ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

R. TAHRAOUI

Régularité de la solution d'un problème variationnel

Annales de l'I. H. P., section C, tome 9, nº 1 (1992), p. 51-99
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1992__9_1_51_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 9, n° 1, 1992, p. 51-99. *Analyse non linéaire*

Régularité de la solution d'un problème variationnel

par

R. TAHRAOUI

CEREMADE, Université Paris-IX Dauphine,
75775 Paris, France

RÉSUMÉ. — Nous donnons un résultat de régularité pour un problème variationnel. Comme conséquence, nous obtenons un résultat d'existence pour une classe de problèmes en optimisation non convexe.

ABSTRACT. — *Regularity of the solution of a variational problem.* — We give a regularity result for a variationnal problem, as a consequence, we obtain an existence result for a class of non convex optimization problems.

1. INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail au problème du type :

$$(\mathscr{P}_1): \quad \operatorname{Inf}\left\{\int_\Omega [g(x, \nabla v)+l(x, v)]\, dx / v \in \mathrm{V}_1 = \mathrm{W}_0^{1, p}(\Omega)+\psi\right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et g un critère non convexe. Ces fonctionnelles se rencontrent dans certains modèles scalaires en élasticité non linéaire où l'absence de convexité par rapport à ∇v est courante (*cf.* [1] à

Classification A.M.S. : 73 A 50, 73 B 05, 58 E 30, 49 A 50, 58 G 20.

[5]). Ces fonctionnelles non convexes ne sont pas s.c.i. faibles, et le problème $(\mathscr{P}_1)$ peut ne pas admettre de solution.

Il existe peu de résultats d'existence pour les problèmes du calcul des variations de la forme ci-dessus c'est-à-dire en l'absence de s.c.i. faible ([6] à [11]). Et la situation générale reste encore fort mal connue.

Dans cet article on se propose de montrer, sous certaines hypothèses, un résultat d'existence de solutions pour $(\mathscr{P}_1)$. L'idée de base (*cf.* [6], [8]) sera la suivante. On associe à $(\mathscr{P}_1)$ un problème dit relaxé :

$$(\mathscr{P}_1 \mathscr{R}) : \quad \operatorname{Inf}\left\{ \mathrm{J}_1(v) = \int_\Omega [g^{**}(x, \nabla v) + l(x, v)]\, dx / v \in \mathrm{V}_1 \right\},$$

où $g^{**}(x, .)$ désigne la convexifiée de $g(x, .)$ par rapport à son deuxième argument ∇v. Sous certaines conditions $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$ admet au moins une solution u. Si l'on montre que l'ensemble

$$\mathrm{E} = \{ x \in \Omega / g^{**}(x, \nabla u(x)) < g(x, \nabla u(x)) \} \tag{1.1}$$

est de mesure nulle, la fonction u sera également solution de $(\mathscr{P}_1)$. Pour obtenir ce résultat nous supposerons en particulier l'hypothèse essentielle suivante : la fonction $g^{**}(x, \xi)$ est affine en ξ sur chaque composante connexe K_i de l'ensemble

$$\mathrm{K} = \{ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n / g^{**}(x, \xi) < g(x, \xi) \} \tag{1.2}$$

c'est-à-dire

$$g^{**}(x, \xi) = \alpha_i(x) . \xi + \beta_i(x), \qquad \forall (x, \xi) \in \mathrm{K}_i. \tag{1.3}$$

Ce type d'hypothèse se rencontre dans [21], [12], [8] (*cf.* également [10]). D'autre part, comme il a été remarqué dans [8], la propriété de E d'être de mesure nulle est liée à la régularité de la solution d'un problème dual de $(\mathscr{P}_1)$ si $l(x, .)$ est convexe; et si $l(x, .)$ est non convexe (*cf.* [10], [13]) il faut considérer la régularité de la solution $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$ du problème suivant :

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_i &= \frac{\partial g^{**}}{\partial \xi_i}(x, \nabla u) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \operatorname{div} \bar{p} &= \sum_{i=1} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \frac{\partial l}{\partial u}(x, u). \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Et c'est la raison pour laquelle nous abordons en premier lieu l'étude de la régularité du problème $(\mathscr{P}_2)$ suivant, appelé problème dual de $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$:

$$(\mathscr{P}_2) : \quad \operatorname{Inf}\left\{ \mathrm{J}_2(w) = \int_\Omega [g^*(x, -w) + l^*(x, -\operatorname{div} w)]\, dx / w \in \mathrm{V}_2 \right\}$$

où $g^*(x, .)$ désigne la polaire de $g(x, .)$ par rapport à w et

$$\mathrm{V}_2 = \{ w \in (\mathrm{L}^q(\Omega))^n / \operatorname{div} w \in \mathrm{L}^q(\Omega) \},$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Les difficultés rencontrées pour étudier cette question sont dues d'une part au manque de régularité de g^* et l^* qui rend illicite l'écriture de l'équation d'Euler-Lagrange de $(\mathscr{P}_2)$, et d'autre part au fait que $g^*(x, .)$ n'est pas en général uniformément strictement convexe.

Nous distinguerons deux cas :

(i) le cas où $l(x, .)$ est convexe mais non différentiable;

(ii) le cas où $l(x, .)$ est régulière mais non nécessairement convexe.

Ces deux situations se traitent de façon différente : on s'affranchit de l'absence de différentiabilité du (i) en régularisant l et en considérant le problème $(\mathscr{P}_2)$ dual de $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$. Ceci n'est plus possible dans l'éventualité de (ii); ce qui nous oblige à n'envisager que le cas non convexe régulier.

Enfin notre point de vue est ici différent de celui rencontré dans [10].

Dans le cas g indépendant de x et sous des hypothèses essentielles absentes dans notre travail, telles que l'uniforme stricte convexité de g à l'infini et la convexité uniforme de Ω, on montre dans [10] que $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$ possède une solution u uniformément lipschitzienne. Ce caractère lipschitzien d'une solution de $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$ est obtenu en régularisant g^{**} et en employant des techniques utilisées dans [14]; et cette régularité de u est, de plus, fondamentale pour montrer la régularité $(H^1_{loc}(\Omega))^n$ de $\bar{p}$.

En général g^* n'est pas de classe C^1 comme le montre l'exemple donné dans la remarque 2.1; mais elle est strictement convexe.

Notre démarche consiste à régulariser grosso modo g^* (g^* ou une perturbation de g^*) et à établir des estimations convenables pour en déduire directement la régularité $(W^{1, q}_{loc}(\Omega))^n$ de $\bar{p}$, sans passer par la régularité éventuelle de u. De plus, nous pensons, sous nos hypothèses, qu'en général u ne peut être lipschitzienne.

Les passages à la limite, pour récupérer le problème initial, constituent une partie des difficultés rencontrées dans ce travail. Enfin le résultat de régularité est également obtenu pour une classe plus générale de fonctionnelles de la forme

$$\int_\Omega g(x, v, \nabla v)\, dx,$$

et englobe aussi les fonctionnelles du type

$$\int_\Omega g(x, \nabla v)\, dx$$

rencontrées dans [11]. Nous faisons ainsi un pas vers un résultat de régularité plus général « conjecturé implicitement » dans [8].

Enfin signalons qu'un résumé de ce travail a été donné dans [20].

2. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Les deux fonctions g et l sont définies respectivement sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; p et q désignent deux réels positifs tels que : $p \geqq 2$ et $1/p+1/q=1$. On suppose g régulière et l continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$. Nous sommes amenés à considérer deux types de conditions :

(i) des hypothèses classiques de croissance.

Il existe des constantes strictement positives a_i, c_i et des constantes réelles b_i, d_i telles que l'on ait

$$a_1 |t|^p + b_1 \leqq g(x, t) \leqq a_2 |t|^p + b_2 \tag{2.1}$$

$$-c_1 |\eta|^p + d_1 \leqq l(x, \eta) \leqq c_2 |\eta|^p + d_2 \tag{2.2}$$

où c_1 est convenablement choisie. A la place de (2.2) nous avons parfois besoin de

$$c_3 |\eta|^p + d_1 \leqq l(x, \eta) \leqq c_2 |\eta|^p + d_2, \qquad c_3 > 0. \tag{2.2.1}$$

On suppose qu'au sens des distributions les dérivées $\partial^2 l/\partial x_i \partial\eta$, $\partial^2 l/\partial\eta^2$, $\partial g^*/\partial t_i$, $\partial^2 g^*/\partial x_i \partial t_j$ sont des fonctions qui appartiennent à L^1_{loc} et qui satisfont les conditions

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial t_i}(x, t)\right| \leqq c.(s_1(x) + |t|^{q-1}) \quad \text{p. p. } x, \quad \forall t \tag{2.3}$$

où s_1 est une fonction de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$;

$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial x_i \partial t_j}(x, t)\right| \leqq G(x, t) \quad \text{p. p. } x \in \Omega, \quad \forall t \tag{2.4}$$

où G est une fonction dont la croissance sera précisée plus loin;

$$\left|\frac{\partial l}{\partial\eta}(x, \eta)\right| \leqq C.(s(x) + |\eta|^{p-1}), \qquad s \in L^q(\Omega), \tag{2.5.0}$$

$$\left|\frac{\partial^2 l}{\partial\eta^2}(x, \eta)\right| \leqq C.(1 + |\eta|^{p-2}), \qquad \text{p. p. } x, \quad \forall\eta \tag{2.5.1}$$

$$\left|\frac{\partial^2 l}{\partial x_i \partial\eta}(x, \eta)\right| \leqq C.(s_2(x) + |\eta|^{p-1}), \qquad \text{p. p. } x, \quad \forall\eta \tag{2.5.2}$$

où s_2 appartient à $L^q_{\text{loc}}(\Omega)$.

(ii) des hypothèses essentielles à la méthode

$$g^*(x, t_1) - g^*(x, t_2) \geqq B_0(x, t_2).(t_1 - t_2) + B_1(x, t_1, t_2) . |t_1 - t_2|^2 \tag{2.6}$$

$B_0(x, t)$ supposé dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ désigne un élément du sous-différentiel de $g^*(x, .)$ au point t, à x fixé; B_1 est une fonction de Carathéodory strictement positive dont nous indiquerons le comportement en t_1, t_2 un peu plus loin. Notons

$$B_2(x, t) = \frac{1}{c\,|t|^{2-q} + d(x)}, \tag{2.6.1}$$

où $d(.)$ est une fonction strictement positive appartenant à $L_{loc}^{q/(2-q)}(\Omega)$ et c est une constante positive. Nous supposons en outre que l'on ait :

$$\sup\{G^2(x, t).(B_2)^{-1}(y, t)/(x, y)\in\Omega^2\} \leqq c.|t|^q + b, \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1(x, t_1, t_2) &\geqq (c(|t_1|^{2-q} + |t_2|^{2-q}) + d(x))^{-1}; \\ B_1(x, t_1, t_2) &= B_1(x, t_2, t_1) \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Remarques 2.1. — 1. L'hypothèse (2.6) est raisonnable comme le montre l'exemple suivant : on se donne la fonction

$$k(s) = \begin{cases} (s-1)^4 & \text{si } s \geqq 0, \\ (-s-1)^4 & \text{si } s \leqq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \quad\text{et on pose} \\ g(t) = k(|t|), \quad t\in\mathbb{R}^n; \end{cases}$$

on a :

$$g^{**}(t) = \begin{cases} (|t|-1)^4 & \text{si } |t| > 1, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

nous avons :

$$g^*(r) = |r| + (3/4)|r|^{4/3};$$

et on montre, par régularisation de $g^*(r)$, à partir de la formule de Taylor, que l'on a l'inégalité (2.6) :

$$g(r_1) - g(r_2) \geqq B_0(r_2).(r_1 - r_2) + (2)^{1/3}.B_1(r_1, r_2).(r_1 - r_2)^2/6,$$

où

$$B_1(r_1, r_2) = (1 + |r_1|^{2-4/3} + |r_2|^{2-4/3})^{-1}$$

et

$$B_0(r) \in \partial g^*(r) \text{ sous-différentiel de } g^*(.).$$

2. Nous montrerons, au paragraphe 7, que si l'on suppose sur $g^{**}(.)$ l'hypothèse de croissance suivante :

$$\left|\frac{\partial^2 g^{**}(t)}{\partial t_i \partial t_j}\right| \leqq c\,|t|^{p-2} + d,$$

où la dérivation s'entend au sens des distributions, alors l'inégalité d'ellipticité (2.6)-(2.8) a lieu.

3. Dans [20] une erreur d'indice s'est glissée dans l'hypothèse (H 3); et deux erreurs typographiques apparaissent en lignes 13 et 14 : pour l'hypothèse (H 3), il convient de lire $\gamma = 2 - q$; en ligne 13, il convient de lire $B_1(x, t)$ avec $t = (t_1, t_2)$ à la place de $B_1(x, t_2)$; en ligne 14, $B_0(x, t_2)$

à la place de $B_0(x, t)$. A ces détails près, il n'y a aucune incidence sur les résultats obtenus et les idées mises en œuvre en [20].

4. Dans le seul but d'éviter d'alourdir techniquement l'exposé de ce travail, nous avons évité, dans les hypothèses (2.2) à (2.5.2), de donner les inégalités optimales par utilisation du théorème d'inclusion de Sobolev.

Sous les hypothèses (2.6) et (2.2) le problème :

$$\operatorname{Inf}\left\{\int_\Omega g^{**}(x, \nabla u)\,dx + \int_\Omega l(x, u)\,dx / v \in W_0^{1,p}(\Omega) + \psi\right\}$$

admet au moins une solution u. De plus

1. si $l(x, .)$ est convexe, il existe $\bar{p} \in V_2$ solution unique de $(\mathscr{P}_2)$ telle que

$$\left.\begin{array}{l} \nabla g^{**}(x, \nabla u) = \bar{p}, \\ -\operatorname{div} \bar{p} \in \partial l(x, u). \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

2. si $l(x, .)$ est régulière, il existe $\bar{p} \in V_2$ tel que l'on ait :

$$\left.\begin{array}{l} \nabla g^{**}(x, \nabla u) = \bar{p}, \\ -\operatorname{div} \bar{p} = \dfrac{\partial l}{\partial \eta}(x, u). \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

Si $l(x, .)$ n'est ni convexe ni régulière, les équations (2.12) et (2.13) précédentes ne peuvent avoir lieu; et dans ce cas le problème de l'existence de $(\mathscr{P}_1)$ ne peut être abordé ici. La manière d'établir ces relations est classique. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [23], [15].

3. RÉGULARISATION DU PROBLÈME $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$ ET ESTIMATIONS

Pour éviter toute confusion entre le signe $*$ de f^* polaire de f et l'opérateur de convolution nous désignons ce dernier par $\hat{*}$.

Notons pour $\varepsilon > 0$

$$k_\varepsilon(x, t) = (g^*) \hat{*} \rho^\varepsilon(x, t) + \varepsilon\,\delta(t) = \int g^*(x-y, t-s)\,\rho^\varepsilon(y, s)\,dy\,ds + \varepsilon\,\delta(t)$$

où δ est une fonction régulière strictement convexe à croissance convenable et où ρ^ε désigne le noyau de convolution suivant

$$\rho^\varepsilon(y) = \begin{cases} c.\varepsilon^{-\nu} \exp(\varepsilon^2/(y^2-\varepsilon^2)) & \text{si} \quad |y| < \varepsilon \\ 0 \quad \text{si} \quad |y| \geq \varepsilon; \end{cases}$$

avec $\nu = 2n$; la constante de normalisation c est choisie telle que

$$\int \rho^\varepsilon(y)\,dy = 1,$$

et y représente (x, t).

On note $g_\varepsilon^{**} = (k_\varepsilon)^*$.

Remarque. — Les hypothèses (2.1) à (2.8) sont satisfaites uniformément en ε par les différentes fonctions régularisées de g^{**}, g^*, l, B_1. Par soucis de simplification la preuve de ces résultats a été mise en Annexe. Par conséquent, les renvois vers les résultats Annexes signifient seulement que l'on utilise les hypothèses (2.1) à (2.8) pour les fonctions régularisées.

Selon que l est régulière ou non, nous perturbons le problème $(\mathcal{P}_1 \mathcal{R})$ par l'un des deux problèmes qui vont suivre :

Première perturbation : Si l est régulière on considère la perturbation :

$$(\mathcal{P}_1^\varepsilon) \equiv (\mathcal{P}_1^\varepsilon \mathcal{R})_1 \left\{ \begin{array}{l} \inf [J_1^\varepsilon(v)/v \in V_1] \\ J_1^\varepsilon(v) = \displaystyle\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla v)\, dx + \int_\Omega l(x, v)\, dx \end{array} \right.$$

Deuxième perturbation : si l est de carathéodory mais $\eta \to l(x, \eta)$ convexe alors on considère la perturbation

$$(\mathcal{P}_1^\varepsilon) \equiv (\mathcal{P}_1^\varepsilon \mathcal{R})_2 \left\{ \begin{array}{l} \inf [J_1^\varepsilon(v)/v \in V_1] \\ J_1^\varepsilon(v) = \displaystyle\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla v)\, dx + \int_\Omega l_\varepsilon(x, v)\, dx \end{array} \right.$$

où $l_\varepsilon(x, \eta)$ est une régularisation de l donnée par (3.14.1).

La fonction $g_\varepsilon^{**}(x, .) = (k_\varepsilon(x, .))^*$ satisfait, d'après l'annexe A.1, une hypothèse de croissance du même type que (2.1); donc $(\mathcal{P}_1^\varepsilon)$ possède au moins une solution u_ε; puisque k_ε est strictement convexe, g_ε^{**} est de classe C^1 d'après [17].

Dans les deux cas il existe une fonction p_ε satisfaisant les relations :

$$\left. \begin{array}{r} \nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u_\varepsilon) = -p_\varepsilon \in (L^q(\Omega))^n, \\ -\operatorname{div} p_\varepsilon = \dfrac{\partial r}{\partial \eta}(x, u_\varepsilon) \in L^q(\Omega) \end{array} \right\} \tag{3.1}$$

où $r = l$ si on est dans le premier cas et $r = l_\varepsilon$ dans le second cas. De plus on a les estimations suivantes :

$$\left. \begin{array}{r} \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \leqq C, \\ \| u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \leqq C \end{array} \right\} \tag{3.2}$$

Remarque. — Rappelons que si $l(x, .)$ est convexe, p_ε est solution d'un problème dual de $(\mathcal{P}_1^\varepsilon \mathcal{R})_2$, [23] :

$$(\mathcal{P}_2) : \inf \left[J_2^\varepsilon(\tilde{q}) = \int_\Omega k_\varepsilon(x, -\tilde{q})\, dx + \int_\Omega h_\varepsilon(x, -\operatorname{div} \tilde{q})\, dx / \tilde{q} \in V_2 \right]$$

où $h_\varepsilon(x, \eta) = (l_\varepsilon(x, .))^*(\eta)$.

Remarque. — Si $l(.,\,.)$ est régulière par rapport à tous ses arguments, on montre comme dans Stampacchia [18] que u_ε est dans un borné de $L^\infty(\Omega)$: la preuve de [18] s'adapte à notre situation.

PROPOSITION 3.1. — *Nous avons l'estimation suivante :*

$$\left.\begin{aligned}&\|p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}\leqq C,\\ &\left\|\psi\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}p_\varepsilon)\right\|_{L^q(\Omega)}\leqq C=C(\psi);\qquad \forall\,\psi\in\mathscr{D}(\Omega),\quad 0\leqq\psi\leqq 1.\end{aligned}\right\}\tag{3.2.1}$$

Si s_2 appartient à $L^q(\Omega)$ alors la constante estimant $\nabla(\operatorname{div} p_\varepsilon)$ est indépendante de ψ.

Démonstration. — D'après l'hypothèse (2.1) $g^*(x,\,.)$ satisfait, par polarité, les conditions de croissance :

$$A\,|t|^q+B\leqq g^*(x,\,t)\leqq C\,|t|^q+D\tag{3.2.2}$$

où les différentes constantes ne dépendent que de a_i, b_i intervenant en (2.1); par conséquent, d'après l'annexe A.1, $k^*_\varepsilon(x,\,.)$ vérifie (3.2.2) avec des constantes indépendantes de ε mais différentes de celles présentes en (3.2.2); et de nouveau, par polarité $g^{**}_\varepsilon(x,\,.)$ vérifie les conditions :

$$\alpha_1\,|t|^p+\beta_1\leqq g^{**}_\varepsilon(x,\,t)\leqq\alpha_2\,|t|^p+\beta_2.\tag{3.2.3}$$

De plus, la fonction $k_\varepsilon(x,\,.)$ étant strictement convexe,

$$g^{**}_\varepsilon(x,\,.)=(k^*_\varepsilon(x,\,.))^*$$

est de classe C^1 à x fixé, d'après [17]. Par conséquent nous pouvons appliquer l'annexe A.7. Nous obtenons

$$|\nabla_t g^{**}_\varepsilon(x,\,t)|\leqq C\,|t|^{p-1}+C\tag{3.2.4}$$

où C désigne diverses constantes indépendantes de ε. Enfin (3.1) et (3.2.4) entraînent aisément la première estimation (3.2.1).

Quant à la deuxième estimation elle s'obtient à partir de (3.1) comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}p_\varepsilon)&=-\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial\eta}(x,\,u_\varepsilon)-\frac{\partial^2 r}{\partial\eta^2}(x,\,u_\varepsilon).\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\\ &=v_1+v_2;\end{aligned}$$

par (2.5.2) nous avons

$$\|\psi\,v_1\|_{L^q(\Omega)}<C\,[\,\|\psi\,s_2\|_{L^q(\Omega)}+\|u_\varepsilon\|^{p/q}_{L^p(\Omega)}];\tag{3.2.5}$$

l'hypothèse (2.5.1) entraîne que

$$\|v_2\|_{L^q(\Omega)}\leqq C\left[\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\Omega)}+\left\|\,|u_\varepsilon|^{p-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\Omega)}\right]$$

mais par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\left\| |u_\varepsilon|^{p-2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \leqq \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} . \| u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)}^{(p-q)/q};$$

ainsi

$$\| v_2 \|_{L^q(\Omega)} \leqq C \left[\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} . \| u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)}^{(p-q)/q} \right. \tag{3.2.6}$$

(3.2.5) et (3.2.6) permettent de conclure.

Une conséquence immédiate de (3.1), (3.2) et (3.2.1) est la

PROPOSITION 3.2. — 1. *Si l est régulière,* $\operatorname{div} p_\varepsilon$ *appartient à un borné de* $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$. 2. *Dans le cas contraire* $\operatorname{div} p_\varepsilon$ *appartient à un borné de* $W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$. □

Nous allons maintenant établir que p_ε appartient à un borné de $W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$; nous examinerons en détail le cas où $l(x, .)$ est régulière strictement convexe; ce sera le cas 1; et nous n'indiquerons que les points de la preuve qui changent dans l'étude des cas où $l(x, .)$ est respectivement convexe (cas 2), régulière (cas 3) et enfin identiquement nulle (cas 4).

1. $l(x, .)$ est régulière strictement convexe

Pour simplifier la présentation, nous supposons dans un premier temps que $l(x, .)$ est strictement convexe. Dans ce cas p_ε est aussi solution d'un problème $(\mathscr{P}_2^\varepsilon)$ dual de $(\mathscr{P}_1^\varepsilon)$

$$(\mathscr{P}_2^\varepsilon) : \operatorname{Inf} \left\{ J_\varepsilon^2(q) = \int_\Omega [k_\varepsilon(x, -q) + l^*(x, -\operatorname{div} q)]\, dx / q \in V_2 \right\}$$

PROPOSITION 3.3. — *La solution p_ε vérifie l'équation*

$$\int_\Omega \frac{\partial l^*}{\partial \eta}(x, -\operatorname{div} p_\varepsilon) . \operatorname{div} q\, dx + \int_\Omega \nabla_t k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon) . q\, dx = 0 \tag{3.3.1}$$

et

$$\int_\Omega u_\varepsilon . \operatorname{div} q\, dx + \int_\Omega \nabla_t k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon) . q\, dx = 0. \tag{3.3.2}$$

Démonstration. — On passe à la limite quand λ tend vers 0 dans $\lambda^{-1}[J_\varepsilon^2(p_\varepsilon + \lambda q) - J_\varepsilon^2(p_\varepsilon)]$; on obtient (3.3.1); (3.3.2) est obtenu en utilisant la relation de polarité $u_\varepsilon = \dfrac{\partial l^*}{\partial \eta}(x, -\operatorname{div} p_\varepsilon)$. □

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de montrer un résultat de régularité sur p_ε, d'obtenir des estimations sur p_ε uniformes en ε; et par passage à la limite prouver un résultat de régularité sur la limite p de p_ε. Pour cela nous utiliserons la méthode des translations de Niremberg, grossièrement parlant nous allons dériver l'équation (3.3.2) (*cf.* [10]).

On se donne une fonction $\tilde{q} \in V_2$, à support compact dans Ω telle que pour tout h, $0 < h \leqq h_0$, $\operatorname{supp} \tilde{q}(\,.\,+\tau h \mathbf{e}_i) \subset \Omega$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$; τ est un réel valant 1 ou -1, et $\{e_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans (3.3) on prend $q(x) = h^{-1}[\tilde{q}(x - h\mathbf{e}_i) - \tilde{q}(x)]$. Pour simplifier nous noterons

$$w(x + \tau h) = w(x + \tau h \mathbf{e}_i),$$
$$\delta(h)\, w(x) = h^{-1}.[w(x+h) - w(x)],$$

l'indice i étant quelconque mais fixé pour toute la suite. Nous obtenons

$$\int_\Omega \delta(h)\, u_\varepsilon . \operatorname{div} \tilde{q}\, dx + \int_\Omega \delta(h)\, \nabla_t k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon(x)).\tilde{q}\, dx = 0. \qquad (3.4)$$

Soit θ un ouvert tel que $\bar{\theta} \subset \Omega$, et $h_0 = \dfrac{1}{3} \operatorname{dist}(\bar{\theta}, \partial\Omega)$; et considérons

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega / \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h_0\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Omega / \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geqq 2h_0\}.$$

D'après l'annexe A.5, il existe une fonction régulière dans $H_0^1(\Omega_1)$ telle que

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < \varphi(x) \leqq 1, & \forall x \in \Omega_1, \\ \varphi(x) = 1, & \forall x \in \Omega_2 \supset \theta, \\ \dfrac{|\nabla \varphi(x)|}{\sqrt{\varphi(x)}} \leqq C = C(h_0). & \end{array}\right\}$$

Dans (3.4) on choisit $\tilde{q}(x) = -\varphi(x).\delta(h) p_\varepsilon(x)$; ce qui donne :

$$E_1 + E_2 + E_3 = 0 \qquad (3.5)$$

avec

$$E_1 = \int_\Omega -\frac{1}{h}[\nabla_t k_\varepsilon(x+h, -p_\varepsilon(x+h)) - \nabla_t k_\varepsilon(x+h, -p_\varepsilon(x))]\, \varphi.\delta(h) p_\varepsilon\, dx$$

$$E_2 = \int_\Omega -\frac{1}{h}[\nabla_t k_\varepsilon(x+h, -p_\varepsilon(x)) - \nabla_t k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon(x))]\, \varphi.\delta(h) p_\varepsilon\, dx$$

$$E_3 = \int_\Omega -\delta(h)\, u_\varepsilon.[\varphi.\delta(h) \operatorname{div} p_\varepsilon + \nabla \varphi.\delta(h) p_\varepsilon]\, dx.$$

PROPOSITION 3.4. — *Nous avons l'estimation suivante :*

$$\|\sqrt{\varphi}\, \delta(h) p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leqq C,$$

C étant une constante indépendante de h et ε.

Démonstration. — Pour trouver l'estimation escomptée, nous allons traiter séparément les différents termes E_i.

1. Le terme E_1.

Il se minore, grâce à l'annexe A6 par

$$E_1 \geqq \int_\Omega B_{1\varepsilon} . |\delta(h) p_\varepsilon(x)|^2 . \varphi(x)\, dx \tag{3.6}$$

où

$$B_{1\varepsilon} = B_1 \hat{*} \rho^\varepsilon$$

2. Le terme E_2.

On majore E_2 en utilisant l'hypothèse (2.4) et l'annexe A.3

$$|E_2| \leqq \int_\Omega G_\varepsilon(x+\theta, -p_\varepsilon(x)) . \sqrt{\varphi} . |\delta(h) p_\varepsilon(x)|\, dx$$

où l'on a noté $x+\theta = x+h.\theta(x, h)e_i$ avec $0<\theta<1$; on a

$$|E_2| \leqq \int_\Omega \frac{G_\varepsilon}{\sqrt{B_{1\varepsilon}}} . \sqrt{B_{1\varepsilon}} . \sqrt{\varphi} . |\delta(h) p_\varepsilon|\, dx;$$

$$|E_2| \leqq \left[\int_\Omega \frac{G_\varepsilon^2}{B_{1\varepsilon}} dx \right]^{1/2} . \left[\int_\Omega B_{1\varepsilon} . \varphi . |\delta(h) p_\varepsilon|^2\, dx \right]^{1/2};$$

ce qui, joint à l'annexe A.9 et à (3.2.1), donne :

$$|E_2| \leqq C . \left[\int_\Omega B_{1\varepsilon} . \varphi . |\delta(h) p_\varepsilon|^2\, dx \right]^{1/2} \tag{3.7}$$

3. Le terme E_3.

Par l'inégalité de Hölder on a :

$$|E_3| \leqq \| \delta(h) u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} . [\| \varphi\, \delta(h) \operatorname{div} p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)} + \| \sqrt{\varphi}\, \delta(h) p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)}]. \tag{3.8}$$

Partant de l'équation (3.5), on utilise les inégalités (3.6), (3.7) et (3.8) pour obtenir :

$$\int_\Omega B_{1\varepsilon} . |\delta(h) p_\varepsilon(x)|^2 . \varphi\, dx \leqq C \left[\int_\Omega B_{1\varepsilon} . |\delta(h) p_\varepsilon|^2 . \varphi\, dx \right]^{1/2} + \| \delta(h) u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} [\| \varphi\, \delta(h) \operatorname{div} p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)} + \| \sqrt{\varphi}\, \delta(h) p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)}].$$

Mais à l'aide de (3.2) et (3.2.1) on montre que l'on a, respectivement

$$\| \delta(h) u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \leqq C,$$

et

$$\| \varphi\, \delta(h) \operatorname{div} p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)} \leqq C;$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,.\,\varphi\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx$$

$$\leqq C\left[\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,.\,\varphi\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx\right]^{1/2}+C\,\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}+C. \quad (3.9)$$

Il nous reste à minorer le terme $\frac{1}{2}\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,.\,\varphi\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx$; nous avons par Hölder

$$\int_\Omega(\sqrt{\varphi}\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|)^q\,dx=\int_\Omega\left(\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\right)^{q/2}.\,(\sqrt{B_{1\varepsilon}}\,.\,\sqrt{\varphi}\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|)^q\,dx$$

$$\leqq\left[\int_{\Omega\,\cap\,\mathrm{supp}\,\varphi}\frac{dx}{(B_{1\varepsilon})^{q/(2-q)}}\right]^{(2-q)/2}.\left[\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,.\,\varphi\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx\right]^{q/2}; \quad (3.10)$$

mais par l'hypothèse (2.8) et l'annexe A.9 nous avons

$$\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\leqq C\,.\,|\,p_\varepsilon(x+h)\,|^{2-q}+d_\varepsilon(x)+C\,.\,|\,p_\varepsilon(x)\,|^{2-q}+C$$

ce qui permet d'avoir

$$\left\|\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\right\|_{L^{q/(2-q)}}=\left[\int_{\Omega\,\cap\,\mathrm{supp}\,\varphi}\frac{dx}{(B_{1\varepsilon})^{q/(2-q)}}\right]^{(2-q)/q}\leqq C\,\|\,(p_\varepsilon(.+h))^{2-q}\,\|_{L^{q/(2-q)}(\Omega)}$$
$$+\|\,d_\varepsilon\,\|_{L^{q/(2-q)}(\Omega)}+C\,\|\,p_\varepsilon(.)^{2-q}\,\|_{L^{q/(2-q)}(\Omega)}+C.$$

$$\left\|\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\right\|_{L^{q/(2-q)}(\Omega\,\cap\,\mathrm{supp}\,\varphi)}\leqq C\,\|\,p_\varepsilon(.+h)\,\|_{L^q(\Omega)}^{2-q}$$
$$+\|\,d_\varepsilon\,\|_{L^{q/(2-q)}(\Omega\,\cap\,\mathrm{supp}\,\varphi)}+C\,\|\,p_\varepsilon(.)\,\|_{L^q(\Omega)}^{2-q}+C \quad (3.11)$$

Le second membre de (3.11) est borné. En effet, d'une part

$$\|\,d_\varepsilon\,\|_{L^{q/(2-q)}}\leqq C$$

puisque $d_\varepsilon\to d$ dans $L^{q/(2-q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ fortement quand $\varepsilon\to 0$, et d'autre part

$$\|\,p_\varepsilon(.+h)\,\|_{L^q(\Omega)}\leqq C$$

puisque $p_\varepsilon(.+h)\to p_\varepsilon(.)$ dans $L^q(\Omega)$ fortement quand $h\to 0$ à ε fixé et que $\|\,p_\varepsilon\,\|_{L^q(\Omega)}\leqq C$ d'après (3.2.1). Finalement (3.10) se réduit à :

$$\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}^2\leqq C\,.\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,.\,\varphi\,.\,|\,\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx. \quad (3.12)$$

Enfin (3.12) joint à (3.9) donne l'estimation cherchée :

$$\frac{1}{2}\|\,B_{1\varepsilon}\,.\,\varphi\,\delta(h)p_\varepsilon\,\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2C}\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)p_\varepsilon\,\|_{L^q(\Omega)}^2$$

$$\leqq C\,\|\,B_{1\varepsilon}\varphi\,\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}+C\,\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}+C, \quad (3.13)$$

qui entraîne que

$$\left.\begin{array}{l}\| B_{1\varepsilon}.\varphi.\delta(h)p_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\leqq C,\\ \|\sqrt{\varphi}.\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}\leqq C.\end{array}\right\}\tag{3.14}$$

2. $l(x, .)$ est convexe

On se ramène au cas précédent en approchant l par une suite l_ε régulière strictement convexe

$$l_\varepsilon(x, \eta)=l\hat{*}\rho^\varepsilon(x, \eta)+\varepsilon\lambda(\eta);\tag{3.14.1}$$

λ est une fonction régulière strictement convexe ayant la croissance convenable

$$c_3|\eta|^p+d_3\leqq\lambda(\eta)\leqq c_4|\eta|^p+d_4$$

avec c_3 et c_4 deux constantes positives.

Dans ce cas les équations (3.1) deviennent

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u_\varepsilon)=p_\varepsilon\in(L^q(\Omega))^n,\\ -\operatorname{div}p_\varepsilon=\dfrac{\partial l_\varepsilon}{\partial\eta}(x, u_\varepsilon)\in L^q(\Omega).\end{array}\right\}\tag{3.15}$$

Et à l'exception de la proposition 3.1 tous les résultats précédents restent valables. Ce dernier point sera examiné dans la proposition 3.6.

Remarque 3.5. — Quand l n'est pas régulière, les dérivées $\dfrac{\partial^2 l}{\partial x_i\partial\eta}$, $\dfrac{\partial^2 l}{\partial\eta^2}$ s'entendent au sens des distributions, sont supposées dans $L^1_{loc}(\Omega\times\mathbb{R})$ et sont supposées satisfaire (2.5.1), (2.5.2).

PROPOSITION 3.6. — *Les estimations* (3.2.1) *sont encore satisfaites.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que l_ε satisfait les inégalités (2.5.1) et (2.5.2) uniformément par rapport à ε :

$$\left|\frac{\partial^2 l_\varepsilon}{\partial\eta^2}(x, \eta)\right|\leqq C.(1+|\eta|^{p-2}),$$

$$\left|\frac{\partial^2 l_\varepsilon}{\partial x_i\partial\eta}(x, \eta)\right|\leqq C.(s_{2\varepsilon}(x)+1+|\eta|^{p-1}).$$

Le reste de la preuve demeure identique à la démonstration de la proposition 3.1. Par conséquent (3.14) a également lieu.

3. $l(x, .)$ est régulière mais non convexe

Dans ce cas, il suffit de remarquer comme dans [10] que l'équation (3.3.2) a encore lieu pour tout $\tilde{q}$ dans V et à support compact. En effet, soit $\tilde{q} \in V_2$, régulier à support compact; à partir de (3.1) on obtient, par polarité, l'équation

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla_t k_\varepsilon (x, -p_\varepsilon); \tag{3.16}$$

on multiplie (3.16) par $\tilde{q}$ et on intègre :

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon . \tilde{q}\, dx = -\int_\Omega \operatorname{div} \tilde{q} . u_\varepsilon\, dx = \int_\Omega \nabla_t k_\varepsilon (x, -p_\varepsilon) . \tilde{q}\, dx$$

i.e. (3.3.2) a lieu pour tout $\tilde{q}$ régulier à support compact. Le résultat final s'en déduit par densité.

Alors tous les résultats précédents, contenus dans les propositions (3.1) à (3.4) demeurent inchangés. Et (3.14) a lieu.

4. Le cas particulier $l(x, \eta) \equiv 0$

Pour cette classe de fonctionnelles les équations (3.1) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \nabla_t g_\varepsilon^{**} (x, \nabla u_\varepsilon) = -p_\varepsilon \in (L^q(\Omega))^n, \\ -\operatorname{div} p_\varepsilon = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Qu'est-ce qui change dans la recherche de l'estimation de

$$\| \sqrt{\varphi}\, \delta(h) p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)} ?$$

Dans l'équation (3.5) E_1 et E_2 demeurent inchangés; quant au terme E_3, il se simplifie puisque $\operatorname{div} p_\varepsilon = 0$:

$$E_3 = \int_\Omega \delta(h) u_\varepsilon . \nabla \varphi . \delta(h) p_\varepsilon\, dx.$$

Tout le reste demeure inchangé; ce qui permet d'obtenir (3.14). Finalement dans tous les cas nous avons l'estimation :

$$\| \sqrt{\varphi}\, \delta(h) p_\varepsilon \|_{L^q(\Omega)} \leqq C$$

dont la conséquence immédiate est la proposition suivante :

PROPOSITION 3.7. – *Nous avons pour tout i dans* [1, 2, ..., n]

$$\left\| \sqrt{\varphi} \frac{\partial}{\partial x_i} p_\varepsilon \right\|_{L^q(\Omega)} \leqq C.$$

Démonstration. – C'est une conséquence immédiate de (3.14). □

4. LES PASSAGES A LA LIMITE

Ils s'établissent différemment suivant que $l(x, .)$ est convexe ou non.

(i) *La situation où $l(x, .)$ est convexe :*

Rappelons que dans ce cas $l(x, .)$ n'est pas régulière et qu'il s'agit de passer à la limite dans des termes en l_ε, k_ε, h_ε et g_ε^{**}.

PROPOSITION 4.1. — On suppose que $l(x, \eta)$ est de Carathéodory. Alors il existe une sous-suite, notée encore ε, telle que :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega) \text{ faible,} \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ fort,} \\ &u_\varepsilon(x) \to u(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.1.1}$$

$$\int_\Omega l_\varepsilon(x, u_\varepsilon)\, dx \to \int_\Omega l(x, u)\, dx. \tag{4.1.2}$$

Démonstration. — D'après (3.2), il existe une sous-suite telle que l'on ait (4.1) et (4.1.1). On se propose de montrer que $l_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x)) \to l(x, u(x))$ p.p. $x \in \Omega$ (étape 1); ensuite que $\int_\Omega l_\varepsilon\, dx \to \int_\Omega l\, dx$ (étape 2).

Première étape. — Soit $x \in \Omega$ tel que $u_n(x) \to u(x)$, où l'on a noté $\varepsilon = 1/n$. Donc étant donné $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe $n_0 = n_0(x, \delta)$ tel que pour tout $n \geqq n_0$,

$$|u(x) - u_n(x)| \leqq \frac{\delta}{3}; \tag{4.2}$$

(4.2) entraîne que pour tout $n \geqq n_0$

$$u_n(x) \in [u(x) - 1, u(x) + 1] = I(x). \tag{4.3}$$

De plus l_n converge vers l uniformément sur tout compact de $\Omega \times \mathbb{R}$; donc il existe $n_1 = n_1(\delta, I(x)) \geqq n_0$ tel que pour tous $m, n \geqq n_1$ on ait

$$\sup\{|l_m(x, \eta) - l_n(x, \eta)| / \eta \in I(x)\} \leqq \frac{\delta}{3},$$

$$\sup\{|l_n(x, \eta) - l(x, \eta)| / \eta \in I(x)\} \leqq \frac{\delta}{3}.$$

Par conséquent, en utilisant (4.3), on peut affirmer qu'il existe $n_2 = n_2(x, \delta) \geqq n_1$ tel que pour tous $m, n \geqq n_2$.

$$\left.\begin{aligned} &|l_m(x, u_m(x)) - l_n(x, u_m(x))| \leqq \frac{\delta}{3}, \\ &|l_n(x, u_m(x)) - l(x, u_m(x))| \leqq \frac{\delta}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Enfin, puisque $l(x, .)$ est continue, il existe $n_3 = n_3(x, \delta) \geqq n_2$ tel que pour tout $m \geqq n_3$ on ait :

$$|l(x, u_m(x)) - l(x, u(x))| \leqq \frac{\delta}{3}. \tag{4.5}$$

Finallement, on peut écrire, en utilisant (4.4) et (4.5), que pour tous $m, n \geqq n_3$:

$$\begin{aligned} &|l_m(x, u_m(x)) - l(x, u(x))| \\ &\quad \leqq |l_m(x, u_m(x)) - l_n(x, u_m(x))| + |l_n(x, u_m(x)) - l(x, u_m(x))| \\ &\qquad + |l(x, u_m(x)) - l(x, u(x))| \leqq \delta \end{aligned}$$

i.e. $l_m(x, u_m(x)) \to l(x, u(x))$.

Deuxième étape. — Nous ferons usage du lemme suivant dans Visintin [19] : une généralisation de la convergence dominée de Lebesgues.

LEMME 4.2. — *On suppose données deux suites de fonctions v_n et w_n satisfaisant :*

(i) $|w_n(w)| \leqq v_n(x)$ p.p. $x \in \Omega$,

(ii) $(v_n(x), w_n(x)) \to (v(x), w(x))$ p.p. $x \in \Omega$,

(iii) $\int_\Omega v_n(x)\,dx \to \int_\Omega v(x)\,dx$;

alors on a

$$\int_\Omega w_n(x)\,dx \to \int_\Omega w(x)\,dx.$$

Par (2.2) nous avons

$$|l_n(x, u_n(x))| \leqq \max(c_1, c_2).|u_n(x)|^p + \max(|d_1|, |d_2|) = \bar{c}|u_n(x)|^p + \bar{d};$$

d'après (4.1.1) la fonction $v_n(x) = \bar{c}.|u_n(x)|^p + \bar{d}$ vérifie :

$$v_n(x) \to v(x) = \bar{c}.|u(x)|^p + \bar{d},$$
$$\int_\Omega v_n(x)\,dx \to \int_\Omega v(x)\,dx;$$

et comme $w_n(x) = l_n(x, u_n(x)) \to w(x) = l(x, u(x))$ p.p. $x \in \Omega$ grâce à l'étape 1, il s'en suit (4.1.2) par application du lemme 4.2.

PROPOSITION 4.3. — *Pour tout Ω' relativement compact dans Ω, il existe une sous-suite telle que*

$$\left.\begin{aligned} p_\varepsilon \to \bar{p} \quad &dans\ (\mathrm{W}^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega))^n\ faible, \\ p_\varepsilon \to \bar{p} \quad &dans\ (\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega))^n\ fort, \\ p_\varepsilon \to \bar{p} \quad &p.p.\ x \in \Omega; \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$\int_{\bar{\Omega}'} \psi(x).k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon)\,dx \quad \int_{\bar{\Omega}'} \psi(x).k(x, -\bar{p}(x))\,dx \tag{4.6}$$

où ψ est une fonction bornée sur Ω.

Démonstration. — Les convergences (4.5) sont une conséquence immédiate de la proposition 3.7. Quant à (4.6) il suffit d'appliquer la proposition (4.1) aux fonctions ρ_ε et $\psi(x).k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon)$ à la place de u_ε et $l_\varepsilon(x, u_\varepsilon)$ respectivement.

De même on a la

PROPOSITION 4.4. — *Il existe une sous-suite telle que*

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{div} p_\varepsilon \rightarrow \operatorname{div} \bar{p} \quad \textit{dans } W^{1,q}_{loc}(\Omega) \textit{ faible}, \\ \operatorname{div} p_\varepsilon \rightarrow \operatorname{div} \bar{p} \quad \textit{dans } L^q_{loc}(\Omega) \textit{ fort}, \\ \operatorname{div} p_\varepsilon \rightarrow \operatorname{div} \bar{p} \quad \textit{p.p. } x \in \Omega; \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

et pour tout $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

$$\int_{\bar{\Omega}'} h_\varepsilon(x, -\operatorname{div} p_\varepsilon)\,dx \rightarrow \int_{\bar{\Omega}'} h(x, -\operatorname{div}\bar{p})\,dx. \tag{4.8}$$

Démonstration. — On procède comme pour la proposition 4.3 en utilisant les estimations (3.2.1) et l'Annexe A.1.1.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de régularité suivant :

THÉORÈME 4.5. — *On suppose que $l(x, \eta)$ est une fonction de Carathéodory, convexe en η, finie pour tout η presque tout x; et on fait les hypothèses* (2.1), (2.2.1) *à* (2.8). *Alors le problème*

$$(\mathscr{P}_2) \qquad \operatorname{Inf}\left\{ J(\tilde{q}) = \int_\Omega [g^*(x, -\tilde{q}) + l^*(x, -\operatorname{div}\tilde{q})]\,dx / \tilde{q} \in V_2 \right\}$$

admet une solution unique $\bar{p}$. De plus $\bar{p}$ appartient à $(W^{1,q}_{loc}(\Omega))^n$ et $\operatorname{div}\bar{p} \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$. Enfin si u est une solution de $(\mathscr{P}_1\mathscr{R})$, u et $\bar{p}$ sont liés par les relations d'extrémalités

$$\left.\begin{array}{c} \nabla_t g^{**}(x, \nabla u) = \bar{p}, \\ \operatorname{div}\bar{p} \in \partial l(x, u), \end{array}\right\} \tag{4.8.1}$$

où $\partial l(x, u)$ désigne le sous-différentiel de l au point u.

Démonstration. — On doit passer à la limite dans le problème $(\mathscr{P}_2^\varepsilon)$:

$$\int_\Omega k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon)\,dx + \int_\Omega h_\varepsilon(x, -\operatorname{div} p_\varepsilon)\,dx \leq \int_\Omega k_\varepsilon(x, -\tilde{q})\,dx + \int_\Omega h_\varepsilon(x, -\operatorname{div}\tilde{q})\,dx, \qquad \forall \tilde{q} \in V_2.$$

Le passage à la limite dans le second membre est immédiat. Grâce aux hypothèses de croissance (2.1) et (2.2.1) on peut toujours se ramener au cas où l'on a $g^*(x, t) = k(x, t) \geqq 0$, $k_\varepsilon(x, t) \geqq 0$, $l^*(x, \eta) = h(x, \eta) \geqq 0$ et

$h_\varepsilon(x, \eta) \geqq 0$. Soit $\tilde{\varepsilon}>0$ arbitrairement petit. Il existe $\delta>0$ tel que si Ω' est un ouvert relativement compact dans Ω satisfaisant $|\Omega \diagdown \bar{\Omega}'| \leqq \delta$ on ait

$$0 \leqq \int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} g^*(x, -\bar{p}(x)) \leqq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \qquad (4.9)$$

et

$$0 \leqq \int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} l^*(x, -\operatorname{div} \bar{p}(x))\, dx \leqq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \qquad (4.10)$$

Si l'on pose

$$\Delta_\varepsilon = \int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} h_\varepsilon(x, \operatorname{div} p_\varepsilon)\, dx,$$

on aura

$$\Delta_\varepsilon + \int_{\bar{\Omega}'} k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon)\, dx + \int_{\bar{\Omega}'} h_\varepsilon(x, -\operatorname{div} p_\varepsilon)\, dx \leqq J_2^\varepsilon(\tilde{q}), \qquad \forall \tilde{q} \in V_2.$$

Les propositions 4.3 et 4.4 nous permettent de passer à la limite :

$$\begin{aligned}\lim_\varepsilon \Delta_\varepsilon + \int_{\bar{\Omega}'} g^*(x, -\bar{p})\, dx + \int_{\bar{\Omega}'} l^*(x, -\operatorname{div} \bar{p})\, dx \\ + \left[\int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} g^*(x, -\bar{p})\, dx + \int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} l^*(x, -\operatorname{div} \bar{p})\, dx\right] \\ \leqq J_2(\tilde{q}) + \left[\int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} g^*(x, -\bar{p})\, dx + \int_{\Omega \diagdown \bar{\Omega}'} l^*(x, -\operatorname{div} \bar{p})\, dx\right]\end{aligned}$$

et puisque $\lim_\varepsilon \Delta_\varepsilon \geqq 0$, on a en utilisant (4.9) et (4.10)

$$\forall \tilde{\varepsilon}>0, \quad J_2(\bar{p}) \leqq J_2(\tilde{q}) + \tilde{\varepsilon} \qquad \forall \tilde{q} \in V_2$$

i.e.

$$J_2(\bar{p}) \leqq J_2(\tilde{q}) \qquad \forall \tilde{q} \in V_2.$$

L'unicité de $\bar{p}$ découle de la stricte convexité de $g^*(x, .)$ puisque g est régulière. Quant à la régularité annoncée de $\bar{p}$, elle découle des propositions 4.3 et 4.4. Enfin si u désigne une solution de $(\mathscr{P}_1\ \mathscr{R})$ (4.8.1) est classique.

Remarques 4.6.1. — 1. Puisque $\lim_\varepsilon \Delta_\varepsilon \geqq 0$, nous avons

$$J_2^\varepsilon(p_\varepsilon) \to J_2(\bar{p}).$$

2. Si l est régulière l'inclusion $\operatorname{div} \bar{p} \in \partial l(x, u)$ devient $\operatorname{div} \bar{p} = \dfrac{\partial l}{\partial \eta}(x, u)$.

(ii) *Le cas où $l(x, .)$ est régulière non convexe :*

Quand $l(x, .)$ est non convexe, nous ne pouvons avoir recours au problème $(\mathscr{P}_2)$; nous avons, pour la preuve de notre résultat essentiel, besoin des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 4.6. — *Nous avons*

$$\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, t) \to \nabla_t g^{**}(x, t), \qquad \forall x, \quad \forall t.$$

Démonstration. — Par convexité nous avons l'inégalité

$$\left.\begin{array}{c} g_\varepsilon^{**}(x, r) - g_\varepsilon^{**}(x, s) \geqq \nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, s).(r-s), \\ \forall x, \qquad \forall r, \qquad \forall s; \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

la suite $g_\varepsilon^{**}(x, s)$ vérifie (2.1) avec des constantes a_i, b_i indépendantes de ε; et donc d'après l'Annexe (A.7) nous avons

$$|\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, s)| \leqq c_3 + c_4 |s|^{p-1} \tag{4.12}$$

où c_3 et c_4 sont deux constantes indépendantes de ε. Par conséquent, il existe une sous-suite telle que

$$\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, s) \to \theta = \theta(x, s);$$

et à l'aide de l'Annexe A.1.1 on passe à la limite dans le premier membre de (4.11)

$$g^{**}(x, r) - g^{**}(x, s) \geqq \theta.(r-s), \qquad \forall x, \quad \forall r, \quad \forall s;$$

c'est-à-dire

$$\theta(x, s) \in \partial g^{**}(x, s);$$

comme $g^{**}(x, .)$ est différentiable, il s'en suit que

$$\theta(x, s) = \nabla_t g^{**}(x, s) \qquad \forall x, \quad \forall s.$$

De plus toute la suite converge. En effet, supposons qu'il existe une sous-suite $\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, s)$ qui ne converge pas vers $\theta = \nabla_t g^{**}(x, s)$. De cette sous-suite on extrait encore une sous-suite qui converge vers θ'; et la régularité de $g^{**}(x, .)$ entraîne que $\theta' = \theta$; d'où la contraction. □

PROPOSITION 4.7. — *Quelque soit $v \in V_1$*

$$\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, \nabla v) \to \nabla_t g^{**}(x, \nabla v)$$

dans $(L^q(\Omega))^n$ *fort.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lebesgue. Pour cela posons

$$\Delta_\varepsilon(x) = |\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, \nabla v) - \nabla_t g^{**}(x, \nabla v)|.$$

Par la proposition 4.6

$$\Delta_\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Par ailleurs, d'après (4.12) nous avons

$$|\Delta_\varepsilon(x)| \leqq |\nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, \nabla v)| + |\nabla_t g^{**}(x, \nabla v)| \leqq C_5 |\nabla v|^{p-1} + C_6 = \Sigma(x) \quad \text{p.p. } x,$$

où C_5 et C_6 sont deux constantes indépendantes de ε; comme Σ appartient à $L^q(\Omega)$, il s'en suit que

$$\int_\Omega |\Delta_\varepsilon(x)|^q \, dx \to 0. \quad \square$$

THÉORÈME 4.8. — *On suppose* $l(x, \eta)$ *régulière; et on suppose les hypothèses* (2.1), (2.2.1), (2.3) *à* (2.8). *Alors il existe* $u \in V_1$ *solution de* $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$ *et une fonction* $\bar{p} \in V_2$ *telles que*

$$\nabla_t g^{**}(x, \nabla u) = \bar{p}, \tag{4.13}$$

$$\operatorname{div} \bar{p} = \frac{\partial l}{\partial \eta}(x, u). \tag{4.14}$$

De plus $\bar{p}$ appartient à $(W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega))^n$ et $\operatorname{div} \bar{p} \in W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega)$.

Remarque 4.7.1. — Si dans (2.5.2) $s_2(x) \in L^q(\Omega)$, alors

$$\operatorname{div} \bar{p} \in W^{1,q}(\Omega).$$

Démonstration du théorème 4.8. — Nous procéderons en deux étapes : le passage à la limite dans l'inégalité

$$J_1^\varepsilon(u_\varepsilon) \leqq J_1^\varepsilon(v), \qquad \forall v \in V_1;$$

ce sera l'étape 1; ensuite le passage à la limite dans les équations (3.1) qui sera l'objet de l'étape 2 qui constitue le point essentiel.

L'inégalité de convexité (4.11) nous servira encore de façon essentielle.

Étape 1. — Il existe une sous-suite telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega) \text{ faible},$$
$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ fort},$$
$$u_\varepsilon(x) \to u(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

On prend, dans (4.11) $r = \nabla u_\varepsilon$, $s = \nabla u$ et on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u_\varepsilon) \, dx \geqq \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u) \, dx + I_\varepsilon^1$$

$$I_\varepsilon^1 = \int_\Omega \nabla_t g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u) . (\nabla u_\varepsilon - \nabla u) \, dx;$$

ou encore

$$J_\varepsilon^1(u_\varepsilon) = \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u_\varepsilon) \, dx + \int_\Omega l(x, u_\varepsilon) \, dx \geqq \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u) \, dx + \int_\Omega l(x, u_\varepsilon) \, dx + I_\varepsilon^1;$$

soit

$$J_\varepsilon^1(v) \geqq J_\varepsilon^1(u_\varepsilon) \geqq J_\varepsilon^1(u) + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2, \tag{4.15}$$

où

$$I_\varepsilon^2 = \int_\Omega l(x, u_\varepsilon)\,dx - \int_\Omega l(x, u)\,dx.$$

En utilisant l'Annexe A.1.1, on montre facilement par une application du théorème de Lebesgue que

$$J_1^\varepsilon(v) \to J_1(v) \qquad \forall v \in V_1, \qquad I_\varepsilon^2 \to 0.$$

Quant à la limite du dernier terme I_ε^1, elle se déduit de la proposition 4.7 et du fait que ∇u_ε tend vers ∇u dans $(W^{1,p}(\Omega))^n$ faible :

$$I_\varepsilon^1 \to 0.$$

Nous sommes ainsi en mesure de passer à la limite dans (4.15) :

$$J_1(v) \geqq \lim_\varepsilon J_1^\varepsilon(u_\varepsilon) \geqq J_1(u), \qquad \forall v \in V_1;$$

et en choisissant $v=u$, nous obtenons

$$\lim_\varepsilon J_1^\varepsilon(u_\varepsilon) = J_1(u);$$

et donc nous avons bien

$$J_1(v) \geqq J_1(u), \qquad \forall v \in V_1.$$

Remarque 4.9. — Nous avons

$$\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(x, \nabla u_\varepsilon)\,dx = J_\varepsilon^1(u_\varepsilon) - \int_\Omega l(x, u_\varepsilon)\,dx \to \int_\Omega g^{**}(x, \nabla u)\,dx. \tag{4.16}$$

Étape 2. — L'équation (4.14) est obtenue de façon immédiate par passage à la limite dans la deuxième équation (3.1). Quant au passage à la limite dans la première équation (3.1), il est le seul à exiger la régularité de p et ses estimations uniformes. Considérons l'inégalité de convexité

$$k_\varepsilon(x, t) - k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon) \geqq \nabla_t k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon).(t+p_\varepsilon),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$; d'après (3.16) elle s'écrit encore

$$k_\varepsilon(x, t) - k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon) \geqq \nabla u_\varepsilon.(t+p_\varepsilon).$$

On la multiplie par $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi \geqq 0$; ensuite on l'intègre sur Ω :

$$\int_\Omega k_\varepsilon(x, t)\,\varphi(x)\,dx - \int_\Omega k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon).\varphi(x)\,dx \geqq \int_\Omega \nabla u_\varepsilon.(t+p_\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx. \tag{4.17}$$

Il s'agit alors de passer à la limite dans (4.17) lorsque $\varepsilon \to 0$. Il est immédiat que

$$\int_\Omega k_\varepsilon(x, t)\,\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega k(x, t)\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon.(t+p_\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega \nabla u.(t+\bar{p})\,\varphi(x)\,dx.$$

Quant au dernier terme, sa convergence est donnée par la proposition 4.3 :

$$\int_\Omega k_\varepsilon(x, -p_\varepsilon).\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega k(x, -\bar{p})\,\varphi(x)\,dx.$$

Donc nous avons

$$\int_\Omega k(x, t)\,\varphi(x)\,dx - \int_\Omega k(x, -\bar{p})\,\varphi(x)\,dx \geqq \int_\Omega \nabla u(t+\bar{p}).\varphi(x)\,dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \varphi \geqq 0$$

qui signifie

$$k(x, t) - k(x, -\bar{p}) \geqq \nabla u.(t+\bar{p}) \qquad \text{p.p.}\, x, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

i.e.

$$\nabla u(x) \in \partial k(x, -\bar{p}(x)) \equiv \partial g^*(x, -\bar{p}(x)) \qquad \text{p.p.} \quad x \in \Omega; \qquad (4.18)$$

(4.18) entraîne par polarité

$$-\bar{p}(x) \in \partial g^{**}(x, \nabla u(x)) \quad \text{p.p.}\ x \in \Omega;$$

et comme $g^{**}(x, .)$ est C^1, on a en réalité

$$-\bar{p}(x) = \nabla_t g^{**}(x, \nabla u(x)) \quad \text{p.p.}\ x \in \Omega.$$

Enfin, le résultat de régularité annoncé sur $\bar{p}$ est donné par la proposition (4.3) et l'hypothèse (2.5.0).

COROLLAIRE 4.10. — *La fonction u solution du problème* ($\mathscr{P}_1\mathscr{R}$) *appartient à l'espace*

$$W^{1, np/(n-q)}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^{np/(n-(p+q))}_{\text{loc}}(\Omega)$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que u_ε appartient à un borné de

$$W^{1, np/(n-q)}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Nous partons des estimations données par la proposition 3.7 :

$$\|\sqrt{\psi}\,\nabla p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leqq C;$$

ce qui entraîne que ψp_ε appartient à un borné de $W^{1,q}_0(\Omega)$, pour ψ une fonction régulière à support compact puisque $\nabla(\psi p_\varepsilon) = p_\varepsilon.\nabla\psi + \nabla p_\varepsilon.\psi$.

Par polarité, à partir de (3.1) nous avons :

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla_t g_\varepsilon^* (x, -p_\varepsilon) \quad \text{p.p. } x;$$

et en utilisant l'Annexe A.7 nous obtenons

$$|\nabla u_\varepsilon| \leqq c\,|p_\varepsilon|^{q-1} + d$$

où c et d sont deux constantes indépendantes de ε. Il s'en suit que $|\nabla u_\varepsilon|$ appartient à un borné de $L_{\text{loc}}^{n\,;\,p/(n-q)}(\Omega)$ puisque, par le théorème d'inclusion de Sobolev, p_ε appartient à un borné de $L_{\text{loc}}^{n\,;\,q/(n-q)}(\Omega)$. Donc u_ε appartient à un borné de $W_{\text{loc}}^{1,\,np/(n-q)}(\Omega)$.

5. GÉNÉRALISATION

Étude des fonctionnelles de la forme

$$J(v) = \int_\Omega g(x, v, \nabla v)\,dx. \tag{5.1}$$

1. Position du problème et estimations uniformes :

Nous allons montrer que l'on obtient également des résultats de régularité pour une certaine classe de problèmes du type (5.1). Pour simplifier la présentation de cette partie, nous supposerons g indépendant de x. De plus

$$g: \quad (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to g(s, t) \in \mathbb{R}$$

est supposée régulière satisfaisant l'hypothèse de croissance suivante :

$$a_3 |s|^p + b_3 |t|^p + d_3 \leqq g(s, t) \leqq a_4 |s|^p + b_4 |t|^p + d_4 \tag{5.2.1}$$

où les constantes a_i et b_i sont positives. Désignons par g^* et g^{**} respectivement la polaire et bipolaire de g par rapport à (s, t).

Remarque 5.1. – g^{**} et g^* vérifient

$$a_3 |s|^p + b_3 |t|^p + d_3 \leqq g^{**}(s, t) \leqq a_4 |s|^p + b_4 |t|^p + d_4$$
$$a_5 |s|^q + b_5 |t|^q - d_4 \leqq g^*(s, t) \leqq a_6 |s|^q + b_6 |t|^q - d_3$$

avec

$$a_5 = \frac{1}{q \cdot (a_4 \cdot p)^{1/(p-1)}}; \qquad b_5 = \frac{1}{q \cdot (b_4 \cdot p)^{1/(p-1)}}$$
$$a_6 = \frac{1}{q \cdot (a_3 \cdot p)^{1/(p-1)}}; \qquad b_6 = \frac{1}{q \cdot (b_3 \cdot p)^{1/(p-1)}}$$

Définitions 5.2. — (i) polaire partielle de g^{**}

$$\mathrm{H}(s, t) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ t.z - g^{**}(s, z) \}$$

(ii) Sa régularisation

$$\mathrm{H}_\varepsilon(s, t) = \mathrm{H} \hat{*} \rho_\varepsilon(s, t) + \varepsilon m(t) - \varepsilon n(s)$$

où m et n sont deux fonctions strictement convexes régulières à croissances adéquates.

(iii) On pose

$$g_\varepsilon^{**}(s, t) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ t.z - \mathrm{H}_\varepsilon(s, z) \};$$

c'est une fonction convexe en (s, t); et on désigne par $g_\varepsilon^*(s, t)$ la polaire de $g_\varepsilon^{**}(s, t)$ par rapport au couple (s, t).

Nous sommes amenés à faire les hypothèses suivantes

$$\mathrm{H}(s, t_1) - \mathrm{H}(s, t_2) \geqq (t_1 - t_2).\mathrm{B}_0(s, t_2) + (t_1 - t_2)^2 \mathrm{B}_1(s, t_1, t_2) \quad (5.2.2)$$

où $\mathrm{B}_0(s, t)$ est un élément du sous-différentiel de $\mathrm{H}(s, .)$ au point t, et où $\mathrm{B}_1(s, t)$ est une fonction positive satisfaisant

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B}_1(s, t) \geqq \dfrac{1}{\mathrm{C}(1 + |s|^{\theta_1} + |t|^{\theta_2})} \quad \text{où} \quad t = (t_1, t_2), \\ 0 < \theta_1 \leqq p - 2, \qquad \theta_2 = 2 - q \\ \mathrm{B}_1(s, t_1, t_2) = \mathrm{B}_1(s, t_2, t_1) \end{array}\right\} \quad (5.2.3)$$

On suppose qu'au sens des distributions les dérivées $\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial s \partial t_i}, \dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial s^2}$ sont des fonctions $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ satisfaisant les estimations

$$\left.\begin{array}{l} \left| \dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial s \partial t_i}(s, t) \right| \leqq \mathrm{C}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \left| \dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial s^2}(s, t) \right| \leqq \mathrm{C}.(1 + |s|^{\tau_1} + |t|^{\tau_2}) \end{array}\right\} \quad (5.2.4)$$

avec

$$\tau_1 \leqq \frac{p-1}{q} = p - 2 + \frac{1}{p}; \qquad \tau_2 \leqq \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}.$$

PROPOSITION 5.3. — *Nous avons*

$$-a_4 |s|^p + b_7 |t|^q - d_4 \leqq \mathrm{H}(s, t) \leqq -a_3 |s|^p + b_8 |t|^q - d_3$$

avec

$$b_7 = \frac{1}{q\cdot(b_4\cdot p)^{1/(p-1)}};\qquad b_8 = \frac{1}{q\cdot(b_3\cdot p)^{1/(p-1)}}$$

$$-a_9\,|s|_p + b_9\,|t|^q + d_9 \leqq \mathrm{H}_\varepsilon(s,\,t) \leqq -a_{10}\,|s|^p + b_{10}\,|t|^q + d_{10};$$

les constantes a_i, b_i, d_i, $i=9$, 10 *sont indépendantes de* ε *et peuvent être explicitées.*

$$a_{10}\,|s|^p + b_{11}\,|t|^p - d_{10} \leqq g_\varepsilon^{**}(s,\,t) \leqq a_9\,|s|^p + b_{12}\,|t|^p - d_9 \qquad (5.2.5)$$

$$a_{11}\,|s|^q + b_{13}\,|t|^q + d_9 \leqq g_\varepsilon^{*}(s,\,t) \leqq a_{12}\,|s|^q + b_{14}\,|t|^q + d_{10}. \qquad (5.2.6)$$

En (5.2.5) et (5.2.6) les constantes sont indépendantes de ε et peuvent être explicitées.

La preuve, classique, est laissée au lecteur, si besoin était.

Remarque 5.4. — 1. Comme dans la partie 3, les hypothèses (5.2.1) à (5.2.4) sont vérifiées uniformément en ε par les régularisées g_ε^{**} et H_ε. Aussi nous renvoyons dans le texte aux mêmes résultats annexes que ceux de la partie 3, leurs preuves étant identiques.

2. La condition d'ellipticité (5.2.2)-(5.2.3) a lieu pour toute fonction H telle que $g(s,\,.)$ vérifie l'estimation :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t_i\,\partial t_j}\,g^{**}(s,\,t)\right| < c\,|t|^{p-2} + d,$$

c et d étant deux constantes positives (*cf.* paragraphe 7).

On approche les problèmes

$$(\mathscr{P}_1\,\mathscr{R}):\quad \inf\left\{\mathrm{J}_1(v) = \int_\Omega g^{**}(v,\,\nabla v)\,dx/v\in \mathrm{V}_1\right\},$$

$$(\mathscr{P}_2):\quad \inf\left\{\mathrm{J}_2(w) = \int_\Omega g^{*}(-\operatorname{div} w,\,-w)\,dx/w\in \mathrm{V}_2\right\};$$

par les deux problèmes perturbés

$$(\mathscr{P}_1\,\mathscr{R})_\varepsilon:\quad \inf\left\{\mathrm{J}_1^\varepsilon(v) = \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(v,\,\nabla v)\,dx/v\in \mathrm{V}_1\right\},$$

$$(\mathscr{P}_2)_\varepsilon:\quad \inf\left\{\mathrm{J}_2^\varepsilon(w) = \int_\Omega g_\varepsilon^{*}(-\operatorname{div} w,\,-w)\,dx/w\in \mathrm{V}_2\right\};$$

Les deux problèmes $(\mathscr{P}_1\,\mathscr{R})_\varepsilon$ et $(\mathscr{P}_2)_\varepsilon$ admettent u_ε et p_ε comme solutions respectives; ces dernières vérifient

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g_\varepsilon^{**}}{\partial s}(u_\varepsilon,\,\nabla u_\varepsilon) &= -\operatorname{div} \mathrm{p}_\varepsilon,\\ \nabla_t\, g_\varepsilon^{**}(u_\varepsilon,\,\nabla u_\varepsilon) &= -p_\varepsilon.\end{aligned}\right\}\qquad (5.3)$$

A l'aide des propriétés de la polaire partielle [15], nous allons donner une forme équivalente des équations (5.3), qui est plus adaptée pour établir les estimations souhaitées.

DÉFINITION 5.1. — Polaire partielle de g_ε^{**}

$$H_\varepsilon(s, t) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ t.z - g_\varepsilon^{**}(s, z) \}.$$

D'après les propriétés des polaires partielles [15], (5.3) est équivalent à

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{div} p_\varepsilon &= -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon, -p_\varepsilon) \\ \nabla u_\varepsilon &= \nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon, -p_\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Et si l'on se donne une fonction ξ, à support compact dans Ω, appartenant à V_2, on obtient à partir de (5.4) :

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon . \xi \, dx = \int_\Omega \nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon, -p_\varepsilon) . \xi \, dx$$

soit

$$-\int_\Omega u_\varepsilon . \operatorname{div} \xi = \int_\Omega \nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon, -p_\varepsilon) . \xi \, dx. \tag{5.5}$$

Pour $0 < h < h_0$, on prend dans (5.5) $\xi = \delta(-h)\tilde{q}$ où $\tilde{q}$ est à support compact, et on fait le changement de variable $x - h = y$:

$$-\int_\Omega \delta(h) u_\varepsilon . \operatorname{div} \tilde{q} \, dx = \int_\Omega \delta(h) \nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon, -p_\varepsilon) . \tilde{q} \, dx;$$

prenons alors $\tilde{q}(x) = -[\delta(h) p_\varepsilon(x)] . \varphi(x)$

$$\int_\Omega \delta(h) u_\varepsilon \operatorname{div}(\delta(h) p_\varepsilon . \varphi) \, dx = \int_\Omega \delta(h) [\nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon, -p_\varepsilon)] . [\delta(h) . (-p_\varepsilon)] \varphi \, dx. \tag{5.6}$$

Transformons quelque peu (5.6); on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \delta(h) u_\varepsilon . \delta(h) \operatorname{div} p_\varepsilon . \varphi \, dx + \int_\Omega \delta(h) u_\varepsilon . (\delta(h) p_\varepsilon) . \nabla \varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{h} [\nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon(x+h), -p_\varepsilon(x+h)) - \nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon(x), -p_\varepsilon(x+h))] \\ &\qquad \times [\delta(h)(-p_\varepsilon)] \varphi \, dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{h} [\nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon(x), -p_\varepsilon(x+h)) - \nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon(x), -p_\varepsilon(x))] . [\delta(h)(-p_\varepsilon)] \varphi \, dx \end{aligned}$$

que l'on écrit $D_1+D_2=G_1+G_2$, qui entraîne

$$G_2 \leqq |G_1|+|D_1|+|D_2|. \tag{5.7}$$

Nous allons minorer le premier membre de (5.7) et majorer le second membre. D'après l'hypothèse (5.2.2) et l'annexe A.6

$$G_2 \geqq \int_\Omega B_{1\varepsilon}(u_\varepsilon(x), -\tilde{p}_\varepsilon).\varphi.|\delta(h)(-p_\varepsilon)|^2\,dx; \qquad \tilde{p}_\varepsilon=(p_\varepsilon(x), p_\varepsilon(x+h)).$$

Majorons les autres termes :

$$|G_1| \leqq \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial s}\nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon(x)+\theta, p_\varepsilon(x+h))\right|.|\delta(h)u_\varepsilon|.|\delta(h)(-p_\varepsilon)|\,\varphi\,dx;$$

par l'hypothèse (5.2.4), l'annexe A.2 et l'inégalité de Hölder on a :

$$|G_1| \leqq C.\left(\int_\Omega |\sqrt{\varphi}\,\delta(h)p_\varepsilon|^q\,dx\right)^{1/q}.\left(\int_\Omega |\delta(h)u_\varepsilon|^p\,dx\right)^{1/p};$$

$$|D_1| \leqq \left(\int_\Omega |\delta(h)u_\varepsilon|^p\,dx\right)^{1/p}.\left(\int_\Omega |\sqrt{\varphi}.\delta(h)\,\mathrm{div}\,p_\varepsilon|^q\,dx\right)^{1/q};$$

$$|D_2| \leqq \int_\Omega |\delta(h)u_\varepsilon|.\sqrt{\varphi}\,|\delta(h)p_\varepsilon|.\frac{|\nabla\varphi|}{\sqrt{\varphi}}\,dx;$$

$$|D_2| \leqq C.\left(\int_\Omega |\delta(h)u_\varepsilon|^p\,dx\right)^{1/p}.\left(\int_\Omega |\sqrt{\varphi}\,\delta(h)p_\varepsilon|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Alors (5.7) devient

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\int_\Omega B_{1\varepsilon}(u_\varepsilon, -\tilde{p}_\varepsilon).\varphi.|\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx$$
$$\leqq C\,\|\delta(h)u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}[\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}+\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\,\mathrm{div}\,p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}] \tag{5.8}$$

Minorons le premier terme du membre de gauche dans (5.8)

$$\int_\Omega (\sqrt{\varphi}\,|\delta(h)p_\varepsilon|)^q\,dx=\int_\Omega\left(\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\right)^{q/2}.(\sqrt{B_{1\varepsilon}}.\sqrt{\varphi}.|\delta(h)p_\varepsilon|)^q\,dx$$
$$<\left[\int_\Omega\left(\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\right)^{q/(2-q)}dx\right]^{(2-q)/2}.\left[\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,\varphi\,|\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx\right]^{q/2};$$

mais

$$\int_\Omega\left(\frac{1}{B_{1\varepsilon}}\right)^{q/(2-q)}dx \leqq C\int_\Omega (1+|u_\varepsilon|^{\theta_1}+|p_\varepsilon|^{\theta_2})^{q/(2-q)}\,dx$$
$$\leqq C+C\left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q\theta_1/(2-q)}\,dx+\int_\Omega |p_\varepsilon|^{q\theta_2/(2-q)}\,dx\right]$$
$$\leqq C+C[\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}+\|p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}]=K^{q/(2-q)},$$

(quitte à modifier les différentes constantes C) puisque $\theta_2=2-q$ et $\theta_1\leqq p-2$; et donc

$$\frac{1}{2K}\left[\int_\Omega(\sqrt{\varphi}\,|\delta(h)p_\varepsilon|)^q\,dx\right]^{2/q}\leqq\frac{1}{2}\int_\Omega B_{1\varepsilon}\,\varphi\,|\delta(h)p_\varepsilon|^2\,dx. \tag{5.9}$$

En injectant (5.9) dans (5.8), on obtient

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{B_{1\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)p_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2K}\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)p_\varepsilon\|^2_{L^q(\Omega)}$$
$$\leqq C\,.\,\|\delta(h)u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\times[\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}+\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}]. \tag{5.10}$$

Il nous reste à majorer le terme $\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}$; pour cela nous utiliserons (5.4) :

$$\begin{aligned}
\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon&=\frac{1}{h}\left[\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon(x+h),\ -p_\varepsilon(x+h))-\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon(x),\ -p_\varepsilon(x))\right]\\
&=\frac{1}{h}\left[\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon(x+h),\ -p_\varepsilon(x+h))-\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon(x),\ -p_\varepsilon(x+h))\right]\\
&\quad+\frac{1}{h}\left[\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon(x),\ -p_\varepsilon(x+h))-\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial s}(u_\varepsilon(x),\ -p_\varepsilon(x))\right]\\
&=\frac{\partial^2 H_\varepsilon}{\partial s^2}(\theta_1\,u_\varepsilon(x)+(1-\theta_1)\,u_\varepsilon(x+h),\ -p_\varepsilon(x+h))\,.\,\delta(h)\,u_\varepsilon(x)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial s}\nabla_t H_\varepsilon(u_\varepsilon(x),\ -\tilde\theta_1\,p_\varepsilon(x)-(1-\tilde\theta_1)\,p_\varepsilon(x+h))\,.\,\delta(h)\,p_\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

où

$$0<\theta_1=\theta_1(x,h)<1,\qquad 0<\tilde\theta_1=\tilde\theta_1(x,h)<1;$$

On majore le membre de droite en utilisant les hypothèses (5.2.4) et l'Annexe A.2 :

$$\begin{aligned}
|\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon(x)|\leqq C(1+|u_\varepsilon(x)|^{\tau_1}+|u_\varepsilon(x+h)|^{\tau_1}+|p_\varepsilon(x+h)|^{\tau_2})&\\
\times|\delta(h)\,u_\varepsilon|+C\,|\delta(h)\,p_\varepsilon(x)|&
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}\\
&\qquad\leqq C+C[\|\,|u_\varepsilon|^{\tau_1}\|_{L^{pq/(p-1)}(\Omega)}+\|\sqrt{\varphi}\,|u_\varepsilon(\,.\,+h)|^{\tau_1}\|_{L^{pq/(p-1)}(\Omega)}\\
&\qquad\quad+\|\sqrt{\varphi}\,|p_\varepsilon(\,.\,+h)|^{\tau_2}\|_{L^{pq/(p-1)}(\Omega)}]\,.\,\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\,u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\\
&\qquad\qquad+C\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)\,p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)};
\end{aligned} \tag{5.11}$$

mais on sait que

$$\|\psi\,.\,r(\,.\,+h)\|_{L^\lambda(\Omega)}\leqq C\|\psi\,r(\,.\,)\|_{L^\lambda(\Omega)}\leqq C\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|r(\,.\,)\|_{L^\lambda(\Omega)}$$

pour toute fonction $r\in L^\lambda(\Omega)$ et toute fonction ψ continue à support compact dans Ω; ce qui permet d'écrire (5.11) comme suit, compte tenu des inégalités satisfaites par τ_1 et τ_2 (*cf.* 5.2.4) :

$$\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leqq C + C\,[\,\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^{(p-1)/q} + \|p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}^{(p-1)/p}]$$
$$\times \|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)\,u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + C\,\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)\,p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}.$$

Comme, par les propriétés de croissance uniformes (5.2.5), l'annexe A.7 et (5.3) on a

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqq C,$$
$$\|p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leqq C,$$
$$\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)\,u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqq C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqq C,$$

il s'en suit :

$$\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)\operatorname{div}p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leqq C + C\,\|\sqrt{\varphi}\,.\,\delta(h)\,p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}. \tag{5.12}$$

On majore (5.10) à l'aide de (5.12) :

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{B_{1\varepsilon}}\,.\,\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\,p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2K}\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\,p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}^2$$
$$\leqq C + C\,\|\sqrt{\varphi}\,\delta(h)\,p_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}. \tag{5.13}$$

Une conséquence immédiate de (5.13) est donnée par la

PROPOSITION 5.4. — *Nous avons pour tout i dans* [1, 2, . . ., *n*]

$$\left\|\sqrt{\varphi}\frac{\partial}{\partial x_i}p_\varepsilon\right\|_{L^q(\Omega)} \leqq C, \qquad i=1, 2, \ldots, n$$
$$\left\|\sqrt{\varphi}\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}p_\varepsilon\right\|_{L^q(\Omega)} \leqq C, \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

2. Le passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$:

Nous allons passer à la limite dans $(\mathscr{P}_2)_\varepsilon$ et obtenir ainsi $(\mathscr{P}_2)$ *i.e.*

THÉORÈME 5.5. — *On fait les hypothèses* (5.2) *à* (5.5). *Alors le problème* $(\mathscr{P}_2)$ *admet une solution* $\bar{p} \in V_2$ *possédant la régularité suivante :*

$$\bar{p} \in (W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega))^n,$$
$$\operatorname{div}\bar{p} \in W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega).$$

Démonstration. — Nous avons

$$\int_\Omega g_\varepsilon^*(-\operatorname{div}p_\varepsilon, -p_\varepsilon)\,dx \leqq \int_\Omega g_\varepsilon^*(-\operatorname{div}w, -w)\,dx = J_2^\varepsilon(w),$$
$$\forall\, w \in V_2;$$

le passage à la limite dans le membre de droite est immédiat par application du théorème de Lebesgue en utilisant les propriétés de croissances (5.5.4). Grâce à (5.5.4) et (5.2.2) on peut toujours supposer, sans perte de généralité, que l'on a :

$$g_\varepsilon^*(s, t) \geqq 0 \qquad \forall s, \quad \forall t,$$
$$g^*(s, t) \geqq 0 \qquad \forall s, \quad \forall t.$$

On se donne un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Il existe $\delta > 0$ tel que si Ω' est un ouvert relativement compact dans Ω satisfaisant $|\Omega \setminus \bar{\Omega}'| \leqq \delta$ on ait

$$0 \leqq \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'} g^*(-\operatorname{div} \bar{p}, -\bar{p})\, dx \leqq \varepsilon \tag{5.14}$$

où $\bar{p}$ est la limite faible de p_ε dans V_2; posons

$$\Delta_\varepsilon = \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}'} g_\varepsilon^*(-\operatorname{div} p_\varepsilon, -p_\varepsilon)\, dx$$
$$\Delta_\varepsilon \geqq 0;$$

nous avons

$$\Delta_\varepsilon + \int_{\bar{\Omega}'} g_\varepsilon^*(-\operatorname{div} p_\varepsilon, -p_\varepsilon)\, dx \leqq J_2^\varepsilon(w), \qquad \forall w \in V_2. \tag{5.15}$$

Mais d'après la proposition (5.4) il existe une sous-suite telle que

$$p_\varepsilon \to \bar{p} \quad \text{dans } L^q(\bar{\Omega}') \text{ fort},$$
$$p_\varepsilon(x) \to \bar{p}(x) \quad \text{p.p. } x \in \bar{\Omega}',$$
$$\operatorname{div} p_\varepsilon \to \operatorname{div} \bar{p} \quad \text{dans } L^q(\bar{\Omega}') \text{ fort},$$
$$\operatorname{div} p_\varepsilon(x) \to \operatorname{div} \bar{p}(x) \quad \text{p.p. } x \in \bar{\Omega}';$$

et par conséquent en procédant comme pour les propositions 4.3 et 4.4 on obtient

$$\int_{\bar{\Omega}'} g_\varepsilon^*(-\operatorname{div} p_\varepsilon, -p_\varepsilon)\, dx \to \int_{\bar{\Omega}'} g^*(-\operatorname{div} \bar{p}, \bar{p})\, dx;$$

d'où un passage à la limite dans (5.15) donne :

$$\int_{\bar{\Omega}'} g^*(-\operatorname{div} \bar{p}, -\bar{p})\, dx \leqq J_2(w) = \int_\Omega g^*(-\operatorname{div} w, -w)\, dx$$
$$\forall w \in V_2;$$

qui s'écrit grâce à (5.14) : tout $\varepsilon > 0$

$$J_2(\bar{p}) \leqq J_2(w) + \varepsilon, \qquad \forall w \in V_2;$$

i.e.

$$J_2(\bar{p}) \leqq J_2(w), \qquad \forall w \in V_2.$$

Enfin la régularité de $\bar{p}$ et $\operatorname{div} \bar{p}$ découle de façon immédiate de la proposition 5.4 et l'unicité de la stricte convexité de $g^*(s, t)$ puisque $g(s, t)$ est régulière. □

Le passage à la limite dans $(\mathscr{P}_1^\varepsilon)$ est donné par la

PROPOSITION 5.6. — *Sous les hypothèses du théorème* 5.5, *la limite du problème* $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})_\varepsilon$ *est le problème* $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$.

Démonstration. — Nous avons, à partir de l'inégalité de convexité

$$\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)\,dx \geqq \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\,dx \geqq \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)\,dx + \int_\Omega \nabla_t g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u) \times (\nabla u_\varepsilon - \nabla u)\,dx + \int_\Omega \frac{\partial g_\varepsilon^{**}}{\partial s}(u, \nabla u).(u_\varepsilon - u)\,dx,$$

où u est la limite faible de u_ε dans $W^{1,p}(\Omega)$; ou encore :

$$\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)\,dx \geqq \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\,dx \geqq \int_\Omega \nabla g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u) \times ((u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - (u, \nabla u))\,dx + \int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)\,dx. \quad (5.16)$$

Et il s'agit de passer à la limite dans (5.16); $H_\varepsilon(s, t)$ converge vers $H(s, t)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$; par conséquent, par l'annexe A.1.1, $g_\varepsilon^{**}(s, t) = (H_\varepsilon(s, .))^*(t)$ converge vers $g^{**}(s, t)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ à s fixé.

On applique alors le théorème de Lebesgue :

$$\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)\,dx \to \int_\Omega g^{**}(u, \nabla u)\,dx. \quad (5.17)$$

Il reste alors le premier terme du membre de droite. Par l'annexe A.7 nous avons

$$|\nabla g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)| \leqq C(|u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) + D$$

où C et D sont deux constantes indépendantes de ε; et la proposition 4.7 entraîne que $\nabla g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u)$ converge vers $\nabla g^{**}(u, \nabla u)$ dans $(L^q(\Omega))^{n+1}$ fort. Par conséquent

$$\int_\Omega \nabla g_\varepsilon^{**}(u, \nabla u).((u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - (u, \nabla u))\,dx \to 0; \quad (5.18)$$

(5.16), (5.17) et (5.18) donnent finalement :

$$\int_\Omega g_\varepsilon^{**}(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\,dx \to \int_\Omega g^{**}(u, \nabla u)\,dx \quad (5.19)$$

dont la conséquence est le problème $(\mathscr{P}_1 \mathscr{R})$ *i.e.*

$$\int_\Omega g^{**}(u, \nabla u)\,dx \leqq \int_\Omega g^{**}(v, \nabla v)\,dx, \qquad \forall v \in V_1.$$

En résumé nous énonçons le

COROLLAIRE 5.7. — *Sous les hypothèses* (5.2) *à* (5.5) $(\mathscr{P}_1\mathscr{R})$ *et* $(\mathscr{P}_2)$ *admettent respectivement deux solutions* u *et* $\bar{p}$ *satisfaisant les relations suivantes :*

$$\nabla_t g^{**}(u, \nabla u) = -\bar{p},$$
$$\frac{\partial g^{**}}{\partial s}(u, \nabla u) = -\operatorname{div} \bar{p}.$$

De plus $\bar{p}$ appartient à $(W^{1,q}_{loc}(\Omega))^n$ et $\operatorname{div}\bar{p}$ à $W^{1,q}_{loc}(\Omega)$.

La preuve est une conséquence immédiate du théorème 5.5 et de la proposition 5.6. □

Remarques 5.8. — (i) Le corollaire 4.10 est encore valable ici *i.e.*

$$u \in W^{1, np/(n-q)}_{loc}(\Omega) \cap L^{np/(n-(p+q))}_{loc}(\Omega).$$

(ii) Si $l(x, \eta)$ n'est ni convexe, ni régulière, il est possible de montrer que $\nabla g(x, \nabla u)$ appartient à $W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ mais cela ne permet pas de montrer le résultat d'existence qui va suivre.

6. APPLICATION

Un résultat d'existence en optimisation non convexe.

Dans cette partie, on se propose de donner un résultat d'existence pour le problème de minimisation suivant :

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{ \int_\Omega g(x, \nabla v)\, dx + \int_\Omega l(x, v)\, dx / v \in W^{1,p}_0(\Omega) + \psi \right\}$$

Nous procéderons comme dans [8]. Sur g et l introduites dans la partie 2, nous faisons quelques hypothèses supplémentaires. On pose

$$K = \{ (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^n / g^{**}(x, t) < g(x, t) \}$$

et on suppose que K est une réunion I au plus dénombrable d'ensembles K_i connexes tels que

$$g^{**}(x, t) = m_i(x) . t + n_i(x), \qquad \forall (x, t) \in K_i, \quad \forall i \in I \tag{6.1}$$

où les fonctions m_i et n_i possèdent la régularité suivante :

$$m_i \in W^{1,r}_{loc}(\Omega), \qquad r > 1, \quad \forall i \in I; \tag{6.2}$$

on suppose également qu'il existe une famille S, au plus dénombrable, de fonctions $\omega_s \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $s \in S$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} g^{**}(x, \nabla \omega_s(x)) = g(x, \nabla \omega_s(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall s; \\ Q_s = \{(x, \omega_s(x))/x \in \Omega\} \subseteqq \Omega \times \mathbb{R}, \\ Q = \bigcup_{s \in S} Q_s \subseteqq \Omega \times \mathbb{R} \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

$$\left| \operatorname{div} m_i(x) - \frac{\partial l}{\partial \eta}(x, \eta) \right| > 0, \qquad \text{p.p. } x, \quad \forall \eta \tag{6.4}$$

tels que $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \setminus Q$.

Remarques 6.1. — (i) si l n'est pas régulière, (6.4) signifie alors, dans le cas convexe sous-différentiable :

$$\operatorname{div} m_i(x) \notin \partial l(x, \eta) \quad \text{p.p. } x, \quad \forall \eta \tag{6.4.1}$$

tels que $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \setminus Q$.

(ii) si g et l sont indépendants de x et si par exemple $g^{**}(0) = g(0)$, (6.4) se réduit alors à $\frac{\partial l}{\partial \eta}(\eta) \neq 0 \, \forall \eta \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ où Λ est un ensemble réel au plus dénombrable ([1]).

(iii) pour $Q = \varnothing$ l'hypothèse (6.4) apparaît pour la première fois dans [6] (*cf.* [8], [16]); et lorsque $Q \neq \varnothing$, elle se rencontre dans [13].

(iv) si l n'est pas régulière ou n'est pas convexe, (6.4) et (6.4.1), respectivement, n'ont pas de sens; et dans ce cas le problème de l'existence reste posé.

Exemple 6.2 :

$$g(t) = \begin{cases} t^2 (1 - |t|)^2 & \text{si} \quad |t| \leqq 1, \\ (1 - |t|^2)^2 & \text{si} \quad |t| > 1, \end{cases}$$
$$l(\eta) = \eta^2.$$

Les hypothèses précédentes sont vérifiées dans ce cas, et comme nous le verrons le théorème montre que le problème

$$\inf \left\{ \int_\Omega g(\nabla v)\, dx + \int_\Omega l(v)\, dx / v \in W^{1,4}_0(\Omega) \right\}$$

admet l'unique solution $u = 0$. Par contre les hypothèses (6.3) et (6.4) ne sont pas vérifiées pour le problème

$$\inf \left\{ \int_\Omega (1 - |\nabla v|^2)^2\, dx + \int_\Omega v^2\, dx / v \in W^{1,4}_0(\Omega) \right\};$$

([1]) Au moment de la rédaction des quelques modifications de présentation suggérées par le rapporteur, nous avons remarqué que dans le cas monodimensionnel et quand g est indépendant de x cette hypothèse se trouve dans [24].

et il est classiquement connu que ce problème ne possède pas de solution.

THÉORÈME 6.3. — On suppose les hypothèses (2.1) à (2.8) et les hypothèses (6.1) à (6.4).

Alors le problème

$$(\mathscr{P}): \quad \inf\left[\int_{\Omega} g(x, \nabla v)\,dx + \int_{\Omega} l(x, v)\,dx / v \in W_0^{1,p}(\Omega) + \psi\right]$$

admet au moins une solution u.

Démonstration. — On considère le problème relaxé

$$\inf\left[\int_{\Omega} g^{**}(x, \nabla v)\,dx + \int_{\Omega} l(x, v)\,dx / v \in W_0^{1,p}(\Omega) + \psi\right]$$

qui admet au moins une solution u; d'après le théorème 4.5 il existe $\bar{p} \in V_2 \cap (W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega))^n$ tel que

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial g^{**}}{\partial t_i}(x, \nabla u(x)) = \bar{p}_i(x) \quad \text{p.p.}\, x \in \Omega,\ i = 1, 2, \ldots, n \\ -\frac{\partial l}{\partial \eta}(x, u(x)) = \operatorname{div} \bar{p}(x) \quad \text{p.p.}\ x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Il suffit de montrer que

$$g^{**}(x, \nabla u(x)) = g(x, \nabla u(x)) \quad \text{p.p.}\ x \in \Omega.$$

Nous raisonnerons par l'absurde, et nous utiliserons de façon essentielle la régularité $(W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega))^n$ de $\bar{p}$.

En effet, supposons que l'ensemble

$$E = \{ x \in \Omega / g^{**}(x, \nabla u(x)) < g(x, \nabla u(x)) \}$$

est de mesure non nulle. Nous avons

$$E = \bigcup_{j \in J} E_j, \qquad J \subseteqq I$$

où

$$E_j = \{ x \in E / (x, \nabla u(x)) \in K_j \};$$

il existe $j_0 \in J$ tel que $|E_{j_0}| > 0$; en posant

$$F_s = \{ x \in E_{j_0} / (x, u(x)) \in Q_s \},$$

on a

$$F = \bigcup_s F_s = \{ x \in E_{j_0} / \exists s \in S : u(x) = \omega_s(x) \}$$

soit

$$F = \{ x \in E_{j_0} / (x, u(x)) \in Q \} \subset E_{j_0}$$

nous avons $|F|=0$ *i.e.*

$$(x, u(x))\in\Omega\times\mathbb{R}\setminus Q \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0} \tag{6.6}$$

en effet si $|F|>0$, il existerait $s_0\in S$ tel que $|F_{s_0}|>0$; on aurait

$$u(x)=\omega_{s_0}(x) \quad \text{p.p. } x\in F_{s_0}$$

et donc

$$\nabla u(x)=\nabla\omega_{s_0}(x) \quad \text{p.p. } x\in F_{s_0}$$

ce qui entraîne à l'aide de l'hypothèse (6.3)

$$g^{**}(x, \nabla u(x))=g(x, \nabla u(x)) \quad \text{p.p. } x\in F_{s_0}\subset E_{j_0} \tag{6.7}$$

et (6.7) contredit la définit de E.

L'hypothèse (6.4) et (6.6) entraînent

$$\left|\operatorname{div} m_{j_0}(x)-\frac{\partial l}{\partial\eta}(x, u(x))\right|>0 \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0} \tag{6.8}$$

De plus les relations (6.5) ayant lieu presque partout sur E_{j_0}, nous avons à l'aide de l'hypothèse (6.1)

$$-m_{j_0}(x)=\bar{p}(x) \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0} \tag{6.9}$$

$$-\frac{\partial l}{\partial\eta}(x, u(x))=\operatorname{div}\bar{p}(x) \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0}; \tag{6.10}$$

comme, d'après le théorème 4.5, $\bar{p}$ appartient à $(W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega))^n$, la fonction $\bar{p}+m_{j_0}$ est dans $(W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega))^n$ avec $s=\min(r, q)$ et vérifie

$$\bar{p}(x)+m_{j_0}(x)=0 \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0}$$

et donc

$$\operatorname{div}\bar{p}(x)+\operatorname{div} m_{j_0}(x)=0 \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0};$$

ce qui donne en utilisant (6.10) :

$$\frac{\partial l}{\partial\eta}(x, u(x))+\operatorname{div}\bar{p}(x)=0=\frac{\partial l}{\partial\eta}(x, u(x))-\operatorname{div} m_{j_0}(x) \quad \text{p.p. } x\in E_{j_0}$$

contredisant ainsi (6.8). Par conséquent $|E|=0$ *i.e.*

$$g^{**}(x, \nabla u(x))=g(x, \nabla u(x)) \quad \text{p.p. } x\in\Omega. \quad \square$$

7. EXEMPLES ET COMMENTAIRES SUR LES HYPOTHÈSES LIÉES À LA MÉTHODE

Comme nous l'avons vu l'hypothèse (2.6) est essentielle à la méthode. Nous allons dégager une famille de fonctions satisfaisant (2.6). Pour cela nous considérons d'abord trois exemples.

Exemple 1 :

$$g(\xi)=(1-|\xi|)^2, \qquad \xi=(\xi_1, \xi_2)\in\mathbb{R}^2$$
$$g^*(\xi)=\frac{1}{4}|\xi|^2+|\xi|.$$

PROPOSITION 7.1. — *Nous avons l'inégalité*

$$g^*(\xi_1)-g^*(\xi_2)\geqq(\xi_1-\xi_2).\mathrm{A}(\xi_2)+\frac{1}{2}|\xi_1-\xi_2|^2, \quad \forall\xi_1, \forall\xi_2\in\mathbb{R}^2 \tag{7.1}$$

où $\mathrm{A}(\xi_2)$ *est un élément du sous-différentiel* $\partial g^*(\xi_2)$.

Démonstration. — On procède par régularisation et passage à la limite; on pose

$$r_\varepsilon(\xi)=\sqrt{\varepsilon+|\xi|^2},$$
$$g_\varepsilon^*(\xi)=\frac{1}{4}|\xi|^2+r_\varepsilon(\xi);$$

nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial\xi_1^2}(\xi).t^2+2\frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial\xi_1\partial\xi_2}(\xi)s.t+\frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial\xi_2^2}(\xi)s^2 \\ =\frac{1}{2}(s^2+t^2)+\left[\frac{1}{r_\varepsilon}-\frac{\xi_1^2}{(r_\varepsilon)^3}\right]t^2-2\frac{\xi_1\xi_2}{(r_\varepsilon)^3}\mathrm{s.\,t.}+\left[\frac{1}{r_\varepsilon}-\frac{\xi_2^2}{(r_\varepsilon)^3}\right]s^2 \\ =\frac{1}{2}(s^2+t^2)+\mathrm{Q}(\xi)(s, t).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\mathrm{Q}(\xi)(s, t)$ est une forme quadratique positive; un calcul élémentaire montre que l'on a

$$\frac{1}{r_\varepsilon}-\frac{\xi_1^2}{(r_\varepsilon)^3}=\frac{\varepsilon+\xi_2^2}{(r_\varepsilon)^3}>0,$$
$$\frac{(\xi_1\xi_2)^2}{(r_\varepsilon)^6}-\left[\frac{1}{r_\varepsilon}-\frac{\xi_1^2}{(r_\varepsilon)^3}\right]\left[\frac{1}{r_\varepsilon}-\frac{\xi_2^2}{(r_\varepsilon)^3}\right]<0$$

i.e. $\mathrm{Q}(\xi)(s, t)>0$; d'où

$$\frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial\xi_1^2}t^2+2\frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial\xi_1\partial\xi_2}s.t+\frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial\xi_2^2}s^2\geqq\frac{1}{2}(s^2+t^2). \tag{7.2}$$

A l'aide de la formule de Taylor et de (7.2) on obtient :

$$g_\varepsilon^*(\xi_1)-g_\varepsilon^*(\xi_2)\geqq(\xi_1-\xi_2).\nabla g_\varepsilon^*(\xi_2)+\frac{1}{2}|\xi_1-\xi_2|^2. \tag{7.3}$$

Un passage à la limite dans (7.3) donne (7.1). □

Exemple 2. — On se donne q tel que $2>q>\frac{3}{2}$; et soit $g(\xi)$ telle que

$$g^*(\xi)=(\sqrt{1+|\xi|^2})^q+|\xi|=r(\xi)+|\xi|.$$

On peut prendre par exemple pour $g(\xi)$ la polaire de

$$(\sqrt{1+|\xi|^2})^q+|\xi|.$$

PROPOSITION 7.2. — *Nous avons l'inégalité*

$$g^*(\xi_1)-g^*(\xi_2)\geqq(\xi_1-\xi_2).A(\xi_2)+\frac{q(2-q).|\xi_1-\xi_2|^2}{C_q(1+|\xi_1|^{2-q}+|\xi_2|^{2-q})} \quad (7.4)$$

où $A(\xi_2)$ *est un élément du sous-différentiel* $\partial g^*(\xi_2)$, *et* C_q *une constante qui ne dépend que de* q.

Démonstration. — Nous avons

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1^2}=q(1+|\xi|^2)^{(q/2)-1}\left[\frac{1+(2-q)|\xi|^2}{1+|\xi|^2}+\frac{(q-1)\xi_2^2+(2q-3)\xi_1^2}{1+|\xi|^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi_2^2}=q(1+|\xi|^2)^{(q/2)-1}\left[\frac{1+(2-q)|\xi|^2}{1+|\xi|^2}+\frac{(q-1)\xi_1^2+(2q-3)\xi_2^2}{1+|\xi|^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1\,\partial \xi_2}=q(1+|\xi|^2)^{(q/2)-1}\left[\frac{(q-2)\xi_1\xi_2}{1+|\xi|^2}\right];$$

nous voyons bien que l'on a :

$$\frac{\mu^2 r}{\partial \xi_1}.t^2+2\frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1\,\partial \xi_2}s.t+\frac{\partial^2 r}{\partial \xi_2}s^2\geqq Q_1(s,t)+Q_2(s,t)$$

avec

$$Q_1(s,t)=q(1+|\xi|^2)^{(q/2)-1}.\frac{1+(2-q)|\xi|^2}{1+|\xi|^2}.[t^2+s^2]$$

et

$$Q_2(s,t)=q(1+|\xi|^2)^{(q/2)-2}[(q-1)\xi_1^2t^2+2(q-2)\xi_1\xi_2 st+(q-1)\xi_2^2.s^2];$$

la forme quadratique Q_2 est strictement positive car son discriminant est :

$$(q-2)^2-(q-1)^2<0$$

puisque l'on a $2>q>\frac{3}{2}$; et la forme quadratique Q_1 vérifie :

$$Q_1(s,t)\geqq\frac{q(2-q)}{(1+|\xi|^2)^{1-(q/2)}}[t^2+s^2]$$

ou encore

$$Q_1(s,t) > \frac{q(2-q)}{C_q(1+|\xi|^{(2-q)})} \cdot [t^2+s^2],$$

où C_q est une constante qui ne dépend que de q.

Enfin pour terminer la preuve on procède par régularisation exactement comme pour la proposition 7.1. □

Exemple 3. – $g^* : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g^*(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{q/2} + \sum_{i=1}^{k} a_i(x) \cdot |\xi - V_i|$$

où les V_i appartenant à $\mathbb{R}^n$ sont donnés; les fonctions $a_i(x)$ sont positives et par exemple bornées.

Remarque 7.1. – La classe des fonctions g^* suivantes satisfait l'hypothèse (2.6)

$$g^*(\xi) = r_1(\xi) + r_2(\xi),$$

r_1 est convexe régulière et satisfait (7.4), r_2 étant convexe et sous-différentiable.

Exemple 4. – *Cf.* [10] « ellipticité locale ».

Soit $g^*(t)$ une fonction strictement convexe possédant la propriété de régularité suivante (ou plutôt une propriété donnant une information sur l'ensemble où g^* n'est pas C^2) :

Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{R}^n)^2$, il existe un ensemble fini $I(p, q) = \{t_1, \ldots, t_m\}$, $I(p, q) \subset [0, 1]$ tel que l'application

$$\varphi(t) = g^*(tp + (1-t)q)$$

soit C^2 sur $[0, 1] \setminus I(p, q)$.

On montre dans [10] que pour toute boule $B(0, R)$ il existe une constante $\mu_0 = \mu_0(R)$ telle que l'on ait :

$$(\nabla g^*(p) - \nabla g^*(q)) \cdot (p-q) \geqq \sum_{k=0}^{m} (p-q)^t \cdot A^k(p,q) \cdot (p-q) \geqq \mu_0 \cdot |p-q|^2 \quad (7.4.1)$$

Remarques 7.2. – (i) Le caractère local de μ_0 rend illicite l'utilisation de (7.4.1) dans les estimations *a priori* de ∇p_ε. Ces estimations nécessitent des estimations $W^{1,\infty}(\Omega)$ sur u_ε [*cf.* (3.1) et (3.2)] qui ne sont pas vraies, en général, dans notre cadre d'étude puisque le comportement uniformément strictement convexe n'est pas imposé à l'infini : la non convexité de g est supposée locale dans [10].

(ii) Si l'ensemble des points de R^n où $g^*(t)$ n'est pas C^2 contient un segment de droite, la démonstration de [10] de l'ellipticité locale tombe en défaut. Ceci arrive pour des exemples du type suivant :

$$g^*(t)=a|t|^3+\sum_{i=1}^{k}|(t, v_i)|^3, \qquad a>0.$$

(iii) Les résultats de régularité du théorème 5.5 permettent, également, de montrer que le problème

$$\operatorname{Inf}\left\{\int_\Omega g(v, \nabla v)\,dx/v\in \mathrm{V}_1\right\}$$

admet au moins une solution en modifiant convenablement les hypothèses (6.1) à (6.4). Nous ne le ferons pas ici par commodité et pour éviter de se répéter.

Enfin nous nous proposons de prouver la condition d'ellipticité de $g^*(t)$ sous l'hypothèse de croissance suivante :

$$\left|\frac{\partial^2 g^{**}(x, t)}{\partial t_i \partial t_j}\right|<c|t|^{p-2}+d, \tag{7.5}$$

la dérivation étant prise au sens des distributions.

THÉORÈME 7.1. — Nous supposons que $g(x, t)$ est régulière et vérifie (2.1) et (7.5). Alors $g^*(x, .)$ satisfait l'inégalité d'ellipticité suivante :

$$g^*(x, t_1)-g^*(x, t_2)\geqq \mathrm{B}_0(x, t_2).(t_1-t_2)+\mathrm{B}_1(t_1, t_2).(t_1-t_2)^2, \tag{7.6}$$

où

$$\mathrm{B}_1(t_1, t_2)=(c(|t_1|^{2-q}+|t_2|^{2-q})+d)^{-1},$$

et $\mathrm{B}_0(x, t)$ désigne un élément du sous-différentiel de $g^*(x, .)$ au point t.

Démonstration. — Nous procèderons en deux étapes : le cas régulier et le cas non régulier qui se traitera par régularisation du premier.

Étape 1. — Supposons $g(x, t)$ régulière strictement convexe en t; dans ce cas $g^{**}(x, t)=g(x, t)$ est une fonction strictement convexe régulière; ce qui entraîne que $g^*(x, t)$ possède également ces deux propriétés [17]. Les outils essentiels sont la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Jensen. Pour alléger les notations, nous désignerons, respectivement, par $g(t)$, $g^*(t)$ les termes $g(x, t)$, $g^*(x, t)$. Nous avons

$$g^*(t_1)-g^*(t_2)=\nabla g^*(t_2).(t_1-t_2) + \int_0^1 (1-s)\nabla^2 g^*(st_1+(1-s)t_2)\,ds.(t_1-t_2)^2; \tag{7.7}$$

nous avons l'identité

$$\nabla g^*(\nabla g(y))=y,$$

qui entraîne par différentiation

$$\nabla^2 g^*(\nabla g(y)).\nabla^2 g(y)=\mathrm{I}, \quad \text{l'identité.} \tag{7.8}$$

Avec (7.8) le reste intégral, noté R, devient :

$$\mathrm{R}=\int_0^1 (1-s)(\nabla^2 g)^{-1}(\nabla g^*(st_1+(1-s)t_2))\,ds.(t_1-t_2)^2.$$

Mais pour toute matrice A définie positive nous avons :

$$(\mathrm{A}\,t,\,t).(\mathrm{A}^{-1}\,t,\,t)\geqq |t|^4, \qquad t\in\mathrm{R}^n;$$

d'où

$$\mathrm{R}\geqq \int_0^1 (1-s)(\nabla^2 g(\nabla g^*(st_1+(1-s)t_2)).(t_1-t_2)^2)^{-1}\,ds \\ \times |t_1-t_2|^4. \tag{7.8.1}$$

L'inégalité de Jensen nous permet de transformer l'inégalité ci-dessus :

$$\mathrm{R}\geqq\left(\int_0^1 (1-s)\nabla^2 g(\nabla g^*(st_1+(1-s)t_2))\,ds.(t_1-t_2)^2\right)^{-1} \\ \times (t_1-t_2)^4. \tag{7.9}$$

Il s'agit de majorer maintenant l'intégrale ci-dessus. Pour cela nous utiliserons successivement l'inégalité (7.5) et l'annexe (A.7.2) :

$$|\nabla^2 g(\nabla g^*(st_1+(1-s)t_2))|\leqq c\,|\nabla g^*(st_1+(1-s)t_2)|^{p-2}+d \\ \leqq c\,|st_1+(1-s)t_2|^{(p-2)(q-1)}+d$$

ou encore

$$|\nabla^2 g(\nabla g^*(st_1+(1-s)t_2))|\leqq c(|t_1|^{2-q}+|t_2|^{2-q})+d. \tag{7.10}$$

Finalement en regroupant (7.8.1) et (7.10) on obtient

$$\mathrm{R}\geqq(d+c(|t_1|^{2-q}+|t_2|^{2-q})^{-1}.(t_1-t_2)^2, \tag{7.11}$$

dont la conséquence est le résultat souhaité.

Étape 2. — On approche $g^{**}(x,\,.)$ par une suite de fonctions $g_\varepsilon^{**}(x,\,.)$ régulières strictement convexes; et il s'agit de démontrer que les inégalités (2.1) et (7.5) sont vérifiées par $g_\varepsilon^{**}(x,\,t)$ uniformément en ε. On prend par exemple

$$g_\varepsilon^{**}(x,\,.)=g^{**}(x,\,.)\,\hat{*}\,\rho_\varepsilon(t)+\varepsilon(1+|t|^2)^{p/2};$$

il est clair que $g_\varepsilon^{**}(x,\,.)$ vérifie (2.1) avec des constantes a_i et b_i différentes mais indépendantes de ε. De même, d'après l'annexe (A.7.3) la polaire $g_\varepsilon^*=(g_\varepsilon^{**})^*$ de g_ε^{**} vérifie :

$$a\,|t|^q+b\leqq g_\varepsilon^*(x,\,t)\leqq c\,|t|^q+d, \tag{7.12}$$

où a, b, c, d désignent diverses constantes indépendantes de ε. Enfin grâce à l'annexe (A.7), (7.12) entraîne

$$|\nabla g_\varepsilon^*(x, t)| < c|t|^{q-1} + d,$$

et l'inégalité (7.5) uniforme en ε pour la fonction $g_\varepsilon^{**}(x, t)$ est immédiate étant donnée la forme de l'approximation choisie pour g^{**} :

$$\left|\frac{\partial^2 g_\varepsilon^{**}}{\partial t_i \partial t_j}(x, t)\right| \leqq c|t|^{p-2} + d. \tag{7.13}$$

Par conséquent le résultat de la première étape entraîne que l'on a :

$$g_\varepsilon^*(x, t_1) - g_\varepsilon^*(x, t_2) \geqq \nabla g_\varepsilon^*(t_2).(t_1 - t_2) \\ + (d + c(|t_1|^{2-q} + |t_2|^2)^{-q})^{-1}.(t_1 - t_2)^2; \tag{7.14}$$

et le résultat final s'obtient par passage à la limite dans (7.14).

8. ANNEXES

On se donne une fonction k de $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ dans R de Carathéodory satisfaisant les inégalités

$$a|t|^\alpha + b < k(x, t) < c|t|^\alpha + d, \qquad \alpha > 1, \quad a > 0; \tag{A.1}$$

et on considère le noyau de régularisation suivant :

$$\rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} \mathrm{C}\,\varepsilon^{-2n} \exp(\varepsilon^2/(y^2 - \varepsilon^2)) & \text{si } |y| < \varepsilon \\ 0 \quad \text{si } |y| \geqq \varepsilon \end{cases}$$

où $y = (x, t)$ et la constante de normalisation est choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \rho_\varepsilon(y)\, dy = 1.$$

Nous avons le

LEMME A.1. — *La fonction* $k_\varepsilon = k \hat{\ast} \rho_\varepsilon$ *satisfait l'inégalité*

$$a_\alpha|t|^\alpha + b - 1 < k_\varepsilon(x, t) < c_\alpha|t|^\alpha + d + 1 \tag{A.1.0}$$

pour ε *suffisamment petit. Les constantes* a_α *et* c_α *sont indépendantes de* ε.

Démonstration. — Il suffit de montrer l'inégalité de droite, celle de gauche s'obtenant de manière identique. On a

$$k_\varepsilon(x, t) \leqq c \int_{\mathbb{R}^{2n}} |t - s|^\alpha \rho_\varepsilon(x, s)\, dx\, ds + d$$

$$\leqq c_\alpha \,.\, |t|^\alpha . \int_{\mathrm{R}^{2n}} \rho_\varepsilon(x, s)\, dx\, ds + d + c_\alpha \int_{\mathrm{R}^{2n}} s^\alpha \rho_\varepsilon(x, s)\, dx\, ds,$$

soit

$$k_\varepsilon(x, t) \leqq c_\alpha . |t|^\alpha + d + 1$$

puisque

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} s^\alpha . \rho_\varepsilon(x, s)\, dx\, ds \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0,$$

et

$$|t-s|^\alpha < c_\alpha . |t|^\alpha + c_\alpha . |s|^\alpha.$$

Soit une suite $k_n(x, t)$ de fonctions de Carathéodory satisfaisant l'inégalité (A.1) et telles que pour presque tout x $k_n(x, .)$ converge vers $k(x, .)$ uniformément sur tout compact. Quitte à modifier les coefficients a, b, c, d des inégalités (A.1), on peut toujours supposer que l'on a

$$a < c \qquad \text{et} \qquad b < d. \tag{A.1.1}$$

LEMME A.1.1. – *Soit $k_n^*(x, .)$ la polaire de $k_n(x, .)$ par rapport au deuxième argument t. Alors pour presque tout x $k_n^*(x, .)$ converge vers $k^*(x, .)$ uniformément sur tout compact.*

Démonstration. – Soit ξ tel que $|\xi| \leqq \mathrm{R}$. Par (A.1) nous avons

$$\left.\begin{aligned} \theta(|t|) = -\mathrm{R}|t| - c|t|^\alpha - d \leqq \xi . t - k_n(x, t) \\ \leqq \mathrm{R}|t| - a|t|^\alpha - b = \lambda(|t|); \\ \theta(|t|) \leqq \xi . t - k(x, t) \leqq \lambda(|t|); \end{aligned}\right\} \tag{A.1.2}$$

il existe $|t_0|$ tel que

$$\theta(|t_0|) = \sup_t [-\mathrm{R}|t| - c|t|^\alpha - d] = m = m(\mathrm{R})$$

et, d'après (A.1.1) et (A.1.2) nous avons

$$m = \theta(|t_0|) < \lambda(|t_0|).$$

Il s'ensuit alors que l'équation

$$\mathrm{R} . |s| - a|s|^\alpha - b = m$$

admet au moins 2 racines puisque la fonction $\lambda(r)$ est concave sur $[0 + \infty[$; soit $s_0 = s_0(\mathrm{R})$ la racine de plus grand module; remarquons que $|s_0|$ est indépendant de x et ξ. Il est clair que

$$\left.\begin{aligned} k_n^*(x, \xi) = \sup_{t \in \mathbf{R}^n} [\xi . t - k_n(x, t)] = \sup_{|t| \leqq s_0} [\xi . t - k_n(x, t)] \quad \text{p.p.}\, x \\ k^*(x, \xi) = \sup_{t \in \mathbf{R}^n} [\xi . t - k(x, t)] = \sup_{|t| \leqq |s_0|} [\xi . t - k(x, t)] \quad \text{p.p.}\, x; \end{aligned}\right\} \tag{A.1.3}$$

De plus, x étant donné, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $n_0=n_0(x, \varepsilon, \mathrm{R})$ tel que pour tout $n\geqq n_0$

$$\sup_{|t|\leqq|s_0|} |k_n(x, t)-k(x, t)|\leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.1.4}$$

Et ainsi, à l'aide de (A.1.3) et (A.1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} -\sup_{|t|\leqq|s_0|} |k_n(x, t)-k(x, t)|+\sup_{|t|\leqq|s_0|} [\xi.t-k(x, t)] &\leqq \sup_{|t|\leqq|s_0|} [\xi.t-k_n(x, t)] \\ &\leqq \sup_{|t|\leqq|s_0|} |k_n(x, t)-k(x, t)|+\sup_{|t|\leqq|s_0|} [\xi.t-k(x, t)]; \end{aligned}$$

soit pour tout $n\geqq n_0(x, \varepsilon, \mathrm{R})$

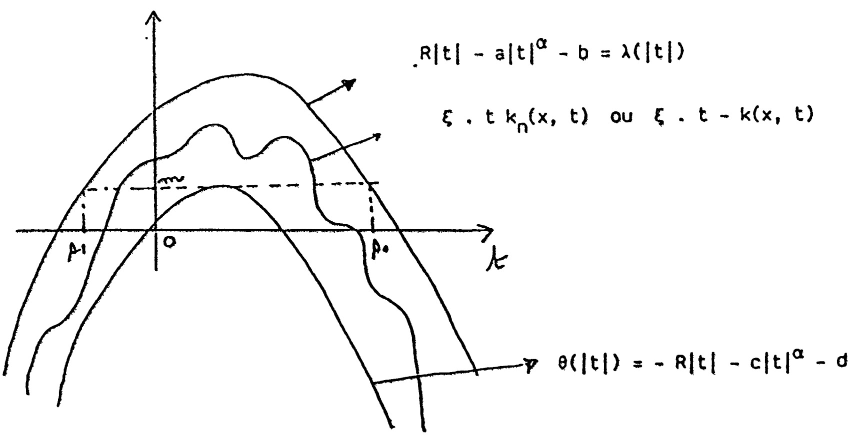
$$-\frac{\varepsilon}{2}+k^*(x, \xi)\leqq k_n^*(x, \xi)\leqq k^*(x, \xi)+\frac{\varepsilon}{2}$$

ou

$$|k^*(x, \xi)-k_n^*(x, \xi)|<\varepsilon \qquad \forall|\xi|\leqq \mathrm{R}$$

i.e. $\forall n\geqq n_0(x, \varepsilon, \mathrm{R})$

$$\sup_{|\xi|\leqq \mathrm{R}} |k^*(x, \xi)-k_n^*(x, \xi)|<\varepsilon. \quad \square$$



LEMME A.2. — *Supposons que k vérifie au sens des distributions*

$$\frac{\partial k}{\partial t_i}(x, t)\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n);$$

et

$$\left|\frac{\partial k}{\partial t_i}(x, t)\right|\leqq \mathrm{C}.(|t|^\beta+1) \quad p.p.\ x, \quad \forall t; \quad \beta>0.$$

Alors k_ε vérifie l'estimation

$$\left|\frac{\partial k_\varepsilon}{\partial t_i}(x, t)\right| < C_\beta(|t|^\beta + 1) \quad p.p.\ x, \quad \forall t,$$

la constante C_β étant indépendante de ε.

La preuve s'obtient comme précédemment.

LEMME A.3. — *Supposons qu'au sens des distributions la dérivée $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial t_i}(x, t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times R^n)$ et qu'elle vérifie*

$$\left|\frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial t_i}(x, t)\right| < G(x, t) \quad p.p.\ x, \quad \forall t.$$

Alors nous avons

$$\left|\frac{\partial^2 k_\varepsilon}{\partial x_j \partial t_i}(x, t)\right| < G_\varepsilon(x, t), \qquad \forall x, \quad \forall t.$$

LEMME A.4. — *On se donne deux fonctions de carathéodory $G \geqq 0$ et B avec 2.6.1 telles que :*

$$\sup\left\{\frac{G^2(x, t)}{B(y, t)} \Big/ (x, y) \in \Omega^2\right\} \leqq C.|t|^\nu + D, \qquad \nu > 0;$$

alors G_ε et $(B)_\varepsilon$ vérifient une inégalité du même type :

$$\sup\left\{\frac{(G_\varepsilon)^2(x, t)}{B_\varepsilon(y, t)} \Big/ (x, y) \in \Omega^2\right\} \leqq C_\nu.|t|^\nu + D + 1$$

Démonstration. — Nous avons, pour tout t, p.p. $(x, y) \in \Omega^2$

$$G^2(x, t) \leqq B_1(y, t).(C.|t|^\nu + D);$$

ce qui donne, par convolution, pour ε assez petit

$$(G^2)_\varepsilon(x, t) \leqq B_\varepsilon(y, t).(C_\nu|t|^\nu + D + 1). \qquad (A.4.1)$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x, t)\, dx\, dt = 1,$$

l'inégalité de Jensen donne

$$(G^2)_\varepsilon(x, t) = \int_{R^n \times R^n} (G(x - z, t - s))^2 \rho_\varepsilon(z, s)\, dz\, ds$$
$$\geqq \left[\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} G(x - z, t - s)\, \rho_\varepsilon(z, s)\, dz\, ds\right]^2 = (G_\varepsilon)^2(x, t);$$

et le résultat annoncé découle alors de l'inégalité (A.4.1).

Pour la commodité du lecteur rappelons le résultat classique suivant :

LEMME A.5. — *Soit* Ω *un ouvert borné, de frontière lipschitzienne; pour tout* $\delta>0$, *assez petit, on pose*

$$\Omega_\delta=\{x\in\Omega/\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geqq\delta\}.$$

Alors il existe une fonction ψ *appartenant à* $H_0^1(\Omega)$ *satisfaisant les inégalités suivantes :*

$$\begin{gathered}0<\psi(x)\leqq 1, \qquad \forall x\in\Omega,\\ \psi(x)=1, \qquad \forall x\in\Omega_\delta,\\ \frac{|\nabla\psi(x)|}{\sqrt{\psi(x)}}\leqq C=C_\delta, \qquad \forall x\in\Omega.\end{gathered}$$

Démonstration. — On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ régulière telle que

$$\begin{array}{ll} f(t)=0 & \text{si } t\leqq 0,\\ 0<f(t)<1 & \text{si } 0<t<1,\\ f(t)=1 & \text{si } t\geqq 1,\\ \dfrac{|f'(t)|}{\sqrt{f(t)}}\leqq C. & \end{array}$$

Soit alors une fonction φ de $C^1(\bar\Omega)$ nulle sur le bord de Ω telle que

$$\begin{gathered}0<\varphi(x)\leqq 1, \qquad \forall x\in\Omega,\\ \varphi(x)=1, \qquad \forall x\in\Omega_\delta.\end{gathered}$$

Alors la fonction $\psi(x)=f(\varphi(x))$ répond à la question.

LEMME A.6. — *On suppose que la fonction* k *vérifie l'inégalité*

$$k(x,t_1)-k(x,t_2)\geqq B_0(x,t_2).(t_1-t_2)+B_1(x,t).|t_1-t_2|^2, \qquad t=(t_1,t_2)$$

pour tout t_1, t_2 et p.p. x. Alors la fonction $k_\varepsilon=k\hat{*}\rho_\varepsilon$ vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned}k_\varepsilon(x,t_1)-k_\varepsilon(x,t_2)\geqq{}& B_{0\varepsilon}(x,t_2).(t_1-t_2)\\ &+B_{1\varepsilon}(x,t).|t_1-t_2|^2 \qquad \forall x,\quad \forall t_1,\quad \forall t_2.\end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit d'écrire l'opération convolution : $\tilde{s}=(s,s)$,

$$\begin{aligned}&k_\varepsilon(x,t_1)-k_\varepsilon(x,t_2)\\ &\quad=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}[k(x-y,t_1-s)-k(x-y,t_2-s)]\,\rho_\varepsilon(y,s)\,dy\,ds\\ &\quad\geqq\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}B_0(x-y,t_2-s)\,\rho_\varepsilon(y,s)\,ds\,dy.(t_1-t_2)\\ &\qquad\qquad+\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}B_1(x-y,t-\tilde{s})\,\rho_\varepsilon(y,s)\,dy\,ds.|t_1-t_2|^2\end{aligned}$$

LEMME A.7. — On se donne une fonction régulière f de $\Omega \times \mathrm{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions de croissance

$$a_1 |t|^p + b_1 \leqq f(x, t) \leqq a_2 |t|^p + b_2 \tag{A.7.1}$$

où a_i est une constante positive et b_i une constante réelle. Alors nous avons l'inégalité

$$|\nabla_t f^{**}(x, t)| \leqq a |t|^{p-1} + b \tag{A.7.2}$$

avec a constante >0 et b constante réelle $\geqq 0$; ces deux constantes ne dépendent que de a_i, b_i, $i=1, 2$.

Remarque. — Marcellini [26] a également donné une preuve directe du résultat (A.7.2) dans le cas régulier. Nous estimons utile de donner cette autre preuve qui a une version non régulière [22].

Démonstration. — On se donne t quelconque; nous avons par définition

$$f^{**}((x, t) = \sup_{\xi} [t.\xi - f^*(x, \xi)];$$

il existe ξ tel que

$$f^{**}(x, t) = t.\xi - f^*(x, \xi),$$
$$t \in \partial f^*(x, \xi), \qquad \xi = \nabla f^{**}(x, t);$$

soit en majorant :

$$\frac{1}{q} |\eta \xi|^q + \frac{1}{p} \left|\frac{t}{\eta}\right|^p \geqq |t|.|\xi| \geqq f^{**}(x, t) + f^*(x, \xi)$$
$$\geqq a_1 |t|^p + b_1 + c_1 |\xi|^q + d_1, \qquad \forall \eta > 0; \tag{A.7.2.1}$$

puisque $f^{**}(x, t)$ vérifie les inégalités (A.7.1) et $f^*(x, s)$ les inégalités :

$$c_1 |s|^q + d_1 \leqq f^*(x, s) \leqq c_2 |s|^q + d_2. \tag{A.7.3}$$

Avec

$$c_1 = \frac{1}{q.(a_2.p)^{1/(p-1)}}, \qquad d_1 = -b_2,$$
$$c_2 = \frac{1}{q.(a_1.p)^{1/(p-1)}}, \qquad d_2 = -b_1.$$

D'où d'après (A.7.2.1) :

$$\left(c_1 - \frac{|\eta|^q}{q}\right) |\xi|^q \leqq \frac{1}{p|\eta|^p} |t|^p - b_1 - d_1$$

avec η une constante telle que $c_1 - \dfrac{|\eta|^q}{q} > 0$. Ce qui entraîne

$$|\xi| \leqq \tilde{C}_1 |t|^{p/q} + \tilde{C}_2$$

où $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont deux constantes dépendant uniquement des constantes a_i et b_i, $i=1, 2$. Et donc nous obtenons finalement

$$|\nabla f^{**}(x, t)| \leqq \tilde{C}_1 |t|^{p-1} + \tilde{C}_2, \qquad \forall t, \quad \forall x.$$

Remarque A.7. — Soit une famille $f_n(x, t)$ de fonctions régulières satisfaisant (A.7.1) de façon uniforme *i.e.* que les a_i, b_i sont indépendants de n. Alors (A.7.2) a encore lieu pour f_n avec des constantes uniformes.

Considérons une fonction $B(x, t)$ de Carathéodory positive satisfaisant

$$\frac{1}{B(x, t)} \leqq c.|t|^\gamma + d(x), \qquad \forall t \text{ p.p. } x \tag{A.9.1}$$

où d est une fonction localement intégrable et γ une constante telle que $0<\gamma<1$.

LEMME A.9. — *Nous avons*

$$\frac{1}{B_\varepsilon(x, t)} \leqq c|t|^\gamma + d_\varepsilon(x) + 1, \qquad \forall t, \quad \forall x \tag{A.9.2}$$

Démonstration. — On applique à (A.9.1) le noyau de convolution $\rho_\varepsilon(x, t)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\rho_\varepsilon(y, s)\, dy\, ds}{B(x-y, t-s)} \leqq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (c.|t-s|^\gamma + d(x-y))\, \rho_\varepsilon(y, s)\, dy\, ds;$$

comme nous avons l'inégalité

$$|t-s|^\gamma \leqq (|t|+|s|)^\gamma \leqq c(|t|^\gamma + |s|^\gamma), \qquad \forall t, \quad \forall s$$

il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\rho_\varepsilon(y, s)\, dy\, ds}{B(x-y, t-s)} \leqq c|t|^\gamma + d_\varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c.|s|^\gamma \rho_\varepsilon(y, s)\, dy\, ds \leqq c|t|^\gamma + d_\varepsilon(x) + 1, \tag{A.9.3}$$

pour ε suffisamment petit puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |s|^\gamma \rho_\varepsilon(y, s)\, dy\, ds \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

L'inégalité de Jensen appliquée au membre de gauche de (A.9.3) donne

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} B(x-y, t-s)\, \rho_\varepsilon(y, s)\, dy\, ds} \leqq c.|t|^\gamma + d_\varepsilon(x) + 1$$

i.e. (A.9.2). □

L'auteur remercie G. Barles pour la discution qu'il a eue avec lui sur le théorème 7.1.

L'auteur remercie le rapporteur pour ses remarques qui ont permis d'améliorer la présentation de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] J. L. ERICKSEN, Equilibrium of Bars, *J. Elasticity*, vol. **5**, 1975, p. 191-201.

[2] J. L. KNOWLES, On Finite Anti-Plane Shear for Incompressible Elastic Materials, *J. Austral. Math. Soc.*, Serie B 19, 1976, p. 400-415.

[3] R. L. FOSDICK et R. D. JAMES, The Elastica and the Problem of the Pure Bending for Non Convex Stored Energy Function, *J. Elasticity*, vol. **11**, 1981, p. 165-186.

[4] J. M. BALL, Convexity Conditions and Existence Theorems in Non Linear Elasticity, *Arch. Rational mech. Anal.*, vol. **63**, 1977, p. 337-403.

[5] P. G. CIARLET, *Mathematical Elasticity*, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-VI, Part I, n° A86007.

[6] G. AUBERT et R. TAHRAOUI, Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations du type $\operatorname{Inf}\int_0^L f(x, u')\,dx$ et $\operatorname{Inf}\int_0^L f(x, u, u')\,dx$, *J. Differential Equations*, vol. **33**, 1979, p. 1-15.

[7] I. EKELAND, Discontinuité de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations, *Inst. Hautes Études Sci. Publi. Math.*, vol. **47**, 1977, p. 5-32.

[8] G. AUBERT et R. TAHRAOUI, Théorèmes d'existence en optimisation non convexe, *Appl. Anal.*, vol. **18**, 1984, p. 75-100.

[9] P. MARCELLINI, A Relation Between Existence of Minima for Non Convex Integrals and Uniqueness for Non Strictly Convex Integrals of the Calculus of Variations, *Proceeding of Congress on Mathematical Theories of Optimization; Lecture Notes in Mathematics*, n° 979, p. 216-231 (Berlin : Springer, 1983).

[10] J. P. RAYMOND, Théorème d'existence pour des problèmes variationnels non convexes, *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh*, vol. **107** A, 1987, p. 43-64.

[11] E. MASCOLO et R. SCHIANCHI, Existence Theorems in the Calculus of Variations, *J. Differential Equations*, vol. **67**, n° 2, 1987.

[12] E. MASCOLO et R. SCHIANCHI, Existence Theorems for Non Convex Problems, *J. Math. Pures Appl.*, vol. **62**, 1983, p. 349-359.

[13] R. TAHRAOUI, Théorèmes d'existence en calcul des variations et applications à l'élasticité non linéaire, *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh*, vol. **109** A, 1988, p. 51-78.

[14] P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA, On Some Non-Linear Elliptic Differential-functional Equations, *Acta Mathematica*, vol. **115**, 1966, p. 271-310.

[15] J. P. AUBIN et I. IKELAND, *Applied Nonlinear Analysis*, Edit John Wiley and Sons, New York, 1984.

[16] G. AUBERT et R. TAHRAOUI, Sur quelques résultats d'existence en optimisation non convexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **297**, série I, 1983, p. 287-290.

[17] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press.

[18] G. STAMPACCHIA, On Some Regular Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations, *C.P.A.M.*, vol. **XVI**, 1963, p. 383-421.

[19] A. VISINTIN, Strong Convergence Results Related to Strict Convexity, *Com. in partial differential equations*, vol. **9**, (5), 1984, p. 439-466.

[20] R. TAHRAOUI, Régularité de la solution d'un problème variationnel et application, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **305**, série I, 1987, p. 327-330.

[21] G. AUBERT et R. TAHRAOUI, Sur quelques résultats d'existence en optimisation non convexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **297**, série I, 1983, p. 287-290.
[22] R. TAHRAOUI, Travail en préparation.
[23] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.
[24] P. MARCELLINI, Alcune osservazioni sull' esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità, *Rendiconti Mat.*, t. 13, 1980, p. 271-281.
[25] P. MARCELLINI, Regularity of Minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions, *Arch. Rat. Mech. An.*, vol. **105**, n° 3, 1989, p. 267-284.
[26] P. MARCELLINI, Approximation of quasiconvex functions, and lower semicontinuity of multiple integrals, *Manuscripta Math.*, vol. **51**, 1985, p. 1-28.
[27] R. TAHRAOUI, Régularité de la solution d'un problème variationnel, *Cahiers du Ceremade*, n° 9006.

(*Manuscrit reçu le* 10 *février* 1990;
révisé le 3 *décembre* 1990.)