

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

G. AUBERT

## Sur une équation quasilinéaire d'ordre 2 non elliptique

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 8, n° 1 (1991), p. 17-41

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPC\\_1991\\_\\_8\\_1\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1991__8_1_17_0)

© Gauthier-Villars, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur une équation quasilineaire d'ordre 2 non elliptique

par

**G. AUBERT**

I.U.T. de Nice, 41, boulevard Napoléon-III,  
06041 Nice, France

---

RÉSUMÉ. — On prouve l'existence, pour des données petites, d'une solution régulière pour le problème quasilineaire :

$$-\operatorname{div}(\operatorname{D}g(\operatorname{D}u)) + F(x, u) = 0, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On ne fait aucune hypothèse d'ellipticité sur  $g$ ; nous supposons simplement que  $g$  est la différence de deux fonctions strictement convexes.

*Mots clés* : Equations quasilineaires, calcul des variations, théorèmes du point fixe.

ABSTRACT. — We prove, for small data, the existence of a regular solution for the quasilinear problem:

$$-\operatorname{div}(\operatorname{D}g(\operatorname{D}u)) + F(x, u) = 0, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

We do not assume any condition of ellipticity on  $g$ ; only we suppose that  $g$  is the difference of two strictly convex functions.

*Key words* : Quasilinear equations, calculus of variations, fixed point theorems.

---

*Classification A.M.S.* : 35 B.

## 1. INTRODUCTION

Dans ce travail on se propose de démontrer l'existence d'une solution pour le problème aux limites :

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} A(Du) + F(x, u) &= 0 \\ u &\in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné, régulier, de  $\mathbb{R}^N$  et où  $A$  est le gradient d'une fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ .

Le problème (1.1), ou des variantes de celui-ci a déjà été étudié par de nombreux auteurs. Nous renvoyons aux livres de Gilbarg-Trudinger [1], Ladyzenskaya-Uralceva [2], Morrey Jr [3] pour une étude générale de ce type d'équations. Citons également quelques résultats plus récents sur le sujet : Webb [4], Boccardo-Murat-Puel ([5], [6]).

Ces différents travaux ont abordé les questions d'existence, de régularité (estimations  $L^\infty$ , continuité holdérienne, principe du maximum, . . .) sous une hypothèse essentielle : l'ellipticité de l'opérateur  $A$ ; les contributions des auteurs précités portant surtout sur divers comportements de la fonction  $F$ .

Dans ce papier on étudie le problème (1.1) sous aucune hypothèse d'ellipticité. Plus précisément on démontre l'existence de solutions pour des problèmes variationnels du type :

$$\begin{aligned} -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial t_i}(Du) \right) + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) &= 0 \\ u &\in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $g$  n'est pas supposée convexe et de ce fait l'équation quasilinear (1.2) n'est pas elliptique.

Notons que (1.2) correspond formellement à l'équation d'Euler du problème du calcul des variations

$$\operatorname{Inf} \left\{ \int_{\Omega} (g(Du) + h(x, u)) dx; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}. \quad (1.3)$$

Le problème (1.3) peut ne pas avoir de solutions mais ceci n'exclut pas, *a priori*, la solvabilité de (1.2). Pour l'étude de problèmes du type (1.3) nous renvoyons le lecteur à Aubert-Tahraoui ([7], [8]), Raymond [9], Mascolo-Schianchi ([10], [11]).

## 2. PRÉLIMINAIRES

$\Omega$  sera un ouvert régulier, borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désignera l'espace de Sobolev des fonctions réelles  $u$  appartenant à  $L^p(\Omega)$ , nulles sur le bord

de  $\Omega$ , dont les dérivées distributions  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  sont des éléments de  $L^p(\Omega)$  pour  $i = 1, N$ .

On notera :

$|t|$  la norme euclidienne d'un vecteur  $t \in \mathbb{R}^l$  et  $ty$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^l$ .

$|u|_p$  la norme  $L^p$  d'une fonction  $u \in L^p(\Omega)$ .

$Du(x)$  le vecteur gradient de  $u$  au point  $x$ , de composantes  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ .

$D^2 u(x)$  la matrice hessienne de  $u$  au point  $x$ . On assimilera  $D^2 u(x)$  à un vecteur de  $\mathbb{R}^{N \times N}$ .

$\text{mes } \Omega$  la mesure de  $\Omega$ ,  $\text{diam } \Omega$  le diamètre de  $\Omega$ .

On notera systématiquement  $c_i$  toute constante dépendant de  $\Omega$ .

L'idée directrice pour démontrer l'existence d'une solution pour le problème (1.2) est la suivante. On suppose  $g$  de classe  $C^2$ , ce qui implique selon un résultat de Hartmann [12] que  $g$  peut se décomposer comme différence de deux fonctions strictement convexes, régulières, *i. e.*

$$g = g_1 - g_2 \quad (2.1)$$

où  $g_i$  sont des fonctions strictement convexes et de classe  $C^2$ .

Ainsi décomposé le problème (1.2) s'écrit.

$$\begin{aligned} -\text{div}(Dg_1(Du)) + \text{div}(Dg_2(Du)) + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) = 0 \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Puisque  $g_2$  est une fonction convexe

$$g_2(t) = \sup_{\mathbb{R}} (ty - g_2^*(y)) \quad (2.3)$$

où  $g^*$  désigne la fonction polaire de  $g$ . D'autre part (2.2) peut être considérée, formellement, comme l'équation d'Euler du problème

$$\text{Inf} \left\{ \int_{\Omega} (g_1(Du) - g_2(Du) + h(x, u)) dx; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}. \quad (2.4)$$

L'écriture (2.3) de  $g_2$  nous suggère de définir la famille de fonctionnelles

$$J_q(u) = \int_{\Omega} (g_1(Du) - q Du + h(x, u)) dx$$

où  $q \in (L^{p'}(\Omega))^N$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ .

Pour tout  $q$  on montrera que le problème

$$\text{Inf} \{ J_q(u); u \in W_0^{1,p}(\Omega) \}$$

admet une unique solution  $u_q$  vérifiant

$$-\text{div}(Dg_1(Du_q)) + \text{div } q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) = 0. \quad (2.5)$$

Considérons l'application T

$$q \rightarrow \text{D}g_2(\text{D}u_q) = \text{T}(q).$$

Si cette application admet un point fixe  $q_0$  alors il est clair que  $u_{q_0}$  est une solution de (2.2).

La question principale pour résoudre ce dernier point est de déterminer un bon ensemble pour lequel on puisse appliquer le théorème du point fixe de Schauder; bon dans le sens où la compacité de l'application T se démontre sans problème, la difficulté étant le passage à la limite dans l'intégrale

$$\int_{\Omega} q_n \text{D}u_{q_n} dx$$

lorsque  $(q_n, u_{q_n})$  tend faiblement vers  $(q_0, u_0)$  dans  $(L^{p'}(\Omega))^N \times W_0^{1,p}(\Omega)$  cette difficulté disparaît si  $\text{div } q_n$  est borné dans un certain  $L^\gamma(\Omega)$ ; d'où le choix de l'ensemble de définition du paramètre  $q$

$$q \in E = \{q \in (L^{p'}(\Omega))^N, \text{div } q \in L^\gamma(\Omega), |q|_{p'} \leq M_1 \text{ et } |\text{div } q|_\gamma \leq M_2\}$$

où  $M_1, M_2$  et  $\gamma$  sont des réels que l'on précisera plus loin.

Ce procédé permet de contourner le problème de la compacité de T mais la difficulté demeure dans la preuve de l'inclusion

$$\text{T}(E) \subseteq E. \tag{2.6}$$

La vérification de (2.6) demandera un calcul important d'estimations *a priori* basées sur des travaux de Stampacchia [13] et Hartmann-Stampacchia [14].

Dans le paragraphe suivant on démontrera l'existence d'une solution pour le problème (2.5) à  $q$  fixé. Dans le paragraphe 4 on établira des estimations  $L^\infty$  pour  $u_q$  et  $\text{D}u_q$  en fonction des normes  $|\text{div } q|_\gamma$  et  $\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_\gamma$ . On démontrera également une estimaton  $W^{2,\alpha}(\Omega)$  basée sur l'inégalité de Calderon-Zygmund. Enfin dans le paragraphe 5 on déduira des calculs précédents l'existence d'un point fixe pour l'application T, et ainsi la mise en évidence d'une solution pour le problème (1.2).

Le type de résultats que nous obtiendrons peut se résumer formellement ainsi : il existe un ouvert borné  $\Omega_0$  tel que pour tout ouvert  $\Omega \subset \Omega_0$  le problème :

$$\begin{aligned} -\text{div}(\text{D}g_1(\text{D}u) - \text{D}g_2(\text{D}u)) + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u &\in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

admette au moins une solution.

### 3. EXISTENCE D'UNE SOLUTION DE (2.5) A $q$ FIXÉ

Dans ce paragraphe on démontre, pour tout  $q \in (L^{p'}(\Omega))^N$ , l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème

$$\text{Inf} \{ J_q(v), v \in W_0^{1,p}(\Omega) \} \quad (3.1)$$

où

$$J_q(v) = \int_{\Omega} (g_1(Dv) - q Dv + h(x, v)) dx.$$

**HYPOTHÈSES.** — On suppose :

H1. (i)  $g_1: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe, de classe  $C^2$ .

(ii)  $g_1(0) = 0$  et  $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  la fonction  $x \rightarrow g_1(Dv(x))$  appartient à  $L^1(\Omega)$ .

(iii) Il existe des constantes  $a_i > 0$  telles que  $\forall t \in \mathbb{R}^N$

$$g_1(t) \geq a_1 |t|^p \quad (3.2)$$

$$|Dg_1(t)| \leq a_2 + a_3 |t|^{p-1} \quad (3.3)$$

$$|D^2 g_1(t)| \leq a_4 |t|^{p-2} \quad (3.4)$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_1(t)}{\partial t_i \partial t_j} n_i n_j \geq a_5 |n|^2, \quad \forall n \in \mathbb{R}^N. \quad (3.5)$$

H2. (i) p. p.  $x \in \Omega$ , la fonction  $u \rightarrow h(x, u)$  est convexe et de classe  $C^1$ .

(ii)  $\forall v \in L^p(\Omega)$ , la fonction  $x \rightarrow h(x, v(x))$  appartient à  $L^1(\Omega)$ .

(iii) Il existe des constantes  $b_i > 0$  telles que  $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right| \leq b_1 + b_2 |u|^{r-1}. \quad (3.6)$$

H3. (i)  $2 \leq p$ .

(ii)  $1 \leq r \leq p$ .

**THÉORÈME (3.1).** — *Sous les hypothèses H1 à H3 le problème (3.1) admet une unique solution  $u_q$  pour tout  $q \in (L^{p'}(\Omega))^N$ . De plus  $u_q$  vérifie*

$$-\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(Du_q) \right) + \text{div } q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) = 0. \quad (3.7)$$

*Preuve.* — La démonstration est classique. On remarquera que la fonctionnelle  $J_q$  est semi-continue inférieure faible sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  puisque  $g_1$  est convexe et continue et que l'application

$$u \rightarrow \{u \rightarrow h(x, u(x))\}$$

est continue de  $L^p(\Omega)$  dans  $L^1(\Omega)$  grâce à H2 (ii). Pour conclure il suffit de borner dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  les suites minimisantes.

Soit  $v_n$  une telle suite. Grâce à (3.2) on a

$$a_1 |Dv_n|_p^p - \int_{\Omega} q Dv_n dx + \int_{\Omega} h(x, v_n) dx \leq k$$

où  $k$  est une constante universelle.

Puisque  $h(x, \cdot)$  est convexe et de classe  $C^1$

$$h(x, v_n) \geq h(x, 0) + v_n \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0)$$

d'où

$$a_1 |Dv_n|_p^p \leq k + \int_{\Omega} q Dv_n dx - \int_{\Omega} h(x, 0) dx - \int_{\Omega} v_n \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) dx$$

ce qui entraîne, avec l'inégalité de Poincaré, l'existence d'une constante  $c' = c'(q, \Omega)$  telle que

$$a_1 |Dv_n|_p^p \leq k' + c' |Dv_n|_p.$$

Cette dernière inégalité implique que la suite  $v_n$  est bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et donc qu'il existe une sous-suite notée encore  $v_n$  et  $u_q$  telle que

$$\lim v_n = u_q \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ faible}$$

$v_n$  étant aussi minimisante, il en résulte, grâce à la semi-continuité inférieure faible de  $J_q$  que

$$\lim J_q(v_n) = J_q(u_q) = \text{Inf } J_q.$$

De plus ce minimum est unique car  $J_q$  est strictement convexe. Quant à l'équation d'Euler (3.7) il suffit de remarquer que son écriture est justifiée par les hypothèses (3.3) et (3.6). ■

#### 4. ESTIMATIONS A PRIORI

Dans cette section on donne des estimations  $L^\infty$  de  $u_q$  et  $Du_q$  ainsi qu'une estimation  $L^p$  pour  $D^2 u_q$ . Notre référence sera, pour cela, l'article de Stampacchia [13] sur la régularité de certains problèmes du calcul des variations. Les calculs sont techniques mais maintenant classiques et nous les reproduisons ici dans un souci de commodité mais également dans le but de préciser les bornes de certaines constantes intervenant dans les majorations.

Nous aurons besoin par la suite des deux lemmes suivants dus à Stampacchia [13].

LEMME 4.1. — Soit  $\Phi(t)$  une fonction non négative, non croissante pour  $t \geq k_0$  telle que pour  $h > k > k_0$

$$\Phi(h) \leq \frac{C}{(h-k)} \alpha |\Phi(k)|^\beta$$

où  $C, \alpha$  sont des constantes non négatives et  $\beta > 1$ . Alors

$$\Phi(k_0 + d) = 0$$

où

$$d^\alpha = C (\Phi(k_0))^{\beta-1} \frac{\beta^{\alpha\beta/(\beta-1)}}{(\beta-1)^\alpha} \quad \blacksquare$$

LEMME 4.2. — Soient  $a_{ij}(x)$  des fonctions mesurables et bornées sur  $\Omega$  telles que

$$\sum a_{ij}(x) n_i n_j \geq \alpha |n|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall n \in \mathbb{R}^N$$

et soit  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - f_j \right) \frac{\partial v}{\partial v_j} dx \leq 0 \quad (\geq 0), \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad v \geq 0$$

où les fonctions  $f_j$  appartiennent à  $L^\gamma(\Omega)$ ,  $j=1, \dots, n$ ;  $\gamma > N$ , alors il existe une constante  $K$  dépendant de  $\gamma$  et  $N$  telle que

$$u(x) \leq \text{Max}_{\partial\Omega} u + \frac{K}{\alpha} \sum |f_i|_\gamma (\text{mes } \Omega)^{1/N-1/\gamma}$$

$$\left( u(x) \geq \text{Min}_{\partial\Omega} u - \frac{K}{\alpha} \sum |f_i|_\gamma (\text{mes } \Omega)^{1/N-1/\gamma} \right) \quad \blacksquare$$

Nous utiliserons également les deux inégalités de Sobolev sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$|u|_\infty \leq K(N, p) (\text{mes } \Omega)^{1/N-1/p} |Du|_p \quad \text{si } p > N$$

$$|u|_{p^*} \leq S(N, p) |Du|_p \quad \text{si } p < N$$

où  $p^*$  est le réel défini par  $1/p^* = 1/p - 1/N$ .  $\blacksquare$

Nous commençons par donner une estimation  $L^p$  de  $u_q$  l'unique solution du problème (3.1).

PROPOSITION 4.3. — Il existe une constante  $c_1 = c_1(N, p, \text{mes } \Omega)$  telle que pour tout  $q \in L^{p'}(\Omega)^N$  on ait

$$|Du_q|_p^p \leq c_1 \left( |\text{div } q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{p'} \right)^{p'}. \quad (4.1)$$



*Preuve.* — Puisque  $u_q$  est la solution du problème (3.1) on a, pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g_1(Du_q) - q Du_q + h(x, u_q)) dx \\ \leq \int_{\Omega} (g_1(Dv) - q Dv + h(x, v)) dx. \end{aligned}$$

On choisit  $v=0$  et en tenant compte que  $g_1(0)=0$  et que

$$h(x, u_q) \geq h(x, 0) + u_q \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0)$$

on obtient

$$\int_{\Omega} g_1(Du_q) \leq \left( |\operatorname{div} q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right| \right) |u_q|_p$$

soit avec (3.2)

$$a_1 |Du_q|_p^p \leq \left( |\operatorname{div} q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right| \right) |u_q|_p$$

et avec l'inégalité de Young

$$a_1 |Du_q|_p^p \leq \frac{\varepsilon^p}{p} |u_q|_p^p + \frac{1}{p'} \varepsilon^{p'} \left( |\operatorname{div} q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right| \right)^{p'}$$

or grâce à l'inégalité de Poincaré

$$|u_q|_p \leq \left( \frac{\operatorname{mes} \Omega}{w_N} \right)^{1/N} |Du_q|_p$$

( $w_N$  : mesure de la sphère unité de  $\mathbb{R}^N$ ) d'où

$$\left( a_1 - \frac{\varepsilon^p}{p} \operatorname{mes} \Omega^{p/N} w_N^{-p/N} \right) |Du_q|_p^p \leq \frac{1}{p'} \varepsilon^{p'} \left( |\operatorname{div} q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right| \right)^{p'}$$

on choisit  $\varepsilon$  tel que

$$\frac{a_1}{2} = \frac{\varepsilon^p}{p} \operatorname{mes} \Omega^{p/N} w_N^{-p/N}$$

ce qui entraîne

$$|Du_q|_p^p \leq c_1 \left( |\operatorname{div} q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right| \right)^{p'} \quad (4.1)$$

avec

$$c_1 = \frac{2}{a_1 p'} (\operatorname{mes} \Omega / w_N)^{p'/N} \left( \frac{p a_1}{2} \right)^{-p'/p} \quad \blacksquare \quad (4.2)$$

On déduit aisément de la proposition 4.3 une estimation  $L^\infty$  pour  $u_q$  lorsque  $p > N$ . En effet grâce à l'inégalité de Sobolev pour le cas  $p > N$  on a

$$|u_q|_\infty \leq K(N, p) (\text{mes } \Omega)^{1/N-1/p} |Du_q|_p$$

d'où avec (4.1)

$$|u_q|_\infty \leq c_2(N, p, \text{mes } \Omega) \left( |\text{div } q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{p'} \right)^{p'/p} \quad (4.3)$$

avec

$$c_2 = c_1^{1/p} K(N, p) (\text{mes } \Omega)^{1/N-1/p}. \quad (4.4)$$

Pour le cas  $p \leq N$  on obtiendrait le même type d'estimations en utilisant les techniques de Stampacchia [13], théorème 6.2. Dans un souci de simplification et pour ne pas donner un caractère trop répétitif aux démonstrations nous omettons ce cas là et nous n'exposerons par la suite que le cas  $p > N$ .

Il est important de remarquer que, dans la constante  $c_2$  de l'inégalité (4.3), intervient explicitement la mesure de  $\Omega$  avec une puissance positive.

On se propose maintenant d'obtenir une estimation  $L^\infty$  pour  $Du_q$ . Toujours en suivant Stampacchia [13] on suppose

$$\Omega \text{ est uniformément convexe et de classe } C^{1,1} \quad (4.5)$$

et, pour l'instant

$$(4.6) \quad u_q \in C^1(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega).$$

Soit  $x_0 \in \partial\Omega$ ; pour  $k > 0$  on note

$$\lambda_k(x) = k \delta(x)$$

où  $\delta(x)$  est la distance d'un point  $x$  à l'hyperplan tangent à  $\partial\Omega$  au point  $x_0$ . Quitte à faire un changement de repère, on peut supposer  $\lambda_k$  linéaire et

$$D\lambda_k = \tilde{k} = (k_1, \dots, k_N) \quad \text{avec} \quad \sum_i k_i^2 = k.$$

Enfin on note

$$\gamma_0 = \text{Sup}(N(N+1)/2, p') \quad (4.7)$$

et on suppose pour la suite

$$(4.8) \quad \text{div } q \in L^\gamma(\Omega), \quad \gamma > \gamma_0.$$

**PROPOSITION 4.4.** — *Sous les hypothèses précédentes il existe des constantes  $c_3, c_4, c_5$  telles que*

$$|Du_q|_\infty \leq c_3 |\text{div } q|_\gamma + c_4 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_\gamma + c_5 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_\gamma$$

avec  $c_i = c_i(N, p, \Omega, a_5)$ ,  $i = 3, 4, 5$ .

*Preuve.* — La démonstration se fait en deux étapes. Pour simplifier on note  $u$  pour  $u_q$ .

*Étape 1.* — On va d'abord montrer  $u(x) \leq \lambda_d(x)$  pour un certain  $d$ .

On reprend l'inégalité définissant  $u = u_q$

$$\int_{\Omega} (g_1(Du) + u \operatorname{div} q + h(x, u)) dx \leq \int_{\Omega} (g_1(Dv) + v \operatorname{div} q + h(x, v)) dx.$$

On choisit

$$v = u_k = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) \leq \lambda_k(x) \\ \lambda_k(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ; on note

$$A_k = \{x \in \Omega / u(x) \geq \lambda_k(x)\}.$$

Avec ce choix de  $v$  on obtient

$$\int_{A_k} (g_1(Du) - g_1(\tilde{k})) dx \leq \int_{A_k} (h(x, \lambda_k) - h(x, u)) dx + \int_{A_k} \operatorname{div} q (\lambda_k - u) dx.$$

Or puisque  $h(x, \cdot)$  est convexe,  $\lambda_k \geq 0$  et  $u - \lambda_k \geq 0$  sur  $A_k$ , on a pour tout  $x \in A_k$

$$h(x, u) - h(x, \lambda_k) \geq (u - \lambda_k) \frac{\partial h}{\partial u}(x, \lambda_k) \geq (u - \lambda_k) \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0)$$

d'où

$$\int_{A_k} (g_1(Du) - g_1(\tilde{k})) dx \leq \int_{A_k} \left( \operatorname{div} q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right) (\lambda_k - u) dx.$$

En utilisant l'hypothèse d'ellipticité (3.5) et en remarquant que

$$\int_{A_k} Dg_1(\tilde{k})(Du - \tilde{k}) dx = 0$$

il vient

$$a_5 \int_{A_k} |Du - \tilde{k}|^2 dx \leq \int_{A_k} L(x) (\lambda_k - u) dx$$

où on a noté

$$L(x) = \operatorname{div} q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0).$$

Avec l'inégalité de Sobolev on déduit

$$a_5 \left( \int_{A_k} |u - \lambda_k|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq S^2 |L|_{\gamma} |u - \lambda_k|_{\gamma}$$

où  $1/2^* = 1/2 - 1/N$  et  $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$  d'où avec l'inégalité de Hölder

$$\left( \int_{A_k} |u - \lambda_k|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \frac{S^2}{a_5} |L|_\gamma \left( \int_{A_k} |u - \lambda_k|^{2^*} \right)^{1/2^*} (\text{mes } A_k)^{1-1/2^*-1/\gamma}. \quad (4.9)$$

Si  $h > k$  on a

$$(h-k)^{2^*} \int_{A_h} |\delta(x)|^{2^*} dx = \int_{A_h} |\lambda_h - \lambda_k|^{2^*} dx \leq \int_{A_h} |u - \lambda_k|^{2^*} dx \leq \int_{A_k} |u - \lambda_k|^{2^*} dx. \quad (4.10)$$

D'autre part soit  $\theta < 2^*$  alors

$$\text{mes } A_k = \int_{A_k} |\delta(x)|^\theta \frac{1}{|\delta(x)|^\theta} dx \leq \left( \int_{A_k} |\delta(x)|^{2^*} dx \right)^{\theta/2^*} \left( \int_{A_k} |\delta(x)|^{-\theta(2^*/\theta)'} dx \right)^{1-\theta/2^*}$$

où

$$1/(2^*/\theta)' = 1 - \theta/2^*. \quad (4.11)$$

Un calcul simple montre que la convergence de la deuxième intégrale dans l'inégalité ci-dessus est assurée si

$$\theta(2^*/\theta)' < (N+1)/2.$$

On choisit donc  $\theta$  tel que

$$\theta(2^*/\theta)' < (N+1)/2 \quad \text{et} \quad \theta(1 - 1/\gamma - 1/2^*) > 1.$$

Un tel choix est possible car

$$\gamma > N(N+1)/2.$$

En combinant les inégalités (4.9) et (4.10) il vient

$$(h-k) \left( \int_{A_h} |\delta(x)|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \leq D \left( \int_{A_k} |\delta(x)|^{2^*} dx \right)^{\theta/2^* (1-1/2^*-1/\gamma)}$$

où

$$D = \frac{S^2}{a_5} \left( \int_{\Omega} |\delta(x)|^{-\theta(2^*/\theta)'} dx \right)^{(1-\theta/2^*)(1-1/2^*-1/\gamma)} |L|_\gamma.$$

Si on pose

$$\Phi(h) = \left( \int_{A_h} |\delta(x)|^{2^*} dx \right)^{1/2^*}$$

$\Phi$  vérifie les hypothèses de lemme 4.1 avec  $k_0=0$ ,  $\alpha=1$  et  $\beta=\theta(1-1/2^*-1/\gamma) > 1$  et il existe donc un réel

$$d = D \left( \int_{A_0} |\delta(x)|^{2^*} dx \right)^{1/2^* (\beta-1)} \frac{\beta^{\beta/(\beta-1)}}{\beta-1}$$

tel que

$$\Phi(d) = 0 \quad \text{i. e. } u(x) \leq \lambda_d(x) \text{ p. p. } x \in \Omega$$

de même on montrerait l'existence d'un réel  $d'$  tel que

$$u(x) \geq \lambda_{d'}(x) \text{ p. p. } x \in \Omega$$

ce qui est équivalent à  $|u(x)| \leq \lambda_{d''}(x)$  où  $d'' = \text{Max}(d, d')$ .

Puisque  $u$  est supposée de classe  $C^1$ , nous avons en  $x_0$

$$|Du(x_0)| \leq d''.$$

Mais  $x_0$  est un point quelconque de  $\partial\Omega$  et  $d$  est indépendant de  $x_0$  d'où

$$\text{Max } |Du(x)| \leq d''. \quad (4.12)$$

*Étape 2.* — On applique le principe du maximum pour montrer que  $Du \in L^\infty(\Omega)$ . Puisque  $u = u_q$  minimise  $J_q$  il vient, en écrivant l'équation d'Euler associée et en posant  $p_s = \frac{\partial u}{\partial x_s}$

$$\sum \int_{A_h} \left( \frac{\partial g_1}{\partial t_i \partial t_j} (Du) \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left( \text{div } q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right) \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) dx = 0$$

pour tout  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  ce qui implique avec (4.12) et le lemme 4.2 l'existence d'une constante  $K(N, \gamma)$  telle que

$$|Du|_\infty \leq d'' + \frac{K}{a_5} \left| \text{div } q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_\gamma (\text{mes } \Omega)^{1/N-1/\gamma}. \quad (4.13)$$

La constante  $d''$  qui est explicite peut se majorer en fonction de puissance positive du diamètre de  $\Omega$  et de  $|L|_\gamma = \left| \text{div } q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_\gamma$  si bien que (4.13) peut s'écrire sous forme plus simplifiée

$$|Du|_\infty \leq c_3 | \text{div } q |_\gamma + c_4 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_\gamma + c_5 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_\gamma$$

où les constantes  $c_i$  dépendent explicitement de la mesure de  $\Omega$ , du diamètre de  $\Omega$  et de la constante d'ellipticité  $a_5$ . De plus  $c_i \rightarrow 0$  si  $\text{mes } \Omega$  et  $\text{diam } \Omega \rightarrow 0$ . ■

Dans le théorème précédent nous avons supposé la régularité

$$u_q \in C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega).$$

Cette régularité de la solution  $u_q$  est en effet vérifiée, grâce aux résultats de Stampacchia [13] ou Hartmann-Stampacchia [14] (cf. également Gilbarg-Trudinger [1]). On a même mieux : si  $\Omega$  est de classe  $C^{1,1}$  et si  $\operatorname{div} q \in L^\gamma(\Omega)$  alors

$$u_q \in W^{2,\gamma}(\Omega) \cap C^{1,1}(\bar{\Omega})$$

et au sens des distributions

$$\sum \frac{\partial^2 g_1}{\partial t_i \partial t_j} (Du_q) \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \operatorname{div} q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \quad (4.14)$$

c'est-à-dire une équation de la forme

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f. \quad (4.15)$$

(4.14) peut donc être considérée comme une équation linéaire du 2<sup>e</sup> ordre, uniformément elliptique, à coefficients continus dont le second membre appartient à  $L^\gamma(\Omega)$ . On sait alors que la solution de ce type de problème vérifie une inégalité dite de Calderon-Zygmund :

$$|D^2 u_q|_\gamma \leq K (|f|_\gamma + |u_q|_\gamma + |Du_q|_\gamma) \quad (4.16)$$

où  $K$  dépend de  $N, \gamma, \Omega$  mais aussi des coefficients  $a_{ij}$ , notamment de  $|a_{ij}|_\infty$  et de leurs modules de continuité (cf. par exemple Gilbarg-Trudinger [1] ou Agmon-Douglis-Nirenberg [15]).

Dans notre cas une estimation de  $K$ , comme on le verra par la suite, est fondamentale. Mais la maîtrise des coefficients  $a_{ij}$  est délicate, en particulier celle de leurs modules de continuité. Pour cela nous avons été amené à étudier en détails (4.16). Sa démonstration nécessite plusieurs étapes. On commence par la démontrer lorsque l'opérateur elliptique dans (4.15) est le laplacien; et c'est ici le point difficile car il faut utiliser la théorie des intégrales singulières due à Calderon-Zygmund. Puis on démontre (4.16) pour un opérateur à coefficients constants. L'étape suivante consiste à justifier (4.16) localement c'est-à-dire pour tout ouvert  $\Omega'$  strictement inclus dans  $\Omega$  et enfin on assure sa validité jusqu'au bord en utilisant des cartes locales. On renvoie à Gilbarg-Trudinger [1] pour plus de détails.

Comme il a été dit plus haut nous aurons besoin d'une évaluation de la constante  $K$ . Il nous a fallu, pour cela, revoir et adapter la démonstration de l'inégalité de Calderon-Zygmund.

Soit  $\Omega'$  un ouvert strictement inclus dans  $\Omega$  et soit  $x_0 \in \Omega'$ . On note

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i \partial x_j} (Du_q(x))$$

$$D_{ij}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

et  $L_0$  l'opérateur à coefficients constants

$$L_0 u = \sum a_{ij}(x_0) D_{ij} u.$$

La deuxième étape de la démonstration de l'inégalité de Calderon-Zygmund permet d'affirmer qu'il existe une constante  $k(N, \gamma)$  telle que

$$|D^2 v|_\gamma \leq \frac{k}{a_5} |L_0 v|_\gamma \quad (4.17)$$

pour tout  $v \in W_0^{2, \gamma}(\Omega)$ , où  $a_5$  est la constante d'ellipticité associée à  $g_1$ .

LEMME 4.5. — Soit  $v \in W_0^{2, \gamma}(\Omega)$ , alors

$$|D^2 v|_\gamma \leq \frac{2k}{a_5} \left| \sum a_{ij}(x) D_{ij} v \right|_\gamma \quad (4.18)$$

si

$$|Du_q|_\infty^{p-2} \leq \frac{a_5}{4 a_4 k} \quad (4.19)$$

où  $a_4$  est la constante intervenant dans l'hypothèse (3.4) de croissance sur le hessien de  $g_1$ .

*Preuve.* — On reprend l'inégalité (4.17)

$$|D^2 v|_\gamma \leq \frac{k}{a_5} |L_0 v|_\gamma$$

$L_0$  peut s'écrire

$$L_0 v = \sum (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} v + \sum a_{ij}(x) D_{ij} v$$

d'où

$$|L_0 v|_\gamma \leq 2 \sum |a_{ij}|_\infty |D_{ij} v|_\gamma + \left| \sum a_{ij} D_{ij} v \right|_\gamma.$$

Mais avec l'hypothèse (3.4)

$$|a_{ij}|_\infty = \left| \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i \partial x_j} (Du_q) \right|_\infty \leq |D^2 g_1 (Du_q)|_\infty \leq a_4 |Du_q|_\infty^{p-2}$$

ce qui entraîne avec (4.17)

$$|D^2 v|_\gamma \leq \frac{k}{a_5} (2 a_4 |Du_q|_\infty^{p-2} |D^2 v|_\gamma + \left| \sum a_{ij} D_{ij} v \right|_\gamma)$$

soit

$$\left( 1 - \frac{2 a_4 k}{a_5} |Du_q|_\infty^{p-2} \right) |D^2 v|_\gamma \leq \frac{k}{a_5} \left| \sum a_{ij} D_{ij} v \right|_\gamma$$

si on impose

$$1 - \frac{2a_4 k}{a_5} |Du_q|_\infty^{p-2} \geq 1/2$$

c'est-à-dire

$$|Du_q|_\infty^{p-2} \leq \frac{a_5}{4a_4 k}$$

alors

$$|D^2 v|_\gamma \leq \frac{2k}{a_5} \left| \sum a_{ij} D_{ij} v \right|_\gamma \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 4.6. — Si  $Du_q$  vérifie (4.19) alors il existe une constante  $c_6(N, \gamma, \Omega, a_4, a_5)$  telle que

$$|D^2 u_q|_\gamma \leq c_6 \left( |\operatorname{div} q|_\gamma + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_\gamma + |Du_q|_\infty^{p-2} (|Du_q|_\gamma + |u_q|_\gamma) \right). \quad (4.20)$$

*Preuve.* — *Étape 1.* — On démontre la proposition pour tout ouvert  $\Omega'$  strictement inclus dans  $\Omega$ .

On se donne  $R > 0$  et vérifiant

$$R < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$$

et soit  $\varphi$  une fonction régulière, à support dans la boule  $B_R(x_0)$ ,  $x_0 \in \Omega'$ , telle que :

- (i)  $0 \leq \varphi \leq 1$ ;
- (ii)  $\varphi = 1$  dans la boule  $B_{R/2}(x_0)$ ;
- (iii)  $\varphi = 0$  pour  $|x| \geq \frac{3R}{4}$ ;
- (iv)  $|D\varphi|_\infty \leq \frac{8}{R}$  et  $|D^2\varphi|_\infty \leq \frac{64}{R^2}$ .

Dans (4.18) on choisit  $v = \varphi u_q$ , il vient, si on note  $\|\cdot\|_{B_R}$  la norme  $L^p$  dans la boule  $B_R$

$$|D^2 u_q|_{B_{R/2}} \leq \frac{2k}{a_5} \sum \left| \varphi a_{ij} D_{ij} u_q + 2a_{ij} D_i \varphi D_j u_q + a_{ij} u_q D_{ij} \varphi \right|_{B_R}$$

soit encore

$$|D^2 u_q|_{B_{R/2}} \leq \frac{2k}{a_5} \left( \left| \operatorname{div} q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{B_R} + \frac{16}{R} \sum |a_{ij}|_\infty |D_j u_q|_{B_R} + \frac{128}{R^2} \sum |a_{ij}|_\infty |u_q|_{B_R} \right).$$



Mais

$$|a_{ij}|_\infty \leq |D^2 g_1(Du_q)|_\infty \leq a_4 |Du_q|_\infty^{p-2}$$

d'où

$$|D^2 u_q|_{B_{R/2}} \leq k' \left( \left| \operatorname{div} q + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{B_R} + |Du_q|_\infty^{p-2} (|Du_q|_{B_R} + |u_q|_{B_R}) \right) \quad (4.21)$$

où

$$k' = \frac{2k}{a_5} \operatorname{Max} \left( 1, \frac{16a_4}{R}, \frac{128}{R^2} N a_4 \right).$$

On obtient l'estimation désirée sur  $\Omega'$  en recouvrant ce dernier par un nombre fini de boules de rayons  $R/2$ .

*Étape 2.* — En procédant par cartes locales, on démontre que l'estimation précédente est vraie jusqu'au bord.

Puisque  $\partial\Omega$  est supposée régulière, pour tout  $x_0 \in \partial\Omega$  il existe un voisinage  $N(x_0)$  et un difféomorphisme  $\psi$  de  $N$  sur la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^N$  tel que

$$\psi(N \cap \Omega) \subseteq \mathbb{R}_+^N \quad \text{et} \quad \psi(N \cap \partial\Omega) \subseteq \partial\mathbb{R}_+^N$$

Écrivant  $y = \psi(x)$ ,  $u'_q(y) = u_q(x)$ ,  $x \in N$ ,  $y \in B$  l'équation (4.14) peut s'écrire sous la forme

$$L' u'_q = \sum a'_{ij} \frac{\partial^2 u'_q}{\partial y_i \partial y_j} = f'$$

où

$$a'_{ij}(y) = \sum \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_s} a_{rs}(x) \quad \text{et} \quad f'(y) = f(x).$$

En procédant comme dans la première étape avec la demi-boule  $B_R^+(0) \subseteq B$  à la place de la boule  $B_R(x_0)$  on obtient une inégalité du type (4.21), et, en sommant sur les cartes locales on démontre la relation cherchée : il existe une constante  $c_6(N, \gamma, \Omega, a_4, a_5)$  telle que

$$|D^2 u_q|_\gamma \leq c_6 \left( |\operatorname{div} q|_\gamma + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_\gamma + |Du_q|_\infty^{p-2} (|Du_q|_\gamma + |u_q|_\gamma) \right).$$

On remarquera que la dépendance de  $c_6$  par rapport au domaine  $\Omega$  est présente par les cartes locales décrivant  $\partial\Omega$  et par le nombre de boules nécessaires pour recouvrir  $\Omega$ . ■

## 5. EXISTENCE D'UNE SOLUTION POUR LE PROBLÈME QUASILINÉAIRE

Nous allons démontrer dans ce paragraphe l'existence d'une solution pour le problème

$$-\operatorname{div}(D(g_1 - g_2)(Du)) + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) = 0 \quad (5.1)$$

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Pour cela on associe à (5.1) la famille de problèmes aux limites

$$-\operatorname{div}(Dg_1(Du_q)) + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) + \operatorname{div} q = 0 \quad (5.2)$$

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

où

$$q \in E = \{q \in L^{p'}(\Omega)^N, \operatorname{div} q \in L^\gamma(\Omega) \mid |q|_{p'} \leq M_1 \text{ et } |\operatorname{div} q|_\gamma \leq M_2\}$$

avec

$$\gamma \geq \operatorname{Sup}(N(N+1)/2, p')$$

et où  $M_1$  et  $M_2$  sont des constantes qui seront précisées plus loin.

Nous avons démontré dans les sections précédentes l'existence et l'unicité de  $u_q$ , sa régularité  $W^{2,\gamma}$ , ainsi que certaines estimations *a priori* pour  $u_q$ ,  $Du_q$ , et  $D^2 u_q$ . Soit maintenant l'application

$$T: q \rightarrow Dg_2(Du_q).$$

Si cette application admet un point fixe  $q_0$  alors  $u_{q_0}$  est une solution de (5.1).

Outre les hypothèses H1, H2 et H3 sur  $g_1$  et  $h$  on suppose H4.

(i)  $g_2: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe et de classe  $C^2$ .

(ii) Il existe des constantes  $a_6, a_7, a_8 > 0$  telles que pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}^N$

$$|Dg_2(t)| \leq a_6 + a_7 |t|^{s-1} \quad (5.3)$$

$$|D^2 g_2(t)| \leq a_8 |t|^{s-2} \quad (5.4)$$

$$2 < s < p. \quad (5.5)$$

L'existence d'un point fixe pour  $T$  nécessite plusieurs calculs préliminaires.

**LEMME 5.1.** — *Sous les hypothèses précédentes il existe une constante  $M_1$  telle que*

$$|q|_{p'} \leq M_1$$

*entraîne*

$$|Dg_2(Du_q)|_{p'} \leq M_1.$$

*Preuve.* — Avec l'hypothèse (5.3)

$$|\mathbf{D}g_2(\mathbf{D}u_q)| \leq a_6 + a_7 |\mathbf{D}u_q|^{s-1}$$

d'où

$$|\mathbf{D}g_2(\mathbf{D}u_q)|_{p'} \leq a_6 (\text{mes } \Omega)^{1/p'} + a_7 |\mathbf{D}u_q|_{(s-1)p'}^{s-1}.$$

Mais

$$L^p(\Omega) \subset L^{(s-1)p'} \quad \text{si } 2 \leq s < p$$

et donc

$$|\mathbf{D}g_2(\mathbf{D}u_q)|_{p'} \leq a_6 (\text{mes } \Omega)^{1/p'} + a_7 (\text{mes } \Omega)^{(p-1)/p} |\mathbf{D}u_q|_p^{s-1}. \quad (5.6)$$

Il reste à borner  $|\mathbf{D}u_q|_p$  en fonction de  $|q|_{p'}$ . Pour cela on utilise l'inégalité définissant  $u_q$

$$\int_{\Omega} (g_1(\mathbf{D}u_q) - q \mathbf{D}u_q + h(x, u_q)) dx \leq \int_{\Omega} (g_1(\mathbf{D}v) - q \mathbf{D}v + h(x, v)) dx$$

on fait  $v=0$ , il vient avec (3.2)

$$a_1 |\mathbf{D}u_q|_p^p + \int_{\Omega} (h(x, u_q) - h(x, 0)) dx \leq |q|_{p'} |\mathbf{D}u_q|_p$$

mais grâce à la convexité de  $h(x, \cdot)$

$$h(x, u_q) - h(x, 0) \geq u_q \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0)$$

d'où

$$a_1 |\mathbf{D}u_q|_p^p \leq |q|_{p'} |\mathbf{D}u_q|_p + |u_q|_p \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{p'}$$

or avec l'inégalité de Poincaré

$$|u_q|_p \leq (\text{mes } \Omega)^{1/N} w_N^{-1} |\mathbf{D}u_q|_p$$

ce qui entraîne

$$|\mathbf{D}u_q|_p \leq \left( \frac{1}{a_1} \left( |q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{p'} (\text{mes } \Omega)^{1/N} w_N^{-1} \right) \right)^{1/(p-1)}$$

et finalement avec (5.6)

$$|\mathbf{D}g_2(\mathbf{D}u_q)| \leq d_1 + d_2 |q|_{p'}^{(s-1)/(p-1)}$$

où

$$d_1 = a_6 (\text{mes } \Omega)^{1/p'}$$

$$+ a_7 (\text{mes } \Omega)^{(s-1)/((p-1)N) + ((p-s)/p)} w_N^{(1-s)/(p-1)} \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{p'}^{(s-1)/(p-1)}$$

$$d_2 = \frac{a_7 (\text{mes } \Omega)^{(p-s)/p}}{a_1^{(s-1)/(p-1)}}.$$

Si  $|q|_{p'} \leq M_1$ , pour obtenir  $|Dg_2(Du_q)|_{p'} \leq M_1$  il suffit de choisir  $M_1$  tel que

$$d_1 + d_2 M_1^{(s-1)/(p-1)} \leq M_1$$

c'est-à-dire

$$\frac{d_1}{M_1} + d_2 M_1^{((s-1)/(p-1))-1} \leq 1$$

ce qui est toujours possible si  $M_1$  est suffisamment grand puisque grâce à l'hypothèse (5.5)

$$\frac{s-1}{p-1} - 1 < 0 \quad \blacksquare$$

Le choix de  $M_2$  est plus délicat, il nécessite les estimations *a priori* établies précédemment. Nous devons trouver  $M_2$  tel que

$$|\operatorname{div} q|_\gamma \leq M_2$$

entraîne

$$|\operatorname{div}(Dg_2(Du_q))|_\gamma \leq M_2.$$

LEMME 5.2. — Si  $Du_q$  vérifie (4.19) alors il existe des constantes  $c_7, c_8, c_9$  dépendant de la mesure de  $\Omega$  telles que

$$|\operatorname{div}(Dg_2(Du_q))|_\gamma \leq c_6 a_8 |Du_q|_\gamma^{s-2} (|\operatorname{div} q|_\gamma + c_7 + c_8 |Du_q|_\gamma^{r-1} + c_9 |Du_q|_\gamma^{p-1}). \quad (5.7)$$

*Preuve.* — On a vu précédemment que  $u_q \in W^{2,\gamma}(\Omega)$ , ainsi

$$\operatorname{div}(Dg_2(Du_q)) = \sum \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_2}{\partial t_i \partial t_j}(Du_q)$$

d'où

$$|\operatorname{div}(Dg_2(Du_q))|_\gamma \leq |D^2 u_q|_\gamma |D^2 g_2(Du_q)|_\infty$$

soit encore avec l'hypothèse (5.4)

$$|\operatorname{div}(Dg_2(Du_q))|_\gamma \leq a_8 |Du_q|_\infty^{s-2} |D^2 u_q|_\gamma.$$

Si  $Du_q$  vérifie (4.19) alors l'estimation (4.20) sur  $D^2 u_q$  entraîne

$$\begin{aligned} |\operatorname{div}(Dg_2(Du_q))|_\gamma &\leq c_6 a_8 |Du_q|_\infty^{s-2} \left( |\operatorname{div} q|_\gamma + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_\gamma \right. \\ &\quad \left. + |Du_q|_\infty^{p-2} (|Du_q|_\gamma + |u_q|_\gamma) \right) \quad (5.8) \end{aligned}$$

or avec l'hypothèse (3.6) de croissance pour  $\frac{\partial h}{\partial u}(x, \cdot)$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_\gamma \leq b_1 + b_2 |u_q|_\gamma^{r-1}$$

donc, avec l'inégalité de Poincaré

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{\gamma} \leq b_1 (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} + b_2 |u_q|_{(r-1)\gamma}^{r-1}$$

i. e.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{\gamma} &\leq b_1 (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} + b_2 (\text{mes } \Omega)^{(r-1)/N} w_N^{(1-r)/N} |Du_q|_{(r-1)\gamma}^{r-1} \\ \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{\gamma} &\leq b_1 (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} + b_2 (\text{mes } \Omega)^{(r-1)/N} w_N^{(1-r)/N} (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} |Du_q|_{\infty}^{r-1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |u_q|_{\gamma} &\leq (\text{mes } \Omega)^{1/N} w_N^{-1/N} |Du_q|_{\gamma} \\ &\leq (\text{mes } \Omega)^{1/N+1/\gamma} w_N^{-1/N} |Du_q|_{\infty}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Avec (5.9) et (5.10) on déduit de (5.8)

$$\begin{aligned} |\text{div}(Dg_2(Du_q))|_{\gamma} &\leq c_6 a_8 |Du_q|_{\infty}^{s-2} (|\text{div } q|_{\gamma} + c_7 + c_8 |Du_q|_{\infty}^{r-1} + c_9 |Du_q|_{\infty}^{p-1}) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c_7 &= b_1 (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} \\ c_8 &= b_2 (\text{mes } \Omega)^{1/N+1/\gamma} w_N^{-1/N} \\ c_9 &= (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} + (\text{mes } \Omega)^{1/N+1/\gamma} w_N^{-1/N} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 5.3. — Il existe des constantes  $c_3(\Omega)$ ,  $c_4(\Omega)$ ,  $c_{10}(\Omega)$ ,  $c_{11}(\Omega)$  telles que

$$\begin{aligned} |Du_q|_{\infty} &\leq c_{10} + c_3 |\text{div } q|_{\gamma} + c_4 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{\gamma} \\ &\quad + c_{11} \left( |\text{div } q|_{\gamma}^{(r-1)/(p-1)} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{\gamma}^{(r-1)/(p-1)} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

*Preuve.* — Nous avons démontré dans la proposition 4.4 l'estimation

$$|Du_q|_{\infty} \leq c_3 |\text{div } q|_{\gamma} + c_4 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_{\gamma} + c_5 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{\gamma}$$

or avec (3.6)

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{\gamma} \leq b_1 + b_2 |u_q|_{\gamma}^{r-1}$$

d'où

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_{\gamma} \leq b_1 (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} + b_2 (\text{mes } \Omega)^{1/\gamma} |u_q|_{\infty}^{r-1}$$

mais nous avons également démontré l'estimation  $L^\infty$  pour  $u_q$  (estimation 4.3)

$$|u_q|_\infty \leq c_2 \left( |\operatorname{div} q|_{p'} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|^{p'/p} \right)^{p'/p}$$

soit

$$|u_q|_\infty \leq c_2 (\operatorname{mes} \Omega)^{1/p' - 1/\gamma} \left( |\operatorname{div} q|_\gamma^{p'/p} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|^{p'/p} \right)$$

ce qui entraîne

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_q) \right|_\gamma \leq b_1 (\operatorname{mes} \Omega)^{1/\gamma} + b_2 c_2^{r-1} (\operatorname{mes} \Omega)^\nu \left( |\operatorname{div} q|_\gamma^{(r-1)p'/p} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|^{(r-1)p'/p} \right)$$

avec  $\nu = \frac{1}{\gamma} + \frac{(r-1)(\gamma-p')}{\gamma p'}$  d'où l'estimation finale en remarquant que

$$p' = \frac{p}{p-1}$$

$$|Du_q|_\infty \leq c_{10} + c_3 |\operatorname{div} q|_\gamma + c_4 \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|_\gamma + c_{11} \left( |\operatorname{div} q|_\gamma^{(r-1)/(p-1)} + \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|^{(r-1)/(p-1)} \right)$$

où

$$c_{10} = c_5 b_1 (\operatorname{mes} \Omega)^{1/\gamma} \\ c_{11} = c_5 b_2 c_2^{r-1} (\operatorname{mes} \Omega)^\nu.$$

Les constantes  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  étant celles intervenant dans la proposition 4.4,  $c_2$  étant définie par (4.4). ■

Le choix de la constante  $M_2$  découle des inégalités (4.19), (5.7), et (5.11). Ce choix n'est pas unique et il semble difficile de déterminer une valeur optimale. En tous cas il apparaît clairement que la détermination de  $M_2$  est liée à la taille de  $\Omega$ . La proposition suivante établit que  $M_2 = 1$  convient si  $\Omega$  est assez petit.

PROPOSITION 5.4. — *Si le diamètre de  $\Omega$  est suffisamment petit, alors*

$$|\operatorname{div} q|_\gamma \leq 1$$

entraîne

$$|\operatorname{div} (Dg_2(Du_q))|_\gamma \leq 1.$$

*Preuve.* — On pose

$$H = \left| \frac{\partial h}{\partial u}(x, 0) \right|$$

$$K = \left( \frac{a_5}{4 a_4 k} \right)^{1/(p-2)}.$$

Avec les inégalités (4.19), (5.7) et (5.11) il suffit d'imposer

$$|Du_q|_\infty \leq F \leq K$$

avec  $F$  vérifiant

$$c_6 a_8 F^{s-2} (1 + c_7 + c_8 F^{r-1} + c_9 F^{p-1}) \leq 1 \quad (5.13)$$

ainsi que l'inégalité

$$c_{10} + c_3 + c_4 H + c_{11} (1 + H^{(r-1)/(p-1)}) \leq F \quad (5.14)$$

(5.13) est satisfaite si  $F$  est assez petit et (5.14) est vérifiée si le diamètre de  $\Omega$  est également suffisamment petit puisque les constantes  $c_{10}$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  et  $c_{11}$  dépendent explicitement du diamètre de  $\Omega$  (ou de son volume). ■

Ainsi, avec le lemme 5.1 et la proposition 5.4 l'application

$$T: q \rightarrow Dg_2(Du_q)$$

vérifie

$$T(E) \subset E.$$

**PROPOSITION 5.5.** — *Sous les hypothèses H1 à H4 et si  $\Omega$  est suffisamment petit, l'application  $T$  admet un point fixe.*

*Preuve.* — Si

$$E = \{q \in L^{p'}(\Omega)^N, \operatorname{div} q \in L^\gamma(\Omega) \mid |q|_{p'} \leq M_1, |\operatorname{div} q|_\gamma \leq 1\}$$

où  $M_1$  est définie dans le lemme 5.1 et où  $\gamma > \operatorname{Sup}\left(\frac{N(N+1)}{2}, p'\right)$  alors

$E$  est un convexe fermé de  $L^{p'}(\Omega)^N$  et  $T(E) \subset E$ . Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder il suffit de démontrer que  $T$  est continue et compacte.

*Étape 1 :  $T$  est compacte.* —  $u_q$  est l'unique solution du problème

$$\operatorname{Inf} \left\{ \int_{\Omega} (g_1(Dv) + \operatorname{div} qv + h(x, v)) dx, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Soit  $q_n \in E$  tel que  $q_n \rightarrow q_0$  et  $\operatorname{div} q_n \rightarrow \operatorname{div} q_0$  respectivement dans  $L^{p'}(\Omega)^N$  faible et  $L^\gamma(\Omega)$  faible. On note  $u_{q_n}$  la solution du problème précédent avec

$q = q_n$ . Alors

$$\int_{\Omega} (g_1(Du_{q_n}) + \operatorname{div} q_n u_n + h(x, u_n)) dx \leq \int_{\Omega} (g_1(Dv) + \operatorname{div} q_n v + h(x, v)) dx$$

pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Les estimations précédentes montrent que  $Du_{q_n}$  est bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ; il existe une sous-suite, notée encore  $u_{q_n}$  et il existe  $u_0$  tels que

$$u_{q_n} \rightarrow u_0 \quad \text{fort}$$

et

$$Du_{q_n} \rightarrow Du_0 \quad \text{faible.}$$

Par passage à la limite, il vient

$$\int_{\Omega} (g_1(Du_0) + \operatorname{div} q_0 u_0 + h(x, u_0)) dx \leq \int_{\Omega} (g_1(Dv) + \operatorname{div} q_0 v + h(x, v)) dx.$$

Grâce à l'unicité de la solution de problème

$$u_0 = u_{q_0}.$$

Montrons la convergence forte.

$u_{q_n}$  et  $u_{q_0}$  vérifient respectivement

$$-\operatorname{div}(Dg_1(Du_{q_n})) + \operatorname{div} q_n + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_{q_n}) = 0$$

$$-\operatorname{div}(Dg_1(Du_{q_0})) + \operatorname{div} q_0 + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_{q_0}) = 0.$$

On retranche ces deux inégalités et on multiplie la différence par  $u_{q_n} - u_{q_0}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Dg_1(Du_{q_n}) - Dg_1(Du_{q_0}))(Du_{q_n} - Du_{q_0}) dx \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} q_n - \operatorname{div} q_0) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_{q_n}) - \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_{q_0}) \right) (u_{q_n} - u_{q_0}) dx \end{aligned}$$

l'hypothèse de forte ellipticité sur  $g_1$  entraîne

$$(Dg_1(Du_{q_n}) - Dg_1(Du_{q_0}))(Du_{q_n} - Du_{q_0}) \geq a_5 |Du_{q_n} - Du_{q_0}|^2$$

et donc

$$\begin{aligned} a_5 |Du_{q_n} - Du_{q_0}|^2 & \leq \int_{\Omega} (\operatorname{div} q_n - \operatorname{div} q_0) (u_{q_n} - u_{q_0}) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_{q_n}) - \frac{\partial h}{\partial u}(x, u_{q_0}) \right) (u_{q_n} - u_{q_0}) dx. \end{aligned}$$



Puisque  $\operatorname{div} q_n$  tend faiblement vers  $\operatorname{div} q_0$  et que  $u_{q_n}$  tend fortement vers  $u_{q_0}$ , le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0, d'où

$$\begin{aligned} Du_{q_n} &\rightarrow Du_{q_0} \text{ dans } L^2(\Omega)^N \text{ fort et donc dans } L^{p'}(\Omega)^N \text{ fort} \\ T(q_n) = Dg_2(Du_{q_n}) &\text{ tend vers } T(q_0) = Dg_2(Du_{q_0}) \text{ dans } L^{p'}(\Omega)^N \text{ fort,} \end{aligned}$$

d'où

$T$  est compacte.

On aura noté que c'est dans cette démonstration que se justifie l'hypothèse :  $\operatorname{div} q$  appartient à un borné de  $L^r(\Omega)$ , sinon aucune autre information ne permettrait le passage à la limite dans l'intégrale

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} q_n - \operatorname{div} q_0)(u_{q_n} - u_{q_0}) dx.$$

*Étape 2 : T est continue.* — Ce point ne soulève aucune difficulté compte tenu de l'unicité de  $u_{q_0}$ . La démonstration est analogue à celle de l'Étape 1.

$T$  est continue et compacte, il existe donc, d'après le théorème du point fixe de Schauder,  $q_0 \in E$  tel que

$$T(q_0) = q_0$$

c'est-à-dire

$$Dg_2(Du_{q_0}) = q_0 \quad \blacksquare$$

Cette dernière proposition nous permet de conclure et de prouver l'existence d'une solution pour le problème (1.2) formulé dans l'introduction.

**THÉORÈME 5.6.** — *Sous les hypothèses H1 à H4, il existe un ouvert borné  $\Omega_0$  tel que le problème*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(Dg_1(Du) - Dg_2(Du)) + \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) &= 0 \quad \text{p. p. } x \in \Omega \\ u &\in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

admette au moins une solution pour tout ouvert  $\Omega \subset \Omega_0$ , uniformément convexe et de classe  $C^{1,1}$ . ■

*Commentaires.* — 1. Il est à remarquer que notre procédé de construction, conduit à l'existence d'une solution possédant la régularité  $W^{2,\gamma} \cap C^{1,1}$ . On peut se poser la question du lien de cette solution avec le problème du calcul des variations associé. Ceci demeure une question ouverte.

2. L'hypothèse  $g = g_1 - g_2$  où  $g_i$  strictement convexe semble nouvelle et justifie le travail développé dans ce papier. Les hypothèses H1 à H4 sont classiques dans le cadre des équations aux dérivées partielles du second ordre quasi linéaires. Par contre l'hypothèse «  $\Omega$  assez petit » est plus

contraignante et il serait intéressant de voir si, avec une autre méthode, elle ne pourrait pas être relaxée.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] GILBARG-TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 1983.
- [2] LADYZENSKAYA-URALCEVA, *Équations aux Dérivées Partielles du Type Elliptique*, Dunod, Paris, 1968.
- [3] MORREY Jr, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer Verlag, 1966.
- [4] WEBB, Boundary Value Problems for Strongly non Linear Elliptic Equations, *J. London Math. Soc.*, vol. **2**, 1980.
- [5] BOCCARDO-MURAT-PUEL, Résultats d'Existence pour Certains Problèmes Quasilinearaires, *Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa*, vol. **11**, 1984.
- [6] BOCCARDO-MURAT-PUEL, Quelques Propriétés des Opérateurs Elliptiques Quasilinearaires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **307**, série I, 1988.
- [7] AUBERT-TAHRAOUI, Théorèmes d'Existence pour des Problèmes du Calcul des Variations..., *J.D.E.*, vol. **33**, n° 1, 1979.
- [8] AUBERT-TAHRAOUI, Sur Quelques Résultats d'Existence en Optimisation Non Convexe, *Appl. Anal.*, vol. **18**, 1984.
- [9] RAYMOND, Théorème d'Existence pour des Problèmes Variationnels non Convexes, *Proc. R. Soc. Edinburgh, Sect. A*, vol. **107**, 1987.
- [10] MASCOLO-SCHIANCHI, Existence Theorems for non Convex Problems, *J. Math. Pures Appl.*, vol. **62**, 1983.
- [11] MASCOLO-SCHIANCHI, Non Convex Problems of the Calculus of Variations, *Non Linear Anal.*, vol. **9**, n° 4, 1985.
- [12] HARTMAN, On functions Representable as a Difference of Convex Functions, *Pac. J. Math.*, vol. **9**, 1959.
- [13] STAMPACCHIA, On some Regular Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **16**, 1963.
- [14] HARTMAN-STAMPACCHIA, On some Non Linear Elliptic Differential Functional Equations, *Acta Math.*, vol. **115**, 1966.
- [15] AGMON-DOUGLIS-NIREMBERG, Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **12**, 1959.

(Manuscrit reçu le 4 septembre 1989.)