ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

A. BENMOHAMED
L. ROBBIANO

Exposant critique de Sobolev et régularité des solutions d'équations elliptiques

Annales de l'I. H. P., section C, tome 8, nº 1 (1991), p. 103-117
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1991__8_1_103_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 8, n° 1, 1991, p. 103-117. *Analyse non linéaire*

Exposant critique de Sobolev et régularité des solutions d'équations elliptiques

par

A. BENMOHAMED et L. ROBBIANO

Université de Paris-Sud, Bâtiment n° 425, Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — Nous étudions la régularité des solutions de problèmes elliptiques avec des termes d'ordre un [resp. zéro] à coefficients dans $L^n(\mathbf{R}^n)$ [resp. $L^{n/2}(\mathbf{R}^n)$]. Cela permet de déduire la régularité des solutions de certains problèmes elliptiques non linéaires avec exposant critique de Sobolev.

Mots clés : Opérateurs elliptiques, régularité, exposant critique de Sobolev.

ABSTRACT. — We study the regularity of solutions to elliptic problems. The coefficients of the term of order one [resp. zero] are in L^n [resp. $L^{n/2}$]. This allows us to deduce the regularity of solutions to some non linear elliptic problems with Sobolev critical exponent.

INTRODUCTION

Ce travail a pour but l'étude systématique de la régularité des solutions d'équations elliptiques où interviennent des problèmes liés aux exposants critiques de Sobolev.

Classification A.M.S. : 35 B 65, 35 J 60..

Ces problèmes se rencontrent, par exemple, dans les trois équations suivantes :

(1) Métriques conformes

$$\Delta u = \mathrm{R}\, u^{(n+2)/(n-2)}, \qquad n \geqq 3, \quad u \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n).$$

(2) Problème modèle (*voir* Aguirre, Escobedo et Zuazua [1])

$$u = |\nabla u|^{1+2/n}, \qquad n \geqq 3, \quad u \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n).$$

(3) Surface à courbure moyenne constante

$$\Delta u = 2\,\mathrm{H}\, \partial_x u \wedge \partial_y u$$

où $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ et $u \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^2)$, H une fonction lipstchitzienne.

Ces trois problèmes sont critiques car le gain de régularité des solutions ne s'obtient pas en appliquant seulement l'injection de Sobolev et la régularité des solutions des problèmes elliptiques.

Le premier théorème s'applique à la régularité des solutions de

$$\mathrm{A}\, u = \mathrm{V}_1\, u + \mathrm{V}_2 \nabla u + \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, \partial_{x_i}(\mathrm{V}_3^i\, u)$$

où A un opérateur elliptique d'ordre 2.

Ce théorème permet de traiter les exemples (1) et (2) ((1) est bien connu *voir* Trudinger [12] et Brezis-Kato [5]).

L'exemple (3), dont la régularité des solutions est par ailleurs connue (Wente [13]) ne rentre pas dans le cadre du premier théorème. Néanmoins, la méthode de démonstration s'adapte à ce cas, ce qui fait l'objet du deuxième théorème.

1. RÉSULTATS

(*a*) **Énoncé du théorème 1**

Soit A un opérateur d'ordre deux, mis sous forme divergence

$$\mathrm{A} = \sum_{1 \leqq i,\ j \leqq m} \partial_i (a_{ij}\, \partial_j)$$

où $a_{ij} \in \mathrm{C}^s(\Omega)$, $0 < s < 1$, Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$; $\mathrm{C}^s(\Omega)$ est l'espace de Holder; $u \in \mathrm{C}^s(\Omega)$ si $u \in \mathrm{L}^\infty$ et

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^s} \leqq \mathrm{C}$$

pour $x, y \in \Omega$. On suppose A elliptique près d'un point $x_0 \in \Omega$, c'est-à-dire

$$\sum_{i,\ j} a_{ij}(x_0)\, \xi_i\, \xi_j \neq 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^n / \{0\}.$$

Pour $1<p<+\infty$, $s\in\mathbf{R}$, on note

$$H^{s,\,p}=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)/(1-\Delta)^{s/2}u\in L^p\}.$$

On dit que $u\in H^{s,\,p}_{x_0}$ s'il existe une fonction $\chi\in C_0^\infty$, $\chi=1$ près de x_0 telle que $\chi u\in H^{s,\,p}$.

Soit $u\in H^{1,\,p}_{x_0}$, $1<p<+\infty$ vérifiant

$$\text{(4)}\qquad A u=V_1 u+\sum_{i=1}^{n} V_2^i\,\partial_i u+\sum_{i=1}^{n} v_i\,\partial_i(V_3^i u)+f.$$

Avec $V_1\in L^{n/2}_{x_0}$, V_2^i, $V_3^i\in L^7_{x_0}$,

$$v_i\in \text{Lip}\qquad (v_i,\ \nabla v_i\in L^\infty),$$

et $f\in H^{\sigma-1,\,p}_{x_0}$ avec $\sigma<s$.

(5) On suppose que $p<n$.

De plus, on fait les hypothèses suivantes :

(6) si $V_1\neq 0$ ou $V_2^i\neq 0$ alors $\dfrac{1}{n}<1-\dfrac{1}{p}$.

(7) si $V_3^i\neq 0$ alors $\dfrac{1+\sigma}{n}<\dfrac{1}{p}$.

THÉORÈME 1. — *Soit u une solution du problème* 4 *vérifiant les conditions* 5, 6 *et* 7 *alors*

$$\begin{aligned}&\text{si}\quad V_3^i=0,\qquad u\in H^{1+\sigma,\,p}_{x_0}\\ &\text{si}\quad V_3^i\neq 0,\qquad u\in H^{1,\,r}_{x_0}\end{aligned}$$

avec $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\sigma}{n}$.

Remarques. — 1. Les hypothèses très faibles faites sur les fonctions V_j^i permettent d'appliquer ce théorème à des situations non linéaires avec exposant critique de Sobolev. Par exemple

$$u\in H^1_{x_0}\,(H^1=H^{1,\,2}),$$

$$A u=|\nabla u|^{1+(2/n)}=\sum_{i=1}^{n} V_i\,\partial_i u$$

avec $V_i=|\nabla u|^{(2/n)-1}\partial_i u$. On a bien $V_i\in L^n_{x_0}$.

2. C'est une généralisation d'un théorème de Brezis et Kato [5]. Ces auteurs se placent dans le même cadre que nous mais avec $V_2^i=V_3^i=0$.

3. Notre méthode de démonstration repose sur le calcul pseudo-différentiel ou plutôt le calcul paradifférentiel puisque les coefficients de A sont peu réguliers. La difficulté essentielle provient de la présence de certains opérateurs à coefficients dans L^p pour lesquels nous n'avons aucun calcul symbolique; ce qui, en partie, explique l'absence d'une version microlocale

du théorème 1. Cependant, on peut inverser (localement) ces opérateurs, puis étudier l'action, sur les espaces $H^{s,p}$, des inverses.

4. Beaucoup de travaux ont été faits sur la régularité (*voir* par exemple Trudinger [12]) ou sur l'existence (Brezis-Nirenberg [7]) des solutions d'équations du type $A\,u = u^{(n+2)/(n-2)}$. Mais peu de choses semblent connues pour des équations contenant des termes non linéaires d'ordre un avec exposant critique de Sobolev. Ce qui a motivé notre étude est le problème de Plateau qui consiste à résoudre l'équation $\Delta u = 2\,H\,u'_x \wedge u'_y$ où $u : \Omega \to \mathbf{R}^3$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, avec des conditions au bord de Ω (*voir* Brezis et Coron [6] et leur bibliographie sur le problème de l'existence). Si $u \in H^1$ avec les conditions au bord C^∞ (*voir* Wente [13], s'appuyant sur un résultat de Morrey [11]) alors $u \in C^\infty$.

Le théorème 1 ne s'applique pas à cette équation car l'hypothèse $p < n$ n'est pas vérifiée (ici $p = n = 2$). Plus précisément, la difficulté est la suivante : $u'_x \Lambda u'_y \in L^1$ donc $\Delta u \in L^1$.

De cela on ne peut pas déduire que

$$u \in H^{2,1} = \{ u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n),\ \partial^\alpha u \in L^1,\ |\alpha| \leqq 2 \}.$$

Cependant, la technique développée pour démontrer le théorème 1 s'adapte à ce cas. Ce qui fait l'objet du théorème 2.

(*b*) **Énoncé du théorème 2**

Soit $u \in H^1_{(x_0,\, y_0)}$

$$u :\quad \Omega \to \mathbf{R}^3, \qquad \Omega \subset \mathbf{R}^2.$$

On appelle (x, y) les variables de $\mathbf{R}^2$. Soit A un opérateur matricielle d'ordre 2 elliptique près de (x_0, y_0) où chaque élément de la matrice s'écrit sous forme de divergence avec des coefficients C^s $(0 < s < 1)$.

La fonction u vérifie

$$(8) \qquad A\,u = H(x, y)\,[\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V] + f$$

où $V \in H^1_{(x_0,\, y_0)}$, $V : \Omega \to \mathbf{R}^3$, $f \in H^{\sigma-1}_{(x_0,\, y_0)}$, $\sigma < s$, et $H \in \mathrm{Lip}$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $u \in H^1_{(x_0,\, y_0)}$ *vérifiant l'équation* (8) *alors* $u \in H^{1+\sigma'}_{(x_0,\, y_0)}$, *pour* $\sigma' < \sigma$.

Remarques. — 1. Bien entendu, l'énoncé de ce théorème est moins satisfaisant que celui du théorème 1. Mais comme il traite un problème géométrique important, il nous a semblé intéressant. Il est probable que pour des problèmes voisins, le théorème 1 ne s'applique pas mais que la technique de démonstration s'adapte.

2. Les résultats de régularité connus sur le problème de Plateau sont de nature différente. En effet, dans Wente [13], ce sont les points critiques d'une certaine fonctionnelle prise sur un certain espace, qui sont C^∞

jusqu'au bord si les données sont C^∞ (et analytiques si les données sont analytiques).

Le théorème 2 est un résultat local, seules les propriétés locales de A, de u, de V, et de f, interviennent. Ce qui est la situation habituelle pour un problème elliptique.

2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

(*a*) Rappels sur les opérateurs paradifférentiels

Nous allons rappeler quelques résultats classiques.

• Soit $K>1$ et soit (ψ, φ) un couple de fonctions de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que

$$\operatorname{supp}\psi\subset\{\eta\in\mathbf{R}^n\,|\,|\eta|\leqq 1\}\qquad\text{et}\qquad\psi(\eta)=1$$

quand

$$|\eta|\leqq\frac{1}{K}\qquad\text{et}\qquad\operatorname{supp}\varphi\subset\left\{\eta\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\frac{1}{K}\leqq|\eta|\leqq 2K\right\}.$$

(K, ψ, φ) est une décomposition dyadique de l'unité si pour tout $\eta\in\mathbf{R}^n$, $\psi(\eta)+\sum_{j\geqq 0}\varphi(2^{-j}\eta)=1$.

• *Une classe de symbole.*

Pour $\sigma\in\mathbf{R}_+^*$ et $m\in\mathbf{R}$, on notera par Σ_σ^m l'ensemble des fonctions a: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ vérifiant pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^n$.

(9) $x\mapsto\partial_\eta^\alpha a(x, \eta)$ est une fonction de $C^\sigma(\mathbf{R}^n)$;

(10) il existe une constante positive C^α telle que

$$\|\partial_\eta^\alpha a(.,\eta)\|_{C^\sigma}\leqq C_\alpha(1+|\eta|)^{m-|\alpha|}.$$

Σ_σ^m peut être muni d'une structure d'espace de Frechet. A cette classe de symbole, on peut associer des opérateurs de $\mathscr{C}_0^\infty$ dans $\mathscr{D}'$ comme indiqué au paragraphe suivant.

• *Opérateurs para-différentiels et pseudo-différentiels.*

Une décomposition dyadique est choisie. Soit $a\in\Sigma_\sigma^m$; pour $u\in\mathscr{C}_0^\infty\mathbf{R}^n)$,on note par T_a l'opérateur défini par

$$(11)\qquad T_a u(x)=(2\pi)^{-n}\sum\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\eta}A_{k-N_0}(x,\eta)\,\hat{u}_k(\eta)\,d\eta,$$

où $\hat{u}_k(\eta)=\varphi(2^{-k}\eta)\,\hat{u}(\eta)$, pour $k\geqq 0$ et $\hat{u}_{-1}(\eta)=\psi(\eta)\,\hat{u}(\eta)$

$$A_{k-N_0}(x,\eta)=\mathscr{F}^{-1}\psi(2^{-k+N_0-1}\xi)\,\mathscr{F}a(\xi,\eta))(x)$$

et N_0 étant choisi assez grand pour que le spectre de $x \mapsto \int e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta)\, \hat{u}_k(\eta)\, d\eta$ soit dans une couronne de type $\left\{ \eta \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \frac{2^k}{K} \leqq |\eta| \leqq 2^{k+1} \tilde{K} \right\}$.

Les opérateurs T_a jouissent des propriétés suivantes,

(1) T_a est un opérateur borné de $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ avec $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < +\infty$ dans $H^{s-m,p}(\mathbf{R}^n)$ avec une norme d'opérateur majorée par une semi-norme de a.

(13) T_a dépend du choix de N_0 et de la décomposition dyadique; cependant une modification du choix de N_0 ou de la décomposition pour T_a modifie cet opérateur par l'addition d'un opérateur σ-régularisant, c'est-à-dire borné de $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{s-m+\sigma-\varepsilon,p}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et dont la norme d'opérateur est majorée par une semi-norme de a. Désormais, nous appellerons opérateur paradifférentiel, tout opérateur qui ne diffère de T_a que d'un opérateur σ-régularisant.

Les opérateurs paradifférentiels ont été introduits par Bony [3], les propriétés ci-dessus découlent des travaux de Meyer [10], Metivier [9], et Benmohamed [2].

On pourra consulter Bourdaud [4] et Hörmander [8] pour une étude détaillée de ces classes.

Si $a \in \Sigma_\sigma^m$, on note par $a(x, D)$ l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$a(x, D)\, u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\eta}\, a(x, \eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta \qquad \text{pour} \quad u \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La différence entre $a(x, D)$ et T_a est, dans certains cas, régularisante (*voir* [2]).

Proposition 3. — *Soit* $a \in \Sigma_\sigma^m$ *et* $s \in \mathbf{R}$ *tels que* $\sigma + s - m > 0$. Alors l'opérateur $a(x, D) - T_a$ *est un opérateur borné de* $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $H^{s',p}(\mathbf{R}^n)$ *avec* $1 < p < +\infty$ *et* $s' < \min(\sigma, \sigma + s - m)$.

Ce qui, dans ces cas, permet de remplacer $a(x, D)$ par $T_a + R$.

En vue d'inverser les opérateurs elliptiques, nous aurons besoin d'un calcul symbolique sur la classe $\sum_\sigma^m$.

Proposition 4. — *Soit* $a \in \Sigma_\sigma^m$ *et* $b \in \Sigma_\sigma^{m'}$. Il existe $C \in \Sigma_\sigma^{m+m'}$ *tel que*

$$c - a \# b \in \bigcap_{0 < \varepsilon \leqq \sigma - [\sigma]} \Sigma_c^{m+m'-\sigma+\varepsilon}$$

(où $a \# b = \sum_{|\alpha| \leqq [\sigma]} \partial_\eta^\alpha a\, D_x^\alpha b / \alpha!$)

et $T_a \circ T_b \equiv T_c$ *modulo un opérateur* σ*-régularisant. On a noté par* $[\sigma]$ *la partie entière de* σ.

Remarquons que si $0<\sigma<1$, $[T_a, T_b]=T_a\circ T_b-T_b\circ T_a$ est un opérateur d'ordre $m+m'$ et de régularité σ, mais de symbole nul et, par conséquent, il est σ-régularisant.

PROPOSITION. — *Soit* $a(x, \xi)=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ *avec* $a\in\Sigma_\sigma^2$, *on suppose que* $a(0, \xi)\neq 0$ *pour tout* $\xi\neq 0$. *Il existe alors une fonction* $\chi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *égale à* 1 *au voisinage de zéro et un symbole* $b\in\Sigma_\sigma^{-2}$ *tels que*

$$T_b\circ T_a\equiv\chi \text{ modulo un opérateur } \sigma-\text{régularisant}$$

En tant qu'opérateur, χ est défini par $\chi : u\mapsto \chi.u(x)=\chi(x)u(x)$.

(*b*) Réduction du problème

Les hypothèses sont locales; pour se placer dans des espaces globaux il suffit de tronquer u avec une fonction $\chi\in C_0^\infty$ χ valant 1 près de x_0, et de multiplier l'équation (4) par une autre fonction C_0^∞ à support $\subset\{\chi=1\}$ et valant 1 près de x_0. La forme de l'équation (4) est alors conservée, avec des hypothèses globales sur les V, u et f.

Nous allons montrer qu'on peut remplacer l'opérateur

$$A=\sum_{1\leqq i,\ j\leqq n}\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j)$$

par un paradifférentiel de symbole

$$a(x, \xi)=\sum_{1\leqq i,\ j\leqq n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

En effet, $a_{ij}\in\Sigma_s^0$ d'après la proposition 3, $a_{ij}-T_{a_{ij}}$ est borné de $H^{\sigma,p}$ dans $H^{\sigma',p}$ pour $\sigma'<\min(s, \sigma+s)$.

Pour $u\in H^{1,p}$, $\partial_j u\in H^{0,p}=L^p$ donc $a_{ij}\partial_j u-T_{a_{ij}}\partial_j u\in H^{\sigma,p}$ pour $\sigma<s$. Donc $\partial_i a_{ij}\partial_j u-\partial_i T_{a_{ij}}\partial_j u\in H^{\sigma-1,p}$. Le calcul symbolique (proposition 4) permet d'écrire $\partial_i T_{a_{ij}}\partial_j u=T_{a_{ij}\xi_i\xi_j}u$ modulo un terme dans $H^{\sigma-1,p}$. Donc

$$\sum_{1\leqq i,\ j\leqq n}\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)=T_a u+f.$$

ou $f\in H^{\sigma-1,p}$ avec $\sigma<s$ et $a(x, \xi)$ comme annonπé ci-dessous. Pour finir, nous remplaçons les V_i, $i=1, 2, 3$ par $\tilde V_i+\hat V_i$ où $\tilde V_1\in L^{n/2}$ avec $\|\tilde V_1\|_{L^{n/2}}\leqq\varepsilon$. $\tilde V_2, \tilde V_3\in L^n$ avec $\|\tilde V_i\|_{L^n}\leqq\varepsilon$, $i=2, 3$ et $\hat V_i\in C_0^\infty$. Le paramètre ε sera choisi au paragraphe 3. On vérifie facilement que les termes provenant de $\hat V_i$ peuvent être incorporés au reste f.

3. PREUVES DES THÉORÈMES DE RÉGULARITÉS

(a) Preuve du théorème 1

Après les réductions du paragraphe 2 (b), la solution u du problème vérifie l'équation suivante

$$\text{(14)} \qquad T_a u = V_1 u + \sum_{i=1}^{n} V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^{n} \nu_i (\partial (V_3^i u)) + f$$

où

$$\begin{gathered} u \in H^{1,p} \\ a \in \Sigma_s^2 \\ V_1 \in L^{n/2} \quad \text{avec} \quad \|V_1\|_{L^{n/2}} \leqq \varepsilon \\ V_2^i,\ V_3^i \in L^n \quad \text{avec} \quad \|V_j^i\|_{L^n} \leqq \varepsilon, \qquad j=2,3 \\ \nu_i \in \mathrm{Lip} \\ f \in H^{\sigma-1,p}, \qquad s > \sigma > 0 \end{gathered}$$

Appelons Z_1, Z_2 et Z_3, les opérateurs suivants

$$\begin{gathered} Z_1 u = V_1 u \\ Z_2 u = \sum_{i=1}^{n} V_2^i \partial_i u \\ Z_3 u = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \partial_i (V_3^i u) \end{gathered}$$

(15) On a

$$\begin{gathered} Z_j : \ H^{1,p} \to L^q, \qquad j=1,2 \\ Z_3 : \ H^{1,p} \to H^{-1,p} \end{gathered}$$

avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$, et des normes opérateurs majorées par une constante fois ε.

En effet : $u \in H^{1,p} \subset L^{q_1}$ avec $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, si $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$.

(16) Donc

$$\begin{aligned} \|Z_1 u\|_{L^q} = \|V_1 u\|_{L^q} &\leqq \|V_1\|_{L^{n/2}} \|u\|_{L^{q_1}} \\ &\leqq C \varepsilon \|u\|_{H^{1,p}}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$; et $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$ on a

$$\begin{aligned} \|Z_2 u\|_{L^q} \leqq \sum_{i=1}^{n} \|V_2^i \partial_i u\|_{L^q} &\leqq \sum_{i=1}^{n} \|V_2^i\|_{L^n} \|\partial_i u\|_{L^p} \\ &\leqq C \varepsilon \|u\|_{H^{1,p}} \end{aligned}$$

et

$$\|Z_3 u\|_{H^{-1,p}} \leqq C \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i (V_3^i u)\|_{H^{-1,p}}$$
$$\leqq C \sum_{i=1}^{n} \|V_3^i u\|_{L^p}$$

or

$$C \sum_{i=1}^{n} \|V_3^i u\|_{L^p} \leqq C \sum_{i=1}^{n} \|V_3^i\|_{L^n} \|u\|_{L^{q_1}}$$

finalement

$$\|Z_3 u\|_{H^{-1,p}} \leqq C\varepsilon \|u\|_{H^{1,p}}$$

Soit $b \in \Sigma_s^{-2}$ tel que $T_b T_a = \chi(x) + R$ où $R : H^{\delta, t} \to H^{\delta+\sigma, t} (\sigma < s)$ pour tout $\delta \in \mathbf{R}$, $1 < t < +\infty$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

On applique T_b à (14), on a

(17) $$\chi u = T_b Z_1 u + T_b Z_2 u + T_b Z_3 u + h$$

où $h = T_b f - R u \in H^{1+\sigma, p}$, car $f \in H^{\sigma-1, p}$,

D'après (12), (15) et (16), on a $T_b Z_j u \in H^{2, q} \subsetneq H^{1, p}$, $j=1$, 2 et $T_b Z_3 u \in H^{1, p}$.

De plus,

$$\|T_b Z\|_{H^{1,p} \to H^{1,p}} \leqq C\varepsilon.$$

On note $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. L'idée est la suivante; on a un opérateur $\chi - T_b Z$ qui envoie $H^{1, p}$ dans $H^{1, p}$ avec $T_b Z$ de norme petite. On va l'inverser avec une série de Neumann, χ étant presque l'identité.

D'une façon précise, on pose

$$\chi u = v \in H^{1, p}$$

(17) devient

(18) $$v - T_b Z v = T_b Z (1-\chi) u + h$$

avec $h \in H^{1+\sigma, p}$.

Il s'ensuit que

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (T_b Z)^k (1-\chi) u + \sum_{k=0}^{\infty} (T_b Z)^k h$$

si ε est pris suffisamment petit pour que

$$\|T_b Z\|_{H^{1,p} \to H^{1,p}} \leqq \frac{1}{2}.$$

Commençons par démontrer que le deuxième terme de v vérifie les affirmations du théorème. On remarque que $T_b Z_j$ opère de $H^{1+\sigma, p}$ dans $H^{1+\sigma, p}$ avec une norme petite si $j=1$ ou 2 et que $T_b Z_3$ opère de $H^{1, r}$ dans $H^{1, r}$ avec une norme petite. En effet, si g est dans $H^{1+\sigma, p}$, on a

$$\begin{aligned}
\| T_b Z_1 g \|_{H^{1+\varepsilon, p}} &\leqq C \| T_b Z_1 g \|_{H^{2, \mu}} \\
&\leqq C \| V_1 g \|_{L^\mu} \\
&\leqq C \varepsilon \| g \|_{L^\nu} \\
&\leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1+\sigma, p}}
\end{aligned} \tag{19}$$

avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{p} + \frac{1-\sigma}{n}$ et $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{p} - \frac{1+\sigma}{n}$.

(20) De même

$$\begin{aligned}
\| T_b Z_2 g \|_{H^{1+\sigma, p}} &\leqq C \| T_b Z_2 g \|_{H^{2, \mu}} \\
&\leqq C \sum_{i=1}^{n} \| V_1^i \partial_i g \|_{L^\mu} \\
&\leqq C \varepsilon \| \nabla g \|_{L^r} \\
&\leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1, r}} \\
&\leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1+\sigma, p}}
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}$.

(21) Enfin

$$\begin{aligned}
\| T_b Z_3 g \|_{H^{1, r}} &\leqq C \sum_{i=1}^{n} \| \partial_i (V_3^i g) \|_{H^{-1, r}} \\
&\leqq C \sum_{i=1}^{n} \| V_3^i g \|_{L^r} \\
&\leqq C \varepsilon \| g \|_{L^\nu} \\
&\leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1, r}}
\end{aligned}$$

avec $g \in H^{1+\sigma, p} \subset H^{1, r}$.

Il reste à traiter le premier terme. On va utiliser le fait que le support de $1-\chi$ est loin de x_0.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, avec support φ compact dans un ouvert contenu dans $\{\chi = 1\}$. De sorte que $\varphi(1-\chi) = 0$.

LEMME 5.

$$\varphi T_b = T_b \varphi + R, \tag{22}$$

avec $R : H^{\delta, t} \to H^{\delta+2+\sigma, t}$ *pour* $\delta \in \mathbf{R}$ *et* $1 < t < \infty$. *En outre*

$$\varphi Z_2 = Z_2 \varphi + \tilde{V}_2, \tag{23}$$

avec $\tilde{V}_2 \in L^n$, *et finalement*

(24) $$\varphi Z_3 = Z_3 \varphi + \tilde{V}_3 \quad avec \quad \tilde{V}_3 \in L^n.$$

(22) résulte de la proposition 4.

(23) vient de

$$\varphi Z_2 w - Z_2 \varphi w = - \sum_{i=1}^{n} V_2^i (\partial_i \varphi) w.$$

(24) vient de

$$\varphi Z_3 w - Z_3 \varphi w = - \sum_{i=1}^{n} \nu_i V_3^i (\partial_i \varphi) w.$$

Avec le R du (22) du lemme 5 et une fonction $V \in L^n$, on a

(25) $$\varphi (T_b Z)^k = (T_b Z)^k \varphi + \sum_{j=0}^{k} (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V)(T_b Z)^j.$$

On a déjà vérifié que

$$\| T_b Z g \|_{H^{1,p}} \leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1,p}},$$
$$\| T_b Z g \|_{H^{1+\sigma,p}} \leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1+\sigma,p}} \quad \text{si} \quad V_3^i = 0$$

D'autre part, quand $V_3^i \neq 0$, en reportant dans la preuve de (19) et (20) les inégalités de Sobolev

$$\| g \|_{L^\nu} \leqq C \| g \|_{H^{1,r}}$$

et

$$\| g \|_{H^{1,r}} \leqq C \| g \|_{H^{1+\sigma,p}}.$$

on obtient alors,

$$\| T_b Z g \|_{H^{1,r}} \leqq C \varepsilon \| g \|_{H^{1,r}} \quad \text{si} \quad V_3^i \neq 0.$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que tous les $C\varepsilon \leqq \delta$ $\left(\text{on peut prendre } \delta = \frac{1}{2}\right)$.

Si $V_3^i = 0$, on a $\left(\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
&\| (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V)(T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} \\
&\leqq \delta^{k-j-1} [\| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} + \| (T_b V)(T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}}] \\
&\leqq C \delta^{k-j-1} [\| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,q}} + \| (T_b V)(T_b Z)^j g \|_{H^{2+\sigma,p}}] \\
&\leqq C \delta^{k-j-1} [\| Z (T_b Z)^j g \|_{L^q} + \| V (T_b Z)^j g \|_{L^p}] \\
&\leqq C \delta^{k-j-1} [\| (T_b Z)^j g \|_{H^{1,p}} + \| (T_b Z)^j g \|_{H^{1,p}}] \quad [voir\,(15)] \\
&\leqq C \delta^{k-1} \| g \|_{H^{1,p}}
\end{aligned}$$

La constante C ne dépend pas de k. Si $V_3^i \neq 0$, on a de même

$$\begin{aligned}
&\| (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V)(T_b Z)^j g \|_{H^{1,r}} \\
&\leqq \delta^{k-j-1} [\| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} + \| T_b V (T_b V)(T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}}]
\end{aligned}$$

$$\leqq C\,\delta^{k-j-1}\,[\,\|\, R Z_3 (T_b Z)^j g\,\|_{H^{1+\sigma,\,p}}$$
$$+\|\, T_b V (T_b Z)^j g\,\|_{H^{2,\,p}} + \|\, R (Z_1+Z_2)(T_b Z)^j_g\,\|_{H^{2+\sigma,\,q}}]$$
$$\leqq C\,\delta^{k-j-1}\,[\,\|\, Z_3 (T_b Z)^j g\,\|_{H^{-1,\,p}}$$
$$+\|\, V (T_b Z)^j g\,\|_{L^p} + \|\,(Z_1+Z_2)(T_b Z)^j\,\|_{L^q}]$$
$$\leqq C\,\delta^{k-j-1}\,\|\,(T_b Z)^j g\,\|_{H^{1,\,p}}$$
$$\leqq C\,\delta^{k-1}\,\|\, g\,\|_{H^{1,\,p}}.$$

Or C ne dépend pas de k.

En définitive, (18) et (25) donnent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi (T_b Z)^{k+1} (1-\chi) u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} (T_b Z)^{k-j} [R Z + T_b V] (T_b Z)^j (1-\chi) u$$

et la norme $H^{1+\sigma,\,p}$ (où $H^{1,\,r}$ si $V_3 \neq 0$) de cette expression est majorée par

$$C \sum_{k=0}^{\infty} k\,\delta^k \,\|\, u\,\|_{H^{1,\,p}} \leqq C\,\|\, u\,\|_{H^{1,\,p}}.$$

(*b*) Preuve du théorème 2

Après les réductions du paragraphe 2 (*b*), la solution u du problème vérifie l'équation suivante :

$$\text{(26)} \qquad T_a u = 2\,H(x)\,(\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V) + f$$

avec $f \in H^{\sigma-1}$, $1 > \sigma > 0$, $H \in \mathrm{Lip}$.

On note

$$\text{(27)} \qquad Z_d g = \partial_x (g \wedge \partial_y d) - \partial_y (g \wedge \partial_x d).$$

où

$$d \in H^1, \qquad d:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$
$$g \in H^\alpha, \qquad g:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \qquad \alpha > 0.$$

On remarque que

$$\text{(28)} \qquad Z_d g = \partial_x g \wedge \partial_y d - \partial_y g \wedge \partial_x d$$

si $\alpha \leqq 1$.

On note

$$V = \tilde V + \beta \qquad \text{ou} \qquad \tilde V \in H^1, \qquad \|\,\tilde V\,\|_{H^1} \leqq \varepsilon$$

où ε est à fixer et où $\beta \in \mathrm{Lip}$.

(26) devient (en remplaçant la notation $\tilde V$ par V)

$$\text{(29)} \qquad T_a u = H(x)\, Z_V u + \tilde f,$$

où $\tilde f = f + \partial_x\, u \wedge \partial_y\, \beta - \partial_y\, u \wedge \partial_x\, \beta \in H^{\sigma-1}$.

Remarque. — Il est très important pour la preuve du théorème que le second membre soit de la forme $Z_V u$ de telle façon que Z_V s'écrive, soit sous la forme (27), soit sous la forme (28). Ce que l'on va voir dans la preuve du lemme suivant.

LEMME 6.

(30) *Si* $0<\alpha<1$, $Z_V : H^\alpha \to H^{-1,q}$, *avec* $\dfrac{1}{q}=1-\dfrac{\alpha}{2}$.

(31) *Si* $1<\alpha<2$, $Z_V : H^\alpha \to L^r$ *avec* $\dfrac{1}{r}=1-\dfrac{\alpha-1}{2}$.

Dans les deux cas, la norme opérateur de Z_V *est majorée par* $C\varepsilon$.

Preuve. — On a $\partial_x V$ et $\partial_y V \in L^2$ et

$$g\in H^\alpha \subsetneq L^\nu, \qquad \frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}>0$$

alors $g\wedge \partial_{x_i} V\in L^q$ ($x_1=x$, $x_2=y$); ce qui implique que $Z_V g\in H^{-1,s}$ et $\| Z_V g\|_{H^{-1,q}}\leqq C\varepsilon \| g\|_{H^\alpha}$.

D'autre part, quand $1<\alpha<2$, on a

$$\partial_{x_i} V\in L^2$$

$$\partial_{x_i} g\in H^{\alpha-1}\subsetneq L^\nu \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha-1}{2},$$

et il en résulte que $\partial_{x_i} g\wedge \partial_{x_j} V\in L^r$ et $\| Z_V g\|_{L^r}\leqq C\varepsilon \| g\|_{H^\alpha}$, ce qui achève la preuve du lemme.

Soit $b\in \Sigma_s^{-2}$ tel que $T_b T_a=\chi+R$.

On a noté χ pour $\chi.\mathrm{Id}$, et R est un opérateur : $H^{\delta,t}\to H^{\delta+\sigma,t}$ pour $\delta\in\mathbf{R}$ et $1<t<\infty$.

On applique T_b à (29), on obtient

$$\chi u=T_b H Z_V u+h, \qquad \text{où} \quad h=T_b \tilde{f}-R u\in H^{1+\sigma}, \quad \text{car}\, \tilde{f}\in H^{\sigma-1}.$$

On va simplement donner les grandes lignes de la preuve du théorème 2.

Pour $\alpha<1$,

$$T_b H Z_V : H^\alpha \to H^{1,q}\subsetneq H^\alpha$$

avec $\| T_b H Z_V\|_{H^\alpha\to H^\alpha}\leqq C\varepsilon$.

D'autre part

$$T_b H Z_V : H^{1+\sigma}\to H^{2,r}\subsetneq H^{1+\sigma} \quad \left(\frac{1}{r}=1-\frac{\sigma}{2}\right)$$

Pour imiter la preuve du théorème 1, il suffit de contrôler $\varphi T_b - T_b\varphi$ et $\varphi Z_V - Z_V\varphi$, où φ est la même fonction C_0^∞ que celle intervenant au théorème 1.

LEMME 7:

(33) $\varphi T_b - T_b \varphi = R_1$ *où* $R_1 : H^{\delta, t} \to H^{\delta+1, t}$ *pour* $\delta \in \mathbf{R}$, $1 < t < +\infty$.

(34) $\varphi Z_V - Z_V \varphi = R_2$ *où* $R_2 : H^\alpha \to L^q$, $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

(33) provient du calcul symbolique (proposition 4).

(34) On a

$$\partial_{x_i}(\varphi g) \wedge \partial_{x_j} V = \varphi\, \partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V - \partial_{x_i} \varphi\, (g \wedge \partial_{x_j} V).$$

Donc, la formule (28) donne que

$$\begin{aligned}(\varphi Z_V - Z_V \varphi) g &= \partial_x \varphi\, (g \wedge \partial_y V) - \partial_y \varphi\, (g \wedge \partial_x V)\\ &= R_2 g.\end{aligned}$$

$g \in H^\alpha \subset L^\nu$, $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Donc $g \wedge \partial_{x_i} V \in L^q$. Ce qui achève la preuve du lemme.

Pour finir la preuve comme celle du théorème 1, on obtient une formule similaire à (25), avec un terme

$$(T_b H Z_V)^{k-j-1} [R_1 Z_V + T_b R_2] (T_b H Z_V)^j.$$

Vérifions rapidement que cet opérateur envoie H^α dans $H^{\alpha+\sigma}$.

On a

$$H^\alpha \xrightarrow{(T_b H Z_V)^j} H^\alpha \xrightarrow{R_2} L^q$$

$$L^q \xrightarrow{T_b} H^{2, q} \subset H^{1+\alpha} \xrightarrow{(T_b H Z_V)^{k-j-1}} H^{1+\alpha}$$

avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$; et

$$H^\alpha \xrightarrow{(T_b H Z_V)^j} H^\alpha \xrightarrow{Z_V} H^{-1, q}$$

$$H^{-1, q} \xrightarrow{R_1} H^{1+\sigma, q} \subset H^{\alpha+\sigma}$$

$$H^{\alpha+\sigma} \xrightarrow{(T_b H Z_V)^{k-j-1}} H^{\alpha+\sigma}.$$

Il suffit de poser $\alpha = 1 + \sigma' - \sigma$ pour démontrer le théorème 2.

Bien entendu, le calcul précis des normes d'opérateurs permet de faire le même raisonnement que pour le théorème 1. Ceci est laissé au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AGUIRRE, M. ESCOBEDO et E. ZUAZUA, Existence de solutions à moyenne donnée pour un problème elliptique dans $\mathbf{R}^N$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **307**, série I, 1988, p. 463-466.

[2] A. BENMOHAMED, Espaces de Besov et propagation des singularités des solutions non bornées d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires, *Thèse*, Orsay.
[3] J. M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sc. E.N.S.*, t. **14**, 1981, p. 209-246.
[4] G. BOURDAUD, Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. Partial Diff. Eq.*, vol. **13**, 1988, p. 1059-1083.
[5] H. BREZIS, Some Variationnal Problems with Lack of Compactness, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **45**, 1983, p. 165-201.
[6] H. BREZIS et J. M. CORON, Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture, *C.P.A.M.*, vol. **37**, 1984, p. 149-187.
[7] H. BREZIS et L. NIRENBERG, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents *C.P.A.M.*, vol. **36**, 1983, p. 437-477.
[8] L. HORMANDER, Pseudo-Differential Operators of Type 1, 1, *Commun. in Partial Diff. Eq.*, vol. **13**, 1988, p. 1085-1111.
[9] G. METIVIER, Intégrales singulières, *Cours de D.E.A.* 1881-1982, Université de Rennes.
[10] Y. MEYER, Remarques sur un théorème de J. M. Bony, *Supl. ai. Rend. del Circolo, Mat. di Palermo. Atti de Seminario di Analisi Armomnica*, Pisa, 1980, série II. 1, 1981, p. 1-20.
[11] C. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, New York, 1966.
[12] N. TRUDINGER, Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, vol. **22**, 1968, p. 265-274.
[13] H. WENTE, An Existence Theorem for Surfaces of Constant Mean Curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **26**, 1969, p. 318-344.

(*Manuscrit reçu le* 1^er^ *mars* 1989)
(*révisé le* 9 *juin* 1989.)