ANNALES DE L'I. H. P.

PAUL LÉVY

Le Théorème fondamental de la théorie des erreurs

Annales de l'I. H. P., tome 1, nº 2 (1930), p. 163-175

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_2_163_0>

© Gauthier-Villars, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Le Théorème fondamental de la théorie des erreurs

PAR

M. Paul LÉVY

Mesdames, Messieurs,

Permettez-moi d'abord d'adresser à M. Emile Borel l'expression de ma reconnaissance pour le grand honneur qu'il m'a fait en m'invitant à prendre la parole dans cette salle. Permettez-moi aussi de prévenir ceux d'entre vous qui ont entendu les remarquables conférences de M. Pólya, que la présente conférence a un objet bien différent, et plus modeste ; ce ne sont pas des résultats nouveaux, mais des résultats connus depuis longtemps, et pour la plupart classiques, que je vais avoir l'honneur d'exposer devant vous.

1. Considérations générales sur les erreurs dans les mesures physiques. — Le but que je me suis proposé est de vous faire comprendre le théorème fondamental de la théorie des erreurs. D'après ce théorème, *l'erreur accidentelle, commise dans la mesure d'une grandeur physique, obéit à la loi de* Gauss.

Il faut d'abord préciser ce qu'on appelle erreur accidentelle. Le caractère essentiel d'une telle erreur est de dépendre du hasard ; si l'on recommence la mesure dans les mêmes conditions, l'erreur accidentelle variera ; elle sera tantôt positive, tantôt négative, et l'on peut espérer que ces différentes erreurs se compenseront si l'on prend la moyenne des résultats obtenus ; la précision est alors augmentée. L'erreur qui n'est pas accidentelle est dite systématique ;

on ne peut pas espérer la corriger de la même manière, et il n'y a pas de bonne mesure si l'on n'arrive pas à éviter ou corriger toutes les causes d'erreurs systématiques.

La distinction entre ces deux sortes d'erreurs est souvent assez délicate. Contentons-nous de le montrer par un exemple, celui de l'erreur de lecture. Supposons pour fixer les idées que l'on ait à lire la position d'un trait de repère en face d'une règle graduée en millimètres, et qu'on se contente de lire le nombre entier de millimètres, sans chercher à apprécier la partie fractionnaire ξ du nombre inconnu X. Si cette partie fractionnaire est inférieure à 0, 4, pour fixer les idées, on lira le nombre entier n immédiatement inférieur à x ; de 0, 6 à 1 au contraire, on lira $n + 1$; entre 0, 4 et 0, 6 on hésitera ; on lira tantôt n, tantôt $n + 1$, la probabilité de cette seconde valeur augmen-

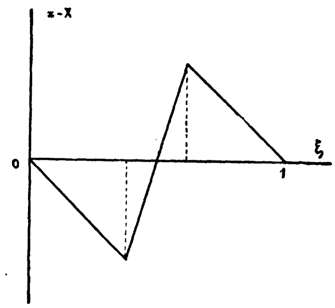

Fig. 1.

tant avec ξ, suivant une formule que nous supposerons linéaire. Dans ces conditions, cela ne sert à rien de recommencer la lecture ; un même observateur ne pourrait guère oublier le résultat de la lecture précédente et relirait le même nombre, n ou $n + 1$. Si l'on prend la moyenne des lectures faites par un grand nombre d'observateurs indépendants, on obtient une valeur x, fonction continue de $X = n + \xi$, et l'erreur commise $x - X$ est une fonction continue de ξ, représentée par la figure ci-contre. C'est une erreur systématique ; la répétition des expériences ne permet pas de la corriger.

Supposons au contraire que, pour mesurer la distance de deux traits de repère, on déplace à chaque lecture la régle graduée ; ξ varie d'une lecture à l'autre, les différentes valeurs entre 0 et 1 étant également probables. La moyenne des différentes erreurs $x - X$ différera alors peu de sa valeur théorique, qui est la valeur moyenne de la fonction $x - X$ de ξ que nous venons de définir quand ξ varie de 0 à 1 ; cette valeur est zéro ; il en sera ainsi à chaque extrémité de la règle. Dans ces conditions on peut arriver à une précision théoriquement indéfinie : l'erreur de lecture est devenue accidentelle ; on peut maintenant la corriger en recommençant la mesure et en prenant la moyenne des résultats obtenus.

D'une manière générale l'erreur de lecture est systématique si la répétition de la mesure que l'on envisage implique la répétition exacte des mêmes lectures ; elle devient accidentelle dans le cas contraire.

Bien entendu l'on ne peut pas toujours transformer l'erreur systématique en erreur accidentelle. Cela ne serait d'ailleurs pas toujours désirable ; il importe en effet de s'attaquer directement à chaque cause d'erreur et de la corriger aussi exactement que possible. Il ne doit rester, dans une bonne méthode de mesure, que des erreurs trop petites pour être corrigées ; chacune est négligeable. Mais leur réunion peut constituer une erreur appréciable. *L'erreur accidentelle apparaît ainsi comme constituée par la réunion d'erreurs indépendantes et très petites.*

Ce résultat n'est pas encore assez précis pour constituer le point de départ d'une théorie mathématique. Il faut préciser la relation entre ces erreurs élémentaires et leur résultante. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que ces erreurs élémentaires s'ajoutent ; c'est sur cette hypothèse que repose la théorie mathématique classique, qui conduit à cette conclusion que l'erreur accidentelle obéit à la loi de GAUSS. Mais nous devons nous demander si elle est vérifiée en fait.

Cela dépend naturellement des cas. Le calcul des probabilités nous habitue, dès ces débuts, à cette idée que certains cas semblent faits exprès pour donner l'occasion d'appliquer la théorie. C'est ainsi que a notion de probabilité a un sens très clair lorsqu'on parle du tirage d'une carte dans un jeu bien battu. L'étude de ces cas présente un grand intérêt, et aide à comprendre un peu ce qui se passe dans des cas plus complexes et dont la théorie ne peut être faite exactement ; les résultats obtenus dans les cas simples ne peuvent s'appliquer d'une manière exacte à ces cas complexes ; mais on ne doit pas être surpris de constater qu'ils s'appliquent d'une manière approchée. Ainsi on ne s'étonne pas de constater la constance de certaines fréquences, même quand aucune théorie ne permet de les calculer.

Dans la théorie des erreurs, un cas où la théorie s'applique assez bien est celui de l'erreur due à la réfraction atmosphérique dans les observations astronomiques. Cette erreur comporte une partie systématique due à la densité croissante des couches atmosphériques traversées par le rayon lumineux. Cette erreur systématique corrigée, il reste une erreur accidentelle, due à l'influence des perturbations de l'atmosphère ; elle apparaît bien comme la somme des déviations ainsi produites aux différentes altitudes.

Considérons maintenant le cas d'un télémètre, ayant pour objet la mesure d'une distance x, et la déduisant de la mesure d'un angle θ très petit et variant en raison inverse de x. La théorie s'applique assez bien à l'angle θ, et l'erreur $\delta\theta$ commise sur cet angle obéit à la loi de GAUSS, dont nous rappellerons tout à l'heure la définition ; c'est une loi symétrique, donnant les mêmes probabilités à deux valeurs égales et opposées. Il en résulte pour l'erreur sur x une loi différente, évidemment dissymétrique ; la théorie ne s'applique pas à l'erreur sur x. Mais si la mesure est précise, c'est-à-dire si l'erreur dx commise sur x (et non seulement chacune des erreurs partielles dont elle résulte) est très petite, $\delta\theta$ et δx sont proportionnels, et l'erreur sur x obéit à la loi de GAUSS.

D'une manière générale si une mesure est précise, c'est-à-dire si une variation de la quantité à mesurer x de même ordre de grandeur que l'erreur possible apparaît comme étant sans influence sur les conditions de la mesure, x et les différentes fonctions de x que l'on peut avoir à considérer varient proportionnellement dans ces limites, et il importe peu de savoir à laquelle de ces fonctions la théorie s'applique le mieux ; on peut l'appliquer à x et dire que l'erreur sur x obéit à la loi de GAUSS.

On peut exprimer la même idée sous une autre forme en disant que, les variables δx étant assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés, toutes les formules deviennent linéaires. L'erreur totale ne peut donc être que la somme des erreurs partielles qui la constituent.

Mais ce n'est pas là un raisonnement rigoureux ; même si les erreurs partielles sont très petites, d'autres formules que l'addition sont possibles. M. FRÉCHET a étudié le cas où l'on prendrait pour l'erreur résultante X la plus grande des erreurs partielles, prise en valeur absolue ; il a montré que dans cette hypothèse on peut développer une théorie analogue à la théorie classique ; mais la loi de GAUSS est remplacée par une loi différente.

Imaginons un examen dans lequel chaque candidat, ayant à effectuer un certain nombre de mesures, commettrait dans ces différentes mesures des erreurs de valeurs absolues x_1, x_2, ..., x_n. Supposons que l'examinateur dise : « Je ne crois pas au calcul des probabilités ; peu m'importent la valeur moyenne ou la valeur quadratique moyenne de ces erreurs ; ce qui m'intéresse c'est la plus grande erreur que le candidat risque de commettre. Je ne tiens donc compte que de la plus grande en valeur absolue des erreurs commises, et c'est d'après sa valeur X que je note le candidat. » Un tel examinateur aurait sans doute tort. Supposons quand même qu'il existe et cherchons à prévoir, avant l'examen, la note du candidat ; nous trouverons qu'elle dépend de la loi de M. FRÉCHET (du moins si n est assez grand).

Mais un tel exemple est exceptionnel. Les fonctions que l'on peut rencontrer dans l'étude de la composition des erreurs sont le plus souvent des fonctions continues, à dérivées continues, et même développables en série de TAYLOR. Si les erreurs sont très petites, on peut négliger leurs carrés et leurs produits ; l'erreur totale est une fonction linéaire des erreurs partielles, et la théorie classique s'applique.

Cette théorie, nous l'avons dit, nous conduira à ce résultat que l'erreur accidentelle obéit à la loi de GAUSS. Nous voyons comment il faut comprendre cet énoncé. Il repose sur certaines hypothèses, notamment sur l'hypothèse de l'additivité des erreurs partielles, et sur la petitesse aussi bien de chacune de ces erreurs partielles par rapport à leur somme que sur la petitesse de cette somme. Ces hypothèses semblent naturelles, et seront sans doute assez exactement vérifiées dans la plupart des applications. Mais il ne faut pas oublier que les résultats de la théorie ne sont applicables qu'à cette condition ; qu'il est nécessaire dans chaque application, soit de s'assurer que ces hypothèses sont bien vérifiées, soit de vérifier expérimentalement que la loi de l'erreur est bien celle de GAUSS ; qu'en général il n'en sera ainsi que d'une manière approchée. Il ne faut pas oublier notamment que la théorie suppose que l'erreur accidentelle soit la somme d'une infinité d'erreurs indépendantes et infiniment petites ; or dans les cas les plus favorables il ne peut être question que d'un nombre très grand, mais fini, d'erreurs partielles.

2. EXPOSÉ DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE. — Rappelons d'abord la définition de la loi de GAUSS. On dit qu'une variable ξ obéit à la

loi de Gauss réduite si la probabilité de *l'inégalité*

(1) $$\alpha < \xi < \beta$$

est, quels que soient α et β, égale à l'intégrale

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi,$$

c'est-à-dire à l'aire hachurée de la figure ci-dessous, où l'on a tracé la courbe de Gauss

(3) $$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La valeur probable de ξ est alors zéro, et sa valeur quadratique moyenne est 1 (propriétés caractéristiques des lois *réduites*). La loi

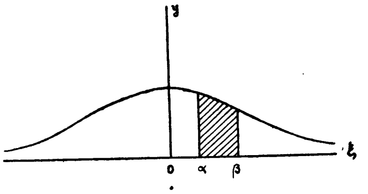

Fig. 2.

de Gauss générale est celle à laquelle obéit la variable $x = a\xi$, a étant une constante.

Considérons alors une variable x, obéissant à une loi de probabilité quelconque, à cela près que sa valeur probable doit être nulle et que sa valeur quadratique moyenne a une valeur finie m. Si cette loi dépend d'un paramètre variable, nous dirons qu'elle tend vers celle de Gauss, ou d'une manière plus précise que la loi à laquelle obéit la *variable réduite* $\xi = \frac{x}{m}$ tend vers la loi de Gauss réduite, si la probabilité de l'inégalité (1) tend vers la valeur (2) ; on voit aisément que cette convergence est nécessairement uniforme.

La loi de Gauss a une propriété importante, facile à démontrer : elle est *stable*. On entend par là que, si plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obéissent à la loi de Gauss, il en est de même de leur somme

(4) $$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Mais ce qui est plus remarquable encore, c'est que, si les lois auxquelles obéissent $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont quelconques, la loi *résultante* à laquelle obéit X ressemble plus à la loi de Gauss que les lois composantes, et tend pour n infini vers celle de Gauss, du moins si chacun des termes est très petit. En d'autres termes : *la somme de* n *erreurs indépendantes et très petites, dont les valeurs probables sont nulles, obéit à une loi, tendant, pour* n *infini, vers celle de Gauss* (1).

C'est bien le résultat qu'il s'agit d'établir pour la théorie des erreurs. Il faut d'ailleurs encore préciser le sens de l'expression « très petites » qui figure dans l'énoncé. Elle signifie que les erreurs sont très petites par rapport à la valeur quadratique moyenne M de l'erreur totale X ; rappelons que M est lié aux valeurs quadratiques moyennes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par la formule

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2, \tag{5}$$

Pour qu'on puisse dire que les erreurs sont très petites, il suffit alors évidemment qu'aucune d'entre elles ne puisse en aucun cas dépasser εM, ε étant un nombre très petit, et tendant vers zéro pour n infini. Mais, la valeur quadratique moyenne d'une variable donnant assez bien idée de l'ordre de grandeur auquel il faut s'attendre pour cette variable, et les valeurs beaucoup plus grandes, si elles sont possibles, étant très peu probables, on peut se demander s'il ne suffirait pas que $m_1, m_2, \ldots, m_n$, soient inférieurs à εM. Il n'en est pas ainsi ; mais cette hypothèse devient suffisante si l'on ajoute une condition supplémentaire très peu restrictive, qu'on peut énoncer par exemple en disant qu'on commet une erreur relative négligeable sur la somme (5) en ne tenant compte que des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inférieures à εM. On peut donner aussi d'autres formes à cette condition supplémentaire, de sorte que le théorème fondamental est susceptible de recevoir plusieurs énoncés légèrement différents. Celui que nous venons d'indiquer résulte des travaux de M. Lindeberg.

Nous ne pouvons, dans cette conférence, donner la démonstration complète de ce théorème fondamental. Mais nous indiquerons brièvement le principe de trois méthodes différentes auxquelles se rattachent les recherches relatives à ce sujet.

(1) Sans la restriction que les x_h aient leurs valeurs probables nulles, le résultat subsisterait pour X, à une constante additive près ; mais si cette constante n'était pas nulle, elle devrait être rattachée à l'erreur systématique, et le résultat relatif à l'erreur accidentelle subsisterait sans modification.

La première méthode, celle de Bernoulli, repose sur l'étude du jeu de pile ou face. A chaque coup le gain x peut avoir les valeurs $+1$ et -1, chacune de ces valeurs ayant la probabilité $\frac{1}{2}$. Après n coups, les valeurs possibles du gain total X sont

$$n, \quad n-2, \quad n-4, \cdots, -n,$$

leurs probabilités respectives étant

$$\frac{1}{2^n}, \quad \frac{C_n^1}{2^n}, \quad \frac{C_n^2}{2^n}, \cdots, \frac{1}{2^n}.$$

La valeur quadratique moyenne de X, d'après la formule (5), étant $\sqrt{n}$, il est naturel de considérer le gain réduit $\xi = \frac{X}{\sqrt{n}}$, et, en désignant par $d\xi = \frac{2}{\sqrt{n}}$ la différence de deux gains consécutifs, de mettre la probabilité de ce gain sous la forme $f_n(\xi)d\xi$. Un calcul facile montre alors que $f_n(\xi)$ tend, uniformément, pour n infini, vers la fonction de Gauss $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$; cela revient à dire que le gain réduit obéit, à la limite, à la loi de Gauss réduite.

On voit ainsi clairement la manière dont s'introduit cette courbe ; elle est dessinée en quelque sorte par la représentation graphique des coefficients du binôme. Seulement cela n'apparaîtrait pas si l'on marquait les points d'abscisses p et d'ordonnées $C_n^q (q = \frac{n}{2} + p)$; il faut en outre multiplier les abcisses par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les ordonnées par $\frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.

Ce résultat obtenu, il est facile d'abord d'en déduire une nouvelle démonstration du fait que la loi de Gauss est stable, ensuite de le généraliser de plusieurs manières, en supposant que la loi de probabilité de chacun des gains successifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne soit pas celle du jeu de pile ou face, et même qu'elle varie d'un coup à l'autre. Mais il n'est pas facile d'arriver ainsi au degré de généralité nécessaire pour la théorie des erreurs, où l'on ne sait pour ainsi dire rien sur les lois des erreurs élémentaires, si ce n'est qu'elles sont petites ; une théorie introduisant d'autres hypothèses ne peut donc pas expliquer la grande généralité du fait que l'erreur accidentelle obéisse (au moins d'une manière approchée) à la loi de Gauss.

Passons donc à la seconde méthode, celle de M. Lindeberg (1920 et 1922). Chacune des erreurs partielles x_h, $(h = 1, 2, ..., n)$, étant représentée par $m_h\xi_h$, m_h étant sa valeur quadratique moyenne, de sorte que ξ_h est l'erreur réduite correspondante, l'erreur totale réduite est

$$\frac{X}{M} = \frac{m_1}{M}\xi_1 + \frac{m_2}{M}\xi_2 + \cdots + \frac{m_n}{M}\xi_n. \tag{6}$$

M. LINDEBERG considère d'autre part des variantes auxiliaires $\xi_1', \xi_2', ..., \xi_n'$, obéissant à la loi de GAUSS réduite, et indépendantes les unes des autres. On voit aisément que la somme

$$\frac{X'}{M} = \frac{m_1}{M}\xi_1' + \frac{m_2}{M}\xi_2' + \cdots + \frac{m_n}{M}\xi_n' \tag{7}$$

obéit aussi à la loi de GAUSS réduite. Or on passe de la somme (7) à la somme (6) qu'il s'agit d'étudier en remplaçant successivement ξ_1', par ξ_1, ξ_2' par ξ_2, ..., ξ_n' par ξ_n. Une discussion des erreurs ainsi commises , relativement élémentaire quoiqu'elle nécessite quelques précautions, montre que, sous les hypothèses rappelées tout à l'heure, non seulement chacune de ces erreurs, mais l'erreur totale commise en remplaçant $\frac{X'}{M}$ par $\frac{X}{M}$, est très petite. A la limite, $\frac{X}{M}$ obéira bien à la loi de GAUSS réduite.

La troisième méthode dont nous voulons parler repose sur l'étude de la *fonction caractéristique* ; cette méthode, déjà considérée par CAUCHY, et même incidemment par quelques prédécesseurs de CAUCHY, a été renouvelée par CHARLIER, et nous-même en avons développé systématiquement les conséquences.

La fonction caractéristique, que nous désignerons par $\varphi(t)$, est la valeur probable de l'exponentielle imaginaire e^{itx}, x étant la variable obéissant à la loi étudiée, et t une variable auxiliaire. Ainsi, dans le cas d'une loi continue, où chaque intervalle dx a la probabilité $f(x)dx$, on a

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx \tag{8}$$

et la formule de FOURIER

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt \tag{9}$$

nous permet de calculer $f(x)$ connaissant $\varphi(t)$. La fonction des probabilités totales

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

se déduit alors aisément de la formule (9) par intégration sous le signe d'intégration. Il vient ainsi

$$\text{(10)} \qquad F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi(t)dt.$$

Or, à condition d'écrire cette formule sous la forme

$$\text{(11)} \qquad F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi(t)dt,$$

on a une formule applicable à toutes les lois de probabilité, continues ou non. Donc, dans tous les cas, une loi de probabilité est bien définie par la donnée de sa fonction caractéristique $\varphi(t)$ pour toutes les valeurs réelles de t.

On voit d'ailleurs aisément que $\varphi(0) = 1$; que pour une loi réduite $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = -1$, de sorte que $\varphi(t) - 1$ et $\Psi(t) = \log \varphi(t)$, ont pour valeur principale $-\frac{t^2}{2}$. Dans le cas de la loi de Gauss réduite, $\Psi(t) = -\frac{t^2}{2}$, et pour être sûr qu'une loi tend vers la loi de Gauss réduite il suffit de montrer que $\Psi(t) + \frac{t^2}{2}$ tend vers zéro, et cela uniformément dans tout intervalle fini.

Considérons maintenant deux lois de probabilité indépendantes, de fonctions caractéristiques

$$\text{(12)} \qquad \varphi_1(t) = \sum \alpha_h e^{itx_h}, \qquad \varphi_2(t) = \sum \beta_k e^{ity_k},$$

α_h désignant la probabilité de la valeur x_h pour la première loi, et β_k et y_k définissant de même la seconde loi. La fonction caractéristique de la loi résultante, à laquelle obéit la somme $x + y$, est

$$\text{(13)} \qquad \varphi(t) = \sum \alpha_h \beta_k e^{it(x_h + y_k)} = \varphi_1(t)\, \varphi_2(t).$$

Donc, dans la composition de deux lois de probabilité (par addition des variables correspondantes, supposées indépendantes), les fonctions caractéristiques se multiplient ; leurs logarithmes $\Psi(t)$ s'ajoutent. Ce résultat n'est d'ailleurs pas spécial aux lois discontinues, comme la notation employée pour écrire les formules (12) et (13) pourrait le faire penser.

Considérons alors n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, obéissant à la même loi réduite ; nous poserons

$$\log \varphi(t) = \psi(t) = -\frac{t^2}{2}[1 + \omega(t)], \tag{14}$$

$\varphi(t)$ étant la fonction caractéristique de cette loi ; on a $\omega(0) = 0$. Pour leur somme X, $\Psi(t)$ est remplacé par

$$\Psi(t) = n\psi(t) = -n\frac{t^2}{2}[1 + \omega(t)],$$

et pour la somme réduite $\frac{X}{\sqrt{n}}$, le logarithme de la fonction caractéristique est

$$\Psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2}\left[1 + \omega\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Il tend uniformément vers $-\frac{t^2}{2}$ dans tout intervalle fini, de sorte qu'à la limite $\frac{X}{\sqrt{n}}$ obéit bien à la loi de GAUSS réduite.

Nous venons de traiter le cas où les différents termes $x_1, x_2, \dots, x_n$ obéissent à la même loi. Il suffirait de quelques lignes de plus pour traiter le cas général. On arrive ainsi à mettre en évidence que la somme réduite $\frac{X}{M}$ obéit à la loi de GAUSS, pourvu que soient vérifiées les trois conditions suivantes, toutes les trois essentielles :

1° Chacune des erreurs x a une valeur quadratique moyenne finie m ; (la valeur probable de x est alors aussi finie et on peut, comme nous l'avons fait, la supposer nulle).

2° Le plus grand des nombres m^2 est très petit par rapport à leur somme M^2 ;

3° Les fonctions $\omega(t)$, liées par la formule (14) aux fonctions caractéristiques $\varphi(t)$ des lois auxquelles obéissent les variables réduites $\xi = \frac{x}{m}$, sont toutes majorées, au moins dans un petit intervalle comprenant la valeur $t = 0$, par une fonction $\Omega(t)$ nulle pout $t = 0$ et continue près de ce point.

Toutes ces conditions reviennent d'ailleurs à limiter le rôle des grandes valeurs des variables x, de sorte que la conclusion que $\frac{X}{M}$ obéit à la loi de GAUSS a bien la portée voulue au point de vue de la théorie des erreurs.

Nous n'insisterons pas sur la troisième de ces conditions. La nécessité de la seconde est bien évidente : si l'une des erreurs partielles n'était pas très petite par rapport à l'erreur totale, il ne serait pas possible que la loi à laquelle obéit cette erreur fût sans influence sur l'erreur totale. Si les erreurs considérées sont en nombre infini, et se présentent comme les termes d'une série, il est alors essentiel que la série soit

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2$$

divergente ; autrement chacun des termes serait une fraction appréciable de la somme. En cas de convergence de cette série, même si la série

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n + \cdots$$

est divergente, on ne doit pas s'attendre à trouver la loi de GAUSS.

A fortiori ne doit-on pas s'y attendre si les carrés des variables x n'ont pas leurs valeurs probables finies. Dans ces cas les grandes valeurs de ces variables ont des probabilités suffisantes pour influer d'une manière sensible sur la loi de probabilité de leur somme. Des circonstances très diverses sont alors possibles ;il peut arriver notamment qu'on obtienne à la limite une loi stable autre que celle de GAUSS ; il existe en effet une double infinité de lois stables.

3. — CONCLUSIONS RELATIVES A LA COMPENSATION DES ERREURS. — Tels sont les caractères essentiels de la théorie mathématique qui permet de comprendre le rôle de la loi de GAUSS dans la théorie des erreurs. Terminons cet exposé par quelques remarques sur les méthodes employées pour la compensation des erreurs accidentelles ; on a beaucoup discuté la question de savoir si ces méthodes pouvaient se justifier indépendamment de la loi de GAUSS. Les conclusions de ces discussions sont les suivantes :

1° S'il est vrai que l'erreur accidentelle obéisse à la loi de GAUSS, ces méthodes sont les meilleures possibles ; toute autre méthode donnerait une précision moins grande ;

2° Si l'erreur n'obéit pas à la loi de GAUSS, mais n'en diffère pas trop ces méthodes conservent une valeur incontestable ; mais on ne peut plus affirmer qu'elles soient les meilleures possibles. Elles restent bonnes tant que la loi de probabilité de l'erreur comporte une valeur quadratique moyenne, et permettent, au moins en théorie, d'augmenter indéfiniment la précision par la répétition des mesures ;

3° Ces méthodes tombent au contraire complètement en défaut dans le cas des lois comportant une erreur quadratique moyenne infinie. De telles lois ne semblent guère pouvoir se rencontrer dans une bonne méthode de mesure. Mais s'il arrivait qu'une telle loi fût vérifiée, il importe de remarquer que dans ce cas l'on peut se tirer d'affaire par d'autres méthodes. Signalons notamment celle qui consiste à écarter dans des proportions déterminées les plus grandes et les plus petites valeurs trouvées, et à prendre la moyenne des mesures conservées. Cette méthode est applicable dans tous les cas et, même dans le cas où la méthode classique est meilleure, n'est pas beaucoup plus mauvaise qu'elle.