ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

YOUCEF AMIRAT
KAMEL HAMDACHE
ABDELHAMID ZIANI

Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre et application aux écoulements miscibles en milieu poreux

Annales de l'I. H. P., section C, tome 6, n° 5 (1989), p. 397-417
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1989__6_5_397_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 6, n° 5, 1989, p. 397-417. *Analyse non linéaire*

Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre et application aux écoulements miscibles en milieu poreux

par

Youcef AMIRAT

I.N.R.I.A., Domaine de Voluceau, Rocquencourt,
B.P. n° 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France

Kamel HAMDACHE

C.N.R.S.-E.N.S.T.A./G.H.N., Centre de l'Yvette,
chemin de la Hunière, 91120 Palaiseau, France

et

Abdelhamid ZIANI

Institut des Mathématiques, U.S.T.H.B., B.P. 31, El Alia, Alger, Algérie.

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à l'homogénéisation de l'équation hyperbolique modèle

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(t, y)\,\partial_x u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y\in\Omega\subset\mathbb{R}^N,$$

munie d'une condition initiale (et d'une condition aux limites lorsque $x\in]0, 1[$). Pour cela, nous caractérisons la limite $L^\infty(\Omega)$ faible * de fonctions du type $\varphi_y^\varepsilon(\lambda)=(\lambda-A^\varepsilon(y))^{-1}$ définies pour $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\notin[m, M]$ et vérifiant $0<m\leqq A^\varepsilon(y)\leqq M$, en utilisant la représentation intégrale de fonctions holomorphes du type *Nevanlinna-Pick*. L'équation homogénéisée fait apparaître en plus de la partie de transport de l'équation, un opérateur de diffusion à mémoire. Une application à un modèle multidimensionnel d'écoulements miscibles en milieu poreux est considérée.

Mots clés : Equations hyperboliques, Homogénéisation, Oscillations, Diffusion à mémoire, Représentation intégrale, Écoulements miscibles, Milieu poreux.

ABSTRACT. — This paper is devoted to the homogenization of the following hyperbolic équation

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(t, y)\,\partial_x u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y\in\Omega\subset\mathbb{R}^N,$$

with initial data and boundary condition when $x\in]0, 1[$. One characterize the L^∞ weak * limit of some holomorphic functions of the type $\varphi_x^\varepsilon(\lambda)=(\lambda-A^\varepsilon(y))^{-1}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[m, M]$ with $0<m\leqq A^\varepsilon(y)\leqq M$ for a. e., y, by using the integral representation of *Nevanlinna-Pick's* holomorphic functions. It appears in the homogenized equation the natural transport operator and a diffusion operator (in the x variable) with memory effect (in the time variable t). An application for a multidimensional miscible flow in porous media is given.

I. INTRODUCTION

Nous nous intéressons à l'homogénéisation d'équations hyperboliques linéaires du premier ordre à coefficients oscillants. Cette étude est motivée par la recherche du comportement global de la concentration de fluides miscibles en milieu poreux hétérogène.

Si Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, représentant le milieu poreux, $\varepsilon>0$ un paramètre associé à une microstructure contenue dans Ω. les équations du déplacement de deux fluides miscibles sont, dans le cas incompressible et sans dispersion, données par (*cf.* [9] par exemple) :

$$\left.\begin{aligned}\varphi^\varepsilon(x)\,\partial_t u^\varepsilon + q^\varepsilon(t, x).\operatorname{grad} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times\Omega,\\ \operatorname{div} q^\varepsilon(t, x)=0 \quad \text{dans }]0, T[\times\Omega,\end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

$$q^\varepsilon(t, x) = -\frac{K^\varepsilon(x)}{\mu}.\operatorname{grad} p^\varepsilon, \tag{1.2}$$

où grad et div désignent les opérateurs gradient et divergence en la variable $x\in\Omega$. A ces équations il convient d'ajouter une condition initiale pour u^ε et des conditions aux limites pour u^ε et p^ε. Les inconnues du problème sont u^ε (la concentration) et p^ε (la pression). Les données sont φ^ε, K^ε et μ (respectivement la porosité, le tenseur de perméabilité (k_{ij}^ε) du milieu et la viscosité du mélange). La fonction φ^ε et le tenseur K^ε sont oscillants pour $\varepsilon\to 0$. L'équation (1.2) n'est autre que la loi de Darcy.

De nombreux problèmes sont modélisés par une équation de transport du type (1.1). Signalons l'équation de Liouville associée à un Hamiltonien oscillant. D'autre part, l'étude des oscillations pour l'équation d'Euler conduit à considérer le problème : (*cf.* Di Perna-Majda [11])

$$\begin{gathered} \partial_t u^\varepsilon + v\left(y, \frac{y}{\varepsilon}\right) \partial_x u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u^\varepsilon \big|_{t=0} = u_0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

où $v(y, z)$ est une fonction périodique en la variable z. Nous renvoyons aux ouvrages généraux de Bensoussan-Lions-Papanicolaou [5] et Sanchez-Palencia [19] pour les fondements de la méthode d'homogénéisation et l'étude de nombreux exemples. Concernant l'homogénéisation d'équations modélisant l'écoulement d'un fluide diphasique en milieu poreux (cas immiscible avec pression capillaire et cas miscible avec dispersion) nous renvoyons aux travaux de Bourgeat [8] et Amaziane [2]. Dans un récent travail Shvidler [22], [23] a étudié le système (1.1), (1.2) et a donné, par une analyse des fluctuations, des équations effectives associées à (1.1), (1.2). Des termes de diffusion avec mémoire apparaissent dans les équations effectives, traduisant un phénomène de dispersion. Nous avons montré dans [3] que cette propriété n'a pas lieu dans le cas 1-D en espace. Ceci traduit la stabilité de la loi de Darcy par rapport aux oscillations de la porosité et de la perméabilité. L'homogénéisation de l'équation elliptique en p^ε s'obtient de façon classique *cf.* [17], [18], [29] par exemple.

L'homogénéisation d'équations différentielle du type :

$$\begin{gathered} \partial_t u^\varepsilon + \beta^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad x \in \Omega \\ u^\varepsilon(0) = u_0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

a été considérée par Mascarenhas [16] pour des coefficients périodiques du type $\beta^\varepsilon(t, x) = \beta\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ et par Tartar [28] dans le cas non périodique et indépendant de t. Si on note par $\bar{u}$, la limite L^∞ faible $*$ de u^ε, si $\beta^\varepsilon \rightharpoonup \beta$ L^∞ faible $*$, l'équation effective associée à (1.4), dans le cas où β^ε est indépendant de t s'écrit (*cf.* Tartar [28])

$$\partial_t \bar{u} + \bar{\beta} \bar{u} + \int_0^t K(t-s, x)\, \bar{u}(s, .)\, ds = 0 \tag{1.5}$$

où le noyau $K(t, x)$ est entièrement caractérisé par les limites L^∞ faible $*$ de $(\beta^\varepsilon)^n$, $n \geqq 1$. Dans le cas plus complexe étudié par Mascarenhas [16], il apparaît un terme à mémoire mais celui-ci n'est pas du type convolution. L'équation (1.5) montre donc que :

$$\overline{\beta . u} = \bar{\beta} . \bar{u} + \int_0^t K(t-s, .)\, \bar{u}(s, .)\, ds. \tag{1.6}$$

Il est clair que par intégration le long des caractéristiques, des équations de transport du type

$$\partial_t u^\varepsilon + A^\varepsilon(t, x) \operatorname{grad} u^\varepsilon + B^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{1.7}$$

se mettent sous la forme (1.4). Le cas où $\beta^\varepsilon(t, x)$ n'est pas périodique en x dans (1.4) est à notre connaissance un problème ouvert.

Dans ce travail nous ne considérons que les équations de transport du type suivant :

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(t, y)\, \partial_x u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \Omega \tag{1.8}$$

où a^ε est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ vérifiant $a^\varepsilon \rightharpoonup a$ L^∞ faible $*$. Il est alors clair que :

$$\partial_t \bar{u} + \partial_x \overline{a.u} = 0. \tag{1.9}$$

Notre but est d'exprimer la dépendance de $\overline{a.u}$ en fonction de $\bar{a}$ et $\bar{u}$. Lorsque a^ε est une fonction de (t, x, y) il n'est probablement pas possible d'exprimer cette dépendance de façon simple. Les trois exemples suivants illustrent la diversité des phénomènes mis en jeu.

Exemple 1. — Les courbes caractéristiques associées à (1.8) sont données par

$$X^\varepsilon(0, t, x, y) = x + \int_0^t a^\varepsilon(s, y)\, ds, \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \Omega. \tag{1.10}$$

Il est clair que si $|a^\varepsilon(t, y| \leqq M$, on a $X^\varepsilon \in W^{1,\infty}_{Loc}(]0, T[\times \mathbb{R}, L^\infty(\Omega))$ mais n'appartient pas à un compact de $W^{1,\infty}_{Loc}(]0, T[\times \mathbb{R} \times \Omega)$. Cette absence de compacité montre qu'en général

$$\overline{a.u} \neq \bar{a}.\bar{u}. \tag{1.11}$$

Exemple 2. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons, au lieu de (1.8), l'équation :

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(y)\, \partial_x u^\varepsilon + \lambda\, \partial_y u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.12}$$

avec $a^\varepsilon \rightharpoonup \bar{a}\, L^\infty$ faible *. Les courbes caractéristiques vérifient dans ce cas :

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(0, t, x, y) &= x + \int_0^t a^\varepsilon(y + s\lambda)\, ds = x + \frac{1}{\lambda} \int_y^{y+t\lambda} a^\varepsilon(s)\, ds, \\ Y^\varepsilon(0, t, x, y) &= y + t\lambda. \end{aligned} \tag{1.13}$$

On voit alors (puisque a^ε intervient par sa moyenne) que X^ε vérifie

$$X^\varepsilon(0, t, x, y) \to X(0, t, x, y) \equiv x + \frac{1}{\lambda} \int_y^{y+t\lambda} a(s)\, ds \quad \text{p. p.} (t, x, y). \tag{1.14}$$

Dans ce cas, il est clair que

$$\overline{a.u} = \bar{a}.\bar{u}. \tag{1.15}$$

Exemple 3. — Considérons l'équation suivante :

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(x)\, \partial_x u^\varepsilon + b^\varepsilon(y)\, \partial_y u^\varepsilon = 0, \qquad t>0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.16}$$

avec $0<\alpha \leqq a^\varepsilon(x),\ b^\varepsilon(y) \leqq \beta$. Les courbes caractéristiques sont solutions de :

$$\dot{X} = a^\varepsilon(X^\varepsilon), \qquad \dot{Y}^\varepsilon = b^\varepsilon(Y^\varepsilon), \qquad X^\varepsilon(0) = x, \qquad Y^\varepsilon(0) = y \tag{1.17}$$

et sont données, de façon analogue au cas 1-D, *cf.* [3], par :

$$\begin{gathered} X^\varepsilon(0, t, x) = \Psi_\varepsilon^{-1}[\Psi_\varepsilon(x)+t],\ Y^\varepsilon(0, t, y) = \varphi_\varepsilon^{-1}[\varphi_\varepsilon(y)+t] \\ \Psi_\varepsilon(z) = \int_0^z \frac{ds}{a^\varepsilon(s)}, \qquad \varphi_\varepsilon(z) = \int_0^z \frac{ds}{b^\varepsilon(s)}. \end{gathered} \tag{1.18}$$

On vérifie alors que X^ε et Y^ε sont respectivement bornés dans $W^{1,\infty}_{\mathrm{Loc}}(]0, T[\times \mathbb{R}_x)$ et $W^{1,\infty}_{\mathrm{Loc}}(]0, T[\times \mathbb{R}_y)$ et par suite :

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(0, t, x) &\to X(0, t, x) = \Psi^{-1}[\Psi(x)+t] \quad \text{p. p. } (t, x) \\ Y^\varepsilon(0, t, y) &\to Y(0, t, y) = \varphi^{-1}[\varphi(y)+t] \quad \text{p. p. } (t, y) \end{aligned} \tag{1.19}$$

où l'on a posé :

$$\Psi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\bar{a}_{-1}(s)}, \qquad \varphi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\bar{b}_{-1}(s)} \tag{1.20}$$

avec $1/a^\varepsilon \rightharpoonup 1/\bar{a}_{-1},\ 1/b^\varepsilon \rightharpoonup 1/\bar{b}_{-1}$ L^∞ faible *.

Puisque $u^\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}$, L^∞ faible * alors $\bar{u}$ est solution de

$$\partial_t \bar{u} + \bar{a}_{-1}(x)\, \partial_x \bar{u} + \bar{b}_{-1}\, \partial_y \bar{u} = 0 \tag{1.21}$$

et sur cet exemple on voit que

$$\overline{a\, \partial_x u + b\, \partial_y u} = \bar{a}\, \partial_x \bar{u} + \bar{b}\, \partial_y \bar{u} + (\bar{a}_{-1} - \bar{a})\, \partial_x \bar{u} + (\bar{b}_{-1} - \bar{b})\, \partial_y \bar{u}. \tag{1.22}$$

Les exemples que nous venons de traiter illustrent la diversité des phénomènes intervenant dans le processus d'homogénéisation, même lorsque la propriété de compacité a lieu comme dans (1.22).

Le problème de l'homogénéisation de l'équation de transport considérée ici, est lié à l'étude des propriétés satisfaites par la mesure de Young ν_x associée à la solution u^ε. Nos premiers résultats dans ce sens ont été annoncés dans [4]. Divers problèmes de propagation d'oscillations dans les E.D.P. non linéaires ont été considérés par Tartar dans ses travaux sur l'étude des oscillations dans les équations aux dérivées partielles non linéaires [24], [25], [26], [27] (*cf.* également McLauglin-Papanicolaou-Tartar [15], Di Perna [10]). L'obtention des équations effectives satisfaites par les oscillations n'est pas toujours possible. Dans certains cas, on peut écrire des équations pour les oscillations, *cf.* Tartar [25], [26], [27] et aussi Serre [20], [21], Bonnefille [7], Lions-Papanicolaou-Varadhan [14]. Dans [20], [21], [7] les auteurs utilisent, suivant une idée de Tartar, les représentations de mesures par des fonctions de répartition. Dans notre travail, mettant à profit une suggestion de Tartar, nous utilisons la représentation intégrale de fonctions holomorphes du type Pick-Nevanlinna (*cf.* Ahiezer-Krein [1], Donoghue [12]). Cette méthode a été utilisée par Tartar [28], *cf.* également son récent preprint [30], et appliquée dans les problèmes de bornes optimales en homogénéisation, *cf.* Bergman [6], Golden-Papanicolaou [13] entre autres.

Ce travail est composé de trois parties. Dans la seconde partie nous étudions l'homogénéisation de l'équation de transport modèle (1.8). Le problème de Cauchy et le problème aux limites y sont considérés. Dans la troisième partie nous donnons une application à l'homogénéisation d'un cas particulier multidimensionnel de (1.1)-(1.2).

Nous avons bénéficié de fructueuses discussions avec Thierry Lehner, François Murat et Luc Tartar. C'est un plaisir de les remercier pour l'intérêt qu'il ont porté à notre travail et pour leurs encouragements.

II. HOMOGÉNÉISATION DE L'ÉQUATION MODÈLE

II.1. Le problème de Cauchy

Soit $(a^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^+\times\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$, vérifiant

$$|a^\varepsilon(t, y)|\leqq M \qquad \text{et} \qquad a^\varepsilon \rightharpoonup a, \quad L^\infty \text{ faible } * \tag{2.1}$$

Soit $T>0$ fixé. Pour tout $t\in[0, T]$, la suite $(A^\varepsilon(t, .))_\varepsilon$ de $L^\infty(\Omega)$ définie par

$$A^\varepsilon(t, y)=\int_0^t a^\varepsilon(s, y)\,ds, \qquad y\in\Omega, \tag{2.2}$$

vérifie alors

$$|A^\varepsilon(t, y)|\leqq T.M, \qquad A^\varepsilon(t, .)\rightharpoonup A(t, .)\ L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \tag{2.3}$$

avec $A(t, y)=\int_0^t a(x, y)\,ds$, $y\in\Omega$.

Pour $u_0\in L^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)\cap L^1(\mathbb{R}\times\Omega)$, on considère $u^\varepsilon(t, x, y)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\Omega$, la solution du problème de Cauchy

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(t, y)\,\partial_x u^\varepsilon=0, \qquad u^\varepsilon|_{t=0}=u_0. \tag{2.4}$$

La solution est donnée explicitement par,

$$u^\varepsilon(t, x, y)=u_0(x-A^\varepsilon(t, y), y)=(u_0(\,.\,, y)*h^\varepsilon_{t,\,y}(.))(x) \tag{2.5}$$

où $h^\varepsilon_{t,\,y}(x)=\delta(x=A^\varepsilon(t, y))$ est la masse de Dirac en $x=A^\varepsilon(t, y)$ et $*$ désigne la convolution par rapport à la variable x. Si $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier en la variable $x \in \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(k) = \int e^{-2 i \pi k x} f(x)\, dx$$

on a alors

$$\hat{u}^{\varepsilon}(t, k, y) = \hat{u}_0(k, y)\, \hat{h}^{\varepsilon}_{t, y}(k), \qquad \hat{h}^{\varepsilon}_{t, y}(k) = \exp(-2 i \pi k \mathrm{A}^{\varepsilon}(t, y)). \quad (2.6)$$

Soit $u(t, x, y)$ la limite faible de u^{ε}. Pour caractériser u il suffit de caractériser les oscillations de la mesure $h^{\varepsilon}_{t, y}(.)$ ou de sa transformée de Fourier $\hat{h}^{\varepsilon}_{t, y}(k)$, puisque pour toute fonction φ continue à support compact,

$$\langle h^{\varepsilon}_{t, y}(.), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{h}^{\varepsilon}_{t, y}}(k)\, \hat{\varphi}(k)\, dk. \quad (2.7)$$

Si $h_{t, y}(.)$ désigne la limite faible dans l'espace des mesures de $h^{\varepsilon}_{t, y}$, alors $\operatorname{supp}(h_{t, y}(.)) \subset [-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}]$ puisque $\langle h^{\varepsilon}_{t, y}(.), \varphi \rangle = \varphi(\mathrm{A}^{\varepsilon}(t, y))$. En fait, $h_{t, y}(.)$ est la mesure de Young $\nu^{t}_{y}(.)$ associée à la suite $(\mathrm{A}^{\varepsilon}(t, .))$ de $\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$. Soit $\hat{h}_{t, y}(.)$ la limite de $\hat{h}^{\varepsilon}_{t, y}(.)$ dans $\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$ faible $*$ on a

$$\langle h_{t, y}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{h}_{t, y}}(k)\, \hat{\varphi}(k)\, dk. \quad (2.8)$$

Le résultat suivant est utile pour écrire l'équation vérifiée par $\hat{h}_{t, y}(k)$. Il sera également utilisé dans le paragraphe II.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 1$. On considère une suite de fonctions a^{ε} de $\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{O})$ vérifiant

$$\begin{gathered} \alpha \leqq a^{\varepsilon}(x) \leqq \beta \quad \text{p.p. } x \in \mathcal{O}, \quad \alpha \neq -\infty, \quad \beta \neq +\infty \\ a^{\varepsilon} \rightharpoonup a \text{ dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{O}) \text{ faible } * \text{ quand } \varepsilon \to 0. \end{gathered} \quad (2.9)$$

On considère la suite de fonctions $\varphi^{\varepsilon}_{x}(z) = (z + a^{\varepsilon}(x))^{-1}$ définie sur $\mathcal{O} \times (\mathbb{C} \setminus \mathrm{I})$ où $\mathrm{I} = [-\beta, -\alpha]$. Elle vérifie

$$\begin{gathered} \varphi^{\varepsilon}_{.}(z) \rightharpoonup \varphi_{.}(z) \text{ dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{O}) \text{ faible } *, \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{I}, \\ \varphi_{x}(z) = \langle \nu_{x}, (z + \lambda)^{-1} \rangle, \end{gathered} \quad (2.10)$$

où (ν_x) est la famille de mesures de Young associée à la suite (a^{ε}). La fonction $z \to \varphi^{\varepsilon}_{x}(z)$ est pour presque tout $x \in \mathcal{O}$, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{I}$, et admet le développement asymptotique suivant,

$$\varphi^{\varepsilon}_{x}(z) = \frac{1}{z} \{ 1 - a^{\varepsilon}(x)/z + (a^{\varepsilon}(x))^2/z^2 \\ - (a^{\varepsilon}(x))^3/z^3 + \ldots + O(z^{-n-1}) \}. \quad (2.11)$$

En notant, pour $n \geqq 2$,

$$(a^{\varepsilon})^{n} \rightharpoonup a_n \text{ dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{O}) \text{ faible } *, \quad (2.12)$$

on voit que $\varphi_x(z)$ vérifie

$$\varphi_x(z)=\frac{1}{z}\{1-a(x)/z+a_2(x)/z^2-a_3(x)/z^3+\ldots+O(z^{-n-1})\}. \tag{2.13}$$

On définit la fonction $z \to K_x(z)$ sur $\mathbb{C}\setminus I$ par,

$$K_x(z) \equiv z+a(x)-(\varphi_x(z))^{-1} \tag{2.14}$$

de sorte que $K_x(.)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus I$ et, admet le développement asymptotique suivant,

$$K_x(z)=\sum_{k=1}^{n} z^{-k}\tau_{k-1}(x)+O(z^{-n-1}), \qquad \forall n \geqq 1. \tag{2.15}$$

Les fonctions τ_k sont explicitement déterminées en fonction de a et a_j pour $2 \leqq j \leqq k$ et $k=0, 1, \ldots, n$. On vérifie que l'on a,

$$\left.\begin{aligned}\tau_0(x)&=a_2(x)-(a(x))^2,\\ \tau_1(x)&=-\{a_3(x)-2a(x)\,a_2(x)+(a(x))^3\}.\end{aligned}\right. \tag{2.16}$$

Nous allons montrer que la fonction $z \to K_x(z)$ est du type Pick-Nevanlinna et par suite, le théorème de représentation intégrale pour ces fonctions s'applique *cf.* Ahiezer-Krein [1], pp. 54-55 et 58-59. La fonction $K_x(z)$ est holomorphe en dehors de I, elle est réelle pour $z \in \mathbb{R}\setminus I$ et vérifie $K_x(\infty)=0$. En outre, on a,

$$\operatorname{Im}(K_x(z))=\operatorname{Im}(z)\{1-\langle \nu_x, |z+\lambda|^{-2}\rangle\langle \nu_x, (z+\lambda)\rangle^{-2}\}, \tag{2.17}$$

de sorte que l'inégalité de Jensen appliquée à ν_x montre que $\operatorname{Im}(K_x(z))<0$ si $\operatorname{Im}(z)>0$. En appliquant le théorème de représentation cité plus haut, il existe, pour presque tout $x \in \mathcal{O}$, une fonction $\lambda \to \omega_x(\lambda)$ croissante et bornée sur $[-\beta, -\alpha]$ telle que,

$$K_x(z)=\int_{-\beta}^{-\alpha}(z-\lambda)^{-1}\,d\omega_x(\lambda) \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C}\setminus I. \tag{2.18}$$

La mesure $d\omega_x(.)$ est positive, à support dans $[-\beta, -\alpha]$ et vérifie

$$\int_{-\beta}^{-\alpha}\lambda^k\,d\omega_x(\lambda)=\tau_k(x) \qquad \text{pour} \quad k=0, 1, \ldots, n. \tag{2.19}$$

On a montré le résultat suivant,

PROPOSITION 2.1. — *La limite $\varphi_x(z)$, dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible $*$, de la suite $\varphi_x^\varepsilon(z)$ est donnée par,*

$$\varphi_x(z)=\left\{z+a(x)-\int_{-\beta}^{-\alpha}(z-\lambda)^{-1}\,d\omega_x(\lambda)\right\}^{-1} \quad \textit{pour p.p. } x \in \mathcal{O} \tag{2.20}$$

et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{I}$, *où* $d\omega_x(.)$ *est la mesure donnée ci-dessus et, vérifiant* (2.19). *En outre si* $\alpha > 0$ *alors on a,*

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^{-k-1}\, d\omega_x(\lambda) = \frac{(-1)^k}{k\,!}\, \mathrm{K}_x^{(k)}(0)$$
$$= \frac{d^k}{dz^k} \{ z - [\langle \nu_x, (z+\lambda)^{-1} \rangle]^{-1} \} \big|_{z=0}. \quad (2.21)$$

En particulier, si $(a^\varepsilon)^{-n} \rightharpoonup a_{-n}$ *pour* $n \geqq 1$ *on a,*

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^{-1}\, d\omega_x(\lambda) = a_{-1}^{-1} - a, \qquad \int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^{-2}\, d\omega_x(\lambda) = a_{-2}/(a_{-1})^2 - 1. \quad (2.22)$$

On peut maintenant établir le

LEMME 2.1. — *Il existe une fonction* $\lambda \to \omega_y^t(\lambda)$ *croissante et bornée sur* $[-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}]$ *telle que* $\hat{h}_{t,\,y}(k)$ *satisfait l'équation suivante : Pour tout* $k \in \mathbb{R}$,

$$\partial_k \hat{h}_{t,\,y}(k) + 2 i \pi \mathrm{A}(t, y)\, \hat{h}_{t,\,y}(k) + 4\pi^2 \int_{-\mathrm{TM}}^{\mathrm{TM}} d\omega_y^t(\lambda) \int_0^k \hat{h}_{t,\,y}(\sigma)\, e^{2 i \pi \lambda (k-\sigma)}\, d\sigma = 0 \quad (2.23)$$

pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$ *et p.p.* $y \in \Omega$. *En outre, tous les moments de la mesure positive* $d\omega_y^t(.)$ *sont explicitement déterminés en fonction des limites dans* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *faible* $*$, *des suites* $(\mathrm{A}^\varepsilon(t, .))^n$, $n \geqq 2$, *pour* $t \in [0, \mathrm{T}]$ *fixé où,*

$$(A^\varepsilon(t, .)^n \rightharpoonup \mathrm{A}_n(t, .)\ \mathrm{L}^\infty(\Omega) \text{ faible } *. \quad (2.24)$$

On a en particulier :

$$\begin{aligned} &\int_{-\mathrm{TM}}^{\mathrm{TM}} d\omega_y^t(\lambda) = \mathrm{A}_2(t, y) - \mathrm{A}^2(t, y) \geqq 0 \\ &\int_{-\mathrm{TM}}^{\mathrm{TM}} \lambda\, d\omega_y^t(\lambda) = -\{ \mathrm{A}_3(t, y) - 2\mathrm{A}(t, y)\, \mathrm{A}_2(t, y) + \mathrm{A}^3(t, y) \}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{L}(\hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(.))(p)$, $p \in \mathbb{C}$, la transformée de Laplace de $\hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(k)$ pour $k > 0$ définie par

$$\mathscr{L}(g(.))(p) = \int_0^{+\infty} \bar{e}^{pk} g(k)\, dk \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

alors on a

$$\mathscr{L}(\hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(.))(p) = (p + 2 i \pi \mathrm{A}^\varepsilon(t, y))^{-1} \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(p) > 0. \quad (2.26)$$

Notons que $\hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(k)$ vérifie $\hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(0) = 1$ et l'équation différentielle :

$$\partial_k \hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(k) + 2 i \pi \mathrm{A}^\varepsilon(t, y)\, \hat{h}^\varepsilon_{t,\,y}(k) = 0, \qquad k \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

On définit dans $\mathbb{C}$ la fonction :

$$\left.\begin{array}{l} G^{\varepsilon}_{t,\,y}(z)=(z+A^{\varepsilon}(t,\,y))^{-1} \quad \text{pour} \quad z\in\mathbb{C}, \\ z\notin\Lambda_T\equiv[-TM,\,TM]. \end{array}\right\} \tag{2.28}$$

On a clairement

$$\mathscr{L}(\hat{h}^{\varepsilon}_{t,\,y}(\,.\,))(p)=\frac{1}{2i\pi}\,G^{\varepsilon}_{t,\,y}\left(\frac{p}{2i\pi}\right).$$

La fonction $z\to G^{\varepsilon}_{t,\,y}(z)$ est régulière dans $\mathbb{C}\diagdown\Lambda_T$ (ses pôles sont dans Λ_T). On peut appliquer la proposition 2.1 à la fonction $G^{\varepsilon}_{t,\,y}(z)$ en posant $\mathcal{O}=]0,\,T[\times\Omega$ et $a^{\varepsilon}(t,\,y)=A^{\varepsilon}(t,\,y)$. On obtient, pour tout $T>0$ et $z\in\mathbb{C}\diagdown\Lambda_T$,

$$\begin{array}{l} G^{\varepsilon}_{.\,,\,.}(z)\rightharpoonup G_{.\,,\,.}(z) \text{ dans } L^{\infty}(]0,\,T[\times\Omega) \text{ faible } * \\ G_{t,\,y}(z)=\left\{z+A(t,\,y)-\displaystyle\int_{-TM}^{TM}(z-\lambda)^{-1}\,d\omega^{t}_{x}(\lambda)\right\}^{-1} \end{array} \tag{2.29}$$

où $d\omega^{t}_{x}(\,.\,)$ est la mesure donnée dans la proposition 2.1. Puisque l'on a $A^{\varepsilon}(t,\,y)=\displaystyle\int_0^t a^{\varepsilon}(s,\,y)\,ds$, on déduit le résultat plus précis suivant,

$$G^{\varepsilon}_{t,\,.}(z)\rightharpoonup G_{t,\,.}(z) \quad \text{dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible } *, \tag{2.30}$$

pour tout $t\in[0,\,T]$ fixé et pour tout $z\in\mathbb{C}\diagdown\Lambda_t$ où $\Lambda_t=[-t\,M,\,t\,M]$. La proposition 2.1 montre alors que l'on a pour tout $t\in[0,\,T]$, $z\notin\Lambda_t$,

$$G_{t,\,y}(z)=\left\{z+A(t,\,y)-\int_{-tM}^{tM}(z-\lambda)^{-1}\,d\omega^{t}_{y}(\lambda)\right\}^{-1} \text{ p. p. en } y\in\Omega.$$

De plus, comme $\partial_t G^{\varepsilon}_{t,\,y}(z)=-a^{\varepsilon}(t,\,y)\,[G^{\varepsilon}_{t,\,y}(z)]^2$ alors $G^{\varepsilon}_{.\,,\,.}$ est bornée dans $W^{1,\,\infty}(]0,\,T]\times\Omega)$ donc, $\partial_t G^{\varepsilon}_{.\,,\,.}\rightharpoonup\partial_t G_{.\,,\,.}$ dans $L^{\infty}(]0,\,T[\times\Omega)$ faible $*$ pour tout $z\notin\Lambda_T$. On trouve que $\partial_t G_{t,\,y}(z)\in L^{\infty}(]0,\,T[\times\Omega)$. Puisque par définition $K_{t,\,y}(z)=z+\displaystyle\int_0^t a(s,\,y)\,ds-[G_{t,\,y}(z)]^{-1}$ alors, on voit que $\partial_t K_{.\,,\,.}(z)\in L^{\infty}(]0,\,T[\times\Omega)$ et finalement $K_{.\,,\,.}\in W^{1,\,\infty}(]0,\,T[\times\Omega)$ pour tout $z\notin\Lambda_T$.

Soient maintenant $t\in[0,\,T]$ et $p\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p)>0$ alors on a

$$\mathscr{L}(\hat{h}^{\varepsilon}_{t,\,y}(\,.\,)(p)\rightharpoonup\mathscr{L}(\hat{h}_{t,\,y}(\,.\,))(p) \; L^{\infty}(\Omega) \text{ faible } *.$$

Avec (2.14) on voit que pour $\mathrm{Re}(p)>0$ et $p\notin i\,\Lambda_T$:

$$\mathscr{L}(\hat{h}_{t,\,y}(\,.\,))(p)=\left(p+2i\pi A(t,\,y)+4\pi^2\int_{-TM}^{TM}\frac{d\omega^{t}_{y}(\lambda)}{p-2i\pi\lambda}\right)^{-1}. \tag{2.31}$$

En prenant la transformation de Laplace de (2.30), on déduit (2.23) pour $k \geq 0$. On adapte ensuite les calculs précédents pour $k<0$. On obtient finalement (2.23) pour tout $k \in \mathbb{R}$. On trouve la même équation.

THÉORÈME 2.1. — *La limite faible u de u^ε solution de* (2.4) *est donnée par :*

$$u(t, x, y)=(u_0(., y) * h_{t, y}(.))(x) \tag{2.32}$$

où $h_{t, y}(k)$ (vérifiant $\hat{h}_{t, y}(0)=1$) est solution de l'équation :

$$(x+\mathrm{A}(t, y))\, h_{t, y}(x)-\int_{-\mathrm{TM}}^{\mathrm{TM}} d\omega_y^t(\lambda)\,[2 i \pi \mathrm{F}_{t, y}(\lambda, x)]=0 \tag{2.33}$$

où $\mathrm{F}_{t, y}(\lambda, u)$ est la distribution tempérée de x, régulière en λ, donnée par l'équation de division de distributions :

$$\left.\begin{aligned}(x-\lambda)[2 i \pi \mathrm{F}_{t, y}(\lambda, x)]=h_{t, y}(x), \qquad \forall \lambda \in[-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}] \\ \hat{\mathrm{F}}_{t, y}(\lambda, 0)=0, \qquad \forall \lambda \in[-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}].\end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Démonstration. — En prenant la transformation de Fourier inverse de (2.23) il vient :

$$2 i \pi(x+\mathrm{A}(t, y))\, h_{t, y}+4 \pi^2 \int d\omega(\lambda)\, \mathrm{F}_{t, y}(\lambda, x)=0$$

où $\mathrm{F}_{t, y}(\lambda, .)$ est la distribution définie par

$$\hat{\mathrm{F}}_{t, y}(\lambda, k)=\int_0^k \hat{h}_{t, y}(\sigma) \exp (2 i \pi \lambda(k-\sigma))\, d\sigma \tag{2.35}$$

On a $\hat{\mathrm{F}}_{t, y} \in \mathrm{C}^{\infty}(]-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}[, \mathscr{S}'(\mathbb{R}))$ et vérifie $\partial_k \hat{\mathrm{F}}_{t, y}-2 i \pi \lambda\, \hat{\mathrm{F}}_{t, y}=\hat{h}_{t, y}$.

En prenant la transormation de Fourier inverse on a

$$2 i \pi(x-\lambda) . \mathrm{F}_{t, y}(\lambda, x)=h_{t, y}(x) \tag{2.36}$$

dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ pour tout $\lambda \in[-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}]$.

La division des distributions est possible mais on ne peut exprimer la dépendance de $\mathrm{F}_{t, y}$ par rapport à $h_{t, y}$ puisque les zéros de $x-\lambda$ sont exactement dans le support de la mesure $h_{t, y}$.

Remarque 2.1. — La fonction holomorphe $z \rightarrow \mathrm{K}_y^t(z)$ donnée par (2.18) est définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus [-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}]$, alors que le second terme de (2.32) fait intervenir, d'après (2.33), exactement les points de $[-\mathrm{TM}, \mathrm{TM}]$.

Lorsque le coefficient a^ε est indépendant de t, il est possible d'écrire une équation aux dérivées partielles pour u.

THÉORÈME 2.2. — *Soit (a^ε) une suite de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, indépendante de t, vérifiant* (2.1). *Soit $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; (\mathrm{L}^\infty \cap \mathrm{L}^1)(\Omega))$ la limite faible de u^ε solution de* (2.4). *Alors, pour presque tout y, il existe une fonction $\nu_y(.)$ croissante* *et bornée sur* $[-M, M]$ *telle que u vérifie*

$$\begin{gathered}\partial_t u + a(y)\,\partial_x u - \int_0^t \int_{-M}^{M} d\nu_y(\lambda)\,\partial_x^2 u(s,\ x+\lambda(t-s),\ y)\,ds = 0,\\ u\big|_{t=0} = u_0.\end{gathered}\tag{2.37}$$

La mesure $d\nu_y(.)$, *positive à support dans* $[-M, M]$, *a tous ses moments entièrement déterminés par les limites* $L^\infty(\Omega)$ *faible* $*$ *de* $(a^\varepsilon)^n$, $n \geqq 2$.

Si on note $(a^\varepsilon)^n \rightharpoonup a_n\, L^\infty(\Omega)$ *faible* $*$, *on a par exemple :*

$$\begin{gathered}\int d\nu_y(\lambda) = a_2(y) - a^2(y),\\ \int \lambda\, d\nu_y(\lambda) = -\{a_3(y) - 2\,a(y)\,a_2(y) + a^3(y)\}.\end{gathered}\tag{2.38}$$

Si la suite (a^ε) *vérifie* $0 < m \leqq a^\varepsilon(y) \leqq M$ *p. p dans* Ω *alors, le support de* $d\nu_y$ *est dans* $[-M, -m]$ *et on peut déterminer explicitement* $\int \lambda^{-k}\, d\nu_y(\lambda)$, $\forall\, k \geqq 1$. *En particulier on a*

$$\begin{gathered}\int \lambda^{-1}\, d\nu_y(\lambda) = a_{-1}(y) - a(y),\\ \int \lambda^{-2}\, d\nu_y(\lambda) = a_{-2}(y)/(a_{-1}(y))^2 - 1.\end{gathered}\tag{2.39}$$

où nous avons noté $(a^\varepsilon)^{-n} \rightharpoonup (a_{-n})^{-1}\, L^\infty(\Omega)$ *faible* $*$.

Démonstration. — La fonction $\hat{h}^\varepsilon_{t,y}(\,.\,)$ est donnée ici par $\hat{h}^\varepsilon_{t,y}(k) = \exp(-2\,i\,\pi\, k t a^\varepsilon(y))$. Les variables $t > 0$ et $k > 0$ jouant le même rôle, on voit alors que $\hat{h}_{t,y}(k)$ la limite faible de $\hat{h}^\varepsilon_{t,y}(k)$, vérifie les deux équations suivantes :

$$\partial_k \hat{h}_{t,y}(k) + 2\,i\,\pi\, t a(y)\,\hat{h} + 4\,\pi^2\, t^2 \times \int_{-M}^{M} d\nu_y(\lambda) \int_0^k \hat{h}_{t,y}(\sigma)\, e^{2\,i\,\pi\lambda\, t\,(k-\sigma)}\, d\sigma = 0 \tag{2.40}$$

$$\partial_t \hat{h}_{t,y}(k) + 2\,i\,\pi\, k a(y)\,\hat{h} + 4\,\pi^2\, k^2 \times \int_{-M}^{+M} d\nu_y(\lambda) \int_0^t \hat{h}_{t,y}(s)\, e^{2\,i\,\pi\lambda\, k\,(t-s)}\, ds = 0 \tag{2.41}$$

où $d\nu_y(\,.\,)$ est la mesure associée à la suite (a^ε) construite comme dans le lemme 2.1. On peut multiplier la seconde équation par $u_0(k, y)$ et prendre la transformation de Fourier inverse. On déduit alors l'équation annoncée. Pour démontrer (2.38) on utilise le fait que la fonction $K_y(z)$ est donnée par

$$K_y(z) = -\int_{-M}^{-m} \frac{d\nu_y(\lambda)}{z-\lambda}, \qquad z \notin [-M, -m], \tag{2.42}$$

et vérifie : $K_y^{(n)}(0) = n! \int_{-M}^{-m} \lambda^{-n-1}\, d\nu_y(\lambda)\, n \geq 0$. D'après (2.29), on a

$$K_y^{(0)}(0) = 1 - G_y^{-1}(0), \qquad K_y^{(1)}(0) = \left(\frac{1}{G(z)}\right)'\bigg|_{z=0} - 1.$$

En outre, puisque $G_y(z) = \langle \sigma_y, (z+\lambda)^{-1} \rangle$, où σ_y est la mesure de Young associée à la suite (a^ε), on déduit alors facilement le résultat (2.38).

II.2. Le problème aux limites

On suppose ici que la suite (a^ε) est indépendante de t et vérifie

$$0 < m \leq a^\varepsilon(y) \leq M, \quad a^\varepsilon \rightharpoonup a\, L^\infty(\Omega) \text{ faible} * \tag{2.43}$$

On considère alors le problème aux limites :

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(y)\, \partial_x u^\varepsilon = 0, &\qquad t>0, \quad (x, y) \in \mathcal{O} =]0, 1[\times \Omega \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 &\qquad \text{pour} \quad (x, y) \in \mathcal{O} \\ u^\varepsilon|_{x=0} = 0 &\qquad \text{pour} \quad t>0, \quad y \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Comme $a^\varepsilon(y) \geq m > 0$, la solution s'obtient en la prolongeant par 0 pour $x<0$ puis en la restreignant à $0<x<1$. La méthode précédente s'applique donc à ce problème. Nous donnons dans ce qui suit une seconde méthode n'utilisant pas la transformation de Fourier et donc valable dans les espaces L^p. Le semi-groupe associé au problème s'exprime à l'aide de la résolvante par la formule suivante,

$$u^\varepsilon(t, .) = S^\varepsilon(t)(u_0) = \int_\Gamma e^{pt} (p + a^\varepsilon \partial_x)^{-1} (u_0)\, dp \tag{2.45}$$

où Γ est un contour de $\mathbb{C}$ convenablement choisi.

Pour $y \in \Omega$ fixé, on définit l'opérateur T par :

$$\left.\begin{aligned} D(T) &= \{ u \in H^1(0, 1),\ u(0) = 0 \} \\ Tu &= \partial_x u \qquad \text{pour} \quad u \in D(T). \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

L'opérateur T est maximal positif dans $L^2(0, 1)$, pour tout $f \in L^2(0, 1)$, il existe une seule $w^\varepsilon(.\,, y) \in D(T)$ solution de

$$\left.\begin{aligned} p\,.\,w^\varepsilon(.\,, y) + a^\varepsilon(y)\, \partial_x w^\varepsilon(.\,, y) = f &\qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}(p) > 0 \\ w^\varepsilon|_{x=0} = 0. & \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

En prenant la transformée de Laplace en t de (2.44) et en posant

$$v^{\varepsilon}(x, y) = \mathscr{L}(u^{\varepsilon}(., x, y))(p), \tag{2.48}$$

alors v^{ε} vérifie

$$\left.\begin{aligned} pv^{\varepsilon} + a^{\varepsilon}(y)\,\partial_x v^{\varepsilon} = u_0 \in \mathrm{L}^2(]0, 1[\times\Omega), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0, \\ v^{\varepsilon}\big|_{x=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

On approche, dans $\mathrm{L}^2((0, 1)\times\Omega)$, u_0 par un élément v_0 de $\mathscr{D}(]0, 1[\times\Omega)$ de sorte que la solution v^{ε} associée à v_0 est donnée par :

$$v^{\varepsilon}(., y) = (p + a^{\varepsilon}(y)\,\mathrm{T})^{-1}(v_0(., y)), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0. \tag{2.50}$$

On utilise la formule de représentation de Dunford pour la résolvante $(p + a^{\varepsilon}(y)\,\mathrm{T})^{-1}$, on a :

$$v^{\varepsilon}(., y) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\Gamma_p^+}(z - a^{\varepsilon}(y))^{-1}(p + z\,\mathrm{T})^{-1}(v_0(., y))\,dz \tag{2.51}$$

où Γ_p^+ est le contour de $\mathbb{C}$, entourant $[m, \mathrm{M}]$ et contenu dans le demi-plan :

$$\mathrm{D}_p = \{ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(p.\bar{z}) > 0 \}. \tag{2.52}$$

En effet le problème,

$$\left.\begin{aligned} pw + z\,\partial_x w = v_0(., y) \\ w(0, y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

admet, pour tout $y \in \Omega$ fixé, une unique solution $w(x, y, z)$ dans $\mathrm{H}^1(0, 1)$ telle que $w(0, y, z) = 0$ dès que $\mathrm{Re}(p\,\bar{z}) \neq 0$ et vérifiant la majoration,

$$|w(., y, z)|_{\mathrm{L}^2(0, 1)} \leqq \frac{|z|}{|\mathrm{Re}(p\bar{z})|}\,|v_0(., y)|_{\mathrm{L}^2(0, 1)}. \tag{2.54}$$

On définit pour $\mathrm{Re}(p) > 0$ les domaines $\mathrm{C}_p^+ = \{ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0,\ \mathrm{Re}(p\bar{z}) > 0 \}$ et $\mathrm{D}_p^+ = \{ z \in \mathrm{C}_p^+,\ z \notin [m, \mathrm{M}] \}$. L'application $z \to w(., y, z)$ est holomorphe de C_p^+ dans $\mathrm{L}^2(0, 1)$. Les pôles de $(z - a^{\varepsilon}(y))^{-1}$ sont dans $[m, \mathrm{M}]$ alors $z \to (z - a^{\varepsilon}(y))^{-1}\,w(., y, z)$ est holomorphe de D_p^+ dans $\mathrm{L}^2(0, 1)$. Le théorème de Cauchy classique montre que,

$$w(., y, a^{\varepsilon}(y)) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\Gamma_p^+}(z - a^{\varepsilon}(y))^{-1}\,w(., y, z)\,dz \tag{2.55}$$

où Γ_p^+ est un contour fermé dans D_p^+, entourant $[m, \mathrm{M}]$.

On considère la fonction $\varphi_y^{\varepsilon}(z)$ définie par :

$$\varphi_y^{\varepsilon}(z) = (z - a^{\varepsilon}(y))^{-1} \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda \text{ avec } \Lambda = [m, \mathrm{M}]. \tag{2.56}$$

En utilisant la proposition 2.1 on obtient

$$\begin{gathered}\varphi_{.}^{\varepsilon}(z) \rightharpoonup \varphi_{.}(z) \quad \mathrm{L}^{\infty}(\Omega) \text{ faible } *, \\ \varphi_y(z)=\left(z-a(y)-\int_m^{\mathrm{M}} d\nu_y(\lambda)(z-\lambda)^{-1}\right)^{-1}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\Lambda,\end{gathered} \tag{2.57}$$

où $d\nu_y(\,.\,)$ est une mesure positive à support dans $[m, \mathrm{M}]$, associée à la suite $(-a^{\varepsilon})$, dont tous les moments sont explicitement déterminés en fonction des limites de $(-a^{\varepsilon})^n$, $n\geqq 2$, dans $\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$ faible $*$.

La suite v^{ε} définie par (2.49) et donnée par (2.51) est bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, par suite, $v^{\varepsilon} \rightharpoonup v$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ faible et on a

$$v(.\,,y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_p^+}\varphi_y(z).\,(p+z\mathrm{T})^{-1}(v_0(.\,,y))\,dz. \tag{2.58}$$

En vue d'utiliser les propriétés de l'intégrale de Dunford on fait dans (2.58) le changement de variable $\zeta=1/z$. On définit le contour $\Gamma_p^*=\{\zeta\in\mathbb{C},\ 1/\zeta\in\Gamma_p^+\}$ alors (2.58) devient

$$v(.\,,y)=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_p^*}\tilde{\varphi}_y(\zeta)\left(\zeta+\frac{1}{p}\mathrm{T}\right)^{-1}d\zeta \tag{2.59}$$

avec :

$$\tilde{\varphi}_y(\zeta)=(1-a(y)\zeta-\zeta^2\int d\nu_y(\lambda).\,(1-\lambda\zeta)^{-1})^{-1}. \tag{2.60}$$

Le second membre de (2.59) définit à l'aide de l'intégrale de Dunford, la fonction d'opérateur $\frac{1}{p}\tilde{\varphi}_y\left(-\frac{1}{p}\mathrm{T}\right)$ pour $y\in\Omega$ fixé.

On a donc pour tout $y\in\Omega$ et tout $p\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p)>0$:

$$\begin{aligned}v(.,\,y)&=\frac{1}{p}\tilde{\varphi}_y\left(-\frac{1}{p}\mathrm{T}\right)\\&=\left[p+a(y)\mathrm{T}-\mathrm{T}^2\int(p+\lambda\mathrm{T})^{-1}d\nu_y(\lambda)\right]^{-1}(v_0(.\,,y)).\end{aligned} \tag{2.61}$$

Ce résultat est vrai pour tout $v_0\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Par densité, il est vrai pour tout $v_0\in\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$. Enfin, on voit facilement que les opérateurs T et $(p+\lambda\mathrm{T})^{-1}$

commuttent. Nous avons démontré le :

LEMME 2.2. — *Soit v^ε la solution de* (2.35) *associée à* $u_0 \in L^2(]0, 1[\times\Omega)$. *Alors*

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v \quad L^2(\mathcal{O}) \text{ faible}, \qquad v(., y) \in D(T) \text{ p. p. } y \in \Omega, \tag{2.62}$$

$$\begin{gathered} pv(., y) + a(y) T v(., y) - \int_m^M d\nu_y(\lambda)(p+\lambda T)^{-1} T^2 v(., y) = 0, \\ v|_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{2.63}$$

Nous pouvons démontrer le

THÉORÈME 2.3. — *Soit u^ε la solution du problème* (2.30). *Alors*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad L^\infty(0, T, L^2(\mathcal{O})) \textit{ faible } * \tag{2.64}$$

et u vérifie le problème

$$\begin{gathered} \partial_t u + a(y)\partial_x u - \\ - \int_0^t ds \int_m^M d\nu_y(\lambda)\, \partial_x^2 u(s, x - \lambda(t-s), y) = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times\mathcal{O} \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ u|_{x=0} = 0 \quad \text{dans } [0, T]\times\Omega. \end{gathered} \tag{2.65}$$

Démonstration. — Soit $v^\varepsilon(x, y) = \mathcal{L}(u^\varepsilon(., x, y))(p)$, $\mathrm{Re}(p) > 0$, la transformée de Laplace en $t > 0$ de la solution u^ε de (2.44); v^ε est donc solution de (2.49) et vérifie (2.62) et (2.63), d'après le lemme 2.2. Soit $f(x, y)$ la solution du problème

$$\begin{gathered} pf(., y) + \lambda\,\partial_x f(., y) = v(., y), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0, \quad \lambda \in [m, M], \\ f|_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{2.66}$$

On note $F(t, x, y)$ la transformée inverse de $f(x, y)$, solution de (2.66). On a

$$\begin{gathered} \partial_t F + \lambda\,\partial_x F = u(t, ., y) \\ F|_{t=0} = 0, \\ F|_{x=0} = 0, \end{gathered} \tag{2.67}$$

de sorte que $F(t, x + \lambda t, y) = \int_0^t u(s, x + \lambda s, y)\, ds$ pour $0 \leqq x + \lambda s \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq t$.

En prenant la transformation de Laplace inverse de (2.63) on trouve (2.65). D'où le théorème.

III. APPLICATION : HOMOGÉNÉISATION EN MILIEU POREUX

Nous étudions ici le comportement global de la pression p^ε et de la concentration u^ε de fluides miscibles en milieu poreux hétérogène. Les équations du mouvement sont données par (1.1) et (1.2). On considère ici le cas où $\mathcal{O}=]0,1[\times\Omega$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$, borné et régulier. On suppose que la porosité $\varphi^\varepsilon(x,y)\equiv\varphi^\varepsilon(y)$ et que la matrice de perméabilité $K^\varepsilon(x,y)=(k_{ij}^\varepsilon(x,y))$ vérifie $k_{ij}^\varepsilon\equiv 0 j \not\equiv,\ i\not\equiv 1$ de sorte que la loi de Darcy s'écrit (*cf.* introduction) :

$$q_1^\varepsilon(t,x,y)=-\frac{k^\varepsilon(x,y)}{\mu}\partial_x p^\varepsilon,\qquad q_j^\varepsilon(t,x,y)=0,\quad j=2,\ldots,N. \tag{3.1}$$

On considère d'abord le cas où $\varphi^\varepsilon\equiv 1$. Le problème est donc de trouver la limite faible de la solution $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ du système :

$$\begin{gathered}-\partial_x\left(\frac{k^\varepsilon(x,y)}{\mu}\partial_x p^\varepsilon\right)=0 \quad \text{dans } \mathcal{O},\\ p^\varepsilon(t,0,y)=p_0(y),\qquad p^\varepsilon(t,1,y)=p_1(y)\quad \text{dans }]0,1[\times\Omega.\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\partial_t u^\varepsilon-\frac{k^\varepsilon(x,y)}{\mu}\partial_x p^\varepsilon.\partial_x u^\varepsilon=0 \quad \text{dans }]0,T[\times\mathcal{O},\\ u^\varepsilon|_{t=0}=u_0 \quad \text{dans } \mathcal{O}\\ u^\varepsilon|_{x=0}=0 \quad \text{dans } [0,T]\times\Omega.\end{gathered} \tag{3.3}$$

On suppose dans la suite $\mu\equiv 1$ et le coefficient $k^\varepsilon(x,y)$ tel que

$$\begin{gathered}0<m_1\leqq k^\varepsilon(x,y)\leqq m_2,\\ k^\varepsilon\rightharpoonup k,\qquad 1/k^\varepsilon\rightharpoonup 1/k_{-1}\quad \text{dans } L^\infty(\mathcal{O}) \text{ faible } *.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Le débit $q_1^\varepsilon(t,x,y)$ est indépendant de x d'après (3.2), et on a

$$q_1^\varepsilon(t,x,y)=\frac{\beta(y)}{\displaystyle\int_0^1 dx/k^\varepsilon(x,y)}\qquad \text{avec}\quad \beta(y)=p_0(y)-p_1(y). \tag{3.5}$$

On suppose en outre que la différence de pression β vérifie

$$0<\beta_1\leqq p_0(y)-p_1(y)\leqq\beta_2,\qquad \forall y\in\Omega, \tag{3.6}$$

de sorte que la condition aux limites pour le problème (3.3) convient. u^ε vérifie donc

$$\begin{gathered}\partial_t u^\varepsilon+a^\varepsilon(y)\partial_x u^\varepsilon=0 \quad \text{dans }]0,T[\times\mathcal{O},\\ u^\varepsilon|_{t=0}=u_0 \quad \text{dans } \mathcal{O},\\ u^\varepsilon|_{x=0}=0 \quad \text{dans } [0,T]\times\Omega,\end{gathered} \tag{3.7}$$

où $a^\varepsilon(y)$ est donné par :

$$a^\varepsilon(y)=\frac{\beta(y)}{\sigma^\varepsilon(y)} \qquad \text{avec} \quad \sigma^\varepsilon(y)=\int_0^1 \frac{dx}{k^\varepsilon(x, y)} \tag{3.8}$$

et vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} 0<\beta(y)\, m_1 \leqq a^\varepsilon(y) \leqq \beta(y)\, m_2, \qquad 0<m_2^{-1} \leqq \sigma^\varepsilon(y) \leqq m_1^{-1} \\ a^\varepsilon \rightharpoonup a, \qquad 1/a^\varepsilon \rightharpoonup 1/a_{-1}, \qquad \sigma^\varepsilon \rightharpoonup \sigma, \\ 1/\sigma^\varepsilon \rightharpoonup 1/\sigma_{-1} \quad \mathrm{L}^\infty(\Omega) \text{ faible } *. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Notons que l'on a

$$a(y)=\beta(y)\, \sigma_{-1}^{-1}(y) \qquad \text{et} \qquad a_{-1}^{-1}(y)=\beta(y) \int_0^1 k_{-1}^{-1}(x, y)\, dy. \tag{3.10}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3.1. — *Soit (u, p) la limite faible de $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$, l'unique solution de* (3.3). *Alors (u, p) est solution du système suivant :*

$$\left.\begin{gathered} -\partial_x(\mathbb{K}(x, y)\, \partial_x p)=0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ p\,|_{x=0}=p_0, \qquad p\,|_{x=1}=p_1 \quad \text{dans } \Omega, \end{gathered}\right\} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} \partial_t u-\mathbb{K}(x, y)\, \partial_x p \,.\, \partial_x u- \\ -\int_0^t ds \int d\nu_y(\lambda)\, \partial_x^2 u(s, x-\lambda(t-s), y)=0 \quad \text{dans }]0, \mathrm{T}[\times \mathcal{O} \\ u\,|_{t=0}=u_0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u\,|_{x=0}=0 \quad \text{dans } [0, \mathrm{T}] \times \Omega, \end{gathered} \tag{3.12}$$

où $\mathbb{K}(x, y)$ est la fonction de perméabilité définie sur $\mathcal{O}$ par

$$\mathbb{K}(x, y)=\sigma_{-1}^{-1}(y)\, \mathrm{M}(x, y)), \qquad [\sigma^\varepsilon(y)\, k^\varepsilon(x, y)]^{-1} \rightharpoonup [\mathrm{M}(x, y)]^{-1} \tag{3.13}$$

dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *faible $*$ et $d\nu_y(.)$ est la mesure positive à support compact dans* $[\beta(y)\, m_1, \beta(y)\, m_2]$ *donnée dans le théorème* 2.1. *Enfin la perméabilité $\mathbb{K}$ vérifie la propriété suivante,*

$$0<m_1 \leqq \mathbb{K}(x, y) \leqq m_2 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{-1}(y)=\int_0^1 \frac{dx}{\mathbb{K}(x, y)}. \tag{3.14}$$

Démonstration. — Considérons le problème elliptique (dégénéré) (3.2) vérifié par p^ε. On a clairement $p^\varepsilon \rightharpoonup p$ et $\partial_x p^\varepsilon \rightharpoonup \partial_x p$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ faible. En outre, d'après (3.5), on a $k^\varepsilon(x, y)\, \partial_x p^\varepsilon=-\beta(y)/\sigma^\varepsilon(y)$ où $\sigma^\varepsilon(y)$ est défini par (3.8). De même, $\partial_x p^\varepsilon=-\beta(y)/[k^\varepsilon(x, y)\, \sigma^\varepsilon(y)]$. On a les convergences suivantes :

$$\begin{gathered} k^\varepsilon(x, y)\, \partial_x p^\varepsilon \rightharpoonup -\beta(y) \,.\, \sigma_{-1}^{-1}(y) \quad \mathrm{L}^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \\ [\sigma^\varepsilon(y)\, k^\varepsilon(x, y)]^{-1} \rightharpoonup [\mathrm{M}(x, y)]^{-1} \quad \mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}) \text{ faible } *. \end{gathered} \tag{3.15}$$

La pression vérifie les équations,

$$\partial_x p=\beta(y)[\mathrm{M}(x, y)]^{-1}=\beta(y)\sigma_{-1}(y)\mathbb{K}(x, y) \tag{3.16}$$

où $\mathbb{K}(x, y)$ est définie par (3.13). Notons que $m_1/m_2 \leqq \mathrm{M}(x, y) \leqq m_2/m_1$ et que $m_1 \leqq \sigma_{-1}(y) \leqq m_2$ par suite $m_1 \leqq \mathbb{K}(x, y) \leqq m_2$. Enfin, comme $\mathbb{K}(x, y)\partial_x p=-\beta(y)\sigma_{-1}^{-1}(y)$ et $\partial_x(\mathbb{K}(x, y)\partial_x p)=0$, on a

$$\sigma_{-1}(y)=\int_0^1 \frac{dx}{\mathbb{K}(x, y)}$$

d'où (3.11), (3.13) et (3.14). Pour obtenir (3.12) on applique le théorème 2.2. Puisque le coefficient $a^\varepsilon(y)$ défini par (3.8) vérifie $a^\varepsilon \rightharpoonup a$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ faible $*$ et $a(y)=\beta(y)\sigma_{-1}^{-1}(y)$ on déduit de ce qui précède $q\beta(y)\sigma_{-1}^{-1}(y)=-\mathbb{K}(x, y)\partial_x p$. Comme $0<\beta(y)m_1 \leqq a^\varepsilon(y) \leqq \beta(y)m_2$ alors la mesure $d\nu_y(.)$, donnée par le théorème 2.2, a son support contenu dans $[m_1\beta(y), m_2\beta(y)]$. D'où le théorème.

Remarque 3.1. — La même méthode permet de traiter au lieu de (3.3) le cas suivant :

$$\varphi^\varepsilon(y)\partial_t u^\varepsilon-k^\varepsilon(x, y)\partial_x p^\varepsilon.\partial_x u^\varepsilon=0, \tag{3.17}$$

$$0<\alpha_1 \leqq \varphi^\varepsilon(y) \leqq \alpha_2, \qquad \varphi^\varepsilon \rightharpoonup \varphi \quad \mathrm{L}^\infty(\Omega) \text{ faible } *. \tag{3.18}$$

Dans ce cas le coefficient $a^\varepsilon(y)$ donné par (3.8) devient :

$$a^\varepsilon(y)=\beta(y)/[\sigma^\varepsilon(y).\varphi^\varepsilon(y)], \qquad \sigma^\varepsilon(y)=\int_0^1 \frac{dx}{k^\varepsilon(x, y)}. \tag{3.19}$$

Il est clair que l'on obtient, par homogénéisation, la même équation que (3.11) satisfaite par la pression p. L'équation vérifiée par la concentration u n'est plus la même. On suppose que a^ε vérifie

$$a^\varepsilon \rightharpoonup a \quad \mathrm{L}^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \tag{3.20}$$

on peut donc écrire $a(y)=\beta(y)[\sigma_{-1}(y)\psi(y)]^{-1}$ et comme dans le théorème 3.1 on a $\sigma_{-1}(y)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathbb{K}(x, y)}$ et par suite la concentration u vérifie

$$\Psi(y)\partial_t u-\mathbb{K}(x, y)\partial_x u-\int_0^t ds\int d\mu_y(\lambda)\partial_x^2 u(s, x-\lambda(t-s), y)=0 \tag{3.21}$$

où $d\mu_y(.)$ est la mesure à support dans $\left[\dfrac{m_1}{\alpha_2}\beta(y), \dfrac{m_2}{\alpha_1}\beta(y)\right]$ associée à la suite $1/[\sigma^\varepsilon(y)\varphi(y)]$. En outre, la fonction $\Psi(y)$ n'est pas la limite faible de (φ^ε) mais est définie par :

$$\Psi(y)=\beta(y)\left[a(y)\int_0^1 \frac{dx}{\mathbb{K}(x, y)}\right]^{-1} \text{ p. p. } y\in\Omega. \tag{3.22}$$

Remarque 3.2. — Considérons le cas où la perméabilité $k(x, y)$ et la porosité $\varphi(y)$ sont indépendantes de ε mais que la différence de pression $\beta(y)=p_0(y)-p_1(y)$ dépend de ε. Précisément supposons dans (3.2)

$$k^\varepsilon(x, y)=k(x, y); \qquad p\,|_{x=0}=p_0^\varepsilon(y), \quad p\,|_{x=1}=p_1^\varepsilon(y) \tag{3.23}$$

et soit $\beta^\varepsilon(y)$ défini par

$$\left.\begin{array}{l} \beta^\varepsilon(y)=p_1^\varepsilon(y)-p_0^\varepsilon(y), \\ 0<\beta_1\leqq\beta^\varepsilon(y)\leqq\beta_2, \qquad \beta^\varepsilon\rightharpoonup\beta \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *. \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

Soit p^ε la solution de (3.2) on a dans ce cas

$$-k(x,y)\,\partial_x p^\varepsilon=\beta^\varepsilon(y)\Big/\int_0^1 \frac{dx}{k(x, y)}. \tag{3.25}$$

Si $p_i^\varepsilon\rightharpoonup p_i$ $L^\infty(\Omega)$ faible $*$ pour $i=0, 1$, alors la pression p^ε vérifie $p^\varepsilon\rightharpoonup p$, $\partial_x p^\varepsilon\rightharpoonup\partial_x p$ dans $L^2(\mathcal{O})$ faible et p est solution unique du problème

$$-\partial_x(k(x,y)\,\partial_x p)=0, \qquad p\,|_{x=i}=p_i, \quad i=0, 1. \tag{3.26}$$

L'équation vérifiée par la concentration u s'obtient de façon analogue.

RÉFÉRENCES

[1] N. I. AHIEZER et M. KREIN, *Some Questions in the Theory of Moments*, Translation of Math. Monogr., 2, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1962.

[2] B. AMAZIANE, *Thèse*, Université de Saint-Étienne (à paraître).

[3] Y. AMIRAT, K. HAMDACHE et A. ZIANI, *Homogénéisation d'un modèle d'écoulements miscibles en milieu poreux*, Rapport I.N.R.I.A., n° 802, 1987.

[4] Y. AMIRAT, K. HAMDACHE et A. ZIANI, *Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre. Application aux milieux poreux*, Rapport I.N.R.I.A., n° 803, 1987.

[5] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et G. C. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[6] D. J. BERGMAN, *Bulk Physical Properties of Composite Media*, École d'Été d'Analyse Numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., Eyrolles, 1985, p. 1-128.

[7] M. BONNEFILLE, Propagation des oscillations dans les systèmes hyperboliques de lois de conservation, *Thèse*, Université de Saint-Étienne, 1987.

[8] A. BOURGEAT, Homogenized Behavior of Two-Phase Flows in Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fractures Distribution, *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, vol. **47**, North-Holland, 1984, p. 205-216.

[9] G. CHAVENT et J. JAFFRE, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, North-Holland, 1986.

[10] R. J. DI PERNA, Measure-Valued Solutions of Conservation Laws, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **8**, 1985.

[11] R. J. DI PERNA et A. J. MAJDA, Oscillations and Concentrations in Weak Solutions of the Incompressible Fluid Equations, *Commun. Math. Phys.*, vol. **108**, 1987, p. 667-689.

[12] W. F. DONOGHUE, Jr., *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Springer-Verlag, 1974.

[13] K. GOLDEN et G. C. PAPANICOLAOU, Bounds for Effective Parameters of Heterogeneous Media by Analytic Continuation, *Commun. Math. Phys.*, vol. **90**, 1983, p. 473-491.

[14] P. L. LIONS, G. C. PAPANICOLAOU et S. R. S. VARADHAN, *Homogenization of Hamilton-Jacobi Equations*, Preprint.

[15] D. W. MCLAUGHLIN, G. C. PAPANICOLAOU et L. TARTAR, Weak Limits of Semilinear hyperpobic Systems with Oscillating Data, *Lectures Notes in Physics*, n° **230**, Springer-Verlag.

[16] M. L. MASCARENHAS, A linear Homogenization Problem with Time Dependent Coefficient, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. **281**, n° 1, 1984.

[17] F. MURAT, Compacité par compensation, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, vol. **5**, 1978, p. 489-507.

[18] F. MURAT, H-Convergence, *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique*, Univ. Alger, Multigraphié, 1978.

[19] E. SANCHEZ-PALENCIA, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture Notes in Physics*, n° **127**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[20] D. SERRE, *Propagation des oscillations dans les systèmes hyperboliques non linéaires*, Congrès Saint-Étienne, 1986, Carasso, Serre, Raviart éd., *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag.

[21] D. SERRE, La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, *J. Math. Pures et Appl.*, vol. **65**, 1986, p. 423-468.

[22] M. I. SHVIDLER, Averaging Transfer Equations in Porous Media with Random Inhomogeneities, *Translated from Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Mekh. Zhidk. Gaza*, vol. **1**, 1985, p. 59-65.

[23] M. I. SHVIDLER, Dispersion of a Filtration Stream in a Medium with Random Inhomogeneities, *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **20**, 3, 1975, p. 171-173.

[24] L. TARTAR, *Compensated Compactness and Applications to P.D.E.*, Research Notes in Math., Non linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, 4, vol. **39**, R. J. KNOPS éd., Pitman Press, 1979.

[25] L. TARTAR, Solutions oscillantes des équations de Carleman, *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz*, 1980-1981, Centre de Math. de l'École Polytechnique de Palaiseau.

[26] L. TARTAR, Étude des oscillations dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Lectures Notes in Physics*, n° **195**, Springer-Verlag.

[27] L. TARTAR, Remarks on Oscillations and Stokes Equations, *Lectures Notes in Physics*, n° **230**, Springer-Verlag.

[28] L. TARTAR, *Remarks on Homogenization*, Homogeneization and Effective Moduli of Materials and Media, I.M.A. volumes in math. and its Appli., 1, ERICKSEN, KINDERLEHER, KOHN, LIONS éd., Springer-Verlag, 1986, p. 228-246.

[29] L. TARTAR, Cours Peccot, Collège de France, 1977.

[30] L. TARTAR, *Nonlocal Effects Induced by Homogenization*, to appear in *Essays of Mathematical Analysis in honour of E. de Giogi*, Birkhauser, 1988.

(*Manuscrit reçu le* 28 *juillet* 1988)
(*révisé le* 11 *janvier* 1989.)