V.A. KOSTITZIN

Sur quelques applications des équations intégrales

Annales de l'I. H. P., tome 1, nº 2 (1930), p. 177-203
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_2_177_0>

Sur quelques applications des équations intégrales

PAR

V. A. KOSTITZIN

1. — Je suis profondément ému par le grand honneur qui m'est fait. Je le suis d'autant plus que le grand nom auquel est consacré ce magnifique institut représente pour moi non seulement un beau chapitre de l'histoire de la science, mais aussi une personnalité vivante : je me souviens parfaitement de Poincaré, de ses mouvements, de ses gestes, de sa voix et de l'impression profonde que produisait sur nous — auditeurs — sa pensée créatrice toujours active et toujours vivante, et de la douleur que nous ressentîmes en apprenant un jour sa fin prématurée.

2. — Je me souviens surtout du sentiment d'inquiétude scientifique dont étaient imprégnés ses derniers cours et les derniers mémoires qu'il publia. La crise actuelle de la science ou plutôt la crise de croissance de la science dont nous sommes tous témoins s'ébauchait déjà de ses jours. Il lui arrivait souvent de tenir des propos profondément sceptiques, parfois même pessimistes, mais il lui arrivait aussi souvent de prévoir le développement ultérieur de la science, et peut-être son scepticisme même provenait-il de ce qu'il comprenait parfaitement la fragilité des théories physiques, voyait clairement tous les coups de pouce nécessaires pour mettre une théorie en concordance avec l'expérience, et se rendait compte qu'on pouvait toujours sauver une théorie par un coup de pouce bien choisi et bien appliqué.

3. — Dans mes conférences je m'occuperai précisément d'un coup de pouce donné à la mécanique et à la physique mathématique sous la forme de la physique héréditaire créée par l'éminent mathématicien qui fit récemment ici-même l'exposé magistral de la biologie mathématique.

La physique héréditaire de M. Volterra est une tentative sinon de résoudre, du moins d'amoindrir les difficultés qui résultent de l'antinomie ancienne entre la physique ordinaire et la physique moléculaire, entre la mécanique des corps bruts et la mécanique statistique. Depuis l'époque de LAPLACE avec son idéal scientifique (qui fut aussi l'idéal scientifique de son temps), avec sa conception hardie d'un vaste esprit capable de déduire le passé et l'avenir de l'univers de son présent, la science a subi beaucoup de changements, et bien de prémisses du raisonnement de LAPLACE se sont volatilisées. Le point matériel a ondoyé. On a perdu l'habitude de se servir de la notion de force sans réfléchir sur sa nature. Les équations différentielles ne sont plus ni la forme unique ni la meilleure forme pour exprimer les phénomènes, de même que les données initiales de la mécanique de LAGRANGE ne sont plus du tout suffisantes pour déduire le passé et l'avenir d'un système ou de l'univers entier. Et la conception mécaniste du commencement du XIX^e^ siècle ne nous apparaît actuellement que comme une extrapolation hasardeuse et injustifiée des lois souvent encore douteuses du monde macroscopique dans le monde microscopique.

4. — Dans ces conditions la tentative de totaliser les traces des actions subies par un système, la tentative d'escompter l'histoire du système étudié n'est pas en elle-même plus paradoxale que la totalisation des influences extérieures sur un élément. Ici, comme là, on opère avec des notions d'origine statistique, on fait des hypothèses souvent grossières sur la nature des actions intra-moléculaires, on construit des modèles mécaniques en utilisant pour ce travail délicat des matériaux hétéroclites. Dans les deux cas, en raisonnant on se base sans s'en rendre compte sur des prémisses plutôt intuitives. Il n'y a là-dedans rien qui puisse nous choquer : il est très naturel d'utiliser dans notre raisonnement les éléments immédiats de notre expérience. Progressivement ces images grossières sont remplacées par des notions plus fines, plus élaborées. Des lois plus exactes se dégagent peu peu à des hypothèses approximatives. C'est une évolution par laquelle la physique moléculaire a déjà passée, et ses succès mêmes permettent à la physique héréditaire d'évoluer plus rapidement.

Serait-ce une méthode transitoire qui s'explique par la faiblesse de notre technique ? Je ne le crois pas. Il ne faut pas oublier que les choses temporaires sont les plus durables. La physique héréditaire n'est pas un stade dans le développement de la science — c'est une méthode qui fera toujours partie de notre outillage scientifique par suite de la nature même de notre connaissance. Pour étudier un système, nous serons toujours obligés de le séparer du reste de l'univers et de chercher ensuite un équivalent aux actions du reste de l'univers. Nous serons toujours obligés de substituer aux interactions des particules de la matière des moyennes observables et de chercher ensuite l'équivalent des actions négligées. Ces équivalents peuvent se présenter sous une double forme : 1° les forces fictives et les conditions limites introduites dans les équations, 2° l'histoire du système. Certes, c'est un artifice, mais c'est un artifice naturel et inévitable.

5. — En mettant en équations n'importe quel problème de la philosophie naturelle on cherche toujours la forme la plus simple et on choisit presque toujours la forme linéaire, celle de HOOKE. Tout en comprenant les raisons de ce choix je veux signaler quand même que pareille simplification va presque toujours à l'encontre des intérêts de la recherche scientifique et que le temps est venu de nous débarrasser peu à peu de cette habitude. On peut en effet citer de nombreux cas où la forme linéaire ne donne pas et ne peut donner même la première approximation, la fonction n'étant pas développable en série de TAYLOR. On peut citer d'autres cas où l'on perd en première approximation une propriété essentielle du problème comme l'interaction des individus dans la biologie dynamique ou l'interaction des particules dans un grand nombre des problèmes physiques. Il sera sans doute nécessaire dans l'avenir de passer à l'étude des équations non linéaires, et alors à côté des difficultés analytiques on aura des difficultés philosophiques. Pour en donner l'idée je me permets d'indiquer rapidement un exemple intéressant.

Prenons une équation intégrale non linéaire

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t) F[\varphi(t)] dt,$$

$K(x, t)$ étant pour fixer les idées un noyau bien connu

$$K(x, t) = x(1 - t) \qquad x < t$$
$$K(x, t) = t(1 - x) \qquad x > t$$

et supposons les fonctions $F(\varphi)$ et $f(x)$ développables en série de TAYLOR. Il est très naturel d'arrêter ces développements aux premiers termes. Écrivons donc

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \lambda \int_0^1 K(x, t)[\varphi(t) + \mu\varphi^3(t)]dt.$$

Cette équation intégrale se résout par des fonctions élliptiques de JACOBI, et pour chaque paire de valeurs λ, μ on a une multiplicité et parfois une infinité de solutions alors que l'équation linéaire correspondante se conduit suivant les règles de FREDHOLM, et d'autre part en choisissant convenablement la fonction $F(\varphi)$ on peut assurer l'unicité de solution de l'équation initiale. Nous allons voir que la multiplicité de solutions se présente aussi pour quelques classes d'équations linéaires, et une question très importante se poserait alors sur le rapport de ces solutions multiples avec la réalité.

6. — Après ces préliminaires nous allons nous occuper d'équations intégrales linéaires de la physique héréditaire. Il en existe trois formes

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x-h}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt \tag{2}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt. \tag{3}$$

Dans le premier cas on suppose que l'histoire commence à l'instant t_0; dans le second cas on suppose que l'action héréditaire appréciable est bornée à un petit intervalle de temps, et dans le troisième cas on considère toute l'histoire du système. Nous allons étudier surtout l'équation (2).

Il faut remarquer tout d'abord que sa forme nous permet de la rapprocher des équations aux différences finies. On peut donc s'attendre à ce qu'elle en ait toutes les particularités et à ce qu'on puisse y appliquer les mêmes procédés de résolution. D'autre part c'est une équation intégrale linéaire et on y peut appliquer les méthodes servant généralement à leur résolution et tout d'abord la méthode des approximations successives. Nous verrons par la suite que les deux méthodes se complètent mutuellement.

Désignons l'opération

$$\int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt$$

par le symbole $G\varphi$ et écrivons l'équation (2) sous la forme

$$\varphi = f + G\varphi.$$

En y appliquant n fois l'opération G on obtient

$$\varphi = f + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k G^k f + \lambda^n G^n \varphi$$

ou, ce qui revient au même

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k \int_{x-hk}^{x} g_k(x-z)f(z)dz + \lambda^n \int_{x-nh}^{x} g_n(x-z)\varphi(z)dz$$

Il est facile de voir que les fonctions $G_n(y)$ sont déterminées par des relations recurrentes

$$g_n(y) = \int_{y-h}^{(n-1)h} g(y-u)g_{n-1}(u)du \qquad (n-1)h \leqslant y \leqslant nh$$

$$g_n(y) = \int_{y-h}^{y} g(y-u)g_{n-1}(u)du \qquad h \leqslant y \leqslant (n-1)h$$

$$g_n(y) = \int_{0}^{y} g(y-u)g_{n-1}(u)du \qquad 0 \leqslant y \leqslant h$$

$g_n(y) = 0$, en dehors de ces limites. Remarquons que chaque nouvelle itération fait reculer la limite inférieure de l'intégration ; donc, si nous voulons obtenir une solution par cette méthode nous devons supposer que l'histoire nous est connue depuis $-\infty$.

Passons rapidement en revue les résultats de l'application de l'opération G aux diverses fonctions élémentaires :

a) $\qquad f(x) = a_0\,; \qquad G^n f(x) = a_0 k_0^n,$

en désignant par k_m l'intégrale

$$k_m = \int_0^h g(z)z^m dz$$

b) $$f(x) = x\,; \qquad G^n f(x) = k_0^n \cdot \left(x - \frac{nk_1}{k_0}\right)$$

c) $$f(x) = x^2$$

$$G^n f(x) = k_0^n \left(x - \frac{nk_1}{k_0}\right)^2 + nk_0^{n-2}(k_0 k_2 - k_1^2)$$

d) $$f(x) = e^{\alpha x}\,; \qquad G^n f(x) = e^{\alpha x}\gamma^n(\alpha),$$

en désignant par $\gamma(\alpha)$ l'intégrale

$$\gamma(\alpha) = \int_0^h g(z)e^{-\alpha z} dz$$

e) $$f(x) = \int_A^B \psi(t)e^{\alpha x t} dt$$

$$G^n f(x) = \int_A^B \psi(t)e^{\alpha x t}\gamma^n(\alpha t)dt.$$

On déduit facilement des formules précédentes

$$\int_{x-hn}^{x} g_n(x-z)dz = \int_0^{nh} g_n(z)dz = k_0^n$$

$$\int_0^{nh} g_n(z)e^{-\alpha z}dz = \gamma^n(\alpha).$$

Ecrivons maintenant la formule

$$\varphi = f + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k G^k f + \lambda^{n+1} G^{n+1}\varphi.$$

sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x-nh}^{x} f(z)dz \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} g_k(x-z) + \lambda^{n+1} \int_{x-(n+1)h}^{x} g_{n+1}(x-z)\varphi(z)dz.$$

La série

$$\Gamma(\lambda\,; x-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} g_k(x-z)$$

vérifie l'équation intégrale

$$\Gamma(\lambda\,;\,x-z)=g(x-z)+\lambda\int_z^x g(x-u)\Gamma(\lambda\,;\,u-z)du\,[o<x-z<h]$$

$$\Gamma(\lambda\,;\,x-z)=\lambda\int_{x-h}^x g(x-u)\Gamma(\lambda\,;\,u-z)du\,[h<x-z<\infty].$$

On voit donc que pour $o<x-z<h$

$$\Gamma(\lambda\,;\,x-z)=\mathrm{R}(\lambda\,;\,x-z),$$

en désignant par $\mathrm{R}(\lambda\,;\,x-z)$ le noyau résolvant ordinaire de VOLTERRA.

On peut maintenant établir le caractère de convergence de la série

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathrm{G}^nf(x).$$

Supposons par exemple que $g(z)$ n'est jamais négatif et que la fonction $f(x)$ est bornée

$$|\,f(x)\,|\leqslant \mathrm{M}.$$

On obtient alors la série majorante

$$\mathrm{M}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}\,|\,\lambda\,|^n k_0^{\,n}=\frac{\mathrm{M}}{1-|\,\lambda\,|\,k_0}.$$

On voit que la série est convergente tant que $|\,\lambda\,|\,k_0<1$ et diverge dans le cas contraire. La constante $|\,\lambda\,|\,k_0$ joue un rôle important, et nous l'appellerons *mesure d'hérédité*.

Supposons ensuite que $f(x)$ croit comme $e^{\alpha x}$: $f(x)\backsim e^{\alpha x}$; on a en ce cas

$$\mathrm{G}^nf(x)\backsim e^{\alpha x}\gamma^n(\alpha),$$

et la série majorante a la forme

$$e^{\alpha x}+\sum|\,\lambda\,|^n e^{\alpha x}\gamma^n(\alpha)=\frac{e^{\alpha x}}{1-|\,\lambda\,|\,\gamma(\alpha)}.$$

Ces exemples montrent que dans un nombre de cas la série

$$(3)\qquad \varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathrm{G}^nf(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^x\Gamma(\lambda\,;\,x-z)f(z)dz$$

peut nous donner une solution de l'équation (2) mais il est très facile de s'assurer que la formule (3) n'en donne pas la solution complète, et qu'il faut examiner l'équation homogène.

Nous avons indiqué l'analogie qui existe entre les équations aux différences finies et l'équation (2). Or, précisément de la même façon qui permet d'obtenir l'équation caractéristique

$$1 - e^{\alpha h} = 0$$

de l'équation fonctionnelle des fonctions périodiques

$$f(x + h) - f(x) = 0$$

et de former le système complet des fonctions trigonométriques, on peut construire l'équation caractéristique

$$1 = \lambda\gamma(\alpha) = \lambda \int_0^h g(z)e^{-\alpha z}dz \tag{4}$$

de l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_{x-h}^x g(x - t)\varphi(t)dt. \tag{5}$$

L'équation (4) a en général une infinité de solutions α_n ce qui nous permet d'utiliser le système de fonctions

$$e^{\alpha_n x}, \qquad e^{\bar{\alpha}_n x}$$

pour développer sous certaines conditions en série une fonction arbitraire dans l'intervalle de mesure h.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\lambda > 0, \qquad g(z) \geq 0.$$

Dans ce cas l'équation (4) a une solution réelle unique α_0. Cette solution est positive si la mesure d'hérédité $\lambda k_0 > 1$ et négative dans le cas contraire. Quant aux solutions complexes, on les trouve en résolvant le système

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \lambda \int_0^h g(z)e^{-\xi z} \cos \eta z dz \\ 0 &= \lambda \int_0^h g(z)e^{-\xi z} \cos \eta z dz. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Remarquons que pour $g(z)$ décroissant la partie réelle de $\alpha = \xi + i\eta$ est toujours négative. D'autre part dans ce cas il n'y a jamais de solutions purement imaginaires. Donc si la mesure d'hérédité est inférieure à l'unité la solution de l'équation (2) est toujours stable. Or, à vrai dire, nous n'avons guère de raisons pour supposer dans tous les cas $g(z)$ décroissant, et alors il faut imposer des conditions supplémentaires pour assurer la stabilité de la solution de l'équation (2).

On peut maintenant obtenir une solution complète de l'équation (2)

$$\varphi(x) = f(x) + \sum \lambda^n G^n f(x) + A_0 e^{\alpha_0 x} + \sum A_n e^{\alpha_n x} + \overline{A}_n e^{\overline{\alpha}_n x} \tag{7}$$

en ajoutant à la série (3) le développement

$$A_0 e^{\alpha_0 x} + \sum A_n e^{\alpha_n x} + \overline{A_n} e^{\overline{\alpha_n} x}.$$

Les coefficients A_n sont soumis à une seule condition — la convergence de la série. On voit également que la fonction $f(x)$ dans ce cas ne peut être choisie arbitrairement, tout comme dans le troisième théorème de FREDHOLM, à cette différence près qu'ici le caractère de croissance de $f(x)$ tient place de la condition d'orthogonalité

$$\int \varphi_k(x) f(x) dx = 0.$$

Supposons en effet que $f(x)$ croisse comme $Ae^{\alpha x}$. Il est facile de voir que le coefficient α doit satisfaire à la condition

$$\gamma(\alpha) < \gamma(\alpha_0)$$

d'où résulte l'inégalité

$$\alpha > \alpha_0.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, la série (3) diverge.

Nous terminerons ce paragraphe par un exemple. Soit $g(z) = e^{-\lambda z}$. Le système caractéristique prend la forme

$$\xi = -\lambda e^{-(\xi+\lambda)h} \cos \eta h$$
$$\eta = \lambda e^{-(\xi+\lambda)h} \sin \eta h$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= -\eta \cot \eta h \\ e^{\xi h} &= \lambda e^{-\lambda h} \frac{\sin \eta h}{\eta}. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Il est facile de voir que les courbes (8) ont un nombre infini de points d'intersections.

7. — Existe-t-il quelque chose d'analogue au premier théorème de FREDHOLM ? Le spectre de l'équation (2) est continu, l'intervalle de l'intégration est infini ; donc, il faut chercher la solution de (2) sous forme d'une intégrale de FOURIER. Supposons donc $f(x)$ représentable sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x - \xi)} d\xi.$$

Nous obtenons en itérant

$$G^n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x - \xi)} \gamma^n(i\alpha) d\xi$$

ce qui nous permer d'écrire une représentation formelle de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 - \lambda\gamma(i\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x - \xi)} d\xi$$

ou

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(i\alpha) d\alpha}{1 - \lambda\gamma(i\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x - \xi)} d\xi.$$

Or justement nous avons vu que pour $g(z)$ décroissant l'équation caractéristique n'a pas de solutions purement imaginaires. Donc le dénominateur $1 - \lambda\gamma(i\alpha)$ ne peut s'annuler que pour $\alpha = 0$; On voit qu'ici aussi la mesure d'hérédité joue un rôle essentiel. Il faut remarquer en outre que pour l'application de l'intégrale de FOURIER il est nécessaire de connaître la fonction $f(x)$ non seulement dans le passé, mais aussi dans l'avenir.

8. — Nous avons donné la solution $\psi(x)$ de l'équation homogène (5) sous forme d'une série. Or, il est possible de lui donner la forme d'une intégrale en supposant $\psi(x)$ connue dans un intervalle de mesure h, par exemple dans l'intervalle $(0, h)$. En désignant par $R(\lambda ; x - u)$ le noyau résolvant ordinaire de VOLTERRA et en supposant $h < x < 2h$ on obtient la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_h^x g(x - t)\varphi(t) dt + \lambda \int_{x-h}^h g(x - t)\psi(t) dt.$$

sous la forme,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^h \mathrm{H}_1(\lambda\,;\, x, z)\psi(z)dz.$$

La fonction $\mathbf{H}_1$ est définie par les relations

$$\mathrm{H}_1(\lambda\,;\, x, z) = \lambda \int_h^{h+z} \mathrm{R}(\lambda\,;\, x - u)g(u - z)du \qquad (0 < z < x - h)$$

$$\mathrm{H}_1(\lambda\,;\, x, z) = g(x - z) + \lambda \int_h^x \mathrm{R}(\lambda\,;\, x - u)g(u - z)du \qquad (x - h < z < h).$$

Il est facile de voir qu'on a en général pour $nh < x < (n + 1)h$

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_0^h \mathbf{H}_n(\lambda\,;\, x, z)\psi(z)dz,$$

$\mathbf{H}_n$ étant définie par la relation recurrente

$$\mathrm{H}_n(\lambda\,;\, x, z) = \int_0^h \mathbf{H}_{n-1}(\lambda\,;\, y + (n - 1)h, z)\mathbf{H}_1(\lambda\,;\, x - (n - 1)h, y)dy.$$

On peut donc calculer la fonction $\varphi(x)$ de proche en proche. La fonction $\varphi(x)$ ainsi calculée est en général discontinue pour $x = h$; au contraire, la continuité est assurée pour $x = nh$ $(n > 1)$. La possibilité de calculer $\varphi(x)$ en partant de ses valeurs dans l'intervalle $(0, h)$ peut servir de preuve indirecte de la fermeture du système de fonctions $[e^{\alpha_n x}]$.

9. — Il est facile de s'assurer que cette particularité n'est pas spéciale aux équations (2) et qu'on la retrouve dans les équations de Fredholm et de Volterra aux limites infinies.

Il est toujours possible en effet de représenter la fonction $g(x)$ sous forme d'une série de fonctions d'Hermite s'il s'agit d'équation de Fredholm, ou d'autres fonctions analogues, s'il s'agit d'équation de Volterra. En arrêtant ces développements à un terme quelconque on peut obtenir une fonction continue suffisamment approchée de $g(x)$. Cette fonction utilisée comme noyau de Fredholm ou de Volterra jouira des mêmes propriétés que $g(x)$. Un petit exemple suffira : soit

$$g(x) = e^{-x^2}$$

noyau de l'équation de FREDHOLM

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-z)^2}\varphi(z)dz.$$

L'équation caractéristique à la forme

$$1 = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2 - \alpha z}dz = \lambda \sqrt{\pi}\, e^{\frac{\alpha^2}{4}}.$$

En posant $\alpha = \xi + i\eta$ on obtient

$$e^{\frac{\xi^2 - \eta^2}{4}} \cos\frac{\xi\eta}{2} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}}$$

$$e^{\frac{\xi^2 - \eta^2}{4}} \sin\frac{\xi\eta}{2} = 0.$$

Il en résulte

$$\xi\eta = 2\pi n$$

$$\cos\frac{\xi\eta}{2} = (-1)^n\,;\ e^{\frac{\xi^2-\eta^2}{4}} = \frac{(-1)^n}{\lambda\sqrt{\pi}}.$$

On voit donc que pour $\lambda < 0$ il faut choisir n impair alors que pour $\lambda > 0$ n doit être pair. Désignons dans les deux cas la quantité positive $\frac{(-1)^n}{\lambda\sqrt{\pi}}$ par e^{A}. Nous aurons

$$\xi^2 - \eta^2 = 4A$$

$$\xi^4 - 4A\xi^2 - 4\pi^2 n^2 = 0$$

$$\xi^2 = 2A + 2\sqrt{A^2 + \pi^2 n^2}.$$

On trouve donc pour chaque λ un système de fonctions $[e^{\alpha_n x}]$ tout à fait analogue à celles déjà considérées dans le cas de l'équation (5).

10. — Nous avions admis jusqu'à présent l'hypothèse de l'absence du moment initial. Si l'on suppose avoir fait table rase de tout ce qui a précédé un moment donné t_0, on peut obtenir une solution **et** une solution unique de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt \qquad x > h + t_0$$

laquelle pour $t_0 < x < h + t_0$ doit nécessairement prendre la forme d'une équation ordinaire de VOLTERRA

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Remarquons pourtant qu'on doit être bien sûr que l'histoire commence au moment t_0 ; on peut toujours se demander s'il n'y a pas eu d'influences cachées de l'histoire précédente, d'influences pouvant affecter la solution cherchée. En supposant que tel n'est pas le cas, on trouve

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} \mathrm{R}(\lambda\,;\, x - u)f(u)du \qquad (t_0 < x < t_0 + h)$$

et on procède ensuite par les prolongements successifs. On a pour $t_0 + h < x < t_0 + 2h$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0+h}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt + \lambda \int_{x-h}^{t_0+h} g(x - t)\varphi(t)dt.$$

Or

$$\int_{x-h}^{t_0+h} g(x - t)\varphi(t)dt = \int_{x-h}^{t_0+h} g(x - t)dt[f(t) + \lambda \int_{t_0}^{t} \mathrm{R}(\lambda\,;\, t - u)f(u)du]$$
$$= \int_{t_0}^{t_0+h} \mathrm{P}_1(\lambda\,;\, x, z)f(z)dz,$$

en désignant par $\mathrm{P}_1(\lambda\,;\, x, z)$ la fonction

$$\mathrm{P}_1(\lambda\,;\, x, z) = g(x - z) + \lambda \int_{z}^{t_0+h} g(x - t)\mathrm{R}(\lambda\,;\, t - z)dt \quad (x - h < z < t_0 + h)$$

$$\mathrm{P}_1(\lambda\,;\, x, z) = \lambda \int_{x-h}^{h+t_0} g(x - t)\mathrm{R}(\lambda\,;\, t - z)dt \qquad (t_0 < z < x - h).$$

Cela nous donne

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{t_0+h} \mathrm{P}_1(\lambda\,;\, x, z)f(z)dz +$$
$$+ \lambda \int_{t_0+h}^{x} \mathrm{R}(\lambda\,;\, x - z)dz[f(t) + \lambda \int_{t_0}^{t_0+h} \mathrm{P}_1(\lambda\,;\, t, u)f(u)du].$$

On peut continuer ainsi indéfiniment en obtenant toujours une solution unique.

11. — Voyons maintenant la théorie des équations intégro-différentielles ; commençons notre étude par l'équation linéaire homogène

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = \lambda G\varphi(x), \tag{9}$$

qui ne diffère de l'équation ordinaire des mouvements harmoniques que par la présence du terme héréditaire. L'équation caractéristique a la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda\gamma(\alpha) = \lambda \int_0^h g(z)e^{-\alpha z}dz. \tag{10}$$

En supposant $\lambda > 0$, $g(z) > 0$ on voit que $\lambda\gamma(\alpha)$ est une fonction décroissante de $+\infty$ à O ; d'autre part sa croissance pour $\alpha \to -\infty$ est beaucoup plus rapide que celle de $\alpha^2 + \beta^2$. Les courbes

$$y = \alpha^2 + \beta^2 \tag{I}$$
$$y = \lambda\gamma(\alpha) \tag{II}$$

ont toujours un point d'intersection. A mesure que λ diminue ce point se déplace vers la gauche, et pour $\lambda \to 0$ on a $\alpha_0 \to -\infty$. D'autre part α_0 est positif pour $\lambda k_0 > \beta^2$ et négatif dans le cas contraire ; il est nul pour $\lambda k_0 = \beta^2$. Posons ensuite $\alpha = \xi + i\eta$. On trouve

$$\left\{\begin{aligned} \xi^2 - \eta^2 + \beta^2 &= \lambda \int_0^h g(z)e^{-\xi z}\cos \eta z dz \\ 2\xi\eta \quad &= -\lambda \int_0^h g(z)e^{-\xi z}\sin \eta z dz. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

On voit sans peine que pour $g(z)$ décroissant $\xi < 0$ et qu'il n'y a pas de solutions purement imaginaires. Donc, en ce qui concerne les solutions complexes, la stabilité de la solution complète est assurée. Mais le terme $A_0e^{\alpha_0 x}$ peut présenter des difficultés, surtout quand β^2 est petit, car alors la condition d'instabilité

$$\lambda k_0 > \beta^2$$

peut facilement être remplie.

Parmi les solutions de l'équation (10) il y a tout d'abord deux développables en série de puissance λ

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\lambda^n.$$

On trouve sans peine les valeurs des premiers coefficients γ_n :

$$\gamma_0 = \pm i\beta$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\gamma_0}\int_0^h g(z)e^{-\gamma_0 z}dz$$

$$\gamma_2 = -\frac{\gamma_1^2}{2\gamma_0} - \frac{\gamma_1}{2\gamma_0}\int_0^h zg(z)e^{-\gamma_0 z}dz$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces solutions que nous désignons par μ et $\bar{\mu}$ correspondent aux solutions de l'équation caractéristique $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ sans hérédité. Mais il y a d'autres solutions en nombre infini $\alpha_n = \xi_n \pm i\eta_n$ et pouvant servir à former un système complet de fonctions

$$e^{\alpha_0 x}, \qquad e^{\alpha_1 x}, \qquad e^{\bar{\alpha}_1 x}, \ldots$$

On peut montrer que $\xi_n \to -\infty$ pour $\lambda \to 0$. Ces fonctions peuvent être utilisées pour construire une fonction

$$\psi(z) = A_0 e^{\alpha_0 x} + \sum A_n e^{\alpha_n x} + \bar{A}_n e^{\bar{\alpha}_n x}$$

vérifiant l'équation (9).

12. — La résolution de l'équation avec le second membre

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) - \lambda G\varphi(x) = f(x) \tag{12}$$

dans le cas où le moment initial t_0 est connu et où l'on fait table rase de l'histoire antérieure ne présente pas de difficultés et n'entraîne pas d'ambiguité. On peut facilement par un procédé dû à M. LALESCO par exemple, transformer l'équation

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{t_0}^x g(x-z)\,\varphi(z)dz \quad (t_0 < x < t_0 + h) \tag{12 bis}$$

en équation intégrale ordinaire de VOLTERRA, on peut ensuite prolonger la solution obtenue dans les intervalles suivants. Multiplions en effet l'équation (12 *bis*) par $\sin\frac{\beta(t-x)}{\beta}dx$ et intégrons par rapport à x de t_0 à t ; nous obtenons

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\cos\beta(t-t_0) + \varphi'(t_0)\frac{\sin\beta(t-t_0)}{\beta} +$$
$$+ \int_{t_0}^t f(x)\frac{\sin\beta(t-x)}{\beta}dx + \lambda\int_{t_0}^t \varphi(u)du\int_u^t \frac{\sin\beta(t-x)g(x-u)}{\beta}dx.$$

La résolution de cette équation se fait sans difficultés. On écrit ensuite pour l'intervalle suivant $t_0 + h < x < t_0 + 2h$

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0+h}^{x} g(x-t)\,\varphi(t)dt + \lambda \int_{x-h}^{t_0+h} g(x-t)\,\varphi(t)dt.$$

On substitue dans la dernière intégrale la solution obtenue pour $t_0 < x < t_0 + h$ et on procède de la même manière que dans l'intervalle précédent. En désignant par $\varphi_n(x)$ la valeur de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $t_0 + nh < x < t_0 + (n+1)h$, on aura à résoudre dans chaque intervalle l'équation de VOLTERRA

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \varphi_{n-1}(t_0+nh)\cos\beta(x-t_0-nh) + \\ &+ \varphi'_{n-1}(t_0+nh)\frac{\sin\beta(x-t_0-nh)}{\beta} + \\ &+ \int_{t_0+nh}^{x} \frac{\sin\beta(x-t)}{\beta}\left[f(t) + \lambda\int_{t-h}^{t_0+nh} g(t-u)\varphi_{n-1}(u)du\right]dt + \\ &+ \lambda\int_{t_0+nh}^{x}\varphi_n(u)du\int_{u}^{x}\frac{\sin\beta(x-t)g(t-u)}{\beta}\,dt.\end{aligned}$$

On voit que la solution dépendra de deux constantes $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ et que le problème se résout complètement. Mais il reste toujours un doute sur notre droit de négliger l'histoire antérieure au moment t_0. En effet, pour l'instabilité de la solution deux conditions sont suffisantes :

1° l'existence de traces insignifiantes de l'ancien état du système ;

2° la mesure d'hérédité dépassant β^2, ce qui est bien possible quand β^2 est petit.

On a alors $\alpha_0 > 0$, et le terme séculaire $A_0e^{\alpha_0 x}$ peut toujours apparaître à côté de la solution régulière de l'équation (12). Or, justement ces conditions sont facilement réalisables. Si l'on étudie par exemple l'hystérésis magnétique on prend soin de faire passer l'échantillon étudié par un chauffage suffisant pour faire disparaître les traces de l'état magnétique antérieur. Et malgré cela peut on être sûr qu'il n'en reste pas de traces insignifiantes ? Est-on sûr que la mesure d'hérédité est toujours suffisamment petite ?

13. — Supposons maintenant qu'on cherche une solution de (12) valable pour tout l'espace et que l'on aie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\alpha(x-\xi)}d\xi$$

Multiplions l'équation (12) par $e^{iz(u-x)}$ et intégrons par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$. Nous obtiendrons ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi''(x)dx + \beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi(x)dx -$$
$$- \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}dx \int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}f(x)dx.$$

Admettons que

$$\varphi'(\pm\infty) = 0, \qquad \varphi(\pm\infty) = 0.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi''(x)dx = -z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi(x)dx.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}dx \int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \int_{t}^{t+h} e^{iz(u-x)}g(x-t)dx =$$
$$= \gamma(iz) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{iz(u-t)}dt.$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{iz(u-t)}dt = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iz(u-t)}dt}{\beta^2 - z^2 - \lambda\gamma(iz)}$$

et on obtient sans peine

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\beta^2 - z^2 - \lambda\gamma(iz)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iz(x-t)}dt. \tag{13}$$

Pour avoir la solution complète de (12) il faut joindre à l'expression (13) la solution de l'équation homogène, la solution qui comporte. comme nous l'avons vu une fonction et deux constantes arbitraires Cette solution a pourtant un inconvénient déjà signalé : elle suppose la connaissance de l'avenir alors qu'en réalité c'est sur le passé seul qu'il nous est permis de nous baser.

14. — Pour éviter cet inconvénient multiplions l'équation (12) par $\dfrac{\sin \beta(u-x)}{\beta}$ et intégrons par rapport à x de $u - h$ à u. On obtient ainsi l'équation

$$
(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(u-h)\cos\beta h + \varphi'(u-h)\frac{\sin\beta h}{\beta} + \\ &+ \int_{u-h}^{u} \frac{\sin\beta(u-x)}{\beta} f(x)dx + \lambda\int_{u-2h}^{u} S(u-z)\varphi(z)dz \end{aligned} \right.
$$

en désignant par S la fonction

$$
S(u-z) = \int_{u-z-h}^{h} \frac{\sin\beta(u-z-x)}{\beta} g(x)dx \qquad (u-2h < z < u-h)
$$

$$
S(u-z) = \int_{0}^{u-z} \frac{\sin\beta(u-z-x)}{\beta} g(x)dx \qquad (u-h < z < u).
$$

Il paraît au premier abord que pour résoudre l'équation (14) il nous faut connaître la fonction $\varphi(x)$ dans un intervalle de mesure $2h$. Or on voit sans peine qu'il suffit de connaître $\varphi(x)$ dans un intervalle de mesure h. En effet, supposons $h < u < 2h$ et $\varphi(x)$ connu dans l'intervalle $(0, h)$. Transcrivons l'équation (14) sous forme

$$
\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(u-h)\cos\beta h + \varphi'(u-h)\frac{\sin\beta h}{\beta} + \\ &+ \int_{u-h}^{u} \frac{\sin\beta(u-x)}{\beta} f(x)dx + \lambda\int_{h}^{u} S(u-z)\varphi(z)dz + \\ &+ \lambda\int_{0}^{h} S(u-z)\varphi(z)dz + \int_{u-2h}^{0} S(u-z)\varphi(z)dz. \end{aligned}
$$

Or il est très facile de déterminer $\varphi(x)$ pour $-h < x < 0$ quand il est connu dans l'intervalle $(0, h)$. Il suffit de différentier l'équation

$$
\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{x-h}^{0} g(x-z)\varphi(z)dz + \lambda\int_{0}^{x} g(x-z)\varphi(z)dz.
$$

Si $g^{(k)}(x)$ est la première dérivée ne s'annulant pas pour $x = h$, on obtient après k différentiations une équation intégrale de VOLTERRA et en la résolvant on trouve $\varphi(x)$ pour $-h > x < 0$. Le reste s'effectue sans difficulté. Dans le cas où la différentiation n'est pas possible ou bien $g^{(k)}(h) = 0$ quel que soit k on peut utiliser le procédé du nº 12.

15. — On peut traiter de la même manière les équations intégro-différentielles de n'importe quel ordre. Soit

$$(15) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_{x-h}^{x} g(x-z) \sum_{k=0}^{n} \beta_k \varphi^{(k)}(z) dz$$

une équation intégro-différentielle aux coefficients constants. En la multipliant par $e^{iy(u-x)}dx$ et en intégrant par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} \varphi^{(k)}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} f(x) dx +$$
$$+ \lambda \sum_{k=0}^{n} \beta_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} dx \int_{x-h}^{x} g(x-z) \varphi^{(k)}(z) dz.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} \varphi^{(k)}(x) dx = (iy)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} \varphi(x) dx$$

en supposant naturellement que

$$\varphi(\pm\infty) = \varphi'(\pm\infty) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(\pm\infty) = 0.$$

De même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} dx \int_{x-h}^{x} g(x-z) \varphi^{(k)}(z) dz =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(k)}(z) dz \int_{z}^{z+h} g(x-z) e^{iy(u-x)} dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(k)}(z) e^{iy(u-z)} dz \int_{0}^{h} g(x) e^{-iyx} dx =$$
$$= (iy)^k \gamma(iy) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-z)} \varphi(z) dz.$$

On obtient donc après la substitution et l'inversion

$$(16) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{A(iy) - \lambda\gamma(iy)B(iy)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(x-z)} f(z) dz.$$

en désignant par A(t) et B(t) les polynômes

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k.$$

L'équation caractéristique a la forme

$$A(\alpha) = \lambda B(\alpha)\gamma(\alpha).$$

On peut diviser ses solutions en deux groupes : 1° n solutions μ_k tendant pour $\lambda \to 0$ vers les racines de l'équation $A(\alpha) = 0$; 2° solutions α_k tendant vers $-\infty$ pour $\lambda \to 0$. Les premières correspondent aux solutions ordinaires des équations différentielles, les secondes permettent de construire un système complet de fonctions $e^{\alpha_n x}$. Pour avoir la solution complète de (15) il faut donc adjoindre à l'expression (16) une somme de termes complémentaires

$$\sum_{k=1}^{n} B_k e^{\mu_k x} + \sum_{k=0}^{\infty} C_n e^{\alpha_n x} + \overline{C}_n e^{\overline{\alpha_n} x}$$

Je n'insiste pas sur les conditions de validité de ces formules.

16. Ces résultats se prêtent à une généralisation. En effet, il n'y a pas de raisons pour supposer que la fonction d'hérédité est la même pour toutes les dérivées de $\varphi(x)$. Dans les problèmes de magnétisme de fer par exemple on peut lier le terme héréditaire d'hystérésis à la première dérivée de $\varphi(x)$ et le terme héréditaire de trainage à la fonction φ elle-même ; on aura alors l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x-h}^{x} g(x-z)\varphi(z)dz + \int_{x-l}^{x} k(x-z)\varphi'(z)dz.$$

Il est donc tout à fait naturel d'écrire l'équation intégro-différentielle sous forme

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{m} \int_{x-h_k}^{x} g_k(x-z)\varphi^{(k)}(z)dz. \tag{17}$$

En la multipliant par $e^{iy(u-x)}dx$ et en intégrant par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$ nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}\varphi^{(k)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}f(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}dx \int_{x-h_k}^{x} g_k(x-z)\varphi^{(k)}(z)dz.$$

Nous avons vu déjà que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}\varphi^{(k)}(x)dx = (iy)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}\varphi(x)dx.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}dx \int_{x-h_k}^{x} g_k(x-z)\varphi^{(k)}(z)dz = \gamma_k(iy)\,(iy)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)e^{iy(u-z)}dz$$

en désignant par $\gamma_k(iy)$ la fonction

$$\gamma_k(iy) = \int_{0}^{h_k} g_k(x)e^{-iyx}dx.$$

On obtient donc après substitution et inversion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{D(iy)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(x-z)}f(z)dz \tag{18}$$

en désignant par $D(iy)$ la fonction

$$D(iy) = A(iy) - \sum_{k=0}^{m} \gamma_k(iy)(iy)^k.$$

Quant à l'équation caractéristique, elle a la forme

$$D(\alpha) = A(\alpha) - \sum_{k=0}^{m} \gamma_k(\alpha)\alpha^k = 0,$$

et sa discussion donnerait des résultats analogues à ceux du numéro précédent.

17. Nous allons ébaucher l'étude des systèmes d'équations intégro-différentielles. Soit

$$\varphi_i''(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\varphi_k(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x-h}^{x} g_{ik}(x-t)\varphi_k(t)dt \tag{19}$$

un système de ce genre. Supposons qu'on puisse résoudre le système homogène correspondant par des fonctions

$$\varphi_i(x) = \sum A_{ij} e^{\mu_j x}$$

Cela nous donne immédiatement

$$A_{ij}\mu_j^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\gamma_{ik}(\mu_j)$$

en désignant

$$\gamma_{ik}(\mu) = \int_0^h g_{ik}(t)e^{-\mu t}dt.$$

L'élimination de coefficients A_{kj} ; nous donne l'équation caractéristique

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \alpha_{11} - \gamma_{11}(\mu), & \alpha_{12} - \gamma_{12}(\mu), \cdots \\ \alpha_{21} - \gamma_{21}(\mu), & \mu^2 + \alpha_{22} - \gamma_{22}(\mu), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

L'étude de cette équation est assez pénible ; on peut pourtant s'attendre à ce qu'il y ait en général deux groupes de solutions : 1° $2n$ solutions correspondant aux solutions ordinaires de l'équation caractéristique dans le cas d'absence d'hérédité ; 2° solutions permettant de construire un système complet de fonctions $e^{\mu_n x}$.

Pour obtenir une solution du système (19) on peut appliquer la méthode de FOURIER. Multiplions (19) par $e^{iz(u-x)}\,dx$ et intégrons par rapport à x de $-\infty$ à ∞. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i''(x)e^{iz(u-x)}dx + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)e^{iz(u-x)}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)e^{iz(u-x)}dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}dx \int_{x-h}^{x} g_{ik}(x-t)\varphi_k(t)dt$$

ou

$$(iz)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x)e^{iz(u-x)}dx + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_{ik} - \gamma_{ik}(iz)] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)e^{iz(u-x)}dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)e^{iz(u-x)}dx.$$

Désignons les mineurs du déterminant Δ par le symbole Δ_{pq}. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)e^{iz(u-x)}dx = \frac{\sum_{q=1}^{n} \Delta_{kq}(iz) \int_{-\infty}^{+\infty} f_q(x)e^{iz(u-x)}dx}{\Delta(iz)}.$$

Il en résulte

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\Delta(iz)} \sum_{q=1}^{n} \Delta_{kq}(iz) \int_{-\infty}^{+\infty} f_q(t)e^{iz(u-t)}dt.$$

Nous n'insisterons pas sur les conditions de validité de ces formules ainsi que sur la formation des solutions complètes du système (19).

18. — Etudions maintenant le mouvement d'un point matériel dans les conditions héréditaires et en absence de forces. En désignant par $x_i(t)$ les coordonnées du point P et par g_{ik} et l_{ik} les coefficients d'hérédité on peut écrire les équations du mouvement

$$(20) \quad x_i''(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t-h}^{t} g_{ik}(t-u)x_k(u)du + \sum_{k=1}^{n} \int_{t-h}^{t} l_{ik}(t-u)x_k'(u)du$$

et si l'on a $t_0 < t < t_0 + h$ ce système prend la forme

$$(20^{bis}) \quad x_i''(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} g_{ik}(t-u)x_k(u)du + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} l_{ik}(t-u)x'_k(u)du.$$

Imposons une condition supplémentaire : supposons que le mouvement soit rectiligne ; on a par conséquent

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \frac{x_i'(t_0)[\varphi(t) - \varphi(t_0)]}{\varphi'(t_0)}.$$

La substitution dans l'équation (20 *bis*) nous donne

$$\frac{x_i'(t_0)\varphi''(t)}{\varphi'(t_0)} = \sum_{k=1}^{n}\left[x_k(t_0) - \frac{x_k'(t_0)\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}\right]\int_{t_0}^{t} g_{ik}(t-u)du +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\int_{t_0}^{t}\varphi(u)g_{ik}(t-u)du + \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l_{ik}(t-u)du.$$

Or les valeurs initiales sont tout à fait arbitraires. On obtient donc

$$\int_{t_0}^{t} g_{ik}(t-u)du = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{21}$$

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(u)g_{ik}(t-u)du + \int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l_{ik}(t-u)du = 0 \qquad (i \neq k) \tag{22}$$

$$\varphi''(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi(u)g_{kk}(t-u)du + \int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l_{kk}(t-u)du. \tag{23}$$

Il résulte des équations (21) que tous les coefficients d'hérédité g_{ik} sont nuls, et alors les équations (22) montrent que

$$l_{ik} \equiv 0 \qquad (i \neq k).$$

On voit facilement que

$$l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = l,$$

et l'équation (23) prend la forme

$$\varphi''(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l(t-u)du \qquad (t_0 < t < t_0 + h). \tag{24}$$

On voit de même que

$$\varphi''(t) = \int_{t-h}^{t}\varphi'(u)l(t-u)du \qquad (t > t_0 + h). \tag{24bis}$$

L'équation (24) se transforme facilement : on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\left[1 - \int_0^{t-t_0}(t-t_0-u)l(u)du\right] + (t-t_0)\varphi'(t_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t}\varphi(u)du\cdot\int_0^{t-u} l(z)dz.$$

Cette équation de VOLTERRA se résout sans difficultés. En désignant par $R(t - z)$ le noyau résolvant de $l(z)$, on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \left\{ t - t_0 + \int_0^{t-t_0} (t - t_0 - z) R(z) dz \right\}$$

Ces formules montrent que l'on doit prendre la fonction $l(z)$ négative. Soit pour fixer les idées $l(z) = - \lambda e^{-\mu z}$.

En ce cas $R(z) = - e^{-(\lambda+\mu)z}$.

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \left\{ \frac{\mu(t - t_0)}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda[1 - e^{-(\lambda+\mu)(t-t_0)}]}{(\lambda + \mu)^2} \right\}$$

et si l'on admet que l'action héréditaire n'est pas bornée on voit que le mouvement va en ralentissant et que la vitesse se tend asymptotiquement vers la limite $\varphi'(t_0) \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

On arrive facilement aux mêmes conclusions dans le cas général.

L'équation caractéristique de (24^{bis})

$$\alpha^2 = \alpha \int_0^h l(u) e^{-\alpha u} du$$

a une racine $\alpha = 0$, une racine négative et une infinité de racines complexes. Les parties réelles de ces racines sont négatives si l'on a

$$l(u) < 0$$
$$- \int_0^h l(u) du < 1.$$

19. — En terminant cette étude je veux revenir sur la question de l'infinité de solutions et leurs rapports avec la réalité. On est parfois tenté de dire que le problème réel ne peut avoir qu'une seule solution et que si le travestissement mathématique d'un problème physique en donne plusieurs c'est que ce travestissement a été mal choisi. On ne peut nier l'exactitude de cette réflexion dans certains cas mais il ne faut pourtant pas oublier les paroles de HEGEL : « tout ce qui est réel est raisonnable, et tout ce qui est raisonnable est réel ». Les conceptions de notre esprit ne sont pas des êtres imaginaires : elles ont parfois plus de réalité que maintes choses réelles. Notre appareil analytique, ainsi que toute la science, est le produit supérieur de l'évolution biologique et de la vie sociale de l'humanité ; il est mieux adapté et plus intimement lié à la réalité des choses et aux besoins de notre conquête de la nature que l'on ne le croit ordinairement. Et s'il nous fournit quelque chose en plus de ce qu'on lui demande, il faut toujours attentivement chercher une réalité correspondante à ce surplus, une réalité qu'on trouve toujours à force de recherches et d'interprétations. Et nous avons toutes les raisons de croire que l'infinité de solutions n'est pas un défaut de ces équations mais plutôt une aubaine. Les expressions du genre

$$\int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt, \qquad \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} g(x-t)\varphi(t)dt$$

se rencontrent dans plusieurs problèmes de la philosophie naturelle. On les trouve par exemple dans les problèmes apparemment techniques de la théorie des erreurs, d'interpolation, de la théorie des appareils enregistreurs, de la théorie de recherche de périodes, en un mot partout où il faut dégager les faits essentiels ou les lois empiriques des ensembles statistiques. Un fait observé est toujours une moyenne, en tout cas un résultat des opérations statistiques que l'on effectue parfois consciemment, mais dans la plupart de cas sans comprendre leur nature statistique. Or, la même moyenne observable peut correspondre à une infinité des distributions de faits. N'oublions pas d'autre part que les équations intégrales aux limites infinies sont très employées dans la mécanique statistique pour la recherche des fonctions de distribution, et dans la mécanique ondulatoire. Or précisément dans le premier genre de problèmes la multiplicité de solutions peut correspondre à la multiplicité de lois de distribution possibles. Remarquons que l'étude des fluides montra toute l'importance de la turbulence, mais l'introduction de la turbulence dans les équations de l'hydrodynamique est encore une opération statistique nécessitant l'usage des intégrales $\bar{u} = \frac{1}{h}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} u dt$, etc. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'une équation intégrale ait une infinité de solutions. La fonction arbitraire qui entre dans la composition de la solution complète est selon moi une circonstance favorable correspondant à la réalité des choses et nous permettant une certaine liberté de mouvements. C'est peut être un défaut au point de vue des axiomatistes extrêmes ; la conception statistique de la nature comporte heureusement toujours de l'imprévu et de l'imprévoyable pour une machine logique si perfectionnée qu'elle soit. On peut bien axiomatiser une théorie physique mais les axiomes utilisés ne seront que des postulats ou des conventions et encore faut-il toujours introduire, en les établissant, des postulats cachés comme on introduit sans nombre en établissant par exemple l'équation de BOLTZMANN. On peut construire un appareil logique mais ce sera un appareil d'usage très limité. Je ne veux pas dire par cela que les machines logiques ne soient pas utiles ; je veux dire seulement que dans la conquête et l'étude de la nature il y aura toujours place à l'activité créatrice humaine.

Imprimerie des PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE, Paris-Saint-Amand. — 26-8-1930.