e)}_\beta\right)u^\beta\right]}{dx^\alpha} + \mathcal{K} = 0 \tag{114}$$

où

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{(m)} + \mathcal{K}^{(m,e)} + \mathcal{K}^{(e)}. \tag{115}$$

16. Principe fondamental de l'électromagnétostriction. — Nous dirons que $\mathcal{K}^{(m,e)}$ défini par (113) est la *puissance* (par unité de volume) *de la striction*. En généralisant une hypothèse de la théorie classique de l'électromagnétostriction, nous admettrons [1] qu'on a

$$\boxed{\mathcal{K}^{(m,e)} = \mathcal{H}^{(e)}_\alpha u^\alpha} \tag{116}$$

Autrement dit : *la puissance de striction est égale à la puissance d'hystérèse.*

(1) *Loc. cit.*, ci-dessus.

Le principe (116) peut encore s'écrire

$$(117)\qquad \mathcal{K}^{(m,e)} = \left(\mathcal{H}_i^{(e)} v^i + \mathcal{H}_4^{(e)}\right) u^4, \qquad v^i \equiv \frac{dx_i}{dt}\ (i = 1, 2, 3).$$

En **assimulant** u^4 à $\frac{1}{c}$, on aura, en première approximation,

$$(118)\qquad \mathrm{K}^{(m,e)} = \frac{1}{c}\left(\mathrm{H}_i^{(e)} v^i + \mathrm{H}_4^{(e)}\right).$$

D'autre part, grâce aux notations (92), on peut écrire $\mathrm{H}_4^{(e)}$, défini par (104), sous la forme :

$$(119)\qquad \mathrm{H}_4^{(e)} \equiv \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{H}^* \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathrm{B}\,\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial t}\right) + \left(\mathcal{H}\,\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathcal{B}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)\right]$$
$$+ \frac{c}{2}\,\mathrm{div.}\,([\mathrm{H}^*\cdot\mathcal{H}] - [\mathrm{B}\cdot\mathcal{B}]).$$

Dans le cas de déformations oscillantes du corps considéré, nous **admettrons qu'on ait le *bilan*** :

$$(120)\qquad \mathrm{H}_i^{(e)} v^i + \frac{c}{2}\,\mathrm{div.}\,([\mathrm{H}^*\cdot\mathcal{H}] - [\mathrm{B}\cdot\mathcal{B}]) = 0.$$

Nous pourrons alors écrire finalement le principe fondamental (116) sous la forme :

$$(121)\qquad \mathrm{K}^{(m,e)} = \frac{1}{2c}\left[\left(\mathrm{H}^*\cdot\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathrm{B}\cdot\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial t}\right) + \left(\mathcal{H}\cdot\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathcal{B}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)\right].$$

17. CALCUL DE $\mathrm{K}^{(m,e)}$ EN FONCTION DES DÉFORMATIONS. — Posons

$$(122)\qquad x_i = x_i^0 + \lambda_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \qquad i = 1, 2, 3$$

où λ_i représente le déplacement infiniment petit à partir du point initial x_i^0 ($i = 1, 2, 3$) ; pour $t = 0$, on a $x_i = x_i^0$. Le corps considéré *dans son ensemble* est donc *au repos* par rapport au trièdre (x_1, x_2, x_3).

Il en résulte que

$$(123)\qquad v^i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}.$$

Posons

$$\frac{d\lambda_i}{dt} \equiv \dot{\lambda}_i\ ; \qquad \text{d'où} \qquad v^i \equiv \dot{\lambda}_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Adoptons aussi les notations classiques

$$
(124)\quad \left\{ \begin{array}{l} x_x = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x^0}; \quad y_y = \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y_0}; \quad z_z = \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial z^0}; \\ x_y = y_x = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial y^0} + \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x^0}; \quad x_z = z_x = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial z^0} + \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial x^0}; \quad y_z = z_y = \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial z^0} + \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial y^0} \\ x_t = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t}; \quad y_t = \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t}; \quad z_t = \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial t} \end{array} \right.
$$

et

$$
(125)\quad \omega^1 = \omega_x = \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z}; \quad \omega^2 = \omega_y = \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}; \quad \omega^3 = \omega_z = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}.
$$

Il est bon de se rappeler qu'à un infiniment petit près, on peut identifier x_i^0 avec x_i (i = 1, 2, 3) ; nous pouvons donc, dans (80), remplacer les x_i^0 par les x_i. Il en résulte que les expressions qui figurent dans (113) deviennent

$$
(126)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial v^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial x} = \dot{x}_x; \quad \dfrac{\partial v^2}{\partial x_2} = \dot{y}_y; \quad \dfrac{\partial v^3}{\partial x_3} = \dot{z}_z \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v^2}{\partial x_1} = \dot{x}_y; \quad \dfrac{\partial v^1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v^3}{\partial x_1} = \dot{x}_z; \quad \dfrac{\partial v^2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v^3}{\partial x_2} = \dot{y}_z \end{array} \right.
$$

et

$$
(127)\quad \dot{\omega}_x = \frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}; \quad \dot{\omega}_y = \frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}; \quad \dot{\omega}_z = \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}
$$

le point au-dessus des x_x, y_y, ... indiquant une dérivée partielle par rapport à t.

La *puissance de striction* $K^{(m,e)}$ peut donc s'écrire (113), dans cette même approximation $\left(u^4 \backsim \frac{1}{c}\right)$

$$
(128)\quad K^{(m,e)} \equiv -\frac{1}{c} \left[\begin{array}{l} T_1^{1(m,e)} \dot{x}_x + T_2^{2(m,e)} \dot{y}_y + T_3^{3(m,e)} \dot{z}_z \\ + \frac{1}{2}(T_1^{2(m,e)} + T_2^{1(m,e)}) \dot{x}_y + \frac{1}{2}(T_2^{3(m,e)} + T_3^{2(m,e)}) \dot{y}_z + \frac{1}{2}(T_3^{1(m,e)} + T_1^{3(m,e)}) \dot{z}_x \\ - \frac{1}{2}(T_1^{2(m,e)} - T_2^{1(m,e)}) \dot{\omega}_z - \frac{1}{2}(T_2^{3(m,e)} - T_3^{2(m,e)}) \dot{\omega}_x - \frac{1}{2}(T_3^{1(m,e)} - T_1^{3(m,e)}) \dot{\omega}_y \\ + T_1^{4(m,e)} \dot{x}_t + T_2^{4(m,e)} \dot{y}_t + T_3^{4(m,e)} \dot{z}_t. \end{array} \right]
$$

18. CALCUL DU SECOND MEMBRE DE (121). — Retournons au second membre de (121) et admettons qu'on ait

$$
(129)\quad H_i = \sum_j \varepsilon'_{ij} B_j; \quad \mathcal{H}_i = \sum_j \mu'_{ij} \mathcal{B}_j.
$$

Posons

$$\text{(130)} \qquad W = T_4^{4(e)}.$$

Donc W représente la densité de l'énergie électromagnétique l'ocalisée dans le volume v

$$\text{(131)} \qquad \int_v W\delta v \equiv \frac{1}{2}\int_v [(\mathrm{H}\cdot\mathrm{B}) + (\mathcal{H}\cdot\mathcal{B})]\delta v$$
$$= \frac{1}{2}\int_v \sum_i \sum_j \varepsilon'_{ij}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j + \mu'_{ij}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j)\delta v.$$

Le second membre de (121) pourra donc s'écrire

$$\text{(132)} \qquad -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\mathrm{B}\mathcal{B}}\delta v$$

où les indices B,$\mathcal{B}$ servent à rappeler que la dérivée partielle par rapport à t se fait en laissant les B_i et les $\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2, 3$) constants ; on aura donc

$$\text{(133)} \qquad -\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\mathrm{B}\mathcal{B}}\delta v = -\frac{1}{2c}\int_v \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial t}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial t}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j\right)\delta v.$$

Supposons que les coefficients ε'_{ij} et μ'_{ij} soient des fonctions *des déformations linéaires et angulaires* $x_x \cdots z_t$, des *rotations* ω^i et des vitesses v^i. Autrement dit, la densité W de l'énergie électromagnétique dépend explicitement de

$$\text{(134)} \qquad \begin{cases} x_x;\ y_y,\ z_z & x_y,\ y_z,\ z_x \\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z & x_t,\ y_t,\ z_t. \end{cases}$$

Le second membre de (121) pourra donc s'écrire

$$\text{(135)} \qquad -\frac{1}{c}\int_v\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\delta v \equiv \int_v \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{x}_x + \left(\frac{\partial W}{\partial y_y}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{y}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial z_z}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{z}_z \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{x}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial y_z}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{y}_z + \left(\frac{\partial W}{\partial z_x}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{z}_x \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_x}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{\omega}_x + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_y}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{\omega}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_z}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{\omega}_z \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial x_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{x}_t + \left(\frac{\partial W}{\partial y_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{y}_t + \left(\frac{\partial W}{\partial z_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}\dot{z}_t \end{bmatrix}\delta v.$$

19. Tenseur de l'électrostriction.

$$(136)\qquad \begin{cases} T_1^{1(m,e)} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_2^{2(m,e)} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_y}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_3^{3(m,e)} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$(137)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(T_1^{2(m,e)} + T_2^{1(m,e)}\right) = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_y}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_2^{3(m,e)} + T_3^{2(m,e)}\right) = \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_3^{1(m,e)} + T_1^{3(m,e)}\right) = \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_x}\right)_{B,\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$(138)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(T_1^{2(m,e)} - T_2^{1(m,e)}\right) = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \omega_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_2^{3(m,e)} - T_3^{2(m,e)}\right) = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \omega_x}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_3^{1(m,e)} - T_1^{3(m,e)}\right) = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \omega_y}\right)_{B,\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$(139)\qquad \begin{cases} T_1^{4(m,e)} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_t}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_2^{4(m,e)} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_t}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_3^{4(m,e)} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_t}\right)_{B,\mathcal{B}}. \end{cases}$$

Dans ces tableaux, ne figurent pas encore

$$(140)\qquad T_4^{1(m,e)},\qquad T_4^{2(m,e)},\qquad T_4^{3(m,e)},\qquad T_4^{4(m,e)}.$$

Cependant, remarquons que l'on a d'une façon générale :

$$(141)\qquad T_{(m,e)}^{\alpha\beta} \equiv T_{(m,e)}^{\alpha\beta} \equiv \sum_{\gamma} g^{\gamma\beta} T_{\gamma}^{\alpha(m,e)} \equiv \sum_{\gamma} g^{\gamma\alpha} T_{\gamma}^{\beta(m,e)}.$$

Dans un champ de Minkowski, ces relations deviennent

$$(142)\qquad \begin{cases} T_{(m,e)}^{ab} \equiv T_{(m,e)}^{ba} \equiv -T_b^{a(m,e)} = -T_a^{b(m,e)} \qquad a, b = 1, 2, 3 \\ T_{(m,e)}^{a4} \equiv T_{(m,e)}^{4a} \equiv \dfrac{1}{c^2} T_4^{a(m,e)} = -T_a^{4(m,e)} \\ T_{(m,e)}^{44} \equiv \dfrac{1}{c^2} T_4^{4(m,e)}. \end{cases}$$

Il résulte de (142) qu'ici les $T_a^{b(m,e)}$ sont symétriques ($a, b = 1, 2, 3$); donc, en vertu de (138), la fonction W ne renfermera pas $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ explicitement. Il résulte de (142), que les $T_4^{a(m,e)}$ ne diffèrent de $T_a^{4(m,e)}$ fournis par (139), que par le facteur ($- c^2$).

Dans un champ de MINKOWSKI, nous avons donc calculé toutes les composantes du tenseur $T_\alpha^{\beta(m,e)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$), sauf $T_4^{4(m,e)}$; on sait que $T_4^{4(m,e)}$ a les dimensions de l'énergie par unité de volume ; il y aura donc lieu de l'égaler à la densité de l'énergie élastique (de déformation). On pourrait aussi reprendre toutes ces théories dans l'espace-temps grâce aux corps parfaits définis dans notre *Théorie des champs gravifiques* (*loc. cit. éq.* 328).

20. TENSIONS DE RADIATIONS. — Envisageons, avec Léon BRILLOUIN [1], le cas d'une *onde électromagnétique* se propageant suivant l'axe des x ; soit H_y (ou H_y^*) le champ électrique, $\mathcal{H}_z$ le champ magnétique. On aura, en vertu de (130) et de la définition d'une onde électromagnétique

$$-W = B \cdot H = \mathcal{B} \cdot \mathcal{H}. \tag{143}$$

La vitesse de l'onde sera donc

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{144}$$

où ε et μ sont respectivement le pouvoir inducteur spécifique et la perméabilité magnétique du système considéré. On a

$$\frac{\partial \log D}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(x_x + y_y + z_z) \tag{145}$$

où D représente la densité massique ; d'où, pour un *corps isotrope*

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{B,\mathcal{B}} = \left(\frac{\partial W}{\partial y_y}\right)_{B,\mathcal{B}} = \left(\frac{\partial W}{\partial z_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ = \left(\frac{\partial W}{\partial (x_x + y_y + z_z)}\right)_{B,\mathcal{B}} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \log D}\right)_{B,\mathcal{B}}.\end{aligned} \tag{146}$$

(1) Léon BRILLOUIN. Les tensions de Radiation ; leur interprétation en Mécanique classique et en relativité (J. de Ph., série 6, t. VI, nº 11, pp. 337-353).

En vertu de (143) et (144), on obtient aisément

$$(147) \qquad = - \mathrm{W} \left(\frac{\partial \log \mathbf{V}}{\partial \log \mathrm{D}} \right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}}.$$

En formant grâce aux formules (136 à 139) et aux formules (142), le tenseur, à la fois électromagnétique et de striction

$$(148) \qquad \| \mathrm{T}^{\alpha\beta(e)} + \mathrm{T}^{\alpha\beta(m,e)} \|$$

on obtient enfin le *tenseur de* L. BRILLOUIN *complété*

$$(149) \quad \left| \begin{array}{cccc} \mathrm{W} - \mathrm{W}\dfrac{\partial \log \mathbf{V}}{\partial \log \mathrm{D}} & 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{VW}}{c^2}\left[\dfrac{1+\left(\frac{c}{\mathrm{V}}\right)^2}{2}\right] + \left(\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}} \\ 0 & -\mathrm{W}\dfrac{\partial \log \mathbf{V}}{\partial \log \mathrm{D}} & 0 & \left(\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}} \\ 0 & 0 & -\mathrm{W}\dfrac{\partial \log \mathbf{V}}{\partial \log \mathrm{D}} & \left(\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial z_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}} \\ -\dfrac{\mathrm{VW}}{c^2}\left[\dfrac{1+\left(\frac{c}{\mathrm{V}}\right)^2}{2}\right] + \left(\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}} & \left(\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}} & \left(\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial z_t}\right)_{\mathrm{B},\mathcal{B}} & -\dfrac{1}{c^2}[\mathrm{W} + \mathrm{P}^{44(m,e)}]. \end{array} \right|$$

21. FORMULE DE HELMHOLTZ-LIPPMAN (Champ de MINKOWSKI). — Considérons le cas de corps massiques *parfaits, isotropes* et *au repos* et supposons *négligeables la variation de la densité massique dans le temps,* ainsi que les *tensions de* MAXWELL. D'autre part, soit $f(\mathrm{D})$, l'expression de la pression en fonction de la densité. En tenant compte des formules que nous avons trouvées pour le tenseur de l'électrostriction, on obtient très facilement

$$(150) \qquad \left(\frac{\partial f(\mathrm{D})}{\partial \mathrm{D}}\right)_0 (\mathrm{D} - \mathrm{D}_0) = \mathrm{W}_e \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log \mathrm{D}} + \mathrm{W}_\mu \frac{\partial \log \mu}{\partial \log \mathrm{D}}$$

où

$$(151) \qquad \mathrm{W}_e = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\cdot\mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W}_\mu = \frac{1}{2}\,\mathcal{B}\cdot\mathcal{H}.$$

Thermodynamique relativiste

22. PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE. — Nous écrivons le premier principe sous la forme (1)

$$\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{U}\delta(x_1\cdots x_4)\right) = \mathfrak{Q}\delta(x_1\cdots x_4) - \mathfrak{K}\delta(x_1\cdots x_4) \tag{152}$$

ou sous la forme équivalente

$$\sum_\alpha \frac{\partial\left(\mathfrak{U}u^\alpha\right)}{\partial x^\alpha} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K}. \tag{153}$$

Le symbole $\mathfrak{U}$ est le facteur de densité d'énergie *interne* du système ; $\mathfrak{Q}$ est un facteur d'apports calorifiques à ce système. Un élément de l'espace-temps est représenté par $\delta(x^1\cdots x^4)$. Le symbole $\mathfrak{K}$ a été défini en (115). Voici les dimensions de ces symboles, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{Q}\delta x\delta y\delta z\delta t \equiv \text{énergie}$$
$$\mathfrak{K}\delta x\delta y\delta z\delta t \equiv \text{énergie}$$
$$\mathfrak{U}\delta x\delta y\delta z\delta t \equiv \text{énergie} \times \text{longueur.}$$

Utilisons les *coordonnées rectangulaires dextrogyres*. La relation (153) s'écrira

$$\frac{\partial\left(\mathfrak{U}\mathrm{V}^{-1}v^\alpha\right)}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K} \tag{154}$$

où

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} \equiv \frac{ds}{dt}. \tag{155}$$

Multiplions les deux membres de (154) par dv défini par $dv = \delta x\delta y\delta z$; d'où en vertu de la théorie des invariants intégraux.

$$\frac{d}{dt}\int_v \mathfrak{U}\mathrm{V}^{-1}\delta v = \int_v \mathfrak{Q}\delta v - \int_v \mathfrak{K}\delta v. \tag{156}$$

Posons

$$\overline{\mathrm{V}^{-1}}\int_v \mathfrak{U}\delta v \equiv \int_v \mathfrak{U}\mathrm{V}^{-1}\delta v \tag{157}$$

(1) Th. DE DONDER. Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, t. **186**, pp. 1599-1601, 1928, et t. **187**, pp. 28-30, 1928.

où $\overline{V^{-1}}$ représente la moyenne de V^{-1} prise dans tout le système considéré.

Posons de même

$$(158) \qquad \left\{ \begin{aligned} & U \equiv \frac{1}{c} \int_v \mathfrak{U} \delta v \\ & \frac{dQ}{dt} \equiv \int_v \frac{V}{c} \mathfrak{Q} \delta v \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{V}}{c} \int_v \mathfrak{Q} \delta v \end{aligned} \right.$$

en représentant par $\overline{V}$ la moyenne de V prise dans le système considéré.

Alors l'équation (156) s'écrira

$$(159) \qquad \frac{d}{dt}\left[c\overline{V^{-1}}U\right] = \frac{dQ}{dt}\frac{c}{\overline{V}} - \int_v \mathfrak{K}\delta v.$$

Nous dirons que U est l'énergie interne du corps à l'instant t et que dQ est la chaleur reçue par ce corps pendant dt.

Dans le cas de corps massiques parfaits, il est facile, en tenant compte de (115) d'écrire (159) sous la forme

$$(160) \qquad \frac{d}{dt}\left[c\overline{V^{-1}}U\right] = \frac{dQ}{dt}\frac{c}{\overline{V}} - \overline{p}c\overline{V^{-1}} \oint_\sigma v_\nu \delta\sigma + cp \frac{\partial u^4}{\partial t}\delta v$$

où V_ν représente la composante suivant la demi-normale ν extérieure aux corps en un point de l'élément $\delta\sigma$ pris sur la surface fermée σ limitant ce corps.

Or, on a évidemment

$$(161) \qquad \oint_\sigma v_\nu \delta\sigma \equiv \frac{dv}{dt}.$$

Nous retrouvons donc en première approximation, le *premier principe de la thermodynamique classique* :

$$(162) \qquad \boxed{d\mathfrak{U} = dQ - \overline{p}\,\delta v.}$$

23. Deuxième principe de la Thermodynamique. — En relativité générale, nous écrirons ce second principe comme suit :

$$(164) \qquad \frac{d}{ds}[\mathcal{S}\delta(x^1 \cdots x^4)] = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*}{T^*}\delta(x^1 \cdots x^4)$$

où $\mathcal{S}$ est le facteur de densité *entropique*; où $\mathfrak{Q}^*$ est le facteur (positif) d'apport de chaleur *non compensée* (ou de viscosité physico-chimique) ; où enfin T^* est le scalaire (positif) *thermique*.

De (164), on déduit que

$$\frac{\partial(\mathcal{S}u^\alpha)}{\partial x_\alpha} = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*}{T^*}. \tag{165}$$

Retournons à l'image euclidienne ; on aura, comme au (156),

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{S}V^{-1}\delta v = \frac{1}{\overline{T^*}}\int_v (\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*)\delta v \tag{166}$$

où $\overline{T^*}$ est la moyenne de T^* dans le système considéré.

Posons maintenant :

$$S = \int_v \mathcal{S}V^{-1}\delta v \tag{167}$$

et, comme au (158)

$$\frac{dQ^*}{dt} \equiv \frac{\overline{V}}{c}\int_v \mathfrak{Q}^*\delta v. \tag{168}$$

Alors l'équation (166) deviendra

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c}{\overline{T^*}\,\overline{V}}\left(\frac{dQ}{dt} + \frac{dQ^*}{dt}\right). \tag{169}$$

Posons

$$T \equiv \overline{T^*}\,\frac{\overline{V}}{c} \tag{170}$$

d'où l'équation différentielle exprimant le *second principe* de la thermodynamique *classique*

$$\boxed{dS = \frac{dQ + dQ^*}{T}}. \tag{171}$$

24. Thermodynamique des systèmes électromagnétiques doués d'hystérèse et animés d'un mouvement quelconque. — Utilisons le premier principe de la Thermodynamique en substituant (115) dans (152) ; d'où [1]

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{U}\delta(x^1\cdots x^4)] = \mathfrak{Q}\delta(x^1\cdots x^4) - \left[\mathcal{K}^{(m)} + \mathcal{H}^{(e)}_\alpha u^\alpha + \mathcal{K}^{(e)}\right]\delta(x^1\cdots x^4) \tag{172}$$

(1) *Addenda.* Pour compléter cette théorie énergétique, il y aura lieu de poser

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(m)} + \mathfrak{U}^{(m,e)} + \mathfrak{U}^{(e)}$$

et d'admettre que

$$\mathfrak{U}^{(e)} = \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta.$$

Utilisons maintenant le second principe de la Thermodynamique en substituant (172) dans (164) ; d'où

$$(173)\quad \frac{d}{ds}[\mathcal{U}\delta(x^1\cdots x^4)] - \mathrm{T}^* \frac{d}{ds}[\mathcal{S}\delta(x^1\cdots x^4)] = \\ - \left[\mathcal{K}^{(m)} + \mathcal{H}^{(e)}_\alpha u^\alpha + \mathcal{K}^{(e)}\right]\delta(x^1\cdots x^4) - \mathcal{Q}^*\delta(x^1\cdots x^4).$$

On pourrait faire apparaître dans cette relation, la fonction $\mathcal{U} - \mathrm{T}^*\mathcal{S}$ qui généraliserait l'*énergie libre.*

Mécanique ondulatoire de Dirac généralisée

25. ÉQUATIONS GRAVIFIQUES ET ÉLECTRONIQUES. — Présentons sous une forme tout à fait synthétique l'étude des systèmes électromagnétiques les plus généraux que nous avons considéré au début du présent travail. A cet effet, rappelons d'abord les *dix équations gravifiques* ; à savoir

$$(174)\quad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g - \mathfrak{N}\mathrm{W}^2 + \mathfrak{M}^{(m)}_* + \mathfrak{M}^{(m,e)}_* + \mathfrak{M}^{(e)}_*\right)}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0$$

où les fonctions caractéristiques $\mathfrak{M}^g$, etc. écrites ci-dessus ont été définies précédemment.

Passons maintenant aux quatre *équations électroniques* ou *maxwelliennes* dont nous avons indiqué la généralisation dans (82) et (83), et supposons qu'il n'y ait pas de courant magnétique, c'est-à-dire que $\mathrm{C}^\alpha_* = 0$. Dans ce cas, on pourra écrire

$$(175)\quad \mathcal{K}^{\overline{\alpha\beta}}_* = \Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\beta,\alpha}.$$

Autrement dit, ces quantités dérivent d'un potentiel vecteur électromagnétique $\Phi_1\cdots\Phi_4$. Nous allons aussi écrire ces équations maxwelliennes sous forme de dérivées variationnelles ; à savoir :

$$(176)\quad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g - \mathfrak{N}\mathrm{W}^2 + \mathfrak{M}^{(m)}_* + \mathfrak{M}^{(m,e)}_* + \mathfrak{M}^{(e)}_*\right)}{\delta\Phi_\alpha} = 0.$$

Précisons la manière dont la dérivée variationnelle par rapport à Φ_α doit être prise dans (176) pour qu'on obtienne les équations (82) et (83) susmentionnées. Pour cela, reportons-nous à $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)}$ dont la valeur est explicitement donnée en (98). Dans cette expression, nous considérons les $K_{\alpha i}$ comme fonctions *uniquement* de $x_1 ... x_4$ (et non de Φ_α) ; les variations de ces fonctions par rapport aux Φ_α seront donc nulles.

Retournons à (176). Nous savons que $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}W^2$, $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m)}$ ne dépendent pas des Φ_α.

Posons

$$\frac{\delta \mathfrak{M}^{(m,e)}}{\delta \Phi_\alpha} = \mathcal{C}^\alpha_{(e)} \tag{177}$$

où $\mathcal{C}^\alpha_{(e)}$ représente le courant électrique (total).

Les dix équations *gravifiques* (174) peuvent alors s'écrire explicitement

$$-\frac{1}{2}(a + b\mathrm{C})g_{\alpha\beta} + b\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathrm{N}u_\alpha u_\beta + \mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}^{(e)}_{\alpha\beta} \tag{178}$$

et les quatre équations *maxwelliennes* s'écriront explicitement, grâce à (177),

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathcal{C}^\alpha_{(e)}. \tag{179}$$

26. ÉQUATIONS PHOTONIQUES. — Nous admettons que les équations du *champ photonique* sont de la même forme qjue les équations électroniques (maxwelliennes) données par (82) et (83) ; posons donc pour ces équations photoniques [1] :

$$\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}}{dx_\beta} = \mathcal{C}^\alpha_{(ph)} \tag{180}$$

$$\frac{d\underset{*}{\mathfrak{U}}^{\alpha\beta}}{dx_\beta} = \mathcal{C}^\alpha_{\times(ph)} \tag{181}$$

où $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ représente *la force photonique* et $\underset{*}{\mathfrak{U}}^{\alpha\beta}$ *la force dualistique photonique.* Ces tenseurs antisymétriques sont donc les analogues de $\mathcal{K}^{\alpha\beta}$ et $\underset{*}{\mathcal{K}}^{\alpha\beta}$. Les symboles $\mathcal{C}^\alpha_{(ph)}$ et $\mathcal{C}^\alpha_{\times(ph)}$ sont les courants *totaux* dans le champ photonique considéré.

(1) Th. DE DONDER. *Le champ photonique* Bull. Ac. Roy. Belg., 2 juin 1928, pp. 307-312.

Toutes les grandeurs qui figurent dans ce paragraphe seront considérés comme étant *complexes* ; elles renferment donc chacune une partie réelle et une partie imaginaire pure.

Pour établir *un lien* entre le champ photonique et le champ électronique (de Maxwell), posons (1) :

(182) $$\mathcal{C}^{\alpha}_{(ph)} \equiv x\Phi_{\beta}\mathfrak{U}^{\alpha\beta} + \mathcal{A}^{\alpha}$$

(183) $$\mathcal{C}^{\alpha}_{\times(ph)} \equiv x\Phi_{\beta}\mathfrak{U}^{\alpha\beta}_{*} + \mathcal{A}^{\alpha}_{\times}.$$

Donc les $\mathcal{A}^{\alpha}$ et $\mathcal{A}^{\alpha}_{\times}$ définissent les courants photoniques ***diminués*** des courants d'interaction entre le champ photonique et électrique.

En substituant (182) et (183) dans (180) et (181), on aura une nouvelle forme des équations photoniques :

(184) $$\left[\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}}\right] = \mathcal{A}^{\alpha}$$

(185) $$\left[\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}_{*}}{dx_{\beta}}\right] = \mathcal{A}^{\alpha}_{\times}$$

où l'on a posé

(186) $$\left[\frac{d}{dx_{\beta}}\right] \equiv \frac{d}{dx_{\beta}} - \varkappa\Phi_{\beta}.$$

On a posé

(187) $$\varkappa = \frac{2i\pi ec}{h}.$$

Par analogie avec la manière d'exprimer les forces électriques et magnétiques au moyen des potentiels Φ_{α} électromagnétiques, posons ici

(188) $$\chi U_{\mu\nu} = [P_{\mu\nu}] + [Q^{*}_{\mu\nu}]$$

(189) $$\chi U^{*}_{\mu\nu} = [P^{*}_{\mu\nu}] - [Q_{\mu\nu}]$$

où

(190) $$[P_{\mu\nu}] = \left[\frac{dP_{\nu}}{dx_{\mu}} - \frac{dP_{\mu}}{dx_{\nu}}\right]; \qquad [Q_{\mu\nu}] = \left[\frac{dQ_{\nu}}{dx_{\mu}} - \frac{dQ_{\mu}}{dx_{\nu}}\right]$$

où les *crochets* figurant dans les seconds membres de (190) doivent être appliqués à chacun des termes qu'ils renferment ; ils ont la même signification qu'en (186). Le symbole $Q^*_{\mu\nu}$ signifie qu'il faut prendre la dualistique de $Q_{\mu\nu}$. D'autre part, les P_α et Q_α sont les *potentiels photoniques* (1).

On a posé

$$\chi \equiv \frac{2i\pi mc}{h}. \tag{191}$$

Toujours par analogie, avec le champ électronique maxwellien, écrivons les équations complémentaires photoniques ; à savoir

$$\left[\frac{d\mathfrak{P}^\alpha}{dx_\alpha}\right] = \chi \mathcal{S} \tag{192}$$

$$\left[\frac{d\mathfrak{Q}^\alpha}{dx_\alpha}\right] = x\mathcal{B} \tag{193}$$

où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ sont les *potentiels de l'éther* (2).

Diminuons maintenant les courants photoniques $\mathcal{A}^\alpha$ et $\mathcal{A}^\alpha_\times$ des gradients (contravariants) de ces potentiels S et B de l'éther ; d'où

$$\mathfrak{D}^\alpha \equiv \mathcal{A}^\alpha - \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \left[\frac{dS}{dx_\beta}\right] \tag{194}$$

$$\mathfrak{D}^\alpha_\times \equiv \mathcal{A}^\alpha_\times - \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \left[\frac{dB}{dx_\beta}\right]. \tag{195}$$

Nous dirons que $\mathfrak{D}^\alpha$ et $\mathfrak{D}^\alpha_\times$ sont les *courants photoniques proprement dits*.

Remarquons qu'en vertu de (180) et (181), on aura les théorèmes de *conservation photonique*.

$$\frac{dC^\alpha_{(ph)}}{dx_\alpha} = 0 \tag{196}$$

$$\frac{dC^\alpha_{\times(ph)}}{dx_\alpha} = 0. \tag{197}$$

(1) J. M. WHITTAKER. Proc. Roy. Soc., n° 788, p. 543 (3 décembre 192).
(2) Th. DE DONDER, *loc. cit.* (2 juin 1928).

27. PRINCIPE DE CORRESPONDANCE POUR LES SYSTÈMES ONDULATOIRES. — Introduisons maintenant la fonction caractéristique

$$\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}. \tag{198}$$

Si nous comparons cette fonction à celle qui figure dans (174), on voit qu'on a remplacé dans cette dernière tous les termes massiques $\left[-\mathfrak{N}W^2 + \mathfrak{M}_*^{(m)} + \mathfrak{M}_*^{(m,e)}\right]$ par le seul terme photonique $\mathfrak{M}^{(ph)}$. Nous allons maintenant définir la fonction $\mathfrak{M}^{(ph)}$ au moyen des potentiels photoniques P_μ et Q_μ et des potentiels électromagnétiques Φ_α. Nous écrivons, pour simplifier

$$\xi_\mu = \varkappa\Phi_\mu. \tag{199}$$

Posons, avec J. M. Whittaker

$$\mathfrak{M}^{(ph)} \equiv \sqrt{-g}\left\{ U^{\mu\nu}\overline{U}_{\mu\nu} + 2(S\overline{S} - B\overline{B}) - 2(P^\mu\overline{P_\mu} - Q^\mu\overline{Q_\mu})\right\} \tag{200}$$

les tirets figurant dans (200) indiquant qu'il faut prendre l'imaginaire *conjuguée* de l'expression qui en est affectée.

Prenons les dérivées variationnelles de $\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}$ par rapport à $g^{\alpha\beta}$, à Φ_α et aux potentiels photoniques P_μ, Q_μ, $\overline{P_\mu}$, $\overline{Q_\mu}$. Nous aurons alors les *équations gravifiques de la mécanique ondulatoire* :

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \tag{201}$$

les équations électroniques ou maxwelliennes de la mécanique ondulatoire :

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta\Phi_\alpha} = 0 \tag{202}$$

et enfin les *équations photoniques de la mécanique ondulatoire* :

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta P_\mu} = 0\,; \qquad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta Q_\mu} = 0 \tag{203}$$

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta\overline{P_\mu}} = 0\,; \qquad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}_*^{(e)} + \mathfrak{M}^{(pp)}\right)}{\delta\overline{Q_\mu}} = 0. \tag{204}$$

En effectuant les calculs indiqués dans (201), nous obtenons explicitement

$$(205) \qquad -\frac{1}{2}(a + bC)g^{\alpha\beta} + b\mathcal{C}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(e)} + M^{\alpha\beta}$$

où $T^{\alpha\beta}_{(e)}$ est l'expression contravariante de (99) et où l'on a posé

$$(206) \quad M^{\alpha\beta} \equiv -2L^{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{2}L - P^{\mu}\overline{P_{\mu}} + Q^{\mu}\overline{Q_{\mu}}\right)g^{\alpha\beta} + 2N^{\alpha\beta} - 2O^{\alpha\beta} + 2P^{\alpha}\overline{P^{\beta}} - 2Q^{\alpha}\overline{Q^{\beta}}.$$

Dans cette expression les symboles $L^{\mu\nu}$, L, $N^{\mu\nu}$, $O^{\mu\nu}$, sont définis par les relations suivantes :

$$(207) \qquad gL^{k\alpha\lambda\beta} \equiv \frac{h^2}{4\pi^2 m^2 c^4}\left(-[P_{\overline{\alpha\beta}}][\overline{P}_{\overline{k\lambda}}] + [\overline{Q_{\alpha\beta}}][Q_{\overline{k\lambda}}]\right)$$

$$(208) \qquad L^{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}L^{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad L = g_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}$$

$$(209) \quad N^{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{1}{2}\overline{P^{\mu}}g^{\alpha\beta} - \overline{P^{\beta}}g^{\alpha\mu}\right)\left(\frac{1}{\chi}\left[\frac{dS}{dx_{\mu}}\right]\right) + \text{conjuguée} - \frac{1}{2}S\overline{S}g^{\alpha\beta}$$

$$(210) \quad O^{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{1}{2}\overline{Q^{\mu}}g^{\alpha\beta} - \overline{Q^{\beta}}g^{\alpha\mu}\right)\left(\frac{1}{\chi}\left[\frac{dB}{dx_{\mu}}\right]\right) + \text{conjuguée} - \frac{1}{2}B\overline{B}g^{\alpha\beta}.$$

En effectuant les calculs indiqués dans (202) nous obtenons explicitement :

$$(211) \quad \frac{d\mathcal{K}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}} = -\frac{e\sqrt{-g}}{mc^3}\left(U^{\alpha\beta}\overline{P_{\beta}} + U_{*}^{\alpha\beta}\overline{Q_{\beta}} + S\overline{P^{\alpha}} - B\overline{Q^{\alpha}} + \text{conjuguée}\right).$$

Enfin, en effectuant les calculs indiqués dans (203) et (204), nous obtenons les relations suivantes ainsi que les conjuguées :

$$(212) \qquad \left[\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}}\right] = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{dS}{dx_{\beta}}\right] - \chi\mathfrak{P}^{\alpha}$$

$$(213) \qquad \left[\frac{d\mathfrak{U}_{*}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}}\right] = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{dB}{dx_{\beta}}\right] - \chi\mathfrak{Q}^{\alpha}.$$

En *identifiant* (1) *les équations* (178) et (205), (179) et (211), (184) avec les équations (212), (185) et (213), on obtient les équations qui

(1) J'ai indiqué cette méthode d'identification pour trouver le principe correspondance. dans mes travaux antérieurs (voir ma note parue dans Bull. Ac. R. des Belg. Cl. des Sciences, 5e série, t. XIII. Séance du 2 août 1927).

exprimment le *principe de correspondance* en mécanique ondulatoire

Les équations (178) et (205) donnent

$$\boxed{Nu^{\alpha}u^{\beta} + P^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta}} \tag{214}$$

où $M^{\alpha\beta}$ est donné par (206)

Les équations (179) et (211) donnent

$$\boxed{\mathcal{C}^{\alpha}_{(e)} = -\frac{e\sqrt{-g}}{mc^3}\left(U^{\alpha\beta}\overline{P_{\beta}} + \underset{*}{U}^{\alpha\beta}\overline{Q_{\beta}} + S\overline{P^{\alpha}} - B\overline{Q^{\alpha}} + \text{conjuguée}\right)} \tag{215}$$

Enfin, les équations (179) et (211) ainsi que (184) et (212), donnent, lorsqu'on tient compte de (194) et (195),

$$\boxed{\mathfrak{D}^{\alpha} = -\chi\mathfrak{L}^{\alpha}} \qquad \boxed{\underset{\times}{\mathfrak{D}}^{\alpha} = -\chi\mathfrak{Q}^{\alpha}} \tag{216}$$

On voit donc qu'il est possible d'exprimer le *tenseur matériel,* le *courant électrique* et les *courants photoniques proprement dits* en fonction des *potentiels photoniques de Whittaker.*

28. Théorème de l'impulsion et de l'énergie et théorème de la conservation de l'électricité, exprimés au moyen des potentiels photoniques. — Retournons au théorème de l'impulsion et de l'énergie (102) et remplaçons dans le tenseur $T^{\alpha\beta}$ la partie massique $Nu^{\alpha}u^{\beta} + P^{\alpha\beta}$ par sa valeur $M^{\alpha\beta}$ donnée en (206). On aura alors

$$\left(M^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{(e)}\right)_{\cdot\beta} = 0 \tag{217}$$

qui exprime le *théorème de l'impulsion et de l'énergie photonique.*

De même, retournons au théorème de la conservation de l'électricité (91), et dans l'équation

$$\frac{d\mathcal{C}^{\alpha}_{(e)}}{dx_{\alpha}} = 0 \tag{218}$$

remplaçons $\mathcal{C}^{\alpha}_{(e)}$ par sa valeur (211).

On aura le *théorème de la conservation de l'électricité* (exprimé au moyen des potentiels photoniques).

29. Equation dalembertienne ou de propagation des potentiels photoniques. — En remplaçant dans (212) et (213), les $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ et $\mathfrak{U}_*^{\alpha\beta}$ par leur valeur (188) et (189) on obtient les équations du second ordre :

$$(219)\quad g^{\sigma\tau}(\mathrm{P}^{\mu})_{\sigma\tau} + \mathcal{G}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} - \frac{4\pi iec}{h}\Phi^{\nu}(\mathrm{P}^{\mu})_{\nu} + \frac{4\pi^2 m^2 c^4}{h^2}\left(1 - \frac{e^2}{m^2c^2}\Phi_{\nu}\Phi^{\nu}\right)\mathrm{P}^{\mu} - \frac{2\pi iec}{h}\left\{\mathrm{H}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} - \overline{\mathrm{H}^{\mu\nu}}\mathrm{Q}_{\nu}\right\} = 0$$

et

$$(220)\quad g^{\sigma\tau}(\mathrm{Q}^{\mu})_{\sigma\tau} + \mathcal{G}^{\mu\nu}\mathrm{Q}_{\nu} - \frac{4\pi iec}{h}\Phi^{\nu}(\mathrm{Q}^{\mu})_{\nu} + \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\left(1 - \frac{e^2}{m^2c^2}\Phi_{\nu}\Phi^{\nu}\right)\mathrm{Q}^{\mu} - \frac{2\pi iec}{h}\left\{\mathrm{H}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} - \overline{\mathrm{H}^{\mu\nu}}\mathrm{Q}_{\nu}\right\} = 0$$

ainsi que des équations conjuguées.

30. Equations ondulatoires de Dirac. — Nous allons appliquer les équations générales ci-dessus au cas particulier d'un champ de Minkowski et nous choisirons les variables de telle façon que les ds^2 définissant celui-ci soit de la forme

$$(221)\qquad ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Au lieu du potentiel vecteur Φ_α que nous avons utilisé ci-dessus, nous utiliserons avec Whittaker le potentiel Φ'_α lié au précédent par la relation

$$(222)\qquad \Phi'_\alpha = \frac{1}{c^2}\Phi_\alpha.$$

En utilisant les notations que nous avons définies précédemment, nous aurons

$$(223)\qquad \Phi_1' = -\frac{1}{c^2}\mathrm{A}_x, \quad \Phi_2' = -\frac{1}{c^3}\mathrm{A}_y, \quad \Phi_3' = -\frac{1}{c^2}\mathrm{A}_z$$
$$\Phi_4' = c\mathrm{V}.$$

Nous poserons de même

$$(224)\qquad \mathrm{X}_{\mu\nu} = \frac{\partial\Phi'_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Phi'_\mu}{\partial x_\nu}$$

ce qui nous donne, en vertu de (175),

$$\text{(225)} \qquad X_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right) = -\frac{1}{c^2}\,\overline{\mathfrak{K}}^{\mu\nu}_{*}.$$

Nous supposerons, dans ce paragraphe, qu'il n'y a ni polarisation électrique ni polarisation magnétique, de sorte que nous pourrons écrire

$$\text{(226)} \qquad X_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2}\,H_{\mu\nu}.$$

Remarquons que chez Whittaker, les indices μ, ν, etc. varient de 0 à 3 au lieu de 1 à 4. Pour plus d'uniformité nous utiliserons ici cette manière de procéder et choisirons 0, 1, 2, 3 comme permutation fondamentale.

Grâce à (221), nous pouvons déduire très facilement de (226) les composantes $H^{\mu\nu}$; à savoir

$$\text{(227)} \qquad X^{\mu\nu} = -c^2 H^{\mu\nu}.$$

Ecrivons, comme précédemment,

$$\text{(228)} \qquad \left\{\begin{array}{l} X_{01} = \frac{1}{c^2}\,H_{14} = \frac{1}{c}\,H_x \\ X_{02} = \frac{1}{c^2}\,H_{24} = \frac{1}{c}\,H_y \\ X_{03} = \frac{1}{c^2}\,H_{34} = \frac{1}{c}\,H_z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X_{23} = -\frac{1}{c^2}\,\mathcal{H}_{23} = -\frac{1}{c^2}\,\mathcal{H}_x \\ X_{31} = -\frac{1}{c^2}\,\mathcal{H}_{31} = -\frac{1}{c^2}\,\mathcal{H}_y \\ X_{12} = -\frac{1}{c^2}\,\mathcal{H}_{12} = -\frac{1}{c^2}\,\mathcal{H}_z. \end{array}\right.$$

Il en résulte, (227), que

$$\text{(229)} \qquad \left\{\begin{array}{ll} X^{01} = -cH_x & \quad X^{23} = \mathcal{H}_x \\ X^{02} = -cH_y & \quad X^{31} = \mathcal{H}_y \\ X^{02} = -cH_z & \quad X^{12} = \mathcal{H}_z. \end{array}\right.$$

Rappelons que H et $\mathcal{H}$ sont les forces électrique et magnétique.

Posons encore, avec Whittaker

$$\text{(230)} \qquad P_0 \equiv P_t, \qquad P_1 \equiv -\frac{1}{c}\,P_x, \qquad P_2 \equiv -\frac{1}{c}\,P_y, \qquad P_3 \equiv -\frac{1}{c}\,P_z$$

et

$$\text{(231)} \qquad Q_0 \equiv Q_t, \qquad Q_1 \equiv -\frac{1}{c}\,Q_x, \qquad Q_2 \equiv -\frac{1}{c}\,Q_y, \qquad Q_3 \equiv -\frac{1}{c}\,Q_z.$$

Nous aurons donc, grâce à (221)

(232) $P^0 \equiv P_t, \quad P^1 \equiv - cP_x, \quad P^2 \equiv - cP_y, \quad P^3 \equiv - cP_z$

(233) $Q^0 \equiv Q_t, \quad Q^1 \equiv - cQ_x, \quad Q^2 \equiv - cQ_y, \quad Q^3 \equiv - cQ_z.$

Il nous reste enfin à nous occuper des $U_{\mu\nu}$. Nous poserons

(234)
$$\left\{\begin{aligned} U_{01} &= \frac{1}{c}\, s_x \\ U_{02} &= \frac{1}{c}\, s_y \\ U_{03} &= \frac{1}{c}\, s_z \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} U_{23} &= \frac{1}{c^2}\, b_x \\ U_{31} &= \frac{1}{c^2}\, b_y \\ U_{12} &= \frac{1}{c^2}\, b_z \end{aligned}\right.$$

ce qui donne immédiatement

(235)
$$\left\{\begin{aligned} U^{01} &= - cs_x \\ U^{02} &= - cs_y \\ U^{03} &= - cs_z \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} U^{23} &= c^2 b_x \\ U^{31} &= c^2 b_y \\ U^{12} &= c^2 b_z. \end{aligned}\right.$$

Introduisons les notations (223) et (236) dans les équations (212), (213). Nous obtenons

(236)
$$\left\{\begin{aligned} - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right] - [\text{rot } b] &= \frac{2\pi i}{h}\, mc\, P + [\text{grad } S] \\ [\text{div } s] &= \frac{2\pi i}{h}\, mc\, P_t - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial S}{\partial t}\right] \\ - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial b}{\partial t}\right] + [\text{rot } s] &= \frac{2\pi i}{h}\, mc\, Q - [\text{grad } B] \\ [\text{div } b] &= \frac{2\pi i}{h}\, mc\, Q_t - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial B}{\partial t}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les crochets qui figurent dans ces équations ont la même signification que précédemment.

Dans les équations ci-dessus, les symbôles P, Q désignent les vecteurs ordinaires dont les composantes sont respectivement (P_x, P_y, P_z), (Q_x, Q_y, Q_z). Les scalaires S et B et les vecteurs $b(b_x, b_y, b_z)$ et $s(s_x, s_y, s_z)$ sont définis par les relations (188) et (189) qui deviennent ici :

(237)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{2\pi i}{h}\, mc\, b &= - [\text{rot } P] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial Q}{\partial t}\right] - [\text{grad } Q_t] \\ \frac{2\pi i}{h}\, mc\, s &= [\text{rot } Q] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial P}{\partial t}\right] - [\text{grad } P_t] \\ \frac{2\pi i}{h}\, mc\, S &= [\text{div } P] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial P_t}{\partial t}\right] \\ \frac{2\pi i}{h}\, mc\, B &= [\text{div } Q] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial Q_t}{\partial t}\right]. \end{aligned}\right.$$

A titre d'exemple, montrons ce que devient la première équation vectorielle (237) quand on effectue les opérations indiquées par les crochets ; nous obtenons

$$(238) \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{rot} b - \operatorname{grad} \mathrm{S} + \frac{2\pi i e}{hc}\left\{ \mathrm{V}s - [\mathrm{A}\cdot b] - \mathrm{A}\cdot\mathrm{S} \right\} = \frac{2\pi i}{h} mc\,\mathrm{P}.$$

Les équations (236) ainsi explicitées peuvent être considérées comme les équations ondulatoires, les équations (237) donnant la valeur des vecteurs b et s, et des scalaires B et S. Introduisons ces valeurs dans les équations (236). Nous obtenons :

$$(239) \quad \begin{cases} \mathrm{DP} + \frac{2\pi i e}{hc}\left\{ -[\mathcal{H}\cdot\mathrm{P}] + \mathrm{H}\cdot\mathrm{P}_t - [\mathrm{H}\cdot\mathrm{Q}] - \mathrm{H}\cdot\mathrm{Q}_t \right\} = 0 \\ \mathrm{DP}_t + \frac{2\pi i e}{hc}\left\{ (\mathrm{H}\cdot\mathrm{P}) - (\mathcal{H}\cdot\mathrm{Q}) \right\} = 0 \\ \mathrm{DQ} + \frac{2\pi i e}{hc}\left\{ -[\mathcal{H}\cdot\mathrm{Q}] + \mathrm{H}\cdot\mathrm{Q}_t + [\mathrm{H}\cdot\mathrm{P}] + \mathcal{H}\cdot\mathrm{P}_t \right\} = 0 \\ \mathrm{DQ}_t + \frac{2\pi i e}{hc}\left\{ (\mathrm{H}\cdot\mathrm{Q}) + (\mathcal{H}\cdot\mathrm{P}) \right\} = 0 \end{cases}$$

où D est l'opérateur

$$(240) \quad \mathrm{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4\pi i e}{hc}\left[\mathrm{V}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{A}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{A}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{A}_z\frac{\partial}{\partial z} \right] - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2 c^2}\left(\mathrm{V}^2 - \mathrm{A}_x^2 - \mathrm{A}_y^2 - \mathrm{A}_z^2\right)$$

Posons

$$(241) \quad \begin{cases} \psi_1 = \mathrm{P}_z + i\mathrm{Q}_t; & \psi_2 = \mathrm{P}_x + i\mathrm{P}_y; & \psi_3 = -\mathrm{P}_t - i\mathrm{Q}_z; & \psi_4 = \mathrm{Q}_y - i\mathrm{Q}_x \\ \omega_1 = -\mathrm{P}_x + i\mathrm{P}_y; & \omega_2 = \mathrm{P}_z - i\mathrm{Q}_t; & \omega_3 = \mathrm{Q}_y + i\mathrm{Q}_x; & \omega_4 = \mathrm{P}_t - i\mathrm{Q}_z. \end{cases}$$

Grâce à ces notations les équations (239) sont équivalentes au système

$$(242) \quad \begin{cases} \mathrm{D}\psi_1 + \frac{2\pi i e}{hc}\left(i\mathcal{H}_x\psi_2 + \mathcal{H}_y\psi_2 + i\mathcal{H}_z\psi_1 - \mathrm{H}_x\psi_4 + i\mathrm{H}_y\psi_4 - \mathrm{H}_z\psi_3\right) = 0 \\ \mathrm{D}\psi_2 + \frac{2\pi i e}{hc}\left(i\mathcal{H}_x\psi_1 - \mathcal{H}_y\psi_1 - i\mathcal{H}_z\psi_2 - \mathrm{H}_x\psi_3 - i\mathrm{H}_y\psi_3 + \mathrm{H}_z\psi_4\right) = 0 \\ \mathrm{D}\psi_3 + \frac{2\pi i e}{hc}\left(i\mathcal{H}_x\psi_3 - \mathcal{H}_y\psi_3 - i\mathcal{H}_z\psi_4 - \mathrm{H}_x\psi_2 + i\mathrm{H}_y\psi_2 - \mathrm{H}_x\psi_2\right) = 0 \\ \mathrm{D}\psi_4 + \frac{2\pi i e}{hc}\left(i\mathcal{H}_x\psi_3 - \mathcal{H}_y\psi_3 - i\mathcal{H}_z\psi_4 - \mathrm{H}_x\psi_1 - i\mathrm{H}_y\psi_1 + \mathrm{H}_z\psi_2\right) = 0 \end{cases}$$

auquel il faut ajouter un système équivalent mais où l'on a remplacé les ψ par des ω. Les équations (242) sont les équations du second ordre auxquelles satisfont les fonctions de Dirac ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Si l'on pose

$$(243) \left\{ \begin{array}{llll} \alpha_1 = -s_z + i\mathrm{B}; & \alpha_2 = -s_x - is_y; & \alpha_3 = -ib_z + \mathrm{S}; & \alpha_4 = b_y - ib_x \\ \beta_1 = s_x - is_y; & \beta_2 = -s_z - i\mathrm{B}; & \beta_3 = ib_x + b_y; & \beta_4 = -ib_z - \mathrm{S} \end{array} \right.$$

les équations (236) et (237) sont équivalentes à quatre systèmes de quatre équations ; le premier a la forme suivante

$$(244) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_0\psi_1 + (p_1 - ip_2)\psi_4 + p_3\psi_3 = -\, mc\, \alpha_1 \\ p_0\psi_2 + (p_1 + ip_2)\psi_3 - p_3\psi_4 = -\, mc\, \alpha_2 \\ p_0\psi_3 + (p_1 - ip_2)\psi_2 + p_3\psi_1 = mc\, \alpha_3 \\ p_0 p_4 + (p_1 + ip_2)\psi_1 - p_3\psi_2 = mc\, \alpha_4 \end{array} \right.$$

où

$$(245) \qquad p_0 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c}\mathrm{V}; \qquad p_1 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}\mathrm{A}_x; \qquad \text{etc...}$$

Pour obtenir le 2[d] système, il suffit de permuter ψ et α ; à savoir

$$(246) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_0\alpha_1 + (p_1 - ip_2)\alpha_4 + p_3\alpha_3 = -\, mc\psi_1 \\ \text{etc} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Pour obtenir le 3[me] système, il suffit dans (244) de remplacer ψ par ω et α par β, et enfin pour le 4[me] système, de permuter ω et β dans le troisième.

Il en résulte que si ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 est une solution des équations de Dirac,

$$(247) \qquad \alpha_\mu = \beta_\mu = \omega_\mu = \psi_\mu \qquad \mu = 1, 2, 3, 4$$

constitue une solution de (236) et (237).

Examinons ce que deviennent ici les composantes

$$\mathrm{C}^\alpha_{(e)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \mathfrak{C}^\alpha_{(e)} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

du courant électrique (215). Nous poserons

$$(248) \qquad \mathrm{C}^4_{(e)} = \rho, \qquad \mathrm{C}^1_{(e)} \equiv j_x, \qquad \mathrm{C}^2_{(e)} = j_y, \qquad \mathrm{C}^3_{(e)} = j_z.$$

En introduisant dans (215) les notations (223) à (235), on obtient

$$(249)\quad \begin{cases} \rho = -\dfrac{1}{2}\left(\psi_1\overline{\alpha_1}+\psi_2\overline{\alpha_2}+\psi_3\overline{\alpha_3}+\psi_4\overline{\alpha_4}+\omega_1\overline{\beta_1}+\omega_2\overline{\beta_2}+\omega_3\overline{\beta_3}+\omega_4\overline{\beta_4}+\textbf{conjuguée}\right) \\ j_x = \dfrac{c}{2}\left(\psi_1\overline{\alpha_4}+\psi_2\overline{\alpha_3}+\psi_3\overline{\alpha_2}+\psi_4\overline{\alpha_1}+\omega_1\overline{\beta_4}+\omega_2\overline{\beta_3}+\omega_3\overline{\beta_2}+\omega_4\overline{\beta_1}+\textbf{conjuguée}\right) \\ j_y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ j_z = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

de sorte que pour une solution de la forme (247), on obtient

$$(250)\quad \begin{cases} \rho = -2\left(\psi_1\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_4}\right) \\ j_x = 2c\left(\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_1}\right) \\ \textbf{etc}\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui sont précisément les expressions trouvées par Darwin [1] conformément à la théorie de Dirac.

(1) DARWIN. Proc. Roy. Soc. Série A., vol. 118, n° 780, p. 660, éq. (3. 3).

TABLE DES MATIÈRES

La Gravifique einsteinienne

La Mécanique ondulatoire de de Broglie-Schrödinger

Electrodynamique des corps en mouvement

Thermodynamique relativiste

Mécanique ondulatoire de Dirac généralisée