ANNALES DE L'I. H. P.

A. EINSTEIN

Théorie unitaire du champ physique

Annales de l'I. H. P., tome 1, nº 1 (1930), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_1_1_0>

Théorie unitaire du champ physique

PAR

A. EINSTEIN

1. — La « théorie unitaire du champ physique » se propose de renouveler la théorie de la relativité générale en réunissant, dans une discipline unique, les théories du champ électromagnétique et du champ de gravitation.

A l'heure actuelle cette nouvelle théorie n'est qu'un édifice mathématique, à peine relié par quelques liens très lâches à la réalité physique. Elle a été découverte par des considérations exclusivement formelles et ses conséquences mathématiques n'ont pas pu être suffisamment développées pour permettre la comparaison avec l'expérience. Néanmoins, cette tentative me semble très intéressante en elle-même ; elle offre surtout de magnifiques possibilités de développement et c'est dans l'espoir que les mathématiciens s'y intéresseront, que je me permets de l'exposer et de l'analyser ici.

2. — Au point de vue formel, l'idée fondamentale de la théorie de la relativité générale est la suivante : l'espace à quatre dimensions, dans lequel ont lieu les phénomènes, n'est pas amorphe, mais possède une structure ; l'existence de celle-ci se traduit par l'existence d'une métrique riemannienne dans cet espace.

Physiquement, cela signifie qu'il existe une forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

caractéristique de cet espace, qui exprime sa métrique, et qui, égalée à zéro,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$$

définit la loi de la propagation de la lumière dans cet espace. Cette forme quadratique est donc reliée intimement à la réalité physique ; son introduction n'est pas un simple jeu de l'esprit et son emploi se justifie par la correspondance qu'on peut établir entre ses coefficients $g_{\mu\nu}$ et un ordre de phénomènes connus, — les phénomènes de gravitation.

La structure de l'espace étant définie par la forme quadratique fondamentale, le problème qui se pose alors est le suivant : quelle est la loi *la plus simple* qu'on puisse imposer aux coefficients $g_{\mu\nu}$? La réponse est donnée par la théorie tensorielle de RIEMANN. On peut former à partir des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées un tenseur $R^i_{k,lm}$, appelé le tenseur de courbure de RIEMANN. En le contractant par rapport aux indices i et m on en déduit un autre tenseur de second rang R_{kl}. La loi la plus simple à laquelle on puisse assujettir les $g_{\mu\nu}$ s'exprime simplement par l'équation

$$R_{kl} = 0.$$

Cette théorie serait la théorie physique idéale si elle pouvait décrire complètement le champ de forces qui existe réellement dans la nature, c'est-à-dire l'ensemble du champ de gravitation et du champ électromagnétique. Mais l'équation $R_{kl} = 0$, qui semble décrire les phénomènes de gravitation, ne rend absolument pas compte des phénomènes électromagnétiques. La métrique seule ne suffit pas pour décrire cet ensemble.

Pour caractériser complètement l'espace, on cherchait à se donner, en plus de la forme fondamentale $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, une forme linéaire $\varphi_\mu dx^\mu$, dont les coefficients φ_μ seraient les composantes du vecteur potentiel électromagnétique. Les équations complètes du champ seraient alors de la forme $R_{kl} + T_{kl} = 0$, T_{kl} étant un terme dépendant des potentiels, le tenseur électromagnétique de MAXWELL par exemple, ou quelque chose d'analogue. Cependant cette manière de procéder n'est pas satisfaisante. En effet, l'équation $R_{kl} + T_{kl} = 0$ renferme deux termes *indépendants* ; on peut logiquement en changer un sans toucher à l'autre. On introduit de cette façon, dans la théorie, deux éléments indépendants, correspondant à *deux* « états » de l'espace. La nature présenterait ainsi un manque d'unité auquel notre esprit se refuse absolument de croire. Il semble au contraire beaucoup plus satisfaisant d'attribuer ce défaut à l'imperfection de la théorie, et de chercher à la compléter, à l'enrichir, pour réaliser une unité vers laquelle notre esprit tend invinciblement.

La théorie unitaire du champ physique part donc de la constatation que la métrique seule ne suffit pas pour décrire les phénomènes. Cependant, celle-ci fournit au moins une partie de la vérité ; elle possède certainement un substratum physique. Le problème qui se pose alors, consiste à trouver l'élément qui complètera la métrique et qui permettra de décrire la structure de l'espace sans rien laisser de côté.

3. — Dans ce but, cherchons quel est le sens de la notion de métrique riemannienne et quelle représentation on peut en donner.

Considérons un continu à n dimensions, présentant une structure riemannienne. Un tel continu est caractérisé par le fait que la géométrie euclidienne est valable dans un domaine infiniment petit autour d'un point donné. De plus, si on se donne deux points A et B à distance finie, on peut comparer entre elles *les longueurs* de deux éléments linéaires, situés en A et en B, mais on ne peut pas faire la même chose pour leurs *directions* ; dans la géométrie riemannienne il n'existe pas de parallélisme à distance.

4. — Imaginons dans un tel espace, en un point donné, un système cartésien de coordonnées, c'est-à-dire un système de n axes rectangulaires, portant chacun un vecteur unité. Nous appellerons un tel système d'axes un *n-pode* (n-Bein).

Le domaine euclidien infinitésimal entourant un point est complètement caractérisé quand on s'est donné un n-pode en ce point. La métrique de l'espace est connue si l'on a fixé un n-pode *en chaque point* de cet espace. Mais inversement, la métrique d'un espace riemannien ne suffit pas pour déterminer d'une manière univoque, un n-pode en chaque point. En effet, la métrique de l'espace reste la même si l'on fait subir à tous les n-podes des rotations arbitraires. Quand on ne se donne que la métrique, l'orientation des n-podes n'est pas fixée ; il reste encore un certain arbitraire dans la détermination de la structure de l'espace. On voit donc de cette façon, que la description des espaces par des *n*-podes est, en quelque sorte, plus riche que la description à l'aide de la forme quadratique fondamentale. On conçoit qu'on puisse trouver dans l'arbitraire qu'introduit cette description, les moyens de rattacher à la structure de l'espace la cause des phénomènes électromagnétiques, qui n'ont pas encore trouvé de place dans la théorie.

Ce n'est pas la première fois qu'on envisage de tels espaces. Du point de vue purement mathématique ils ont déjà été étudiés auparavant. M. CARTAN a eu l'amabilité de rédiger, pour les *Mathematische Annalen*, une note exposant les diverses phases du développement formel de ces conceptions.

Supposons qu'on se donne un *n*-pode en A ; la structure de l'espace sera définie si nous nous donnons en chaque autre point un *n*-pode quelconque, que nous regarderons comme parallèle au premier, par définition. Entre deux points de l'espace on peut donc établir outre une relation de grandeur, une relation de direction. La notion de parallélisme à distance possède maintenant un sens précis, qu'elle ne pouvait pas avoir dans la théorie de RIEMANN. Deux vecteurs ayant leurs origines en des points à distance finie, seront parallèles, s'ils ont les mêmes composantes dans leurs systèmes locaux. Quand on caractérise la structure de l'espace par un champ de *n*-podes, on exprime *en même temps*, l'existence d'une métrique riemannienne et celle du parallélisme à distance ; entre deux éléments infinitésimaux de cet espace il y a ainsi non seulement une relation de grandeur, exprimée par la métrique, mais aussi une relation de direction, exprimée par l'orientation des *n*-podes.

En résumé, la seule hypothèse nouvelle à introduire pour arriver à une géométrie plus complète que celle de RIEMANN, concerne l'existence de « directions » dans l'espace et de relations entre ces directions. Cette notion de « direction » n'est pas contenue, ni dans la notion de continu, ni dans celle d'espace. Il faut donc une hypothèse supplémentaire pour admettre qu'il y a dans l'espace quelque chose comme les relations de direction, exprimées par l'existence d'un parallélisme à distance finie.

Cependant il est facile de voir que, même avec l'hypothèse du parallélisme à distance jointe à celle d'une métrique riemannienne, le champ des *n*-podes n'est défini qu'à une rotation près (commune pour tous les *n*-podes).

5. — Introduisons un système général de coordonnées de GAUSS et considérons le n-pode attaché au point P. Soient h_s^ν les composantes des vecteurs unitaires de l'n-pode dans le système de coordonnées de GAUSS. Dans ce qui suit, tout index grec sera relatif aux coordonnées et tout index latin à l'n-pode. h_s^ν représente donc la composante ν-ème du vecteur unité correspondant à l'axe s de l'n-pode. Dans un espace quadridimensionnel, $n = 4$, nous avons donc 16 grandeurs h_s^ν qui décrivent parfaitement la structure de l'espace.

Ces grandeurs étant données, on peut calculer les composantes d'un vecteur quelconque A dans un système local, en fonction de ses composantes dans le système de GAUSS. On a

$$A^\nu = h_s^\nu A_s \tag{1}$$

et inversement

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu \tag{2}$$

où les $h_{s\nu}$ sont les mineurs du déterminant $h = |h_s^\nu|$ divisés par h. Suivant l'usage, on doit faire la sommation par rapport aux indices qui se trouvent figurer deux fois.

Pour avoir la métrique de cet espace calculons la grandeur d'un vecteur A. Dans un système local, la géométrie euclidienne étant valable, on a :

$$A^2 = \sum A_s^2 = \sum h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu. \tag{3}$$

Les coefficients de la forme métrique fondamentale $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ seront donc donnés par

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{4}$$

On voit donc qu'un champ de n-podes (h_s^ν) détermine complètement la métrique $(g_{\mu\nu})$ mais que la réciproque n'est pas vraie.

Les grandeurs h_s^ν forment le tenseur fondamental analogue au tenseur $g_{\mu\nu}$ de l'ancienne théorie ; pour le cas $n = 4$, il y a 16 grandeurs h_s^ν et seulement 10 $g_{\mu\nu}$.

La conception de tenseur se trouve élargie dans cette théorie. En effet, nous devons considérer ici, non seulement les transformations changeant le système de coordonnées, mais aussi celles qui modifient l'orientation des n-podes. Les n-podes sont déterminés à une rotatiou près ; les seules relations admissibles devront donc être invariantes par rapport à une telle rotation. Par exemple, changeons en même temps le système de coordonnées et l'orientation des systèmes locaux. La rotation étant caractérisée par les coefficients α_{st} constants, indépendants des coordonnées et tels que

$$\alpha_{s\mu} \cdot \alpha_{s\nu} = \alpha_{\mu s} \cdot \alpha_{\nu s} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{5}$$

on aura

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\rho}} h_t^{\rho}. \tag{6}$$

A chaque index local correspond une transformation α et à chaque indice grec une transformation ordinaire.

6. — Les lois algébriques auxquelles sont soumis ces tenseurs sont presque les mêmes que pour les tenseurs du calcul différentiel absolu. On peut définir la somme et la différence de deux tenseurs T et S, ayant les mêmes indices. Le produit de deux tenseurs a la même loi de transformation qu'un tenseur de rang plus élevé.

L'opération de la contraction est aussi applicable, soit pour les indices grecs, soit pour les indices latins. Pour les premiers il faut toujours égaler un indice supérieur à un indice inférieur. La mutation des indices est possible ; en particulier on peut remplacer un indice latin par un indice grec, au moyen du tenseur fondamental h_s^{ν}. Par exemple, soit le tenseur $T_{\cdot s}^{\cdot\ \lambda}$. On a

$$h_s^{\tau} T_{\cdot s}^{\cdot\ \lambda} = T^{\tau\lambda}. \tag{7}$$

On peut ainsi passer des composantes locales aux composantes du même tenseur dans le système de GAUSS et inversement.

Enfin calculons l'élément de volume dans cette nouvelle théorie. Cette importante quantité a pour expression dans la théorie de la relativité générale

$$d\Omega = \sqrt{g} \cdot d\tau$$

où

$$g = |\,g_{\mu\nu}\,| \qquad \text{et} \qquad d\tau = dx^1 \cdot dx^2 \cdots$$

Or, on a

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu s} \cdot h_{\nu s} \qquad \text{et} \qquad g = h^2 ;$$

donc

(8) $$d\Omega = hd\tau.$$

Le fait que l'irrationnelle a disparu est encore un avantage de la nouvelle théorie.

7. — Considérons maintenant le déplacement parallèle d'un vecteur A^μ. Dans une multiplicité riemannienne ce déplacement est donné par la formule

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \, \delta x^\beta.$$

Les $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sont les crochets de CHRISTOFFEL et doivent satisfaire à deux conditions :

1° La translation qu'ils définissent doit conserver la métrique, c'est-à-dire laisser invariante la longueur des vecteurs considérés et

2° Les $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ doivent être symétriques en α et β

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}.$$

Dans cette géométrie, le déplacement parallèle n'est pas intégrable. Si on l'effectue le long d'une courbe fermée, le vecteur initial ne coïncide pas avec le vecteur final et la différence est mesurée par le tenseur de RIEMANN $R^i_{k,lm}$.

Dans la nouvelle théorie, les choses se présentent différemment. Le déplacement parallèle d'un vecteur A est donné par une formule analogue

(9) $$\delta A^\mu = \Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \, \delta x^\beta.$$

Mais ici le déplacement est intégrable : si on déplace un vecteur le long d'une courbe fermée, le vecteur initial coïncidera toujours avec le vecteur final. Le tenseur de RIEMANN formé à partir des $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ sera par conséquent identiquement nul. De plus les $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ ne sont plus symétriques en α et β. On vérifie aisément ces résultats en calculant l'expression des $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ en fonction des h.

Soient deux points voisins x^β et $x^\beta + dx^\beta$; leurs n-podes sont « parallèles » entre eux. Les vecteurs A_s et $A_s + \delta A_s$ seront parallèles s'ils ont mêmes composantes dans les deux n-podes. La condition du déplacement parallèle de x^β en $x^\beta + dx^\beta$ est donc $\delta A_s = 0$.

En exprimant A_s en fonction des composantes de A dans le système de GAUSS

$$A_s = h_{s\mu} A^{\mu}$$

on a

(10) $$\delta(h_{s\mu} A^{\mu}) = 0.$$

En multipliant par $h_s{}^{\sigma}$ on déduit

(11) $$0 = h_s{}^{\sigma} \left\{ h_{s\mu} \delta A^{\mu} + A^{\alpha} \cdot \frac{\partial h_{s\alpha}}{\partial x^{\beta}} \delta x^{\beta} \right\}$$

ou, en désignant par une virgule (,) la dérivation ordinaire

(12) $$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h_s{}^{\mu} h_{s\alpha,\,\beta}$$

et aussi

(13) $$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = - h_{s\alpha} h_s{}^{\mu}{}_{,\beta}.$$

Par le même mécanisme que celui utilisé dans le calcul différentiel absolu, on peut former, à partir des $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ l'opérateur de la dérivée covariante. En le désignant par un point-virgule (;), on a, pour un tenseur du premier rang, contrevariant

(14) $$A^{\mu}{}_{;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} + A^{\alpha} \Delta^{\mu}_{\alpha\sigma}$$

et pour un tenseur du premier rang covariant

(15) $$A_{\mu;\,\sigma} = A_{\mu,\,\sigma} - A_{\alpha} \Delta^{\alpha}_{\mu\sigma}.$$

On trouve des formules analogues pour les tenseurs d'un rang plus élevé. Elles sont pareilles aux formules du Calcul différentiel absolu fondé exclusivement sur la métrique, et se déduisent de la même façon.

On constate facilement que la dérivée covariante du tenseur fondamental est identiquement nulle

(16) $$h_s{}^{\nu}{}_{;\,\tau} = h_{s\nu;\,\tau} = g_{\sigma\tau;\,\rho} = g^{\sigma\tau}{}_{;\,\rho} \equiv 0.$$

On a, en effet

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} = h^{\nu}_{s,\,\tau} + h^{\alpha}_{s} \Delta^{\nu}_{\alpha\tau} = \delta_{st}(h^{\nu}_{t,\,\tau} + h^{\alpha}_{t} \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) = h^{\alpha}_{s}(h_{t\alpha} h^{\nu}_{t,\,\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) \equiv 0$$

La dérivée covariante d'un produit de deux tenseurs s'obtient par la règle ordinaire du calcul différentiel. On a, par exemple, T: et S: étant deux tenseurs de rang quelconque

$$(T:S:)_{;\tau} = T:_{;\tau}S: + T:S:_{;\tau}. \tag{17}$$

Deux dérivations covariantes ne sont pas permutables, c'est-à-dire l'ordre des dérivations n'est pas indifférent. Soit un tenseur T : : quelconque. Prenons les dérivées covariantes successives, d'abord dans l'ordre σ, τ, ensuite dans l'ordre τ, σ et faisons la différence. Nous avons la formule fondamentale

$$T::_{;\sigma;\tau} - T::_{;\tau;\sigma} \equiv - T::_{;\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{18}$$

où

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}.$$

Il est facile de démontrer cette formule dans des cas simples. Supposons d'abord que T : : se réduise à un scalaire ψ. Dans ce cas la dérivée covariante se confond avec la dérivée ordinaire

$$\psi_{;\sigma} = \psi_{,\sigma}$$

et nous avons

$$\psi_{;\sigma;\tau} = \psi_{,\sigma,\tau} - \psi_{,\alpha}\, \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

$$\psi_{;\tau;\sigma} = \psi_{,\tau,\sigma} - \psi_{,\alpha}\, \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}$$

$$\psi_{;\sigma;\tau} - \psi_{;\tau;\sigma} = - \psi_{,\alpha}(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}) = - \psi_{;\alpha}\, \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

La différence a bien la forme annoncée. On reconnaît que $\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$ est un tenseur.

Le cas d'un vecteur T : : $= A^{\mu}$ se réduit au précédent, si nous tenons compte que dans cette théorie, le parallélisme à distance existe. L'existence de ce parallélisme entraîne, en effet, la possibilité de l'existence d'un champ uniforme de vecteurs (Parallel-Felder) ; il est possible d'imaginer qu'en chaque point de l'espace, il y ait un vecteur équipollent à un vecteur donné.

Cela étant, considérons un champ uniforme de vecteurs *arbitraires* a_{μ} ; on montre facilement que $a_{\mu;\sigma} = a^{\nu}_{;\sigma} = o$. Formons avec le vecteur donné A_{μ}, le scalaire

$$\psi = A^{\mu} \cdot a_{\mu}.$$

A ce scalaire nous pouvons appliquer la formule établie plus haut pour la différence D. Ensuite, en tenant compte de la règle de dérivation d'un produit, on a $\left(A^{\mu}_{\alpha\mu}\right)_{;\,\sigma} = a_{\mu}A^{\mu}_{\;;\,\sigma}$. Les quantités arbitraires a^{μ} sortent en facteurs et disparaissent, et finalement, on a une relation de la même forme

$$A^{\mu}_{\;;\,\sigma;\,\tau} - A^{\mu}_{\;;\,\tau;\,\sigma} \equiv - A^{\mu}_{\;;\,\alpha}\,\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

qu'il est facile de généraliser pour un tenseur de rang quelconque.

8. — Une différence importante entre la théorie présentée ici et la théorie de RIEMANN mérite toute notre attention. Dans la théorie de RIEMANN, il n'y a pas de tenseur qui puisse s'exprimer uniquement au moyen des dérivées premières du tenseur fondamental. Dans la nôtre, la différence

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{19}$$

est un tenseur qui ne contient que des dérivées premières. En outre, ce tenseur est remarquable parce que, dans un certain sens, il est l'analogue du tenseur de RIEMANN : *si Λ est nul le continu est euclidien.*

Ce résultat est facile à établir. On a d'après la formule donnée pour $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{s}(h_{s\mu,\,\nu} - h_{s\nu,\,\mu}) = 0.$$

En multipliant par h^{α}_{t} on en déduit, à cause de $h^{\alpha}_{s}h_{t\alpha} = \delta_{st}$

$$h_{t\mu,\,\nu} - h_{t\nu,\,\mu} = 0$$

$h_{t\mu}$ est donc de la forme

$$h_{t\mu} = \frac{\partial \psi_t}{\partial x^{\mu}}$$

Si nous prenons comme coordonnées de GAUSS justement les ψ_t, ce qui est possible, $\psi_t = x^t$, les

$$h_{t\mu} = \delta_{t\mu} = \begin{cases} 1 & t = \mu \\ 0 & t \neq \mu \end{cases}$$

sont des constantes ; elles peuvent se ranger dans un tableau dans lequel seuls les termes diagonaux sont égaux à 1, les autres étant nuls. Les $h_{s\mu}$, et les $g_{\mu\nu}$ étant constants, le continu est euclidien.

9. — Considérons la grandeur Λ qui va jouer dans la nouvelle théorie un rôle fondamental. Il y a en tout $6 \times 4 = 24$ grandeurs Λ ; les h ne sont cependant qu'en nombre de 16. Donc il y a entre les divers Λ des relations qui doivent être satisfaites identiquement. Pour les trouver, partons de l'expression de Λ en fonction des Δ. Le déplacement parallèle étant intégrable, le tenseur « de courbure » analogue au tenseur de RIEMANN sera donc identiquement nul. Nous avons par conséquent

$$(20) \qquad \Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda,\,\mu} - \Delta^{\iota}_{\varkappa\mu,\,\lambda} - \Delta^{\iota}_{\sigma\lambda} \cdot \Delta^{\sigma}_{\varkappa\mu} + \Delta^{\iota}_{\sigma\mu}\Delta^{\sigma}_{\varkappa\lambda} \equiv 0.$$

Permutons circulairement les indices $\varkappa$, λ, μ et faisons la somme ; ensuite introduisons la dérivée covariante au lieu de la dérivée ordinaire. On arrive ainsi à l'identité suivante pour les Λ :

$$(21) \qquad (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa;\,\lambda}) + (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda}) \equiv 0.$$

En contractant une fois par rapport à i et à μ et en posant $\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha} = \varphi_{\mu}$ on trouve une autre identité importante

$$(22) \qquad \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} - \left(\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) \equiv 0.$$

Pour en déduire une autre il faut faire appel à la règle de permutation des dérivées covariantes, qui s'exprime par

$$T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\sigma\,;\,\tau} - T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\tau\,;\,\sigma} \equiv - T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Introduisons une nouvelle notation : convenons qu'un indice souligné signifie un indice changé de place, c'est-à-dire élevé ou abaissé. Par exemple, écrire $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ signifie prendre les composantes contrevariantes de $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}.$$

Avec cette convention, appliquons la règle précédente à $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ en la dérivant par rapport à ν et à α. On a

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\alpha;\,\nu} \equiv - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha}.$$

Le second membre peut s'écrire

$$- \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha} \equiv - (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha})_{;\,\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma}.$$

Dans le premier terme du second membre changeons le nom des indices muets σ, α et ν en α, σ et τ ; ce terme devient :

$$-(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma})_{;\alpha} \equiv +(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\alpha}.$$

On a donc

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu;\alpha} - (\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\sigma} \equiv 0$$

ou

$$(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\sigma} \equiv 0 \tag{23}$$

qui constitue l'identité cherchée. Introduisons les notations :

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha}.$$

L'identité (23) s'écrit alors

$$G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}F_{\nu\alpha} \equiv 0. \tag{24}$$

10. — Ayant défini la manière de décrire mathématiquement la structure de l'espace, examinons maintenant le problème fondamental de la théorie, qui est l'établissement des équations du champ. Comme dans la théorie de la relativité générale, ce problème consiste à trouver les conditions les plus simples qu'on puisse imposer aux éléments définissant la structure de l'espace, c'est-à-dire aux grandeurs $h_s{}^{\nu}$. Il s'agit donc d'un choix à faire parmi diverses possibilités ; la difficulté de ce choix réside en l'absence de points de repère qui puissent nous guider. Avant d'écrire les équations définitives du champ, il me semble intéressant d'indiquer le chemin que j'ai suivi pour les découvrir.

Mon point de départ a été constitué par les identités auxquelles satisfont les grandeurs $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. D'une façon générale, la recherche de certaines identités peut être d'un grand secours pour le choix des équations du champ, en nous suggérant des formes possibles pour les relations cherchées. L'étude de ces identités doit donc logiquement précéder le choix du système d'équations. Mais on ne peut pas savoir, *a priori*, quelles sont les grandeurs entre lesquelles il faut établir des identités.

Un premier point de repère qui apparaît ici, semble être le suivant :

les relations cherchées devront vraisemblablement contenir $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ et ses dérivées, ce tenseur étant le seul qui puisse s'exprimer uniquement en fonction des dérivées premières du tenseur fondamental.

La condition la plus simple à imposer serait

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = 0.$$

Il est évident que cette condition est trop restrictive : l'espace serait euclidien. De plus, ***elle ne contient que des dérivées premières*** et il est vraisemblable que les équations qui régissent les phénomènes naturels sont du second ordre, comme par exemple, l'équation de POISSON.

Essayons alors de poser

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\sigma} = 0.$$

Cette relation n'est pas acceptable non plus, car elle est presque équivalente à la première ; mais elle est utile parce qu'elle nous suggère immédiatement d'essayer à annuler les divergences qu'on peut former à partir de $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\sigma}$. Partons donc de cette dérivée covariante et contractons-la de toutes les manières possibles (ce qui équivaut à prendre la divergence). Nous avons deux possibilités :
soit

(25) $$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\alpha} = 0$$

soit

(26) $$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} = 0.$$

On voit immédiatement que l'ensemble de ces systèmes ne saurait convenir, parce que le nombre des équations ne peut pas être choisi arbitrairement : on ne peut pas garantir sans étude spéciale, la compatibilité de ces équations. Or, il est indispensable que le système choisi soit tel que les équations soient compatibles.

11. — En général, pour un espace à n dimensions, il y a n^2 variables $h_s{}^{\nu}$. Mais dans une théorie covariante générale, le choix du système de coordonnées étant arbitraire, n variables parmi les n^2, peuvent être prises arbitrairement. Par conséquent, le nombre des équations indépendantes sera $n^2 - n$. Le nombre des équations pourra même être plus grand que $n^2 - n$, pourvu qu'elles soient reliées par un nombre convenable d'identités qui rendent le système compatible. En tout cas, le système devra satisfaire à la règle que l'*excès du nombre d'équations sur celui des identités soit égal au nombre des variables diminué de n.*

Considérons par exemple les équations de la relativité générale. Nous avons 10 fonctions inconnues $g_{\mu\nu}$; le système de coordonnées étant arbitraire, nous pouvons le choisir de telle façon que 4 des fonctions $g_{\mu\nu}$ soient quelconques. Les 6 inconnues auront donc à satisfaire à 10 équations. Mais, comme on le sait, on a en même temps les 4 identités

$$(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} \equiv 0$$

qui rétablissent la compatibilité (1).

On peut citer d'autres cas pour lesquels le nombre d'équations surpasse le nombre des inconnues, sans que les équations soient incompatibles. Les équations de MAXWELL, par exemple

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \qquad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

sont au nombre de 8 avec 6 inconnues ; le système est cependant compatible, les équations étant reliées par deux identités bien connues.

Que signifie, au fond, la présence d'un nombre plus grand d'équations que d'inconnues ?

Dans l'exemple choisi, les deux équations vectorielles de MAXWELL déterminent canoniquement le problème. Si les champs E et H sont donnés à l'instant t, tout le reste est déterminé. Mais les autres relations scalaires font que les conditions initiales ne sont pas arbitraires. Donc, une plus forte détermination du problème, un nombre d'équations plus grand que le nombre d'inconnues (avec, toutefois, les identités qui les rendent compatibles), lève dans ce cas, en partie, l'arbitraire qui existait pour les conditions initiales. Il est d'ailleurs clair, qu'une théorie compatible avec l'expérience est d'autant plus satisfaisante qu'elle limite d'une façon plus complète cet arbitraire. Ceci dit, revenons à notre problème.

12. — Pour un espace à 4 dimensions, $n = 4$, nous avons 16 inconnues

(1) Le symbole " ; " est ici employé dans une signification bien connue, différente de celle qui est définie dans le reste de cet article.

$h_s{}^\nu$ dont quatre arbitraires, donc seulement 12 qui devront être déterminées par les équations du champ. Le nombre des équations, qui à première vue, formaient un système convenable était de 22, à savoir 6 équations (25) et 16 équations (26). Il nous faudrait donc 10 identités, qui dans ce cas n'existent pas. On comprend de cette façon comment la condition de compatibilité nous permet de limiter, d'une manière efficace, l'arbitraire dans le choix des équations du champ.

Examinons alors l'identité (24). Elle nous suggère de prendre comme équations du champ, le système

$$G^{\mu\alpha} = 0 \tag{27}$$

$$F^{\mu\alpha} = 0 \tag{28}$$

ou explicitement

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0 \tag{27 a}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha} = 0 \tag{28 a}$$

Ce système, peu différent du système (25), (26) est constitué toujours par 22 équations, mais choisies de façon à satisfaire aux 4 identités (24).

Néanmoins, l'excès $22 - 4 = 18$ est toujours plus grand que la différence $16 - 4 = 12$. Pour que le nouveau système d'équations soit compatible, il faut qu'entre ses équations, il existe encore 6 identités supplémentaires. Nous prouverons que ces identités nécessaires existent. Pour le montrer, donnons d'abord aux équations (28) une autre forme, équivalente à la première, en nous guidant sur l'identité (22)

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - (\varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu}) \equiv 0. \tag{22}$$

Nous avions posé $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} = 0$; d'après (22) il résulte qu'on a aussi

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Donc φ_μ est la dérivée d'un scalaire, qu'il est commode de désigner ici par $\log\psi$

$$\varphi_\mu = \frac{\partial \log \psi}{\partial x^\mu}.$$

Posons donc

$$F_\mu = \varphi_\mu - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^\mu}\ ;$$

on a $F_\mu = 0$. Nous pouvons alors remplacer les équations

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha} = 0$$

par les équations $F_\mu = 0$ et écrire notre système d'équations comme suit :

$$G^{\mu\alpha} = 0 \tag{29}$$

$$F_\mu = 0 \tag{30}$$

ou

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0 \tag{29a}$$

$$\varphi_\mu - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^\mu} = 0. \tag{30a}$$

Nous avons maintenant 16 équations (29) et 4 équations (30), donc en tout, 20 équations. Nous avons introduit une nouvelle variable, le scalaire ψ ; il y a donc $16 + 1 = 17$ inconnues, dont 4 arbitraires. Pour que le système soit compatible, il faudrait qu'il y eût entre les $G^{\mu\alpha}$ et F_μ

$$20 - (17 - 4) = 7$$

7 identités. Nous n'en avons trouvé que 4, les identités (24). Or, il existe encore des identités entre les grandeurs envisagées et, — miraculeusement on peut dire, — il y en a juste trois. Je ne saurais dire quelle est la raison profonde de leur existence. Elle tient essentiellement à la nature de l'espace envisagé. Ce type d'espace a été, d'ailleurs, envisagé, avant moi, par des mathématiciens, notamment par WEITZENBÖCK, EISENHART et CARTAN ; j'espère qu'ils voudront bien nous aider à découvrir l'origine cachée de ces nouvelles identités.

Quoi qu'il en soit, elles existent ; je vais vous indiquer comment on peut y arriver.

Décomposons le tenseur $G_{\mu\alpha}$ en ses parties symétrique $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ et antisymétrique $\underline{G}^{\mu\alpha}$. On a

$$\left\{\begin{aligned} 2\underline{G}^{\mu\alpha} &= (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} - \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} \\ &= (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}. \end{aligned}\right.$$

puisque les $\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}}$ sont antisymétriques en α, ν.

On peut exprimer $2\underline{G}^{\mu\alpha}$ en fonction de $F^{\mu\alpha} = \Lambda^{\nu}_{\mu\alpha;\nu}$ et d'un tenseur antisymétrique par rapport à un couple quelconque des indices α, μ, ν :

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{31}$$

On a évidemment

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = S^{\nu}_{\underline{\alpha\mu};\nu} + F^{\mu\alpha} + C$$

le terme complémentaire C étant donné par

$$C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Pour le calculer, observons qu'en échangeant les indices muets σ et τ, on a

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\tau\sigma} = -\Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}$$

et

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}}\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} = -\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\sigma}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

D'autre part, nous avons l'égalité

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}$$

à cause de

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}g^{\beta\tau}g^{\gamma\sigma}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\gamma\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}.$$

Donc

$$-C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}})\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}$$
$$- \frac{1}{2}(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}})\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$
$$-C = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

Donc finalement

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\nu} + \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}. \tag{32}$$

Développons la dérivée covariante (les indices soulignés sont contrevariants). On a

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\nu} = S^{\tau}_{\underline{\alpha\mu};\tau} = S^{\tau}_{\underline{\alpha\mu},\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\Delta^{\tau}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Delta^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Or, en échangeant σ et τ

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2}(S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma})$$

$$= \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}(\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} - \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}) = -\frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

parce que

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} = S^{\mu}_{\underline{\tau\sigma}} = S^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}$$

et aussi

$$S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Delta^{\mu}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}(\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} - \Delta^{\mu}_{\tau\sigma}) = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Donc

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\nu} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\nu} + \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Delta^{\nu}_{\sigma\nu},$$

par conséquent

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\nu} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} + F^{\mu\alpha}. \tag{33}$$

Calculons le terme $\Delta^{\nu}_{\sigma\nu}$ d'après sa définition. On a

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \Delta^{\tau}_{\sigma\tau} - \Delta^{\tau}_{\tau\sigma}.$$

Or, en général, par définition

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s}h_{s\alpha,\,\beta} \qquad \Delta^{\tau}_{\tau\sigma} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \log h}{\partial x^{\sigma}}.$$

D'autre part nous avons posé

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma}$$

et

$$F_{\sigma} = \varphi_{\sigma} - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^{\sigma}}.$$

Donc

$$\Delta^{\sigma}_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma} + \frac{\partial \log h}{\partial x^{\sigma}} = F_{\sigma} + \frac{\partial \log (\psi h)}{\partial x^{\sigma}}.$$

Substituons dans l'équation précédente, après l'avoir multipliée par ψh

$$\psi h(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha}) = \psi h\, S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu},\,\sigma} - \psi h\, F_{\sigma}S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} - \psi h\frac{\partial \log (\psi h)}{\partial x^{\sigma}}S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}.$$

En passant le deuxième terme dans le premier membre on a

$$\psi h(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}).$$

Or, si l'on dérive le second membre par rapport à α il s'évanouit, et nous avons les identités

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\psi h(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\cdot F_{\sigma})\right] \equiv 0. \tag{34}$$

En effet, le deuxième membre s'écrit, en changeant le nom des indices muets

$$\left(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\right)_{,\sigma,\alpha} = \left(h\psi S^{\alpha}_{\underline{\mu\sigma}}\right)_{,\alpha,\sigma} = -\left(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\right)_{,\alpha,\sigma}$$

puisque

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\sigma}} = - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}.$$

Il n'y a que 3 *identités* (34) *indépendantes.* Si $A^{\mu\alpha}$ est un tenseur antisymétrique

$$A^{\mu\alpha} = - A^{\alpha\mu}$$

tel que

$$(A^{\mu\alpha})_{,\alpha} \equiv 0$$

on a

$$(A^{\mu\alpha})_{,\alpha,\mu} = (A^{\alpha\mu})_{,\mu,\alpha} = -(A^{\mu\alpha})_{,\mu,\alpha} \equiv 0.$$

Ceci est vrai quel que soit $A^{\mu\alpha}$ pourvu qu'il soit antisymétrique. Si nous prenons pour $A^{\mu\alpha}$ le premier membre de (34) nous avons une relation indépendante des valeurs qu'y prennent les $G^{\mu\alpha}$ et les F_{σ} ce qui diminue de 1 le nombre des identités indépendantes. Finalement le nombre de ces identités est de $4 + 3 = 7$, le nombre des équations 20, et le nombre des inconnues 17. On a

$$20 - 7 = 17 - 4$$

le système est donc compatible.

13. — On peut d'ailleurs chercher à prouver directement la compatibilité du système d'équations proposé. Pour cela, supposons que *toutes* les équations

$$G^{\mu\alpha} = 0 \qquad F_{\sigma} = 0$$

soient satisfaites pour une section x^4 = constante = a. Séparons-les en deux groupes : le premier contenant 13 équations [1]

$$\begin{array}{llll} F_1 = 0 & F_2 = 0 & F_3 = 0 & F_4 = 0 \\ G^{11} = 0 & G^{12} = 0 & G^{13} = 0 & \\ G^{21} = 0 & G^{22} = 0 & G^{23} = 0 & \\ G^{31} = 0 & G^{32} = 0 & G^{33} = 0 & \end{array}$$

et le deuxième, les 7 autres. On peut facilement démontrer la proposition suivante : *Toutes les équations étant satisfaites dans une section $x^4 = a$, si les 13 équations du premier groupe sont satisfaites dans tout l'espace à 4 dimensions, les équations du deuxième groupe le sont aussi, automatiquement.*

En effet, on a

$$F_{\mu\alpha} = F_{\mu,\alpha} - F_{\alpha,\mu}$$

F_μ étant nul partout les $F_{\mu\alpha}$ le seront aussi.
Dans la section $x^4 = a$ on a

$$\frac{\partial \underline{G}^{\mu 4}}{\partial x^4} = 0$$

comme le montre l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[h\psi\left(2\underline{G}^{\mu\alpha} - \mathfrak{F}^{\mu\alpha} + S_{\underline{\mu\alpha}}^{\sigma} F_\sigma\right)\right] \equiv 0 \tag{34}$$

Considérons une section infiniment voisine $x^4 = a + da$. Les $F^{\mu\alpha}$ et les F_σ étant nuls partout, on déduit de l'identité précédente que pour $\alpha = 4$, les $\underline{G}^{\mu\alpha}$ seront également nuls dans cette section. Un raisonnement analogue, utilisant l'identité

$$G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \Lambda_{\underline{\mu\tau}}^{\sigma} F_{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{24}$$

nous montre que la partie symétrique de $G^{\mu\alpha}$, $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ s'annulera aussi pour $\alpha = 4$, dans la section infiniment voisine $x^4 = a + da$. La conclusion est donc valable pour

$$G^{\mu\alpha} = \underline{G}^{\mu\alpha} + \underline{\underline{G}}^{\mu\alpha},$$

dans une section $x^4 = a + da$, et peut s'étendre de proche en proche à tout l'espace.

(1) La compatibilité de ces 13 équations n'est pas douteuse.

14. — Examinons maintenant, autant qu'il sera possible, l'aspect physique de la théorie. Il est difficile de donner une interprétation physique des équations dans toute leur généralité ; on doit se borner à une première approximation.

Pour cela considérons un espace différant infiniment peu d'un espace euclidien. Ce dernier étant caractérisé par des $h_{s\nu}$ égaux à $\delta_{s\nu} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ (x^4 imaginaire), cela revient à poser

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \bar{h}_{s\nu} \tag{35 a}$$

On déduit qu'il faut poser

$$h_s^{\nu} = \delta_{s\nu} - \bar{h}_{\nu s}. \tag{35 b}$$

Nous remplacerons donc les $h_{s\nu}$ par cette expression dans les équations données et nous ne garderons que la première approximation. On aura

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s} h_{s\alpha,\,\beta} = \bar{h}_{\mu\alpha,\,\beta}$$
$$\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\mu\alpha,\,\beta} - \bar{h}_{\mu\beta,\,\alpha}.$$

Les équations du champ seront alors

$$\begin{array}{lll} (36) \quad \bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\mu,\,\nu} = 0 & & \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\nu,\,\mu} = 0 \\ \bar{h}_{\alpha\mu,\,\alpha,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\alpha,\,\mu} = 0 \end{array} \right. \\ & \text{ou} & \\ (37) \quad \bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\alpha} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\mu,\,\alpha} = 0 & & \end{array}$$

La deuxième équation signifie simplement qu'on peut poser

$$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\alpha} = \frac{\partial \chi}{\partial x^{\mu}} \tag{38}$$

de sorte que le système se réduit à

$$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\nu,\,\mu} = 0. \tag{39}$$

$$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\alpha} - \chi_{,\,\mu} = 0. \tag{40}$$

Cette forme n'est cependant pas très satisfaisante, parce qu'elle ne donne pas à première vue des renseignements suffisamment clairs sur le champ envisagé. Pour arriver à quelque chose de plus aisément interprétable, rappelons-nous que le système de coordonnées est arbitraire jusqu'à un certain point et faisons-lui subir une transformation infinitésimale

$$x^{\mu'} = x^{\mu} - \xi^{\mu} \tag{41}$$

les ξ^μ étant des infiniment petits du premier ordre, que nous allons choisir convenablement pour que le système prenne une forme simple.

Appliquer la transformation infinitésimale revient à remplacer les $h_{\mu\nu}$ par

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} + \xi^\mu{}_{,\nu} \tag{42}$$

(équation qui suit la règle de transformation des tenseurs).
On aura donc

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\,\nu} = \overline{h}_{\alpha\nu,\,\nu} + \xi^\alpha{}_{,\nu,\nu}$$

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\,\alpha} = \overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha} + \xi^\alpha{}_{,\nu,\alpha}$$

Choisissons les ξ^μ de façon que ces deux grandeurs s'annulent dans le nouveau système de coordonnées. Je dis qu'il suffit de prendre

$$\xi^\alpha{}_{,\nu,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\,\nu} \tag{43}$$

$$\xi^\alpha{}_{,\alpha} = -\chi. \tag{44}$$

En effet, on a d'abord

$$\xi^\alpha{}_{,\nu,\alpha} = \xi^\alpha{}_{,\alpha,\nu} = -\chi_{,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha}.$$

Ensuite ce système (43), (44) est compatible, quoique constitué par 5 équations pour 4 inconnues ; on a, en effet, la relation identique

$$(-\chi)_{,\nu,\nu} - (-\overline{h}_{\alpha\nu,\,\nu})_{,\alpha} \equiv 0.$$

Donc la résolution de ce système nous fournit les quantités ξ^μ telles que l'on ait

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\,\nu} = 0. \tag{45}$$

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\,\alpha} = 0. \tag{46}$$

Faisons donc ce changement de coordonnées. Nos équations deviennent (en supprimant les accents) :

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} = 0 \\ &\overline{h}_{\alpha\mu,\,\alpha} = 0 \\ &\overline{h}_{\alpha\mu,\,\mu} = 0 \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Si nous décomposons les $\overline{h}_{\alpha\mu}$ en une partie symétrique $S_{\alpha\mu}$ et une partie antisymétrique $A_{\alpha\mu}$, le système se décompose en deux autres ne contenant que des termes symétriques ou antisymétriques

$$\left\{\begin{array}{l} S_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0 \\ S_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} A_{\alpha\mu,\mu,\nu} = 0 \\ A_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{array} \tag{48}$$

Nous sommes arrivés ainsi à deux groupes d'équations. *Le groupe symétrique fournit les lois du champ de gravitation compatible avec la loi de* NEWTON-POISSON ; cependant le résultat n'est pas tout à fait identique à celui que donne la théorie basée sur la géométrie de RIEMANN. *Le groupe antisymétrique fournit les équations de* MAXWELL, sous une forme plus générale. Je crois effectivement que le système antisymétrique doit être interprété comme donnant les équations générales du champ électromagnétique (en première approximation).

Il existe donc dans ce cas une séparation bien nette entre les lois de l'électromagnétisme d'une part et celles de la gravitation d'autre part. Mais cette séparation n'est valable *qu'en première approximation* ; elle n'existe pas dans le cas général : le champ est régi par une loi unique.

Dans l'état actuel de la théorie on ne peut pas juger cependant si *l'interprétation* des grandeurs qui représentent le champ est correcte ou non. Un champ est en effet, défini en premier lieu par les actions motrices qu'il exerce sur des particules, et, actuellement on ne connaît pas la loi de ces actions ; la découverte de cette loi exige l'intégration des équations du champ, ce qui n'a pas encore été réalisé.

15. — Pour conclure, nous pouvons dire, en condensant les résultats que nous avons exposés jusqu'ici :

La structure particulière de l'espace que nous avons prise comme hypothèse fondamentale, nous a conduit à certaines équations générales du champ, qui se réduisent en première approximation aux équations bien connues de la gravitation et de l'électromagnétisme. Malgré cela, les résultats obtenus jusqu'à présent ne nous donnent pas la possibilité de vérifier expérimentalement les prévisions théoriques ; en effet, on n'a pas encore pu déduire par intégration, à partir des équations données, les lois de la structure des particules et de leur mouvement dans le champ. Le premier pas que la théorie devra commencer par franchir sera donc la découverte d'intégrales, — dépourvues de singularités, — satisfaisant aux équations différentielles du champ, et susceptibles de fournir une solution correcte au problème des particules et de leur mouvement. Ce n'est qu'après cela que la comparaison avec l'expérience deviendra possible.

(Conférences données à l'Institut H. POINCARÉ en novembre 1929 et rédigées par AL. PROCA).