ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

# Méthode de Glimm et problème mixte

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 10, nº 4 (1993), p. 423-443

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1993__10_4_423_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 10, n° 4, 1993, p. 423-443. *Analyse non linéaire*

# Méthode de Glimm et problème mixte

par

**Monique SABLÉ-TOUGERON**

IRMAR, Université Rennes-I
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
France

RÉSUMÉ. — On dégage l'extension naturelle au problème mixte de la méthode de Glimm d'existence globale de solutions faibles de systèmes hyperboliques de lois de conservation, pour des conditions au bord non linéaires générales, vérifiées de façon exacte.

*Mots clés :* Lois de conservation hyperboliques, solutions faibles globales, méthode de Glimm, problèmes aux limites.

ABSTRACT. — We clear the natural extension to initial-boundary value problems of the Glimm's method of global existence for hyperbolic systems of conservation laws, with nonlinear general and exact boundary conditions.

*Key words :* Hyperbolic conservation laws, global weak solutions, Glimm's method boundary value problems.

## INTRODUCTION

Le problème de l'existence globale en temps de solutions peu régulières de systèmes hyperboliques de lois de conservation en monodimension

*Classification A.M.S. :* 35-02.

d'espace a été abordé dans le cadre du problème mixte, en adaptant la méthode de Glimm, sur des exemples explicites et pour des conditions au bord très particulières: citons les travaux de Nishida-Smoller [N.S] et de Liu [L] dans un quadrant ou une bande, concernant un système $2 \times 2$ d'Euler isentropique pour un bord non caractéristique sur lequel est imposée la vitesse ou la pression, celui de Liu contenant de plus l'étude d'un système $3 \times 3$ non isentropique dans un quadrant à bord caractéristique. Ensuite J. Goodman [G] a traité le cas général vraiment non linéaire pour le «quadrant» (courbe) non caractéristique où, par choix de suites de «Van der Corput», la condition sur le bord «vertical» est vérifiée aussi fortement que la condition de Cauchy.

Dans cet article on s'est attaché à dégager des hypothèses générales qui permettent de mener à terme une méthode de Glimm près d'un état constant dans un quadrant ou une bande: en premier lieu des hypothèses de rang constant servent à résoudre le problème mixte de Riemann; elles suffisent pour contrôler les fonctionnelles de type Glimm dans le cas du quadrant, alors que dans le cas d'une bande le contrôle n'est effectif que sous une condition supplémentaire de contraction; enfin une hypothèse géométrique (alliée à celles de rang constant), sert à définir par dualité la notion de solution faible d'un problème mixte conservatif, de façon à traiter le problème de la consistance au sens le plus élémentaire (sans supposer l'existence d'une entropie) et de façon exacte. On a adopté la présentation de Hörmander [H] et utilisé l'extension de Schatzman [S].

Sans hypothèses de rang constant, avec une condition de Dirichlet sur toutes les composantes, d'autres formulations sont proposées dans Bardos-Leroux-Nedelec [B-L-N] (cas scalaire en multidimension d'espace, en exploitant les entropies: elle conduit bien à un théorème d'unicité) et Dubois-Le Floch [D-L] (cas des systèmes en monodimension, voir aussi Benabdallah-Serre [B-S]); un théorème d'existence globale dans un quadrant pour le $p$-système, par une méthode de Glimm, est obtenu dans ce cadre par Dubroca-Gallice [D-G].

## 1. LES THÉORÈMES D'EXISTENCE GLOBALE

Soit $f=(f_1, \ldots, f_N)$ un flux vectoriel réel de classe $C^3$ défini dans un voisinage $\Omega$ d'un état $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$. On suppose que les valeurs propres de la différentielle $Df(u)$ sont réelles, de multiplicité 1, vraiment non linéaires ou linéairement dégénérées; on les ordonne alors en $\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_N(u)$ et on note $r_1(u), \ldots, r_N(u)$ les vecteurs propres associés, de classe $C^2$, normalisés par la condition de Lax $\partial_u \lambda_i(u) . r_i(u) = 1$ dans le cas vraiment non linéaire, arbitrairement sinon. On se placera dans l'un des deux cas suivants

(N.C.) pour un $N' \in \{1, \ldots, N\}$ on a

$$\lambda_{N'}(u) < 0 < \lambda_{N''}(u), \qquad N'' = N' + 1, \qquad \text{pour tout} \quad u \in \Omega$$

(C) pour un $N' \in \{1, \ldots, N\}$ on a

$$\lambda_{N'}(u) < 0 = \lambda_{N'+1}(u) < \lambda_{N''}(u), \qquad N'' = N' + 2, \qquad \text{pour tout} \quad u \in \Omega.$$

Soient $b \equiv b_+ = (b_1, \ldots, b_{N'})$, $b_- = (b_{N''}, \ldots, b_N)$ des flux au bord réels de classe $C^2$ définis dans $\Omega$. On suppose que les différentielles $Db_+(u)$, $Db_-(u)$, sont injectives sur l'espace vectoriel $V_+(u)$ engendré par $r_1(u), \ldots, r_{N'}(u)$, $V_-(u)$ engendré par $r_{N''}(u), \ldots, r_N(u)$, respectivement et qu'elles vérifient

(D) $\ker Df(u) \subset \ker Db_\pm(u)$ pour tout $u \in \Omega$,

et la condition géométrique :

$(G)_\pm$ il existe un sous-espace vectoriel fixe $W_\pm$ de $\mathbb{R}^N$, de dimension $N_\pm$, $N_+ = N'$, $N_- = N - N'' + 1$, tel que le feuilletage de $f(\Omega)$ par les $f(\{b(u) = \mathrm{Cte}\})$ est exactement induit sur $f(\Omega)$ par le feuilletage affine de direction $(W_\pm)^\perp$.

Sous ces hypothèses il existe $\theta_\pm : \mathbb{R}^{N_\pm} \to W_\pm$, difféomorphisme au voisinage de $b(\bar{u})$, tel que

$$b_\pm(u) = g \quad \text{équivaut à} \quad p_{W_\pm} f(u) = \theta_\pm(g_\pm),$$

$p_{W_\pm}$ désignant l'opérateur de projection orthogonale sur $W_\pm$.

Le modèle de flux au bord $b_\pm$ est ainsi $p_{W_\pm} f$ pour $W_\pm$ sous-espace vectoriel fixe de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N_\pm$ vérifiant $V_\pm(\bar{u}) \cap (W_\pm)^\perp = \{0\}$ et de plus dans le cas (C) : le feuilletage affine de $\mathbb{R}^N$ de direction $(W_\pm)^\perp$ induit sur $f(\Omega)$ un feuilletage par des variétés de dimension $N - N_\pm - 1$.

On supposera que $\Omega$ est assez petit pour que $\theta_\pm$ soit défini dans $b_\pm(\Omega)$.

Dans un quadrant $Q = \{t > 0, x < 0\}$, ou une bande

$$B = \{t > 0, -1 < x < 1\},$$

de bord vertical $\partial Q$ ou $\partial B \equiv \partial B_- \cup \partial B_+$, on considère le problème mixte conservatif, monodimensionnel en la variable d'espace $x$, à données $u_0$ et $g$ (ou $g_\pm$) bornées

$$\text{(M.C)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \quad \text{dans } t > 0, \\ b(u) = g \quad \text{sur } \partial Q \qquad \text{ou} \qquad b_\pm(u) = g_\pm \quad \text{sur } \partial B_\pm, \\ u(0, .) = u^0 \quad \text{sur } t = 0. \end{array} \right.$$

La fonction $u$, définie dans Q ou B, à valeurs dans $\Omega$, est dite solution faible de (M.C) si pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\varphi(t, x) \in W$

pour $(t, x) \in \partial Q$, ou $\varphi(t, x) \in W_{\pm}$ pour $(t, x) \in \partial B_{\pm}$, on a

$$\int_Q (u(t, x) . \partial_t \varphi(t, x) + f(u(t, x)) . \partial_x \varphi(t, x))\, dt\, dx$$
$$= -\int_{x<0} u^0(x) . \varphi(0, x)\, dx + \int_{\partial Q} \theta(g(t)) . \varphi(t, 0)\, dt,$$

ou

$$\int_B (u(t, x) . \partial_t \varphi(t, x) + f(u(t, x)) . \partial_x \varphi(t, x))\, dt\, dx$$
$$= -\int_{-1<x<1} u^0(x) . \varphi(0, x)\, dx + \int_{\partial B_+} \theta_+(g_+(t)) . \varphi(t, 1)\, dt$$
$$- \int_{\partial B_-} \theta_-(g_-(t)) . \varphi(t, -1)\, dt.$$

Cette définition est équivalente à la définition classique pour les fonctions régulières.

Le contrôle des forces réfléchies dans le cas de la bande s'effectue à l'aide de la condition de contraction [1]: il existe un choix des vecteurs propres linéairement dégénérés pour lequel on a

(K) $\quad \| R'(\bar{u}) \| \, \| R''(\bar{u}) \| < 1$

$R'(u)$, $R''(u)$ désignant les matrices de réflexion

$$R'(u) \equiv (Db_+(u)\, r'_{\rightarrow}(u))^{-1}\, Db_+(u)\, r''_{\rightarrow}(u),$$
$$R''(u) \equiv (Db_-(u)\, r''_{\leftarrow}(u))^{-1}\, Db_-(u)\, r'_{\leftarrow}(u),$$

où $r'_{\rightarrow}(u)$ et $r''_{\rightarrow}(u)$ sont les matrices dont les colonnes sont $r_1(u), \ldots, r_{N'}(u)$ et $r_{N''}(u), \ldots, r_N(u)$ respectivement, $r'_{\leftarrow}(u)$ et $r''_{\leftarrow}(u)$ celles dont les colonnes sont $r_{N'}(u), \ldots, r_1(u)$ et $r_N(u), \ldots, r_{N''}(u)$ et les différentielles sont identifiées à leurs matrices jacobiennes dans les bases canoniques; la norme $\| R \|$ est associée à la norme somme sur $\mathbb{R}^n$, $|X| \equiv \sum_i |X_i|$.

Les résultats sont les suivants

THÉORÈME 1.1 (Cas du quadrant). — *Il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $u^0$ *et* $g$ *à variation bornée, vérifiant*

$$\| u^0 - \bar{u} \|_{L^\infty(x<0)} + \| g - b(\bar{u}) \|_{L^\infty(t>0)} + V(u^0) + V(g) \leqq \delta,$$

[1] Qui s'apparente à des conditions dégagées par Li Ta Tsien et Yu Wen Ci, comme m'en a informée D. Serre. Elle peut s'améliorer légèrement lorsque R' et R'' ne dépendent pas de $u$. Elle n'est jamais vérifiée lorsque $b_+ = b_-$ puisqu'alors $I = JR''(u) J^{-1} R'(u)$ avec $\| J \| = \| J^{-1} \| = 1$.

*le problème mixte conservatif* (M.C) *dans le quadrant* Q *possède une solution faible définie pour tout temps.*

On a noté $V(u^0)$, resp. $V(g)$, la variation totale sur la demi-droite $x<0$, resp. $t>0$, de la fonction normalisée continue à gauche, resp. à droite, égale à $u^0 = u^0(-\infty)$, resp. $g - g(+\infty)$, hors de l'ensemble dénombrable des points de discontinuité de $u^0$, resp. $g$.

THÉORÈME 1.2 (Cas de la bande). — *Sous la condition* (K), *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $u^0$, $g_-$, $g_+$ *à variation bornée, vérifiant*

$$\|g_- - b_-(\bar{u})\|_{L^\infty(t>0)} + \|u^0 - \bar{u}\|_{L^\infty(-1<x<1)} + \|g_+ - b_+(\bar{u})\|_{L^\infty(t>0)} + V(g_-) + V(u^0) + V(g_+) \leqq \delta,$$

*le problème mixte conservatif* (M.C) *dans la bande* B *possède une solution faible définie pour tout temps.*

L'exemple traité dans [N.S] est celui d'un $p$-système vraiment non linéaire

$$\partial_t v - \partial_x u = 0,$$
$$\partial_t u + \partial_x (p(v)) = 0,$$

où $p(v) = K^2 v^{-\gamma}$, $K>0$, $\gamma \geqq 1$, dans une région $v \geqq \mathrm{v} > 0$ de l'espace des états $U \equiv (v, u)$, avec le flux au bord $b(U) \equiv u \approx p_W f(U)$, $W = \mathbb{R}(1, 0)$, pour lequel on a

$$(Db(U) r_1(U))^{-1} Db(U) r_2(U) = (Db(U) r_2(U))^{-1} Db(U) r_1(U) = 1;$$

ainsi (N.C) et (G) sont vérifiées, mais pas (K). Les auteurs obtiennent néanmoins un résultat d'existence globale dans la bande via une existence locale avec estimation du temps d'existence (très spécifique) qui autorise une itération.

Lorsque $b(U) = p(v)$, on a aussi (G), non (K):

$$b(U) \approx p_W f(U) \qquad \text{avec} \quad W = \mathbb{R}(0, 1),$$
$$(Db(U) r_1(U))^{-1} Db(U) r_2(U) = (Db(U) r_2(U))^{-1} Db(U) r_1(U) = -1;$$

dans ce cas, mais sous des hypothèses qui limitent les interactions, Liu [L] donne un résultat direct d'existence globale dans une bande.

Une condition au bord (cas semi-perméable) qui montre bien la position extrémale de la première est

$$b(U) = \nu p(v) + u,$$

pour laquelle

$$b(U) \approx p_W f(U), \; W = \mathbb{R}(1, -\nu),$$
$$|(Db_+(U) r_1(U))^{-1} Db_+(U) r_2(U)| = |\nu_+ - 1| \, |\nu_+ + 1|^{-1},$$
$$|(Db_-(U) r_2(U))^{-1} Db_-(U) r_1(U)| = |\nu_- + 1| \, |\nu_- - 1|^{-1};$$

(G) est toujours vérifiée, (K) l'est pour $\nu_\pm$ petits tels que $0 < \nu_- < \nu_+$.

L'exemple caractéristique de Liu ajoute au $p$-système l'équation conservative

$$\partial_t w + \partial_x (pu) = 0,$$

avec $w = e + u^2/2$, $e = (\gamma - 1)^{-1} pv$, $p = K^2 v^{-\gamma} \exp((\gamma - 1) s/R)$, $\gamma > 1$, $R > 0$. C'est un cas où (C) a lieu, avec (D) et (G) lorsque

$$b_-(U) = u \approx p_{W_-} f, \qquad W_- = \mathbb{R}(1, 0, 0),$$
$$b_+(U) = p(U) \approx p_{W_+} f, \qquad W_+ = \mathbb{R}(0, 1, 0)$$

et pour lequel on a encore *non* (K) puisque

$$(Db_-(U) r_3(U))^{-1} Db_-(U) r_1(U) = 1$$
$$(Db_+(U) r_1(U))^{-1} Db_+(U) r_3(U) = -1.$$

Lorsque $b_-(U) = pu$, on a encore (D) et (G) et de plus

$$(Db_-(U) r_3(U))^{-1} Db_-(U) r_1(U) = (p - u(-\partial_v p)^{1/2})(p + u(-\partial_v p)^{1/2})^{-1},$$

donc (K) est vérifiée dans $u > 0$ si $b_+(U)$ est $u$ ou $p$.
Lorsque $b(U) = e + pv$, enthalpie spécifique, on a

$$(Db_-(U) r_3(U))^{-1} Db_-(U) r_1(U) = -1,$$

donc *non* (K), mais (D) n'est plus vérifiée: le schéma de Glimm fournit alors une fonction U à variation bornée, solution faible au sens « Cauchy » de la dualité avec les fonctions test nulles près du bord $\partial Q$ dont on ne sait pas dire si la trace de $b(U)$ sur $\partial Q$, qui a un sens, est égale à $g$ (on pourrait essayer d'adapter à ce cas caractéristique l'approche (laborieuse) de Goodman).

## 2. LE PROBLÈME DE RIEMANN ET SA VERSION AU BORD

Pour $u \in \Omega$ soient $L_i(u)$, $i = 1, \ldots, N$, les courbes de Lax [La] orientées de classe $C^2$ paramétrées en $\varepsilon_i \to \Phi_i(\varepsilon_i, u)$, de position $u$ et de vecteur vitesse $r_i(u)$ en $\varepsilon_i = 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ petit on note

$$\Phi(\varepsilon, u_g) \equiv \Phi_N(\varepsilon_N, \Phi_{N-1}(\varepsilon_{N-1}, \ldots, \Phi_1(\varepsilon_1, u_g)) \ldots)$$

l'état de droite $u_d$ joint à l'état de gauche $u_g$ par la succession ordonnée de $i$-ondes simples admissibles de forces $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, N$; on note aussi

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N'})$$

et

$$\Phi'(\varepsilon', u) = \Phi_{N'}(\varepsilon_{N'}, \Phi_{N'-1}(\varepsilon_{N'-1}, \ldots, \Phi_1(\varepsilon_1, u)) \ldots)$$

et l'on remarque que

$$D_{\varepsilon'} \Phi'(0, u) = r'(u);$$

on notera aussi

$$\varepsilon'' = (\varepsilon_{N''}, \ldots, \varepsilon_N)$$

et

$$\Phi''(\varepsilon'', u) = \Phi_N(\varepsilon_N, \Phi_{N-1}(\varepsilon_{N-1}, \ldots, \Phi_{N''}(\varepsilon_{N''}, u))\ldots),$$
$$\varepsilon^0 = \varepsilon_{N'+1} \text{ dans le cas (C)},$$

et l'on a

$$r''(u) = D_{\varepsilon''}\Phi''(0, u).$$

La théorie de Lax [La] a conduit à la résolution suivante:

PROPOSITION 2.1. — *Si $\Omega$ est assez petit, pour tous $u_g$, $u_d \in \Omega$ le problème de Cauchy conservatif*

$$\text{(C.C)} \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \quad \text{dans } t > 0, \\ u(0, .) = u_g \quad \text{pour } x < 0, \qquad u(0, .) = u_d \quad \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

*admet une solution faible autosemblable unique constituée de* N *ondes simples ordonnées admissibles; en d'autres termes il existe un unique $\varepsilon$ dans un voisinage $\omega$ de* 0 *tel que $\Phi(\varepsilon, u_g) = u_d$.*

La version au bord est la

PROPOSITION 2.2. — *Si $\Omega$ est assez petit, pour tous $u_g \in \Omega$, $g \in b(\Omega)$, le problème mixte conservatif* (M.C) *dans le quadrant* Q, *à données constantes $u_g$ et $g$, admet une solution faible autosemblable unique constituée de* N' *ondes simples ordonnées admissibles; en d'autres termes il existe un unique $\varepsilon'$ dans un voisinage $\omega'$ de* 0 *tel que $b(\Phi'(\varepsilon', u_g)) = g$.*

*Preuve.* — Le théorème des fonctions implicites s'applique près de 0 à la fonction $\varepsilon' \to b(\Phi'(\varepsilon', u_g))$ d'après l'injectivité de la différentielle $Db(u_g)$ sur l'image de $D_{\varepsilon'}\Phi'(0, u_g)$. De plus, $u_g$ et $g$ étant fixées, la fonction autosemblable définie par la force $\varepsilon'$ qui réalise $b(\Phi'(\varepsilon', u_g)) = g$ est solution faible de (M.C) au sens décrit plus haut.

## 3. LE SCHÉMA DE GLIMM MIXTE DANS LE QUADRANT

Soient $\Delta t > 0$, $\Delta x > 0$, contraints par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy

$$\text{(C.F.L)} \qquad \Delta x / \Delta t > \sup \{ |\lambda_j(z)|;\ z \in \Omega, j = 1, \ldots, N \},$$

et pour $k \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_k$ la fonction localement constante par morceaux définie pour $(2n-2)\Delta x < x < 2n\Delta x$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leqq 0$, par

$$\bar{u}_0(x) \equiv U_{0,n} = u^0((2n-1)\Delta x),$$
$$\bar{u}_k(x) \equiv U_{k,n} = u_{k-1}(k\Delta t, (2n-1+\theta_k)\Delta x - 0), \text{ si } k \geqq 1, \text{ avec } \theta_k \in ]-1, 1[,$$

la fonction $u_k$ étant recollée dans la bande de temps $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ des restrictions à $[(2n-1)\Delta x, (2n+1)\Delta x]$, $n<0$, des solutions des problèmes de Riemann à saut en $2n\Delta x$ pour les données de Cauchy $U_{k,n-1}$, $U_{k,n}$, ou de la restriction à $[-\Delta x, 0]$ de la solution du problème de Riemann à données mixtes $U_{k,0}$, $g_k=g(k\Delta t+0)$.

Pour que ce schéma soit défini pour tout $k\in\mathbb{N}$, il faut que les valeurs des solutions des problèmes de Riemann restent dans $\Omega$ ; à cet effet, pour les problèmes de Cauchy on dispose du lemme d'interaction de Glimm [Gl] élargi par Schatzman [S] :

LEMME 3.1. — *Il existe des voisinages de* 0 *dans l'espace des forces* $\omega_1\subset\omega_0\subset\omega$, *un voisinage de* $\bar{u}$, $\Omega_1\subset\Omega$ *et une constante* $c_0$ *tels que si* $\gamma(\delta, \varepsilon, u)$ *est la fonction de classe* $C^2$ *qui réalise*

$$\Phi(\varepsilon, \Phi(\delta, u))=\Phi(\gamma(\delta, \varepsilon, u), u) \quad \textit{pour tous } \varepsilon,\ \delta\in\omega_0 \textit{ et } u\in\Omega_1,$$

*alors pour* $\varepsilon$, $\delta\in\omega_1$ *et* $u\in\Omega_1$ *on a*

$$|\gamma(\delta, \varepsilon, u)-\varepsilon-\delta|\leqq c_0\Delta(\delta, \varepsilon),$$

*l'espace des forces étant normé par* $|\varepsilon|=\sum|\varepsilon_i|$,
$\Delta(\delta, \varepsilon)$ *désignant la quantité d'interaction (non symétrique)*

$$\Delta(\delta, \varepsilon)=\sum_{i>j}|\delta_i\varepsilon_j|+\sum_{\delta_i<0 \textit{ ou } \varepsilon_i<0,\ i\in \mathrm{VNL}}|\delta_i\varepsilon_i|$$

*et* VNL *désignant les indices des valeurs propres vraiment non linéaires.*

Pour les problèmes mixtes on a le

LEMME 3.2 :

$(+)$ *Il existe un voisinage de* 0, $\omega'_1\subset\omega'$, *un voisinage de* $\bar{u}$, $\Omega_1\subset\Omega$ *et une constante* $c_0$ *tels que la fonction de classe* $C^2$, $\gamma'(\delta', \varepsilon', u)$, *qui réalise*

$$b(\Phi'(\varepsilon', \Phi'(\delta', u)))=b(\Phi'(\gamma'(\delta', \varepsilon', u), u)) \quad \textit{pour tous } \varepsilon',\ \delta'\in\omega'_1 \textit{ et } u\in\Omega_1,$$

*vérifie*

$$|\gamma'(\delta', \varepsilon', u)-\varepsilon'-\delta'|\leqq c_0|\varepsilon'|\,|\delta'|.$$

$(-)$ *Il existe des voisinages de* 0, $\omega'_1\subset\omega'$, $\omega''_1\subset\omega''$, *un voisinage de* $\bar{u}$, $\Omega_1\subset\Omega$ *et une constante* $c_0$ *tels que la fonction de classe* $C^2$, $\gamma'(\varphi'', \delta', \varepsilon', u)$, *qui réalise*

$$\begin{aligned}&b(\Phi'(\varepsilon', \Phi'(\delta', \Phi''(\varphi'', u))))\\&\qquad=b(\Phi'(\gamma'(\varphi'', \delta', \varepsilon', u), u)) \quad \textit{pour tous } \varphi''\in\omega''_1,\ \varepsilon',\ \delta'\in\omega'_1 \textit{ et } u\in\Omega_1,\end{aligned}$$

*vérifie*

$$\begin{aligned}&|\gamma'(\varphi'', \delta', \varepsilon', u)-R'(u)\varphi''-\varepsilon'-\delta'|\\&\qquad\leqq c_0(|\varphi''|^2+|\varphi''|\,|\varepsilon'|+|\varphi''|\,|\delta'|+|\varepsilon'|\,|\delta'|),\end{aligned}$$

$R'(u)$ *désignant la matrice de réflexion*

$$R'(u)\equiv(Db(u)r'(u))^{-1}Db(u)r''(u).$$

*Preuve.* — Dans le cas (+) il suffit de remarquer que $\gamma'(\delta', 0, u)=\delta'$ et $\gamma'(0, \varepsilon', u)=\varepsilon'$. Dans le cas (−) on a aussi $\gamma'(0, \delta', 0, u)=\delta'$, $\gamma'(0, 0, \varepsilon', u)=\varepsilon'$ et $D_{\varphi''}\gamma'(0, 0, 0, u)=R'(u)$.

La preuve de la définition du schéma s'effectue par récurrence et utilise les notations suivantes:

$$U_{k,n+1}=\Phi(\gamma(n), U_{k,n}) \quad \text{si} \quad n<0,$$
$$g_k=b(\Phi'(\gamma'(0), U_{k,0}), \qquad U_{k,1}\equiv\Phi'(\gamma'(0), U_{k,0}),$$
$$U_{k+1,n+1}=\Phi(\Gamma(n), U_{k+1,n}) \quad \text{si} \quad n<0,$$
$$g_{k+1}=b(\Phi'(\Gamma'(0), U_{k+1,0}), \qquad U_{k+1,1}=\Phi'(\Gamma'(0), U_{k+1,0}))$$

(+) pour $\theta_{k+1}\geqq 0$,

$$U_{k+1,n+1}=\Phi(\Gamma(n), U_{k+1,n})=\Phi(\varepsilon(n+1), \Phi(\delta(n), U_{k+1,n}) \quad \text{si} \quad n<0,$$
$$g_{k+1}=b(\Phi'(\Gamma'(0), U_{k+1,0})=b(\Phi'(\ddot{\gamma}, \Phi'(\delta'(0), U_{k+1,0}),$$

(−) pour $\theta_{k+1}<0$,

$$U_{k+1,n+1}=\Phi(\Gamma(n), U_{k+1,n})=\Phi(\varepsilon(n), \Phi(\delta(n-1), U_{k+1,n}) \quad \text{si} \quad n<0,$$
$$g_{k+1}=b(\Phi'(\Gamma'(0), U_{k+1,0})=b(\Phi'(\ddot{\gamma}, \Phi'(\gamma'(0), \Phi''(\delta''(-1), U_{k+1,0});$$

on a noté

$$\gamma(n)=\varepsilon(n)+\delta(n), \ \gamma'(0)=\varepsilon'(0)+\delta'(0),$$

les décompositions induites par l'arrêt en

$$u_k((k+1)\Delta t, (2n+1+\theta_{k+1})\Delta x-0) \quad \text{si} \quad \theta_{k+1}\in]-1, 0[,$$
$$u_k((k+1)\Delta t, (2n-1+\theta_{k+1})\Delta x-0) \quad \text{si} \quad \theta_{k+1}\in]0, 1[,$$

($\gamma_i=\varepsilon_i$ pour $i\leqq p$, $\gamma_i=\delta_i$ pour $i>p+1$, sauf si $\gamma_p>0$, auquel cas on peut avoir $\gamma_p=\varepsilon_p+\delta_p$ avec $\varepsilon_p$ et $\delta_p>0$).

Remarquons que $\ddot{\gamma}\equiv\ddot{\gamma}(U_{k,1}, g_{k+1})$ défini par

$$g_{k+1}=b(\Phi'(\ddot{\gamma}, U_{k,1}) \qquad \text{avec} \quad g_k=b(U_{k,1}),$$

équivaut à

$$g_{k+1}-g_k\equiv\ddot{g}_k;$$

on notera $\ddot{c}>0$ une constante qui réalise

$$|\ddot{\gamma}(u, g)|\leqq\ddot{c}|g-b(u)| \quad \text{pour tous } u\in\Omega,\ g\in b(\Omega).$$

Avec les notations des lemmes 3.1, 3.2, soient

$$\omega_2=\omega_2'\times\omega_2''\subset\omega_1'\times\omega_1''=\omega_1$$

un voisinage de 0 et $\Omega_2\subset\Omega_1$ un voisinage de $\bar{u}$ tels que $v=\Phi(\gamma, u)\in\Omega_2$ et $u\in\Omega_2$ entraîne $\gamma\in\omega_2$, $g=b(\Phi(\gamma', u))\in b(\Omega_2)$ et $u\in\Omega_2$ entraîne $\gamma'\in\omega_2'$ et tels que $\varepsilon\in\omega_2$, $\varepsilon'\in\omega_2'$ et $u\in\Omega_2$ entraîne $\Phi(\varepsilon, u)\in\Omega_1$ et $\Phi'(\varepsilon', u)\in\Omega_1$. Supposant maintenant $g(t+0)\in b(\Omega_2)$ pour tout $t\geqq 0$, on cherche une borne de $|u^0(-\infty)-\bar{u}|+\mathrm{V}(u^0)+|g(0^+)-b(u^0(0^-))|+\mathrm{V}(g)$ et une pondération $\mathrm{K}''\geqq 1$ qui permettent d'effectuer la récurrence suivante :

(R) Si les $(\mathrm{U}_{h,n})_{n\leqq 1}$ sont définis jusqu'au rang $k$, à valeurs dans $\Omega_2$, si les forces $\gamma(n)$ appartiennent à $\omega_2$ pour $n\leqq -1$, $\gamma'(0)\in\omega_2'$, $\ddot{\gamma}\in\omega_2'$ et si la fonctionnelle

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_m(k)&\equiv\mathscr{L}'(k)+|\gamma'(0)|+\mathscr{L}^0(k)+\mathrm{K}''\mathscr{L}''(k)+\mathscr{L}_g(k)\\&\equiv\sum_{n\leqq -1}|\gamma'(n)|+|\gamma'(0)|+\sum_{n\leqq -1}|\gamma^0(n)|\\&\qquad+\mathrm{K}''\sum_{n\leqq -1}|\gamma''(n)|+\ddot{c}\sum_{l\geqq k}|\ddot{g}_l|\end{aligned}$$

vérifie $\mathscr{L}_m(k)\leqq 2\mathscr{L}_m(0)$, il en est de même au rang $k+1$.

On considère d'abord le cas où $u^0$ est constante pour $|x|$ grand. Sous les hypothèses de (R) les forces $\varepsilon(n)$ et $\delta(n)$ appartiennent à $\omega_2$ et $\varepsilon'(0)$ appartient à $\omega_2'$ donc les $\mathrm{U}_{k+1,n}$, $n\leqq 0$, appartiennent à $\Omega_1$ ; de plus $\delta''(-1)\in\omega_2''$, $\delta'(0)$ et $\ddot{\gamma}\in\omega_2'$ donc les lemmes 3.1, 3.2 peuvent être utilisés pour estimer la somme finie $\mathscr{L}_m(k+1)$.

3.3. Estimations linéaires. — Si $\theta_{k+1}\in[0,1[$, $\Gamma(n)-\delta(n)-\varepsilon(n+1)$ est estimé pour $n\leqq -1$ par le lemme 3.1 et les $\varepsilon$ sont des $\varepsilon'$, d'où $\delta^0=\gamma^0$, $\delta''=\gamma''$ et

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'(k+1)\leqq\sum_{n\leqq -1}&(|\delta'(n)|+|\varepsilon'(n+1)|\\&+c_0\Delta(\delta(n),\varepsilon(n+1)))\leqq\mathscr{L}'(k)+|\varepsilon'(0)|+c_0\Lambda_+(k),\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}^0(k+1)\leqq\sum_{n\leqq -1}(|\delta^0(n)|+c_0\Delta(\delta(n),\varepsilon(n+1)))\leqq\mathscr{L}^0(k)+c_0\Lambda_+(k),$$

$$\mathscr{L}''(k+1)\leqq\sum_{n\leqq -1}(|\delta''(n)|+c_0\Delta(\delta(n),\varepsilon(n+1)))\leqq\mathscr{L}''(k)+c_0\Lambda_+(k),$$

avec

$$\Lambda_+(k)=\sum_{n\leqq -1}\Delta(\delta(n),\varepsilon(n+1)).$$

De plus $\Gamma'(0)-\delta'(0)-\ddot{\gamma}$ relève du lemme 3.2(+) en

$$|\Gamma'(0)|\leqq|\delta'(0)|+|\ddot{\gamma}|+c_0\lambda_+'(k),$$

avec

$$\lambda_+'(k)=|\delta'(0)|\ddot{c}|\ddot{g}_k|;$$

on en déduit

$$(\mathscr{L})_+\qquad\mathscr{L}_m(k+1)\leqq\mathscr{L}_m(k)+(\mathrm{K}''+2)c_0(\Lambda_+(k)+\lambda_+'(k)).$$

Si $\theta_{k+1} \in ]-1, 0[$, $\Gamma(n) - \delta(n-1) - \varepsilon(n)$ est estimé pour $n \leqq -1$ par le lemme 3.1 et les $\delta$ sont des $\delta''$, d'où $\varepsilon' = \gamma'$, $\varepsilon^0 = \gamma^0$ et

$$\mathscr{L}'(k+1) \leqq \sum_{n \leqq -1} (|\varepsilon'(n)| + c_0 \Delta(\delta(n-1), \varepsilon(n))) \leqq \mathscr{L}'(k) + x_0 \Lambda_-(k),$$

$$\mathscr{L}^0(k+1) \leqq \sum_{n \leqq -1} (|\varepsilon^0(n)| + c_0 \Delta(\delta(n-1), \varepsilon(n))) \leqq \mathscr{L}^0(k) + c_0 \Lambda_-(k),$$

$$\mathscr{L}''(k+1) \leqq \sum_{n \leqq -1} (|\delta''(n-1)| + |\varepsilon''(n)| + c_0 \Delta(\delta(n-1), \varepsilon(n)))$$
$$\leqq \mathscr{L}''(k) - |\delta''(-1)| + c_0 \Lambda_-(k),$$

avec

$$\Lambda_-(k) = \sum_{n \leqq -1} \Delta(\delta(n-1), \varepsilon(n)).$$

De plus le lemme 3.2 (−) estime $\Gamma'(0) - R'(U_{k+1,0})\delta''(-1) - \gamma'(0) - \ddot{\gamma}$ en

$$|\Gamma'(0)| \leqq |R'(U_{k+1,0})\delta''(-1)| + |\gamma'(0)| + |\ddot{\gamma}| + c_0 \lambda'_-(k),$$

avec

$$\lambda'_-(k) = |\delta''(-1)|^2 + |\delta''(-1)| \, |\gamma'(0)| + |\delta''(-1)| \, |\ddot{\gamma}| + |\gamma'(0)| \, |\ddot{c}| \, |\ddot{g}_k|;$$

on en déduit,

$$\mathscr{L}_m(k+1) \leqq \mathscr{L}_m(k) + |R'(U_{k+1,0})\delta''(-1)|$$
$$- K''|\delta''(-1)| + (K''+2) c_0 (\Lambda_-(k) + \lambda'_-(k)),$$

donc si on choisit K″ tel que

$$|R'(u)\delta''| \leqq K''|\delta''| \text{ pour tout } u \in \Omega \text{ et tous } \delta'',$$

on obtient encore

$$(\mathscr{L})_- \qquad \mathscr{L}_m(k+1) \leqq \mathscr{L}_m(k) + (K''+2) c_0 (\Lambda_-(k) + \lambda'_-(k)).$$

3.4. Estimations quadratiques. — Elles s'effectuent suivant la règle que tout terme quadratique apparaissant avec un signe + doit donner naissance à un nouveau potentiel indépendant du signe de $\theta_{k+1}$ (avec l'espoir que cela s'arrête).

3.4.1. *Soit le potentiel de Glimm*

$$\mathscr{Q}(k) = \sum_{n < m \leqq -1} \Delta(\gamma(n), \gamma(m)),$$

et soit

$$\mathscr{L}(k) = \mathscr{L}'(k) + \mathscr{L}^0(k) + \mathscr{L}''(k).$$

Pour $\theta_{k+1} \geqq 0$, $\mathscr{Q}(k+1)$ s'estime comme dans [G1], [H] ou [S] en utilisant la sous additivité partielle de $\Delta$ en

$$\mathscr{Q}(k+1) \leqq \mathscr{Q}(k) - \Lambda_+(k) + \sum_{n \leqq -1} \Delta(\gamma(n), \varepsilon'(0)) + c_0 \Lambda_+(k) (\mathscr{L}(k) + \mathscr{L}(k+1))$$

et pour $\theta_{k+1}<0$, en

$$\mathscr{Q}(k+1)\leqq\mathscr{Q}(k)-\Lambda_-(k)-\sum_{n\leqq-2}\Delta(\gamma(n),\delta(-1))$$
$$+c_0\Lambda_-(k)(\mathscr{L}(k)+\mathscr{L}(k+1)).$$

3.4.2. *Soit le potentiel d'interaction*

$$q'(k)=\sum_{n\leqq-1}\Delta(\gamma(n),\gamma'(0)),\qquad\text{où}\quad\gamma'(0)\equiv(\gamma'(0),0);$$

si $\theta_{k+1}\geqq 0$, notant

$$\rho_+(n)=\Gamma(n)-\delta(n)-\varepsilon(n+1)\qquad\text{pour}\quad n\leqq-1,$$

$\rho'_+(0)=\Gamma'(0)-\delta'(0)-\ddot{\gamma}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(\Gamma(n),\Gamma'(0))\leqq\Delta(\delta(n),\delta'(0))&+\Delta(\delta(n),\ddot{\gamma})\\&+\Delta(\varepsilon(n+1),\delta'(0))+\Delta(\varepsilon(n+1),\ddot{\gamma})\\&+\Delta(\delta(n),\rho'_+(0))+\Delta(\varepsilon(n+1),\rho'_+(0))+\Delta(\rho_+(n),\Gamma'(0));\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}(k+1)+q'(k+1)&\leqq\mathscr{Q}(k)+q'(k)-\Lambda_+(k)\\&+c_0(\Lambda_+(k)+\lambda'_+(k))(\mathscr{L}(k)+|\gamma'(0)|+\mathscr{L}(k+1)+|\Gamma'(0)|)\\&+\sum_{n\leqq-1}\Delta(\gamma(n),\ddot{\gamma})+|\varepsilon'(0)|\,|\ddot{\gamma}|.\end{aligned}$$

Si $\theta_{k+1}<0$, notant

$$\rho_-(n)=\Gamma(n)-\delta(n-1)-\varepsilon(n)\qquad\text{pour}\quad n\leqq-1,$$

$\rho'_-(0)=\Gamma'(0)-R'\delta''(-1)-\gamma'(0)-\ddot{\gamma}$, on a

$$\begin{aligned}&\Delta(\Gamma(n),\Gamma'(0))\\&\quad\leqq\Delta(\delta(n-1),R'\delta''(-1))+\Delta(\delta(n-1),\gamma'(0))+\Delta(\delta(n-1),\ddot{\gamma})\\&\qquad+\Delta(\varepsilon(n),R'\delta''(-1))+\Delta(\varepsilon(n),\gamma'(0))+\Delta(\varepsilon(n),\ddot{\gamma})\\&\qquad+\Delta(\delta(n-1),\rho'(0))+\Delta(\varepsilon(n),\rho'(0))+\Delta(\rho_-(n),\Gamma'(0)).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}(k+1)+q'(k+1)&\leqq\mathscr{Q}(k)+q'(k)-\Lambda_-(k)\\&-K''|\delta''(-1)|^2-|\delta''(-1)|\,|\gamma'(0)|-|\delta''(-1)|\,|\ddot{\gamma}|\\&+K''\mathscr{L}(k)|\delta''(-1)|+\mathscr{L}(k)|\ddot{\gamma}|\\&+c_0(\Lambda_-(k)+\lambda'_-(k))(\mathscr{L}(k)+\mathscr{L}(k+1)+|\Gamma'(0)|).\end{aligned}$$

3.4.3. *Soit le potentiel*

$$\ddot{q}(k)=\mathscr{L}_m(k)(K''\mathscr{L}''(k))+\mathscr{L}_g(k).$$

Si $\theta_{k+1}\geqq 0$, on a

$$\begin{aligned}\ddot{q}(k+1)&\leqq\ddot{q}(k)-\ddot{c}|\ddot{g}_k|\mathscr{L}_m(k)\\&+(K''+2)c_0(\Lambda_+(k)+\lambda'_+(k))(\mathscr{L}_m(k)+\mathscr{L}_m(k+1)),\end{aligned}$$

on en déduit

$$\mathcal{Q}(k+1)+q'(k+1)+\ddot{q}(k+1)\leqq \mathcal{Q}(k)+q'(k)+\ddot{q}(k)-(\Lambda_+(k)+\lambda'_+(k))$$
$$+(\mathrm{K}''+3)\,c_0\,(\Lambda_+(k)+\lambda'_+(k))\,(\mathcal{L}_m(k)+\mathcal{L}_m(k+1)).$$

Si $\theta_{k+1}<0$, on a

$$\ddot{q}(k+1)\leqq \ddot{q}(k)-\mathrm{K}''\,\mathcal{L}_m(k))\,|\,\delta''(-1)\,|-\ddot{c}\,|\,\ddot{g}_k\,|\,\mathcal{L}_m(k)$$
$$+(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,(\Lambda_-(k)+\lambda'_-(k))\,(\mathcal{L}_m(k)+\mathcal{L}_m(k+1)),$$

d'où encore

$$\mathcal{Q}(k+1)+q'(k+1)+\ddot{q}(k+1)\leqq \mathcal{Q}(k)+q'(k)+\ddot{q}(k)-(\Lambda_-(k)+\lambda'_-(k))$$
$$+(\mathrm{K}''+3)\,c_0\,(\Lambda_-(k)+\lambda'_-(k))\,(\mathcal{L}_m(k)+\mathcal{L}_m(k+1)).$$

3.4.4. Une version mixte du potentiel de Glimm est ainsi

$$\mathcal{Q}_m(k)=\mathcal{Q}(k)+q'(k)+\ddot{q}(k),$$

potentiel qui s'estime suivant le signe de $\theta_{k+1}$ en

$$(\mathcal{Q})_\pm \quad \mathcal{Q}_m(k+1)\leqq \mathcal{Q}_m(k)-(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k))$$
$$+(\mathrm{K}''+3)\,c_0\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k))\,(2\,\mathcal{L}_m(k)+(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k))).$$

3.5. La récurrence. — La non décroissance (générique) de la variation totale a pour palliatif l'estimation de $(\mathcal{L})_\pm+2\,(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,(\mathcal{Q})_\pm$

$$\mathcal{L}_m(k+1)+2\,(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,\mathcal{Q}_m(k+1)\leqq \mathcal{L}_m(k)+2\,(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,\mathcal{Q}_m(k)$$
$$-(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k))\,(1-2\,(\mathrm{K}''+1)\,c_0$$
$$\times(2\,\mathcal{L}_m(k)+(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k)))).$$

Utilisant de plus les majorations évidentes

$$\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k)\leqq \mathcal{Q}_m(k),\qquad \mathcal{Q}_m(k)\leqq 2\,\mathcal{L}_m(k)^2,$$

il suffit de conserver

$$\mathcal{L}_m(k+1)+c_1\,\mathcal{Q}_m(k+1)\leqq \mathcal{L}_m(k)+c_1\,\mathcal{Q}_m(k)$$
$$-(\mathrm{K}''+2)\,c_0\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k))\,(1-4\,(\mathrm{K}''+1)\,c_0\,(\mathcal{L}_m(k)+c_1\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda'_\pm(k)))),$$

avec $c_1=2\,(\mathrm{K}''+2)\,c_0$, pour en déduire que si

$$\mathcal{L}_m(0)\leqq \eta\,(\mathrm{K}'',\,c_0)\ \text{ assez petit,}$$

alors pour tout $h\leqq k+1$ on a

$$\mathcal{L}_m(h+1)+c_1\,\mathcal{Q}_m(h+1)\leqq \mathcal{L}_m(h)+c_1\,\mathcal{Q}_m(h).$$

Ainsi lorsque $u^0$ est constante pour $|\,x\,|$ grand la contrainte

$$\mathcal{L}_m(0)\leqq \eta$$

entraîne que pour tout $h\leqq k$ on a

$$\mathcal{L}_m(h+1)+c_1\,\mathcal{Q}_m(h+1)\leqq \mathcal{L}_m(0)+c_1\,\mathcal{Q}_m(0)\leqq 2\,\mathcal{L}_m(0)$$

et en particulier

$$\mathscr{L}_m(k+1) \leqq 2\,\mathscr{L}_m(0).$$

Si de plus $|u^0(-\infty)-\bar{u}|$ est assez petit, quitte à diminuer $\eta$, on en déduit que les $\Gamma(n)$, $n \leqq -1$, sont à valeurs dans $\omega_2$, que $\Gamma'(0) \in \omega_2'$ et aussi que les $U_{k+1,n}$, $n \leqq 1$, sont à valeurs dans $\Omega_2$, ce qui entraîne $\ddot{\Gamma} \in \omega_2'$ et boucle la récurrence.

Par vitesse finie de propagation le cas précédent entraîne que sans condition à $|x|$ grand, pour $u^0$ satisfaisant

$$|u^0(-\infty)-\bar{u}|,\ V(u^0),\ |g(0^+)-b(\bar{u})|,\ V(g) \text{ petits,}$$

$\mathscr{L}_m(k+1)$ a un sens et reste inférieur à $2\,\mathscr{L}_m(0)$, ce qui permet encore de conclure à (R).

Notant $u^{\Delta t, \Delta x}$ le recollement des $u_k$ ainsi définies pour tout $k \in \mathbb{N}$, on montre facilement l'estimation « presque lipschitzienne » en temps

$$\int_{-\infty}^{0} |u^{\Delta t, \Delta x}(t, x) - u^{\Delta t, \Delta x}(s, x)|\, dx$$
$$\leqq C(|t-s| + \Delta x([|t-s|/\Delta t]+1))(V(u^0) + |b(u^0(0^-)) - g(0^+)| + V(g))$$

et la convergence du schéma se traite alors comme dans le cas du problème de Cauchy. La notion de solution faible décrite au paragraphe 1 s'utilise ensuite pour obtenir la consistance, sans difficulté nouvelle par rapport au problème de Cauchy, la séparabilité séquentielle de l'espace des fonctions test considérées restant vraie. On obtient ainsi le théorème 1.1 avec une solution entropique lorsque le système admet une entropie strictement convexe; de plus les conditions au bord s'interprètent en $u(0,.)=u^0$, $b(u(.,0))=g$ dans $L^1_{\text{loc}}$.

## 4. LE SCHÉMA DE GLIMM MIXTE DANS LA BANDE

Soient $\Delta t > 0$, $(\Delta x)^{-1} = 2\,m$, $m \in \mathbb{N}$, vérifiant (C.F.L) et pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\bar{u}_k$ la fonction constante par morceaux définie pour $(2n-2)\,\Delta x < x < 2n\,\Delta x$, $n \in \mathbb{Z}$, $-m+1 \leqq n \leqq m$, par

$$\bar{u}_0(x) \equiv U_{0,n} = u^0((2n-1)\,\Delta x),$$
$$\bar{u}_k(x) \equiv U_{k,n} = u_{k-1}(k\,\Delta t, (2n-1+\theta_k)\,\Delta x - 0), \text{ si } k \geqq 1, \text{ avec } \theta_k \in ]-1, 1[,$$

la fonction $u_k$ étant recollée dans la bande de temps $[k\,\Delta t, (k+1)\,\Delta t]$ des restritions à $((2n-1)\,\Delta x, (2n+1)\,\Delta x)$, $-m+1 \leqq n \leqq m-1$, des solutions des problèmes de Riemann à saut en $2n\,\Delta x$ pour les données de Cauchy $U_{k,n}$, $U_{k,n+1}$, ou de la restriction à $[-1, -1+\Delta x]$ ou $[1-\Delta x, 1]$ des solutions des problèmes de Riemann à données mixtes $U_{k,-m+1}$, $g_{k,-} = g_-(k\,\Delta t + 0)$ ou $U_{k,m}$, $g_{k,+} = g_+(k\,\Delta t + 0)$.

Les lemmes d'interaction utiles se formulent à l'aide des notations suivantes:

$$\varepsilon_{\rightarrow} \equiv \varepsilon \quad \text{et} \quad \Phi_{\rightarrow}(\varepsilon_{\rightarrow}, u_g) = \Phi(\varepsilon, u_g) \equiv \Phi_N(\varepsilon_N, \Phi_{N-1}(\varepsilon_{N-1}, \ldots, \Phi_1(\varepsilon_1, u_g))\ldots)$$

$$\varepsilon_{\leftarrow} = (\varepsilon_N, \ldots, \varepsilon_1) \quad \text{et} \quad \Phi_{\leftarrow}(\varepsilon_{\leftarrow}, u_d) \equiv {}^t\Phi_1(\varepsilon_1, {}^t\Phi_2(\varepsilon_2, \ldots, {}^t\Phi_N(\varepsilon_N, u_d))\ldots),$$

où

$$u_g = {}^t\Phi_i(\varepsilon_i, u_d) \Leftrightarrow u_d = \Phi_i(\varepsilon_i, u_g),$$

$$\varepsilon'_{\rightarrow} = \varepsilon' \quad \text{et} \quad \Phi'_{\rightarrow}(\varepsilon'_{\rightarrow}, u) = \Phi'(\varepsilon', u),$$

$$\varepsilon'_{\leftarrow} = (\varepsilon_{N'}, \ldots, \varepsilon_1) \quad \text{et} \quad \Phi'_{\leftarrow}(\varepsilon'_{\leftarrow}, u) = {}^t\Phi_1(\varepsilon_1, {}^t\Phi_2(\varepsilon_2, \ldots, {}^t\Phi_{N'}(\varepsilon_{N'}, u_d))\ldots)),$$

dans le cas (N.C),

$$\varepsilon''_{\rightarrow} = \varepsilon'' \quad \text{et} \quad \Phi''_{\rightarrow}(\varepsilon''_{\rightarrow}, u) = \Phi''(\varepsilon'', u)),$$

$$\varepsilon''_{\leftarrow} = (\varepsilon_N, \ldots, \varepsilon_{N'+1}) \quad \text{et} \quad \Phi''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, u) \equiv {}^t\Phi_{N'+1}(\varepsilon_{N'+1}, \ldots, {}^t\Phi_N(\varepsilon_N, u))\ldots)$$

dans le cas (C),

$$\varepsilon''_{\rightarrow} = \varepsilon'' \quad \text{et} \quad \Phi''_{\rightarrow}(\varepsilon''_{\rightarrow}, u) = \Phi''(\varepsilon'', u)), \sigma$$

$$\varepsilon''_{\leftarrow} = (\varepsilon_N, \ldots, \varepsilon_{N'+2}) \quad \text{et} \quad \Phi''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, u) \equiv {}^t\Phi_{N'+2}(\varepsilon_{N'+2}, \ldots, {}^t\Phi_N(\varepsilon_N, u))\ldots).$$

On notera aussi

$$D'_{\varepsilon_{\rightarrow}} \Phi'_{\rightarrow}(0, u) = r'_{\rightarrow}(u), \qquad D'_{\varepsilon_{\leftarrow}} \Phi'_{\leftarrow}(0, u) = r'_{\leftarrow}(u),$$

$$D''_{\varepsilon_{\rightarrow}} \Phi''_{\rightarrow}(0, u) = r''_{\rightarrow}(u), \qquad D''_{\varepsilon_{\leftarrow}} \Phi''_{\leftarrow}(0, u) = r''_{\leftarrow}(u)$$

$$R'(u) \equiv (D b_+(u) r'_{\rightarrow}(u))^{-1} D b_+(u) r''_{\rightarrow}(u),$$

$$R''(u) \equiv (D b_-(u) r''_{\leftarrow}(u))^{-1} D b_-(u) r'_{\leftarrow}(u).$$

Les lemmes 3.1, 3.2, correspondent au sens $\rightarrow$, de la gauche vers la droite. Pour le sens inverse $\leftarrow$, on a aussi le

LEMME 4.1:

(+) *Il existe un voisinage de* 0, $\omega''_1 \subset \omega''$, *un voisinage de* $\bar{u}$, $\Omega_1 \subset \Omega$ *et une constante* $c_0$ *tels que la fonction de classe* $C^2$, $\gamma''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, \delta''_{\leftarrow}, u)$, *qui réalise*

$$b_-(\Phi''_{\leftarrow}(\delta''_{\leftarrow}, \Phi''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, u))) = b_-(\Phi''_{\leftarrow}(\gamma''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, \delta''_{\leftarrow}, u), u))$$

*pour tous* $\varepsilon''$, $\delta'' \in \omega''_1$ *et* $u \in \Omega_1$, *vérifie*

$$|\gamma''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, \delta''_{\leftarrow}, u) - \delta''_{\leftarrow} - \varepsilon''_{\leftarrow}| \leq c_0 |\delta''_{\leftarrow}| |\varepsilon''_{\leftarrow}|.$$

(−) *Il existe des voisinages de* 0, $\omega''_1 \subset \omega''$, $\omega'_1 \subset \omega'$, *un voisinage de* $\bar{u}$, $\Omega_1 \subset \Omega$ *et une constante* $c_0$ *tels que la fonction de classe* $C^2$, $\gamma''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, \delta''_{\leftarrow}, \varphi'_{\leftarrow}, u)$, *qui réalise*

$$b_-(\Phi''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}, \Phi''_{\leftarrow}(\delta''_{\leftarrow}, \Phi'_{\leftarrow}(\varphi'_{\leftarrow}, u))) = b_-(\Phi''_{\leftarrow}(\gamma''_{\leftarrow}(\varphi'_{\leftarrow}, \delta''_{\leftarrow}, \varepsilon''_{\leftarrow}, u), u))$$

*pour tous* $\varphi'_{\leftarrow} \in \omega'_1$, $\varepsilon''_{\leftarrow}$, $\delta''_{\leftarrow} \in \omega''_1$ *et* $u \in \Omega_1$, *vérifie*

$$|\gamma''_{\leftarrow}(\varphi'_{\leftarrow}, \delta''_{\leftarrow}, \varepsilon''_{\leftarrow}, u) - R''(u)\varphi'_{\leftarrow} - \varepsilon''_{\leftarrow} - \delta''_{\leftarrow}|$$
$$\leq c_0(|\varphi'_{\leftarrow}|^2 + |\varphi'_{\leftarrow}| |\varepsilon''_{\leftarrow}| + |\varphi'_{\leftarrow}| |\delta''_{\leftarrow}| + |\varepsilon''_{\leftarrow}| |\delta''_{\leftarrow}|).$$

Soient

$$U_{k,n+1}=\Phi_{\rightarrow}(\gamma_{\rightarrow}(n), U_{k,n}),$$
$$U_{k+1,n+1}=\Phi_{\rightarrow}(\Gamma_{\rightarrow}(n), U_{k+1,n}), \qquad \text{pour} \quad -m+1\leqq n\leqq m-1,$$
$$g_{k,+}=b_{+}(\Phi'_{\rightarrow}(\gamma'_{\rightarrow}(m), U_{k,m}), \qquad U_{k,m+1}\equiv\Phi'_{\rightarrow}(\gamma'_{\rightarrow}(m), U_{k,m}),$$
$$g_{k+1,+}=b_{+}(\Phi'_{\rightarrow}(\Gamma'_{\rightarrow}(m), U_{k+1,m}), \qquad U_{k+1,m+1}=\Phi'_{\rightarrow}(\Gamma'_{\rightarrow}(m), U_{k+1,m})),$$
$$g_{k,-}=b_{-}(\Phi''_{\leftarrow}(\gamma''_{\leftarrow}(-m), U_{k,-m+1}), \qquad U_{k,-m}\equiv\Phi''_{\leftarrow}(\gamma''_{\leftarrow}(-m), U_{k,-m+1}),$$
$$g_{k+1,-}=b_{-}(\Phi''_{\leftarrow}(\Gamma''_{\leftarrow}(-m), U_{k+1,-m+1}),$$
$$U_{k+1,-m}=\Phi''_{\leftarrow}(\Gamma''_{\leftarrow}(-m), U_{k+1,-m+1})),$$

puis, en négligeant l'écriture des flèches $\rightarrow$,

$(+)$ pour $\theta_{k+1}\geqq 0$,

$$U_{k+1,n+1}=\Phi(\Gamma(n), U_{k+1,n})$$
$$=\Phi(\varepsilon(n+1), \Phi(\delta(n), U_{k+1,n}))), \qquad \text{pour} \quad -m+1\leqq n\leqq m-1,$$
$$g_{k+1,+}=b_{+}(\Phi'(\Gamma'((m), U_{k+1,m})))=b_{+}(\Phi'(\ddot{\gamma}_{+}, \Phi'(\delta'(m), U_{k+1,m}))),$$
$$g_{k+1,-}=b_{-}(\Phi''_{\leftarrow}(\Gamma''_{\leftarrow}(-m), U_{k+1,-m+1}))$$
$$=b_{-}(\Phi''_{\leftarrow}(\ddot{\gamma}_{-}, \Phi''_{\leftarrow}(\gamma''_{\leftarrow}(-m), \Phi'_{\leftarrow}(\varepsilon'_{\leftarrow}(-m+1), U_{k+1,-m+1}))$$

$(-)$ pour $\theta_{k+1}<0$,

$$U_{k+1,n+1}=\Phi(\Gamma(n), U_{k+1,n})$$
$$=\Phi(\varepsilon(n), \Phi(\delta(n-1), U_{k+1,n})), \qquad \text{pour} \quad -m+1\leqq n\leqq m-1,$$
$$g_{k+1,+}=b_{+}(\Phi'(\Gamma'((m), U_{k+1,m}))$$
$$=b_{+}(\Phi'(\ddot{\gamma}_{+}, \Phi'(\gamma'(m+1), \Phi''(\delta''(m-1), U_{k+1,m}));$$
$$g_{k+1,-}=b_{-}(\Phi''_{\leftarrow}(\Gamma''_{\leftarrow}(-m), U_{k+1,-m+1})$$
$$=b_{-}(\Phi''_{\leftarrow}(\ddot{\gamma}_{-}, \Phi''_{\leftarrow}(\varepsilon''_{\leftarrow}(-m), U_{k+1,-m+1})),$$

Procédant comme au paragraphe 3, on suppose $g_{\pm}(t+0)\in b_{\pm}(\Omega_2)$ pour tout $t\geqq 0$ et on cherche une borne de

$$V(g_{-})+|g_{-}(0^{+})-b_{-}(u^0(-1^{+}))|+V(u^0)+|b_{+}(u^0(1^{-}))-g_{+}(0^{+})|+V(g_{+})$$

qui permette d'effectuer la récurrence suivante:

(R) Si les $(U_{h,n})_{-m+1\leqq n\leqq m}$ sont définis jusq'au rang $k$, à valeurs dans $\Omega_2$, si les forces $\gamma(n)$ appartiennent à $\omega_2$ pour $-m+1\leqq n\leqq m-1$, $\gamma''(-m)\in\omega''_2$, $\gamma'(m)\in\omega'_2$, $\ddot{\gamma}_{-}\in\omega''_2$, $\ddot{\gamma}_{+}\in\omega'_2$ et si la fonctionnelle

$$\mathscr{L}_m(k)\equiv K''(\mathscr{L}_{g_{-}}(k)+|\gamma''(-m)|+\mathscr{L}''(k))$$
$$+\mathscr{L}^0(k)+K'(\mathscr{L}'(k)+|\gamma'(m)|+\mathscr{L}_{g_{+}}(k)),$$

où

$$\mathscr{L}_{g_{\pm}}(k)\equiv\ddot{c}\sum_{l\geqq k}|\ddot{g}_{l,\pm}|, \qquad \mathscr{L}''(k)\equiv\sum_{n=-m+1}^{m-1}|\gamma''(n)|,$$

$$\mathscr{L}^0(k) \equiv \sum_{n=-m+1}^{m-1} |\gamma^0(n)|, \quad \mathscr{L}'(k) \equiv \sum_{n=-m+1}^{m-1} |\gamma'(n)|,$$

vérifie $\mathscr{L}_m(k) \leqq 2\, \mathscr{L}_m(0)$, il en est de même au rang $k+1$.

4.2. ESTIMATIONS LINÉAIRES. — Si $\theta_{k+1} \in [0, 1[$, $\Gamma(n) - \delta(n) - \varepsilon(n+1)$ est encore estimé par le lemme 3.1, d'où

$$\mathscr{L}''(k+1) \leqq \mathscr{L}''(k) + c_0 \Lambda_+(k),$$
$$\mathscr{L}^0(k+1) \leqq \mathscr{L}^0(k) + c_0 \Lambda_+(k),$$
$$\mathscr{L}'(k+1) \leqq \mathscr{L}'(k) - |\varepsilon'(-m+1)| + |\varepsilon'(m)| + c_0 \Lambda_+(k),$$

avec

$$\Lambda_+(k) = \sum_{-m+1 \leqq n \leqq m-1} \Delta_\rightarrow(\delta_\rightarrow(n), \varepsilon_\rightarrow(n+1)).$$

De plus par les lemmes 4.1 et 4.2, en notant $R''\varepsilon' \equiv (R''\varepsilon'_\leftarrow)_\rightarrow$,

$$|\Gamma''(-m)| \leqq |R''(U_{k+1,\,-m+1})\,\varepsilon'(-m+1)| + |\gamma''(-m)| + |\ddot{\gamma}_-| + c_0 \lambda''_+(k),$$
$$|\Gamma'(m)| \leqq |\delta'(m)| + |\ddot{\gamma}_+| + c_0 \lambda'_+(k),$$

avec

$$\lambda''_+(k) = |\varepsilon'(-m+1)|^2 + |\varepsilon'(-m+1)|\,|\gamma''(-m)| + |\varepsilon'(-m+1)|\,|\ddot{\gamma}_-| + |\gamma''(-m)|\,|\ddot{\gamma}_-|,$$
$$\lambda'_+(k) = |\delta'(m)|\,|\ddot{\gamma}_+|;$$

on en déduit, avec

$$\lambda_+(k) = \lambda''_+(k) + \lambda'_+(k),$$
$$\mathscr{L}_m(k+1) \leqq \mathscr{L}_m(k) + K''\,|R''(U_{k+1,\,-m+1})\,\varepsilon'(-m+1)| - K'\,|\varepsilon'(-m+1)| + (K''+1+K')\,c_0(\Lambda_+(k) + \lambda_+(k)).$$

Si $\theta_{k+1} \in ]-1, 0[$ on a de même par symétrie,

$$\mathscr{L}''(k+1) \leqq \mathscr{L}''(k) + |\delta''(-m)| - |\delta''(m-1)| + c_0 \Lambda_-(k),$$
$$\mathscr{L}^0(k+1) \leqq \mathscr{L}^0(k) + c_0 \Lambda_-(k),$$
$$\mathscr{L}'(k+1) \leqq \mathscr{L}'(k) + c_0 \Lambda_-(k),$$

avec

$$\Lambda_-(k) = \sum_{-m+1 \leqq n \leqq m-1} \Delta_\rightarrow(\delta_\rightarrow(n-1), \varepsilon_\rightarrow(n)).$$

$$|\Gamma''(-m)| \leqq |\varepsilon''(-m)| + |\ddot{\gamma}_-| + c_0 \lambda''_-(k)$$
$$|\Gamma'(m)| \leqq |R'(U_{k+1,\,m})\,\delta''(m-1)| + |\gamma'(m)| + |\ddot{\gamma}_+| + c_0 \lambda'_-(k),$$

avec

$$\lambda''_-(k) = |\varepsilon''(-m)\,|\ddot{\gamma}_-| + |\delta''(m-1)|^2 + |\delta''(m-1)|\,|\gamma'(m)| + |\delta''(m-1)|\,|\ddot{\gamma}_+|,$$
$$\lambda'_-(k) = |\gamma'(m)|\,|\ddot{\gamma}_+|;$$

d'où, pour

$$\lambda_-(k)=\lambda''_-(k)+\lambda'_-(k),$$

$$\mathscr{L}_m(k+1)\leqq\mathscr{L}_m(k)+\mathrm{K}'\,|\,\mathrm{R}'(\mathrm{U}_{k+1,m})\,\delta''(m-1)\,|$$
$$-\mathrm{K}''\,|\,\delta''(m-1)\,|)+(\mathrm{K}''+1+\mathrm{K}')\,c_0\,(\Lambda_-(k)+\lambda_-(k)).$$

La non croissance «linéaire» est assurée près de $\bar{u}$ si on peut choisir K', K'' telles que

$$\mathrm{K}'\,\|\,\mathrm{R}'(\bar{u})\,\|<\mathrm{K}''\qquad\text{et}\qquad\mathrm{K}''\,\|\,\mathrm{R}''(\bar{u})\,\|<\mathrm{K}';$$

cela est possible sous la condition (K) et dans ce cas on a

$$(\mathscr{L})_\pm\qquad\mathscr{L}_m(k+1)\leqq\mathscr{L}_m(k)+(\mathrm{K}''+1+\mathrm{K}')\,c_0\,(\Lambda_\pm(k)+\lambda_\pm(k)).$$

4.3. ESTIMATIONS QUADRATIQUES.

4.3.1. Soit le potentiel de Glimm

$$\mathscr{Q}(k)=\sum_{-m+1\leqq n<p\leqq m-1}\Delta_\rightarrow(\gamma_\rightarrow(n),\,\gamma_\rightarrow(p)),$$

pour $\theta_{k+1}\geqq 0$, on a, avec encore $\mathscr{L}(k)=\mathscr{L}'(k)+\mathscr{L}^0(k)+\mathscr{L}''(k)$,

$$\mathscr{Q}(k+1)\leqq\mathscr{Q}(k)-\Lambda_+(k)$$
$$-\sum_{-m+2\leqq n\leqq m-1}\Delta(\varepsilon(-m+1),\,\gamma(n))-\Delta(\varepsilon(-m+1),\,\varepsilon(m))$$
$$+\sum_{-m+1\leqq n\leqq m-1}\Delta(\gamma(n),\,\varepsilon(m))+c_0\,\Lambda_+(k)\,(\mathscr{L}(k)+\mathscr{L}(k+1))$$

et pour $\theta_{k+1}<0$,

$$\mathscr{Q}(k+1)\leqq\mathscr{Q}(k)-\Lambda_-(k)$$
$$-\sum_{-m+1\leqq n\leqq m-2}\Delta(\gamma(n),\,\delta(m-1))-\Delta(\delta(-m),\,\delta(m-1))$$
$$+\sum_{-m+1\leqq n\leqq m-1}\Delta(\delta(-m),\,\gamma(n))+c_0\,\Lambda_-(k)\,(\mathscr{L}(k)+\mathscr{L}(k+1)).$$

4.3.2. Soient les potentiels d'interaction

$$q'(k)=\sum_{-m+1\leqq n\leqq m-1}\Delta(\gamma(n),\,\gamma(m)),$$

$$q''(k)=\sum_{-m+1\leqq n\leqq m-1}\Delta(\gamma_\rightarrow(-m),\,\gamma(n)).$$

$$q(k)=q''(k)+q'(k)+|\,\gamma''(-m)\,|\,|\,\gamma'(m)\,|;$$

pour $\theta_{k+1}\geqq 0$ on a

$$\mathscr{Q}(k+1)+q(k+1)\leqq\mathscr{Q}(k)+q(k)-(\Lambda_+(k)+|\,\varepsilon'(-m+1)\,|\,|\,\gamma''(-m)\,|$$
$$+|\,\varepsilon'(-m+1)\,|\,|\,\ddot{\gamma}_-\,|+|\,\gamma''(-m)\,|\,|\,\ddot{\gamma}_-\,|+|\,\delta'(m)\,|\,|\,\ddot{\gamma}_+\,|)$$
$$-\sum_{-m+2\leqq n\leqq m}\Delta(\varepsilon(-m+1),\,\gamma(n))$$

$$+\sum_{-m+2\leqq n\leqq m}\Delta(\mathrm{R}''\varepsilon'(-m+1),\gamma(n))+\sum_{-m\leqq n\leqq m}|\gamma(n)|(|\ddot{\gamma}_-|+|\ddot{\gamma}_+|)$$
$$+\Delta(\mathrm{R}''\varepsilon'(-m+1),\delta(-m+1))+|\ddot{\gamma}_-|\,|\ddot{\gamma}_+|$$
$$+2c_0(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))(\mathscr{L}(k)+|\gamma'(m)|+|\ddot{\gamma}_-|$$
$$+|\Gamma''(-m)|+\mathscr{L}(k+1)+|\Gamma'(m)|),$$

et si $\theta_{k+1}<0$, par symétrie,

$$\mathscr{Q}(k+1)+q(k+1)\leqq\mathscr{Q}(k)+q(k)$$
$$-(\Lambda_-(k)+|\delta''(m-1)|\,|\gamma'(m)|+|\delta''(m-1)|\,|\ddot{\gamma}_+|$$
$$+|\gamma'(m)|\,|\ddot{\gamma}_+|+|\varepsilon''(-m)|\,|\ddot{\gamma}_-|)$$
$$-\sum_{-m\leqq n\leqq m-2}\Delta(\gamma(n),\delta(m-1))$$
$$+\sum_{-m\leqq n\leqq m-2}\Delta(\gamma(n),\mathrm{R}'\delta''(m-1))+\sum_{-m\leqq n\leqq m}|\gamma(n)|(|\ddot{\gamma}_-|+|\ddot{\gamma}_+|)$$
$$+\Delta(\varepsilon(m-1),\mathrm{R}'\delta''(m-1))+|\ddot{\gamma}_-|\,|\ddot{\gamma}_+|$$
$$+2c_0(\Lambda_-(k)+\lambda_-(k))(|\ddot{\gamma}_-|+|\gamma''(-m)|$$
$$+\mathscr{L}(k)+|\Gamma''(-m)|+\mathscr{L}(k+1)+|\Gamma'(m)|).$$

4.3.3. Soit le potentiel

$$\mathrm{Q}_r(k)=(\mathrm{K}''(|\gamma''(-m)|+\mathscr{L}''(k))+\mathscr{L}^0(k)+\mathrm{K}'(\mathscr{L}'(k)+|\gamma'(m)|))$$
$$\times(\mathrm{K}''(|\gamma''(-m)|+\mathscr{L}''(k))+\mathrm{K}'(\mathscr{L}'(k)+|\gamma'(m)|)),$$

où $\mathrm{K}'\geqq 1$, $\mathrm{K}''\geqq 1$ vérifient toujours

$$\mathrm{K}'-\mathrm{K}''\,\|\mathrm{R}''(u)\|>0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}''-\mathrm{K}'\,\|\mathrm{R}'(u)\|>0$$

près de $\bar{u}$.

On a pour $\theta_{k+1}\geqq 0$

$$\mathrm{Q}_r(k+1)$$
$$\leqq\mathrm{Q}_r(k)-(\mathrm{K}'-\mathrm{K}''\,|\mathrm{R}''(\mathrm{U}_{k+1,\,-m+1})|)\,|\varepsilon'(-m+1)|\,(\mathscr{L}(k)+|\gamma'(m)|)$$
$$+2((\mathrm{K}''(|\ddot{\gamma}_-|+|\gamma''(-m)|+\mathscr{L}''(k))+\mathscr{L}^0(k)$$
$$+\mathrm{K}'(\mathscr{L}'(k)+|\gamma'(m)|+|\ddot{\gamma}_+|))(\mathrm{K}''\,|\ddot{\gamma}_-|+\mathrm{K}'\,|\ddot{\gamma}_+|)$$
$$+(\mathrm{K}''+1+\mathrm{K}')\,c_0(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))(\mathscr{L}_m(k)$$
$$+\mathscr{L}_m(k+1)+2(\mathrm{K}''\mathscr{L}_{g^-}(k+1)+\mathrm{K}'\mathscr{L}_{g^+}(k+1))).$$

Si $\alpha>1$ est tel que

$$\mathrm{K}'-\mathrm{K}''\,\|\mathrm{R}''(u)\|\geqq\alpha^{-1}\mathrm{K}' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}''-\mathrm{K}'\,\|\mathrm{R}'(u)\|\geqq\alpha^{-1}\mathrm{K}''$$

près de $\bar{u}$, alors le potentiel $\alpha\,\mathrm{Q}_r$ récupère le mauvais terme

$$\Sigma\,\Delta(\mathrm{R}''\varepsilon'(-m+1),\gamma(n))$$

de l'estimation de 4.4.2 et fait apparaître le gain manquant $-|\varepsilon'(-m+1)|^2$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(k+1)+q(k+1)+\alpha Q_r(k+1)\\
&\qquad \leqq \mathcal{Q}(k)+q(k)+\alpha Q_r(k)-(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))\\
&\qquad +(2\alpha+1)((K''(|\ddot{\gamma}_-|+|\gamma''(-m)|+\mathcal{L}''(k))+\mathcal{L}^0(k)\\
&\qquad +K'(\mathcal{L}'(k)+|\gamma'(m)|+|\ddot{\gamma}_+|))(K''|\ddot{\gamma}_-|+K'|\ddot{\gamma}_+|)\\
&\qquad +(2+\alpha(K''+1+K'))c_0(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))\\
&\qquad \times(\mathcal{L}_m(k)+\mathcal{L}_m(k+1)-2(K''\mathcal{L}_{g^-}(k+1)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k+1)))
\end{aligned}$$

et par symétrie une estimation analogue pour $\theta_{k+1}<0$.
Soit enfin

$$\begin{aligned}
\ddot{q}(k)=(K''(|\gamma''(-m)|+\mathcal{L}''(k))+\mathcal{L}^0(k)+K'(\mathcal{L}(k)+|\gamma'(m)|))\\
\times(K''\mathcal{L}_{g^-}(k)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k)).
\end{aligned}$$

Pour $\theta_{k+1}\geqq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\ddot{q}(k+1)\leqq \ddot{q}(k)-(K''(|\ddot{\gamma}_-|+|\gamma''(-m)|+\mathcal{L}''(k))+\mathcal{L}^0(k)+K'(\mathcal{L}(k)\\
+|\gamma'(m)|+|\ddot{\gamma}_+|))(K''|\ddot{\gamma}_-|+K'|\ddot{\gamma}_-|)\\
+(K''|\ddot{\gamma}_-|+K'|\ddot{\gamma}_+|)(K''\mathcal{L}_{g^-}(k)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k))\\
+c_0(K''+1+K')(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))(K''\mathcal{L}_{g^-}(k+1)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k+1)),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(k+1)+q(k+1)+\alpha Q_r(k+1)+(2\alpha+1)\ddot{q}(k+1)\\
&\qquad \leqq \mathcal{Q}(k)+q(k)+\alpha Q_r(k)+(2\alpha+1)\ddot{q}(k)\\
&\quad -(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))+(2\alpha+1)(K''|\ddot{\gamma}_-|+K'|\ddot{\gamma}_+|)(K''\mathcal{L}_{g^-}(k)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k))\\
&\qquad +4\alpha(K''+1+K'))c_0(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))(\mathcal{L}_m(k)+\mathcal{L}_m(k+1)),
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(k+1)+q(k+1)+\alpha Q_r(k+1)\\
&\qquad +(2\alpha+1)(\ddot{q}(k+1)+(K''\mathcal{L}_{g^-}(k+1)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k+1))^2)\\
&\quad \leqq \mathcal{Q}(k)+q(k)+\alpha Q_r(k)+(2\alpha+1)(\ddot{q}(k)+(K''\mathcal{L}_{g^-}(k)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k))^2)\\
&\qquad -(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))+4\alpha(K''+1+K'))c_0(\Lambda_+(k)+\lambda_+(k))\\
&\qquad \times(\mathcal{L}_m(k)+\mathcal{L}_m(k+1))
\end{aligned}$$

et par symétrie une estimation analogue si $\theta_{k+1}<0$.

Une version mixte du potentiel de Glimm dans le cas de la bande sous la condition (K) est ainsi

$$\mathcal{Q}_m(k)=\mathcal{Q}(k)+q(k)+\alpha Q_r(k)+(2\alpha+1)(\ddot{q}(k)+(K''\mathcal{L}_{g^-}(k)+K'\mathcal{L}_{g^+}(k))^2),$$

potentiel qui s'estime encore suivant le signe de $\theta_{k+1}$ en

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q})_\pm \quad \mathcal{Q}_m(k+1)\leqq \mathcal{Q}_m(k)-(\Lambda_\pm(k)+\lambda_\pm(k))\\
+C(\Lambda_\pm(k)+\lambda_\pm(k))(\mathcal{L}_m(k)+c_0(\Lambda_\pm(k)+\lambda_\pm(k))).
\end{aligned}$$

Le théorème 1.2 s'en déduit comme en 3.5.

# RÉFÉRENCES

[B-L-N] C. BARDOS, A. Y. LEROUX et J. C. NEDELEC, First Order Quasi-Linear Equations with Boundary Conditions, *Comm. P.D.E.*, vol. **4**, (9), 1979, p. 1017-1034.

[B-S] A. BENABDALLAH et D. SERRE, Problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **305**, série I, 1987, p. 677-680.

[D-G] B. DUBROCA et G. GALLICE, Résultats d'existence et d'unicité du problème mixte pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation monodimensionnels, *Comm. P.D.E.*, vol. **15**, (1), 1990, p. 59-80.

[D-L] F. DUBOIS et P. LE FLOCH, Two Formulations of Boundary Conditions for Systems of Conservation Laws, *J. Diff. Eq.*, vol. **71**, 1988, p. 93-722.

[Gl] J. GLIMM, Solutions in the Large for Nonlinear Systems of Conservation Laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **18**, 1965, p. 695-715.

[Go] J. GOODMAN, Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *Ph. D. Thesis*, California University, 1982.

[H] L. HORMANDER, Non-Linear Hyperbolic Differential Equation, *Lectures*, 1986-1987, Lund.

[La] P. D. LAX, Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **10**, 1957, p. 537-566.

[Li] T. P. LIU, Initial Boundary Value Problems for Gas Dynamics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **64**, 1977, p. 137-168.

[N-S] T. NISHIDA et J. SMOLLER, Mixed Problems for Nonlinear Conservation Laws, *J. of Diff. Eq.*, vol. **23**, 1977, p. 244-269.

[S] M. SCHATZMAN, Continuous Glimm Functionals and Uniqueness of Solutions of the Riemann Problem, *Ind. Univ. Math. J.*, vol. **34**, 1985, p. 533-589.

(*Manuscrit reçu le* 4 *juillet* 1991;
*révisé le* 21 *janvier* 1992.)