

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

I. EKELAND

L. LASSOUED

## **Multiplicité des trajectoires fermées de systèmes hamiltoniens connexes**

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 4, n° 4 (1987), p. 307-335

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPC\\_1987\\_\\_4\\_4\\_307\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1987__4_4_307_0)

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Multiplicité des trajectoires fermées de systèmes hamiltoniens connexes

par

**I. EKELAND**

CEREMADE, Université Paris-IX, 75775 Paris Cedex 16, France

et

**L. LASSOUED**

CEREMADE et Faculté des Sciences de Tunis

**RÉSUMÉ.** — On montre que, si  $n \geq 3$ , tout système hamiltonien à  $n$  degrés de liberté possède au moins deux trajectoires fermées sur chaque niveau d'énergie convexe et compact.

**ABSTRACT.** — We show that, if  $n \geq 3$ , every Hamiltonian system with  $n$  degrees of freedom has at least two closed trajectories on every convex and compact energy level.

*Key words* : Hamiltonian systems, closed trajectories, index theory.

## I. — INTRODUCTION

Soit  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  une hypersurface compacte de classe  $C^3$  bordant un convexe ouvert contenant l'origine. Si  $x \in S$ , on note  $n(x)$  le vecteur unitaire sur la normale extérieure à  $S$  en  $x$ . Si on définit par  $J$  la structure symplectique habituelle de  $S$  :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

le vecteur  $Jn(x)$  sera tangent à  $S$  au point  $x$ . On définit donc un flot sur  $S$  par l'équation différentielle

$$\dot{x} = Jn(x) \quad (1)$$

On cherche le nombre de trajectoires fermées de ce flot sur  $S$ . En d'autres termes, on dira que deux solutions  $(x_1, T_1)$  et  $(x_2, T_2)$  du problème

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Jn(x) \\ x &\in S \\ x(T) &= x(0) \end{aligned} \quad (2)$$

sont équivalentes s'il existe  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $x_1(t+s) = x_2(t)$ . On cherche le nombre de classes d'équivalence.

On sait que, sous les hypothèses faites, il y a au moins une trajectoire fermée : citons les travaux de Seifert [1], Weinstein [2], Clarke [3] (sans hypothèse de régularité sur  $S$ ) et Rabinowitz [4] (qui affaiblit l'hypothèse de convexité : il lui suffit que  $S$  soit étoilé :  $n(x) \cdot x > 0$ ). On peut également citer les résultats, avec d'autres hypothèses, de Rabinowitz [13], Gluck-Ziller [14], Hayashi [15] et Benci [16].

Ekeland [5] a démontré que, si  $n \geq 3$ , génériquement en  $S$ , pour la topologie  $C^\infty$  naturelle, il y a une infinité de trajectoires fermées. Par

ailleurs, si  $S$  est l'ellipsoïde défini par l'équation  $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2} (p_i^2 + q_i^2) = 1$ , avec

$\alpha_i > 0$  et  $x = (p, q)$ , et si les  $\frac{2\pi}{\alpha_i} = T_i$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ ,

il n'y a que  $n$  trajectoires fermées. En effet, comme nous le verrons, si l'on pose  $H(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2} (p_i^2 + q_i^2)$ , les trajectoires fermées de  $\dot{x} = Jn(x)$

sur  $S$  coïncident avec les trajectoires fermées de  $\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$ ,  $\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$  sur le

niveau d'énergie  $H=1$ . On a donc affaire à  $n$  oscillateurs harmoniques découplés, sans commune période. Les seules solutions périodiques possibles sont donc obtenues en faisant  $p_j = q_j = 0, \forall j \neq i$ , et  $p_i^2 + q_i^2 = 2\alpha_i^{-1}$ , pour  $i=1, \dots, n$ , ce qui donne exactement  $n$  trajectoires fermées.

Il est conjecturé que, sous les hypothèses faites, le problème (1) a toujours  $n$  trajectoires fermées au moins. Ceci a été démontré par Weinstein [6], par une méthode de perturbation, si  $S$  est assez voisine d'une ellipsoïde; par Ekeland et Lasry [7] si  $S$  est contenue entre deux boules concentriques, de rayons  $r$  et  $R$ , avec  $1 \leq R/r < \sqrt{2}$ . Ces résultats ont été unifiés et étendus au cas étoilé par Berestycki, Lasry, Mancini, Ruf [8]. Le cas où  $R/r > \sqrt{2}$ , n'est pas élucidé à ce jour.

Dans cet article, nous faisons un premier pas dans cette direction, en démontrant que le nombre de trajectoires fermées est toujours  $\geq 2$  dès que  $n \geq 3$ . Plus précisément :

**THÉORÈME 1.** — *On considère dans  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $n \geq 3$ , une hypersurface  $S$  de classe  $C^2$ , de courbure gaussienne strictement positive, bordant un convexe ouvert contenant l'origine. Le flot  $\dot{x} = Jn(x)$  sur  $S$  possède au moins deux trajectoires fermées. ■*

Ce résultat s'applique naturellement aux systèmes hamiltoniens usuels. On peut l'énoncer sous la forme suivante :

**THÉORÈME 1 bis.** — *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , et  $h \in \mathbb{R}$  tel que le niveau d'énergie  $S = H^{-1}(h)$  soit compact, non vide, avec  $H'(x) \neq 0$  pour  $x \in S$ . On suppose en outre que  $S$  borde un convexe  $C$  et que sa courbure gaussienne soit strictement positive. Alors le problème*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= JH'(x) \\ x(0) &= x(T) \\ H(x) &= h \end{aligned} \tag{3}$$

*possède au moins deux solutions  $(x_1, T_1)$  et  $(x_2, T_2)$  telles que*

$$x_1(t) \neq x_2(t), \quad \forall t \quad \blacksquare$$

On passe du théorème 1 au théorème 1 bis en faisant l'observation, maintenant classique, que si  $H^{-1}(h) = S$ , les systèmes  $\dot{x} = JH'(x)$  et  $\dot{x} = Jn(x)$  ont les mêmes trajectoires fermées sur  $S$  (la loi du temps étant différente).

La démonstration du théorème 1 se fait par l'absurde. L'outil est la notion d'index d'une solution périodique introduite par Ekeland dans [5]. Le paragraphe II rappelle cette notion, ainsi que les principaux résultats de la théorie, notamment une formule d'itération fort utile pour la suite. Le paragraphe III donne la formulation variationnelle du problème, et la démonstration proprement dite occupe le paragraphe IV. Signalons que,

grâce au résultat de la proposition III. 5 la démonstration est plus simple que celle annoncée dans [12].

Les auteurs remercient C. Viterbo pour de longues et fructueuses discussions, et A. Szulkin pour leur avoir signalé que leur démonstration ne couvrait pas le cas  $n=2$ . Ils signalent que ce dernier a une démonstration différente [17].

## II. — INDEX D'UN SYSTÈME HAMILTONIEN LINÉAIRE DÉFINI POSITIF

Pour le détail des résultats présentés ici, et pour d'autres résultats, on renvoie aux références [5] et [9].

Soit  $A(t)$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des matrices  $2n \times 2n$ , symétriques et définies positives. On lui associe le système différentiel linéaire

$$\dot{y} = JA(t)y \quad (1)$$

Ce système est hamiltonien, c'est-à-dire qu'il peut se mettre sous la forme  $\dot{y} = JH'(t, y)$ , en prenant

$$H(t, y) = \frac{1}{2}(A(t)y, y)$$

On notera dorénavant  $B(t) = A(t)^{-1}$ .

A chaque réel  $T > 0$  on associe la forme quadratique  $Q_T$  définie sur l'espace

$$L_0^2(0, T) = \left\{ v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n}) \mid \int_0^T v(s) ds = 0 \right\} \quad (2)$$

par

$$Q_T(v) = \int_0^T \frac{1}{2} [(Jv, \Pi v) + (B(t)Jv, Jv)] dt \quad (3)$$

où  $\Pi v$  désigne la primitive de  $v$  de moyenne nulle

$$\frac{d}{dt}(\Pi v) = v \quad \text{et} \quad \int_0^T \Pi v = 0$$

de telle sorte que  $\Pi$  est un opérateur compact de  $L^2_0(0, T)$ .

On montre que  $L^2_0(0, T)$  se décompose en trois sous-espaces  $Q_T$ -orthogonaux

$$L^2_0(0, T) = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$$

les restrictions de  $Q_T$  à  $E_+$  (resp.  $E_0$ , resp.  $E_-$ ) étant définie positive (resp. nulle, resp. définie négative). On montre aussi que  $E_0$  et  $E_-$  sont de dimension finie. La dimension de  $E_0$  est la *nullité* de  $Q_T$ , et la dimension de  $E_-$  est l'*index* de  $Q_T$ .

DÉFINITION. — L'*index*  $i_T$  du système (1) sur l'intervalle de temps  $(0, T)$  est l'index de la forme quadratique  $Q_T$  sur l'espace  $L^2_0(0, T)$ . ■

On renvoie à [9] pour une définition plus géométrique de l'index, basée sur la notion de points conjugués.

On s'intéresse ici au cas particulier où  $A(t)$  est  $T$ -périodique pour un certain  $T > 0$ . L'index naturel est alors  $i_T$ , et on peut trouver une formule d'itération donnant les  $i_{kT}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour ce faire, il est commode d'introduire les espaces de Sobolev à valeurs complexes :

$$H^1_k = \{ u \in L^2(0, kT; \mathbb{C}^{2n}) \mid \dot{u} \in L^2, u(0) = u(kT) \} \tag{4}$$

et de définir sur  $H^1_k$  une forme hermitienne par :

$$P_k(y) = \int_0^{kT} \frac{1}{2} [(J \dot{y}, y) + (B(t) J \dot{y}, J \dot{y})] dt \tag{5}$$

Il est clair que la forme quadratique  $Q_T$  donnée par la formule (3) s'étend en une forme hermitienne sur  $L^2_0(0, T; \mathbb{C}^{2n})$  et que :

$$\forall y \in H^1_k, \quad P_k(y) = Q_{kT}(\dot{y}) \tag{6}$$

$$i_{kT} = \text{index}(Q_{kT}) = \text{index}(P_k) \tag{7}$$

Pour  $\omega \in \mathbb{C}$ , et  $|\omega| = 1$ , on introduit l'espace

$$H^1_\omega = \{ y \in L^2(0, T; \mathbb{C}^{2n}) \mid \dot{y} \in L^2, y(T) = \omega y(0) \} \tag{8}$$

et la forme quadratique  $P_\omega$  sur  $H_\omega^1$  définie par :

$$P_\omega(y) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (J \dot{y}, y) + (B(t) J \dot{y}, J \dot{y}) \right] dt \quad (9)$$

Notons  $j(\omega)$  l'index de  $P_\omega$  sur  $H_\omega^1$ .

On a la décomposition de Fourier :

$$H_k^1 = \bigoplus_{\omega^k=1} H_\omega^1$$

où les facteurs sont orthogonaux pour  $P_k$  comme pour la structure hermitienne usuelle de  $H_k^1$ . Il s'ensuit immédiatement que :

$$i_{kT} = \sum_{\omega^k=1} j(\omega) \quad (10)$$

Il suffit donc de déterminer l'application  $j : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{N}$  où  $\mathbb{U} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| = 1\}$  est le cercle unité, pour avoir la formule d'itération cherchée. Pour cela, il nous faudra utiliser la théorie de Krein (voir [10], chap. III) que nous rappelons brièvement.

On note  $R(t)$  la résolvante du système (1)

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}(t) &= JA(t)R(t) \\ R(0) &= I \end{aligned} \right\}$$

$R(t)$  est une matrice symplectique :  $R(t)^* J R(t) = J$ . Il en résulte que si  $\lambda$  est valeur propre de  $R(t)$ , il en est de même de  $\lambda^{-1}$ . Dans le cas où  $|\lambda| \neq 1$  et  $\lambda \notin \mathbb{R}$  on obtient quatre valeurs propres distinctes  $\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$ ; dans le cas où  $|\lambda| = 1, \lambda \notin \mathbb{R}$  deux seulement  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$ .

Les valeurs propres de  $R(T)$  sont appelées *multiplicateurs de Floquet*. On notera  $\Lambda$  l'ensemble des multiplicateurs de Floquet situés sur le cercle unité  $\mathbb{U}$ .

Si  $\omega \in \Lambda$  est de multiplicité  $m$ ,  $\frac{1}{i}(J\xi, \xi)$  est une forme hermitienne non dégénérée sur le sous-espace caractéristique  $\text{Ker } R((T) - \omega I)^m$  et est donc, après diagonalisation, la somme de  $p$  carrés positifs et  $q$  carrés négatifs, avec  $p + q = m$ . On dit alors que  $\omega$  est de type  $(p, q)$  au sens de Krein.

Si  $\omega$  est de type  $(p, q)$ ,  $\bar{\omega}$  est de type  $(q, p)$ .

Si l'un des nombres 1 ou  $-1$  est un multiplicateur, il est de multiplicité paire  $2p$ , et de type  $(p, p)$ .

Ces rappels étant faits, la proposition suivante donne les propriétés de  $j(\omega)$  :

PROPOSITION 1. — L'application  $j : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{N}$  vérifie :

(a)  $j(1) = i_T$ ;

(b)  $\forall \omega \in \mathbb{U}, j(\bar{\omega}) = j(\omega)$ ;

(c)  $j$  est continue en tout point  $\omega \notin \Lambda$  (et donc localement constante sur  $\mathbb{U} - \Lambda$ );

(d) si  $\omega \in \Lambda, \omega \neq 1$  est de type  $(p, q)$ , et si l'on pose

$$j(\omega+) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} j(\omega e^{i\varepsilon}); \quad j(\omega-) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} j(\omega e^{-i\varepsilon})$$

on a :

$$j(\omega) \leq j(\omega+) \leq j(\omega) + q$$

$$j(\omega) \leq j(\omega-) \leq j(\omega) + p$$

et

$$j(\omega+) - j(\omega-) = q - p$$

(e)  $i_T + n \leq j(1 \pm) \leq i_T + n + \dim \text{Ker}(\mathbf{R}(T) - \mathbf{I})$

Démonstration. — On reprend pour l'essentiel les démonstrations de [5], § IV, en les complétant et les corrigeant sur certains points.

Les points (a) et (b) découlent des définitions. Pour  $\omega \neq 1$  on remarque que :

$$H_\omega^1 = \left\{ y \in H^1 \mid y(0) = (\omega - 1)^{-1} \int_0^T \dot{y} dt, \dot{y} \in L^2(0, T, \mathbb{C}^{2n}) \right\}$$

En faisant le changement de variable  $u = \dot{y}$ , on en déduit que  $j(\omega)$  est l'index de la forme hermitienne  $Q_\omega$  définie sur  $L^2(0, T; \mathbb{C}^{2n})$  par :

$$Q_\omega(u) = \int_0^T \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{J}u, \int_0^t u(s) ds \right) + (\mathbf{B}(t) \mathbf{J}u, \mathbf{J}u) \right] dt + \frac{(\bar{\omega} - 1)^{-1}}{2} \left( \mathbf{J} \int_0^T u dt, \int_0^T u dt \right) \quad (11)$$

Posons

$$\frac{1}{2}(\mathbf{K} u, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \mathbf{J} u, \int_0^t u(s) ds \right) dt \\ + \frac{(\bar{\omega} - 1)^{-1}}{2} \left( \mathbf{J} \int_0^T u dt, \int_0^T u dt \right)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{M} u, u) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{B}(t) \mathbf{J} u, \mathbf{J} u) dt$$

$Q_\omega(u)$  s'écrit  $\frac{1}{2}(\mathbf{K} u, u) + \frac{1}{2}(\mathbf{M} u, u)$ , avec  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  hermitiens,  $\mathbf{K}$  compact et  $\mathbf{M}$  défini positif. Il existe donc une base  $u_i$  de  $L^2$  telle que

$$\mathbf{K} u_i = \lambda_i \mathbf{M} u_i$$

$$(\mathbf{M} u_i, u_j) = \delta_{i,j}$$

où la suite de valeurs propres  $\lambda_i \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow \infty$ . En décomposant  $u = \sum \xi_i u_i$  suivant cette base, on obtient :

$$Q_\omega(u) = \sum \frac{1}{2} (\lambda_i + 1) |\xi_i|^2$$

On introduit alors les sous-espaces :

$$E_+ = \{ \sum \xi_i u_i \mid \xi_i = 0 \text{ si } \lambda_i \leq -1 \}$$

$$E_0 = \{ \sum \xi_i u_i \mid \xi_i = 0 \text{ si } \lambda_i \neq -1 \}$$

$$E_- = \{ \sum \xi_i u_i \mid \xi_i = 0 \text{ si } \lambda_i > -1 \}$$

$E_0$  et  $E_-$  sont de dimensions finies, égales respectivement à l'index et à la nullité de  $Q_\omega$ . Ainsi :

$$\dim E_- = j(\omega) \quad \text{pour } \omega \notin \Lambda \text{ et } \omega \neq 1 \quad (12)$$

Par ailleurs, on sait ([5], prop. IV. 3) que tout élément de  $E_0$  est de la forme  $u = \dot{y}$ , où  $y$  est une solution T-périodique de (1). Donc :

$$\dim E_0 = \dim \text{Ker} (R(T) - \omega I) \leq 2n \quad (13)$$

Enfin, on a des constantes  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que

$$\forall u \in E_+, \quad Q_\omega(u) \geq \alpha \|u\|^2$$

$$\forall u \in E_-, \quad Q_\omega(u) \leq -\beta \|u\|^2$$

Pour  $\lambda \in \mathbb{U}$  assez proche de  $\omega$ , on aura donc :

$$\forall u \in E_+, \quad Q_\lambda(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|^2$$

$$\forall u \in E_-, \quad Q_\lambda(u) \leq -\frac{\beta}{2} \|u\|^2$$

et donc si  $\omega \notin \Lambda$ ,  $\omega \neq 1$ , la fonction  $j$  doit être constante au voisinage de  $\omega$ . D'où (c).

Dans le cas où  $\omega_0 \in \Lambda$ ,  $\omega_0 \neq 1$ , posons  $\omega_0 = e^{i\theta_0}$ , et prenons  $u$  dans  $E_0$  [donc  $u = \dot{y}$  et  $y(0) \in \text{Ker}(\mathbf{R}(T) - \omega_0 I)$ ]. Posons  $\omega = e^{i\theta}$  pour  $\omega$  voisin de  $\omega_0$ . On vérifie ([5], prop. IV. 6) que :

$$\left[ \frac{d}{d\theta} Q_\omega(u) \right]_{\theta=\theta_0} = \frac{|1-\omega|^2}{1-\cos\theta} \frac{1}{i} (Jy(0), y(0)) \tag{14}$$

et donc

$$\text{signe} \left[ \frac{d}{d\theta} Q_\omega(u) \right]_{\theta=\theta_0} = \text{signe} \frac{1}{i} (Jy(0), y(0)). \tag{15}$$

Supposons  $\omega_0 \in \Lambda$  de multiplicité  $m \geq 1$ . Si

$$\text{Ker}(\mathbf{R}(T) - \omega_0 I) = \text{Ker}(\mathbf{R}(T) - \omega_0 I)^m,$$

notons  $V \subset \mathbb{C}^{2n}$  ce sous-espace. La restriction à  $V$  de la forme hermitienne  $\frac{1}{i} J$  est non dégénérée (voir [10], chap. III), et de signature  $(p, q)$ . En prenant dans  $V$  une base  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  de vecteurs propres, et en posant  $y_i(0) = \xi_i$ , on obtient une base de  $E_0$ . L'expression (15) est donc  $p$  fois positive et  $q$  fois négative, quand  $i$  varie de 1 à  $m$ .

Plus précisément, on peut écrire  $E_0 = E_0^+ \oplus E_0^-$ , où  $E_0^+$  et  $E_0^-$  sont orthogonaux, de dimension  $p$  et  $q$ , et où l'expression (15) est  $< 0$  pour  $u \in E_0^-$  et  $> 0$  pour  $u \in E_0^+$ . Soit  $L^2 = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$  la décomposition orthogonale associée à  $Q_{\omega_0}$ .

Pour  $\omega = e^{i\theta}$  voisin de  $\omega_0 = e^{i\theta_0}$ , et  $0 > \theta_0$ , on vérifie facilement que  $Q_\omega$  est définie positive sur  $E_+ \oplus E_0^+$  et définie négative sur  $E_- \oplus E_0^-$ . Comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires (mais non  $Q_\omega$ -orthogonaux),

l'index de  $Q_\omega$  est la dimension de  $E_- \oplus E_0^-$ . D'où les formules :

$$j(\omega_0^+) = j(\omega_0) + q$$

$$j(\omega_0^-) = j(\omega_0) + p$$

et la propriété (d) est établie dans ce cas.

Dans le cas général, où  $\text{Ker}(\mathbf{R}(T) - \omega_0 I)$  n'est pas égal à  $\text{Ker}(\mathbf{R}(T) - \omega_0 I)^m$ , la restriction de  $\frac{1}{i} J$  au sous-espace propre peut dégénérer. Il faut alors raisonner par perturbation en appliquant le théorème de Krein-Lyubarski ([10], III 4. 3) : en remplaçant l'équation  $\dot{y} = \mathbf{J}A(t)y$  par l'équation  $\dot{y} = \mathbf{J}(A(t) - \varepsilon I)y$ , on fait éclater  $\omega_0$  en  $m$  valeurs propres simples. Celles qui sont hors du cercle unité sont appariées, chaque paire provenant d'une paire de multiplicateurs de types opposés. Il reste donc sur le cercle unité  $p'$  multiplicateurs positifs,  $q'$  multiplicateurs négatifs, avec  $p' \leq p$ ,  $q' \leq q$ ,  $q' - p' = q - p$ . De plus les  $p'$  multiplicateurs positifs vont dans le sens direct quand  $\varepsilon$  décroît vers 0, les  $q'$  multiplicateurs négatifs dans le sens rétrograde. En appliquant ce qui précède à chacun de ces multiplicateurs simples et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro on obtient :

$$j(\omega_0^-) = j(\omega_0) + p' \leq j(\omega_0) + p$$

$$j(\omega_0^+) = j(\omega_0) + q' \leq j(\omega_0) + q$$

et

$$j(\omega_0^+) - j(\omega_0^-) = q' - p' = q - p$$

d'où l'on tire la propriété (d).

En ce qui concerne la propriété (e), il faut étudier le comportement de la forme quadratique  $Q_\omega$  de la formule (11) quand  $\omega \rightarrow 1$ . Il est alors commode de poser :

$$(\bar{\omega} - 1)^{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon} i$$

de telle sorte que  $\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow 1$ .

On introduit alors les opérateurs  $L: L_0^2 \rightarrow L^2$  et  $P_\varepsilon: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$  donnés par les formules :

$$L u_0 = - \int_0^t \mathbf{J} u_0 ds - \mathbf{J} B(t) \mathbf{J} u \quad (16)$$

$$P_\varepsilon = - \int_0^T \mathbf{J} \mathbf{B}(t) \mathbf{J} dt + T^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathbf{J}}{i} \quad (17)$$

et on identifie  $L^2$  à  $L_0^2 \times \mathbb{C}^{2n}$  en écrivant  $u = (u_0, \xi)$ , où  $u \in L^2$  et

$$u_0 = u - \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \in L_0^2$$

$$\xi = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Le calcul montre alors que ([5], prop. IV. 7) :

$$Q_\omega(u_0, \xi) = \frac{1}{2} (L u_0, u_0)$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^T L u_0 dt, P_\varepsilon^{-1} \int_0^T L u_0 dt \right) + \frac{1}{2} (P_\varepsilon \xi, \xi) \quad (18)$$

de telle sorte que les sous-espaces  $F_1$  et  $F_2$  correspondant à  $u_0$  et  $\xi=0$  sont  $Q_\omega$ -orthogonaux. On vérifie aisément que, pour  $\varepsilon$  assez petit :

$$\operatorname{index} (Q_\omega | F_1) = n$$

$$\operatorname{nullité} (Q_\omega | F_1) = 0$$

Par ailleurs, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $Q_\omega(u_0, 0) \rightarrow Q(u_0)$  où :

$$\operatorname{index} Q = i_T$$

$$\operatorname{nullité} Q = \dim \operatorname{Ker} (R(T) - I)$$

d'où la formule (e). ■

Les inégalités (d) peuvent être changées en égalités dans le cas de multiplicateurs positifs (ou négatifs) au sens de Krein :

COROLLAIRE 2. — Si  $\omega \in \Lambda$ ,  $\omega \neq 1$ , est de type  $(p, 0)$ , on a :

$$j(\omega) = j(\omega_+) = j(\omega_-) - p \quad (19)$$

Si  $\omega \in \Lambda$ ,  $\omega \neq 1$ , est de type  $(0, q)$ , on a :

$$j(\omega) = j(\omega_-) = j(\omega_+) + p. \quad (20)$$

*Démonstration.* — Les formules (d) ne laissent aucune autre possibilité.

■

On a une autre inégalité remarquable.

**COROLLAIRE 3.** — *On suppose que 1 est un multiplicateur de Floquet d'ordre  $2m_0$  (avec  $m_0=0$  si  $1 \notin \Lambda$ ). Alors :*

$$j(\omega) \geq i_T + m_0, \quad \forall \omega \in \mathbb{U}. \quad (21)$$

*Si l'égalité est réalisée pour un certain  $\omega_0 \neq 1$ , alors tous les multiplicateurs de Floquet sont sur le cercle unité  $\mathbb{U}$  : ceux qui sont dans le demi-plan supérieur  $y > 0$  sont positifs au sens de Krein, ceux du demi-plan inférieur  $y < 0$  sont négatifs au sens de Krein.*

*Démonstration.* — On a  $j(1 \pm) = i_T + n$ . Il reste au plus  $(n - m_0)$  multiplicateurs à placer dans chaque demi-plan. Chacun d'eux fera baisser  $j$  de  $m$ , s'il est positif et de multiplicité  $m$ , d'une quantité  $< m$  s'il n'est pas positif. Donc  $j$  ne peut descendre au-dessous de  $i_T + n - (n - m_0)$ . D'où le résultat. ■

Connaissant  $j(\omega)$  on peut expliciter la formule d'itération (10) :

$$i_{kT} = \sum_{\omega^k=1} j(\omega).$$

Dans le cas hyperbolique (pas de multiplicateurs de Floquet de module 1),  $j(\omega) = i_T + n$  si  $\omega \neq 1$  on obtient :

$$i_{kT} = (k-1)(i_T + n) + i_T = ki_T + (k-1)n.$$

Dans le cas où il y a des multiplicateurs de Floquet de module 1, autres que  $\pm 1$ , notons  $\omega_1, \dots, \omega_m$  ceux qui appartiennent à  $\mathbb{U}_+ = \mathbb{U} \cap \{y > 0\}$ . On posera  $\omega_p = \exp(2i\pi\theta_p)$ , avec

$$0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \frac{1}{2}$$

On pose :

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_{m+1} = \frac{1}{2}$$

et on note  $j_p$  la valeur de  $j$  sur l'arc de cercle  $\exp(2i\pi\theta)$ , avec  $\theta_{p-1} < \theta < \theta_p$ , pour  $1 \leq p \leq m+1$ .

Supposons d'abord les  $\theta_p$  irrationnels, pour  $p \neq 0$  ou  $m + 1$ . Alors :

$$i_{kT} = \begin{cases} j(1) + 2 \sum_{p=1}^{m+1} j_p N_{k,p} & \text{pour } k \text{ impair} \\ j(1) + 2 \sum_{p=1}^{m+1} j_p N_{k,p} + j(-1) & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases} \quad (22)$$

où :

$$N_{k,p} = \text{Card} \left\{ q \mid 1 \leq q < k, \theta_{p-1} < \frac{q}{k} < \theta_p \right\}.$$

Dans le cas où certains  $\theta_p$  sont rationnels, les formules sont plus compliquées. Nous nous limiterons au cas où les  $\omega_p$  correspondants sont positifs au sens de Krein. On a alors :

$$j(\omega_p) = j_{p+1}$$

et les formules (22) restent valables avec :

$$N_{k,p} = \text{Card} \left\{ q \mid 1 \leq q < k, \theta_{p-1} \leq \frac{q}{k} < \theta_p \right\}.$$

On peut les écrire sous forme plus condensée en faisant intervenir la fonction E. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on note  $E(\alpha)$  l'unique entier tel que :

$$E(\alpha) < \alpha \leq E(\alpha) + 1. \quad (22)$$

On notera ici que, contrairement à la convention habituelle sur les parties entières, si  $a \in \mathbb{N}$ , on a  $E(a) = a - 1$ .

PROPOSITION 4. — On suppose que si  $\theta_p \in \mathbb{Q}$ , alors  $\omega_p = \exp(2i\pi\theta_p)$  est positif au sens de Krein. Alors

$$i_{kT} = j(-1) + 2 \sum_{p=1}^{m+1} (j_p - j_{p+1}) E(k\theta_p) + (k-1)j(-1)$$

où l'on a posé  $j_{m+2} = j(-1)$ .

Démonstration. — On vérifie que :

$$N_{k,p} = E(k\theta_p) - E(k\theta_{p-1}) \quad \text{pour } p \neq 1$$

Pour  $k$  impair, on a donc

$$\begin{aligned} i_{k\text{T}} &= j(1) + 2 \sum_{p=2}^{m+1} j_p [E(k\theta_p) - E(k\theta_{p-1})] + 2j_1 E(k\theta_1) \\ &= j(1) + 2 \sum_{p=1}^m (j_p - j_{p+1}) E(k\theta_p) + 2j_{m+1} E(k\theta_{p+1}) \\ &= j(1) + 2 \sum_{p=1}^{m+1} (j_p - j_{p+1}) E(k\theta_p) + (k-1)j(-1). \end{aligned}$$

Pour  $k$  pair, on a de même .

$$\begin{aligned} i_{k\text{T}} &= j(1) + 2 \sum_{p=2}^{m+1} j_p [E(k\theta_p) - E(k\theta_{p-1})] + 2j_1 E(k\theta_1) + j(-1) \\ &= j(1) + 2 \sum_{p=1}^{m+1} (j_p - j_{p+1}) E(k\theta_p) + (k-1)j(-1). \blacksquare \end{aligned}$$

COROLLAIRE 5. — *Sous les mêmes hypothèses, on a :*

$$i_{(k+1)\text{T}} - i_{k\text{T}} = j(-1) + 2 \sum_{p=1}^{m+1} (j_p - j_{p+1}) [E((k+1)\theta_p) - E(k\theta_p)] \blacksquare \quad (24)$$

En écrivant

$$j(-1) = j_{m+2} = (j_{m+1} - j_{m+1}) + \dots + (j_2 - j_1) + j_1$$

on obtient encore

$$i_{(k+1)\text{T}} - i_{k\text{T}} = j_1 + \sum_{p=1}^{m+1} (j_p - j_{p+1}) [2(E((k+1)\theta_p) - E(k\theta_p)) - 1]$$

et puisque  $[E((k+1)\theta_p) - E(k\theta_p)]$  vaut 0 ou 1,

$$i_{(k+1)\text{T}} - i_{k\text{T}} \geq i_1 + n - \sum_{p=1}^{m+1} |j_p - j_{p+1}|$$

d'où

$$i_{(k+1)\text{T}} - i_{k\text{T}} \geq i_1 + m_0$$

On remarquera que le fait que la suite  $i_{kT}$  soit croissante est indépendant des hypothèses de positivité faites sur les  $\omega_p$ . Une démonstration générale, basée sur la notion de point conjugué, figure dans [9].

### III. — FORMULATION VARIATIONNELLE

On reprend les hypothèses et les notations du paragraphe I notamment celle du théorème I. 1 bis. On note ici (1) le problème

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Jn(x) \\ x &\in S \\ x(0) &= x(T). \end{aligned} \quad (1)$$

Soit  $j$  la jauge du convexe  $C$  :

$$j(x) = \inf \{ \lambda > 0 \mid x\lambda^{-1} \in C \}. \quad (2)$$

On introduit le hamiltonien :

$$H_\alpha(x) = [j(x)]^\alpha \quad (3)$$

où  $\alpha$  est un nombre choisi entre 1 et 2 :

$$1 < \alpha < 2. \quad (4)$$

On s'intéresse au problème à énergie fixée :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= JH'_\alpha(x) \\ x(0) &= x(T) \\ H_\alpha(x(t)) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5)_\alpha$$

On lui associe le problème à période fixée :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= JH'_\alpha(x) \\ x(0) &= x(1) \end{aligned} \right\} \quad (6)_\alpha$$

Comme il a été dit dans l'introduction, les problèmes (1) et  $(5)_\alpha$  sont équivalents, quant aux problèmes  $(5)_\alpha$  et  $(6)_\alpha$ , ils sont reliés par le résultat

suivant :

PROPOSITION 1. — (a) Si  $x^\alpha$  est une solution du problème  $(6)_\alpha$  telle que  $H(x^\alpha(t)) = h$ , alors  $y(t) = h^{-1/\alpha} x^\alpha(th^{(2-\alpha)/\alpha})$  est une solution du problème  $(5)_\alpha$  avec  $T_\alpha = h^{-(2-\alpha)/\alpha}$ .

(b) Si  $(x^\alpha, T_\alpha)$  est une solution du problème  $(5)_\alpha$ , et si  $k > 0$  est un entier quelconque, alors  $x_k^\alpha$  donnée par

$$x_k^\alpha(t) = (T_\alpha k)^{-1/(2-\alpha)} x^\alpha(T_\alpha kt)$$

est une solution du problème  $(6)_\alpha$ .

(c)  $x^\alpha$  et les  $x_k^\alpha$  ont les mêmes multiplicateurs de Floquet.

Dans ce qui suit on omettra souvent l'indice  $\alpha$ , on le rétablira quand cela sera nécessaire pour la démonstration.

Il est à noter que, d'après les travaux cités dans l'introduction, le problème  $(5)_\alpha$  a toujours une solution au moins, la question étant de savoir s'il en a davantage. Par contre le problème  $(6)_\alpha$  a toujours une infinité de solutions, chaque solution  $(x, T)$  de  $(5)_\alpha$  correspondant à une suite infinie de solutions  $x_k$  de  $(6)_\alpha$  de périodes  $k^{-1} \rightarrow 0$ .

Enfin par multiplicateurs de Floquet d'une solution  $x_k$ , on entend les multiplicateurs de Floquet du système linéarisé autour de  $x_k$  sur l'intervalle  $0 \leq t \leq k^{-1}$

$$\dot{y} = JH''(x_k(t))y.$$

On conviendra que dans le problème  $(5)_\alpha$ , on a choisi pour  $T$  la période minimale de  $x$ .

Le problème  $(6)_\alpha$  a une formulation variationnelle (principe dual de moindre action; voir [3]). Introduisons  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ , l'espace

$$L_0^\beta = \left\{ u \in L^\beta(0, 1, \mathbb{R}^{2n}) \mid \int_0^1 u dt = 0 \right\}$$

et la fonctionnelle  $\Psi_\alpha : L_0^\beta \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\Psi_\alpha(u) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (Ju, \Pi u) + G_\alpha(-Ju) \right] dt$$

Dans cette expression  $\Pi u$  désigne la primitive de  $u$  de moyenne nulle :

$$\frac{d}{dt} \Pi u = 0, \quad \int_0^1 \Pi u = 0$$

et  $G_\alpha$  désigne la fonction convexe conjuguée de  $H_\alpha$  au sens de Fenchel :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad G_\alpha(y) = \text{Max} \{ xy - H_\alpha(x) \mid x \in \mathbb{R}^{2n} \}.$$

THÉORÈME 2. — Si  $x$  est une solution du problème (6) $_\alpha$ , alors  $u = \dot{x}$  est un point critique de  $\psi_\alpha$ . Réciproquement, si  $u$  est un point critique de  $\psi_\alpha$ , il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $x(t) = \Pi u + \xi$  soit une solution de (6) $_\alpha$ .

Rappelons les propriétés de  $\psi_\alpha$ .

(a)  $\psi_\alpha$  est de classe  $C^2$  sur  $L_0^{\beta}$  (ceci n'était pas tout à fait le cas dans [5], où  $H$  était défini de manière légèrement différente).

(b) 0 est un point critique d'index infini pour  $\psi$ .

(c)  $\psi_\alpha$  satisfait la condition (c) de Palais-Smale.

(d)  $\psi_\alpha(u) \rightarrow +\infty$  quand  $\|u\| \rightarrow \infty$ .

(e)  $\psi_\alpha$  atteint son minimum sur  $L_0^{\beta}$  en un point  $\bar{u}$  tel que  $\psi_\alpha(\bar{u}) < 0$  (d'où l'existence d'une solution périodique au moins).

(f)  $\psi_\alpha$  est invariante par l'action naturelle de  $S^1$  sur  $L_0^{\beta}$  :  $(\theta u)(t) = u(t + \theta)$ , pour  $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Les points critiques de  $\psi_\alpha$  (à l'exception de 0) sont donc groupés en  $S^1$ -orbites, qui sont en fait des cercles  $C^1$  appelés *cercles critiques*. Tous les points de  $S^1 u$  ont même index (toujours fini) et même nullité (toujours  $\geq 1$ ). On dit que le cercle critique  $S^1 u$ , ou le point critique  $u$ , est *non dégénéré* si sa nullité est 1.

On a alors ([5], § III) :

PROPOSITION 3. — Si tous les cercles critiques de  $\psi$  sont non dégénérés, il y en a au moins un de chaque index pair.

Dans le cas où on ne fait pas l'hypothèse de non-dégénérescence, la théorie de Morse n'est plus applicable, et il faut faire appel à la théorie de Liusternik-Schnirelman. On doit à Viterbo [11] le résultat suivant, fondamental pour la suite :

THÉORÈME 3. — A chaque entier  $p \geq 1$  on peut associer une valeur critique  $c_p < 0$  de  $\psi_\alpha$  de telle sorte que :

(a) l'ensemble  $K(c_p) = \{v \mid \psi(v) = c_p \text{ et } \psi'(v) = 0\}$  contient au moins un point  $v_p$  vérifiant :

$$(2p-1) \quad - \quad \text{nullité}(v_p) \leq \text{index}(v_p) \leq 2p-2 \quad (6)$$

(b) si  $c_p = c_q$  avec  $p \neq q$ , alors  $K(c_p)$  contient une infinité non dénombrable de cercles critiques.

On vérifie dans [5] que l'index (resp. la nullité) d'un point critique  $u$  de  $\psi_\alpha$  est égal à l'index (resp. la nullité) du système linéarisé autour de  $x$  sur

l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\dot{y} = \text{JH}''(x(t))y, \quad 0 \leq t \leq 1$$

où  $x$  est la solution 1-périodique du problème (5) liée à  $u$  par l'équation  $\dot{x} = u$ .

A chaque solution  $(x, T)$  du problème  $(5)_\alpha$  correspond par la proposition 1 une suite infinie de solutions  $x_k$  du problème  $(6)_\alpha$  et donc de points critiques  $u_k = \dot{x}_k$  de  $\psi_\alpha$ , l'index de  $u_k$  étant  $i_k$ . On vérifie aisément que les  $i_k$  sont liés à  $i_1$  par les formules d'itération du paragraphe précédent, notamment (II. 10). Le fait que le système considéré

$$\dot{y} = \text{JH}_\alpha''(x_1(t))y, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8)$$

soit obtenu par linéarisation d'un système autonome autour d'une trajectoire périodique implique certaines particularités :

PROPOSITION 4. — 1 est toujours multiplicateur de Floquet. En particulier :

$$j(\omega) \geq 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{U}. \quad (9)$$

*Démonstration.* —  $y = \dot{x}_1$  est une solution 1-périodique de (8). L'inégalité (9) découle de (II. 21). ■

Nous allons maintenant corriger une formule donnée dans [5] sans démonstration suffisante.

Soit  $(x, T)$  une solution du problème (1). Pour tout  $\alpha$  entre 1 et 2, il existe une paramétrisation  $(x_\alpha, T_\alpha)$  de la trajectoire  $x$  telle que  $(x_\alpha, T_\alpha)$  soit solution du problème  $(5)_\alpha$ . On convient que les périodes  $T$  et  $T_\alpha$  sont minimales. La fonction  $x_1$  définie par

$$x_1^\alpha(t) = T_\alpha^{-1/(2-\alpha)} x_\alpha(T_\alpha t) \quad (10)$$

est alors solution du problème  $(6)_\alpha$ . On vérifie ([9], III) que les multiplicateurs de Floquet du système linéarisé

$$\dot{y} = \text{JH}_\alpha''(x_1^\alpha(t))y, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (11)$$

ne dépendent pas de  $\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$ . On dit que la trajectoire  $(x, T)$  est non dégénérée si le multiplicateur 1 est d'ordre 2, ou de façon équivalente si  $\text{Ker}(\text{R}_\alpha(1) - \text{Id})$  est de dimension 1,  $\text{R}_\alpha$  étant la résolvante du système  $(10)_\alpha$ .

Au système (10)<sub>α</sub> est associée une fonction  $j^\alpha$  dont les propriétés sont données par la proposition (II. 1), et on a le résultat suivant :

PROPOSITION 5. — Si la trajectoire  $(x, T)$  est non dégénérée, il existe  $\alpha_0 \in ]1, 2[$  tel que pour  $\alpha_0 < \alpha < 2$ , on ait :

$$j^\alpha(1 \pm) = i_0^\alpha + n + 1 \tag{11}$$

Démonstration. — Rappelons que  $i_0^\alpha$  est l'index de  $x_0^\alpha$ . Dire que  $(x, T)$  est non dégénérée signifie que pour tout  $\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$ , on a

$$\dim(\text{Ker } R_\alpha(1) - \text{Id}) = 1.$$

La proposition II. 1 (e) donne seulement

$$i_0^\alpha + n \leq j^\alpha(1 \pm) \leq i_0^\alpha + n + 1.$$

Reprenons les notations adoptées lors de la démonstration de II. 1 (e) en omettant provisoirement pour simplifier l'indice  $\alpha$  qu'il s'agira ensuite de faire tendre vers 2.

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la forme quadratique  $Q_\omega|_{F_2}$  tend vers une forme quadratique  $Q$  d'index  $i_1$  et de nullité 1. On a :

$$Q_\omega(u_0) = \frac{1}{2}(L u_0, u_0) - \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 L u_0 dt, P_\varepsilon^{-1} \int_0^1 L u_0 dt \right] = \frac{1}{2}(L_\varepsilon u_0, u_0)$$

et

$$Q(u_0) = \frac{1}{2}(L u_0, u_0).$$

En d'autres termes, 0 est valeur propre simple de l'opérateur  $L$ ; on vérifie, en écrivant que  $\dot{x}_1$  est solution du système linéarisé que le noyau de  $L$  est engendré par  $\dot{x}_1$ .

En raison de la structure particulière de  $L$  (perturbation compacte d'un isomorphisme) on peut montrer qu'il existe deux applications  $C^\infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow u_0$  et  $\varepsilon \rightarrow \lambda_\varepsilon$ , définies sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $L_0^2$  et  $\mathbb{R}$  respectivement, telles que

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u_0^\varepsilon &= \lambda_\varepsilon u_0^\varepsilon \\ \lambda_0 &= 0 \\ u_0^0 &= \ddot{x}_1 \end{aligned} \tag{13}$$

La question se réduit alors à trouver le signe de  $\lambda_\varepsilon$  pour  $\varepsilon \neq 0$ . Si ce signe est positif, l'index de  $Q_\omega|_{F_2}$  sera  $i_1$  et l'index de  $Q_\omega$  sera  $i_1 + n$ . Si ce signe est négatif, l'index de  $Q_\omega|_{F_2}$  sera  $i_1 + 1$  et l'index de  $Q_\omega$  sera  $i_1 + n + 1$ .

Écrivons les développements de Taylor :

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= L + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots \\ u_0 &= u_0^0 + \varepsilon u_0^1 + \varepsilon^2 u_0^2 + \dots \\ \lambda_\varepsilon &= 0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Commençons par  $L_\varepsilon$ . Le calcul (voir [5] avec  $\varepsilon = 1/h$ ) montre que  $L_1$  et  $L_2$  sont données par :

$$(L_1 u_0, u_0) = \left( \int_0^1 L u_0 dt, i J \int_0^1 L u_0 dt \right) \quad (15)$$

$$(L_2 u_0, u_0) = \left( \int_0^1 L u_0 dt, P_\infty \int_0^1 L u_0 dt \right) \quad (16)$$

où l'on a posé

$$P_\infty = - \int_0^1 J [H''(x_1(t))]^{-1} J dt. \quad (17)$$

D'autre part en reportant (14) dans (13) et en identifiant on obtient

$$L_1 \ddot{x}_1 + L u_0^1 = \lambda_1 \ddot{x}_1 \quad (18)$$

$$L_2 \ddot{x}_1 + L_1 u_0^1 + L u_0^2 = \lambda_1 u_0^1 + \lambda_2 \ddot{x}_1 \quad (19)$$

De l'équation (18) on tire, en utilisant le fait que  $L$  est autoadjoint :

$$(L_1 \ddot{x}_1, \ddot{x}_1) = \lambda_1 \|\ddot{x}_1\|_2^2.$$

Rappelons la formule donnant l'opérateur  $L$  (II. 16) :

$$L u_0 = - \int_0^t J u_0 ds - JB(t) J u \quad (20)$$

avec :

$$B(t) = [H''_\alpha(x_1(t))]^{-1} \quad (21)$$

Le calcul montre que

$$L \ddot{x}_1 = J \dot{x}_1(0) \tag{22}$$

et par conséquent (15)

$$(L_1 \ddot{x}_1, \dot{x}_1) = (J \dot{x}_1(0), i J \dot{x}_1(0)) = 0$$

c'est-à-dire  $\lambda_1 = 0$ .

La relation (19) s'écrit alors

$$L_2 \ddot{x}_1 + L_1 u_0^1 + L u_0^2 = \lambda_2 \ddot{x}_1$$

d'où l'on tire le signe de  $\lambda_2$  :

$$\lambda_2 \|\ddot{x}_1\|_2^2 = (L_2 \ddot{x}_1, \ddot{x}_1) + (L_1 u_0^1, \ddot{x}_1) = (L_2 \ddot{x}_1, \ddot{x}_1) - (L u_0^1, u_0^1) \tag{23}$$

(16) et (22) montrent que

$$(L_2 \ddot{x}_1, \ddot{x}_1) = \int_0^1 (B(t) \dot{x}_1(0), \dot{x}_1(0)) dt \tag{24}$$

Il s'agit de déterminer  $u_0^1$  et de calculer  $(L u_0^1, u_0^1)$ . Pour ce faire, il faut se servir de la formule  $L_1 \ddot{x}_1 = -L u_0^1$  qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \forall v_0 \in L_0^2, \quad -(L u_0^1, v_0)_2 &= \left( \int_0^1 L \ddot{x}_1 dt, i K \int_0^1 L v_0 dt \right) \\ \forall v_0 \in L_0^2, \quad -(u_0^1, L v_0)_2 &= \left( J \dot{x}_1(0), i J \int_0^1 L v_0 dt \right) \\ \forall v_0 \in L_0^2, \quad -(u_0^1, L v_0)_2 &= (-i \dot{x}_1(0), L v_0)_2 \\ \forall v_0 \in L_0^2, \quad (-L u_0^1, v_0)_2 &= (-i L \dot{x}_1(0), v_0)_2 \end{aligned} \tag{25}$$

donc

$$L u_0^1 = i L \dot{x}_1(0) + \xi$$

où  $\xi$  est une constante de  $\mathbb{C}^{2n}$ .

On obtient l'équation

$$-\int_0^t J u_0^1 ds - JB(t) J u_0^1 = -i J u_0^1 = -i J \dot{x}_1(0) t - i JB(t) J \dot{x}_1(0) + \xi$$

Cette équation se met sous la forme

$$H''(x_1(t))z = -J u_0^1 + iJ \dot{x}_1(0)$$

avec

$$z(t) = \int_0^t u_0^1 ds - i\dot{x}_1(0)t - J\xi$$

On en tire le système :

$$\dot{z} = JH''(x_1(t))z \quad (26)$$

$$z(1) - z(0) = -i\dot{x}_1(0) \quad (27)$$

$$u_0^1 = \dot{z} + i\dot{x}_1(0) \quad (28)$$

Pour exprimer  $z$  en fonction de  $x_1$ , il faut profiter de l'homogénéité de la fonction  $H$ . En effet, les équations (26) et (27) montrent que

$$(R(1) - I)z(0) = i\dot{x}_1(0) \quad (29)$$

D'autre part, on peut procéder comme en [5], lemme V. 1. Posons

$$x_h(t) = h^{-1/\alpha} x_1(th^{(2-\alpha)/\alpha}) \quad \text{et} \quad T_h = h^{-(2-\alpha)/\alpha}$$

Alors  $x_h$  est une solution  $T_h$  périodique de  $\dot{x} = JH'(x)$  qui coïncide avec  $x_1$  pour  $h=1$ .

En dérivant par rapport à  $h$  l'identité  $x_h(T_h) = x_h(0)$ , en  $h=1$ , on obtient :

$$(R(1) - I_n)x_1(0) = -(2-\alpha)\dot{x}_1(0) \quad (30)$$

En comparant (29) et (30), tenant compte du fait que  $\text{Ker}(R(1) - I_n)$  est engendré par  $\dot{x}_1(0)$ , on obtient :

$$z(0) = \frac{i}{2-\alpha} x_1(0) + \lambda \dot{x}_1(0) \quad (31)$$

où  $\lambda$  est une constante réelle.

Ainsi  $z$  est une solution du problème de Cauchy [(26), (31)]. Mais si l'on dérive l'identité  $\dot{x}_h = JH'(x_h)$  en  $h=1$ , on obtient, en posant

$$y = \left( \frac{d}{dh} x_h \right)_{h=1},$$

$$\dot{y} = JH''(x_1(t))y \quad (32)$$

$$y(0) = -\frac{1}{\alpha} x_1(0) \quad (33)$$

En comparant les problèmes [(26), (31)] et [(32), (33)], on voit que

$$z(t) = -\frac{\alpha}{2-\alpha} iy(t) + \lambda \dot{x}_1(t)$$

et en calculant  $y$  :

$$z(t) = \frac{1}{2-\alpha} ix_1(t) - it\dot{x}_1(t) + \lambda \dot{x}_1(t)$$

on en déduit (28)

$$u_0^1 = \frac{\alpha-1}{2-\alpha} i\dot{x}_1(t) - it\ddot{x}_1(t) + \lambda \ddot{x}_1(t) + i\dot{x}_1(0) \quad (34)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer  $(Lu_0^1, u_0^1)$ . Mais il faut rappeler que cette quantité dépend de  $\alpha$  puisque  $x_1$  désigne la fonction  $x_0^\alpha$  donnée par (10). En utilisant les relations (34) et (25), on voit que  $(Lu_0^1, u_0^1)$  est la somme de quatre termes :

$$(Lu_0^1, u_0^1) = D_1(\alpha) + D_2(\alpha) + D_3(\alpha) + D_4(\alpha)$$

avec

$$D_1(\alpha) = \frac{\alpha-1}{2-\alpha} (\dot{x}_1^\alpha(0), L\dot{x}_1^\alpha) \quad (35)$$

$$D_2(\alpha) = -(\dot{x}_1^\alpha(0), L(tx_1^\alpha)) \quad (36)$$

$$D_3(\alpha) = \lambda i (\dot{x}_1^\alpha(0), L\dot{x}_1^\alpha) \quad (37)$$

$$D_3(\alpha) = \lambda i (\dot{x}_0^\alpha(0), L\dot{x}_0^\alpha) \quad (37)$$

$$D_4(\alpha) = (\dot{x}_1^\alpha(0), L\dot{x}_1^\alpha(0)) \quad (38)$$

Notons également

$$D_5(\alpha) = -(L_2 \ddot{x}_0^\alpha, \ddot{x}_0^\alpha) \quad (39)$$

Admettons provisoirement les résultats suivants :

$$D_1(\alpha) = C \frac{(\alpha-1)^3}{2-\alpha} \alpha^{2/(2-\alpha)} + C_1(\alpha) \alpha^{2/(2-\alpha)} \quad (40)$$

$$D_i(\alpha) = C_i(\alpha) \alpha^{2/(2-\alpha)}, \quad i=2,5 \quad (41)$$

C désignant une constante strictement positive et les  $C_i(\alpha)$ ,  $i=1$  à 5, des fonctions de  $\alpha$  restant bornées lorsque  $\alpha$  tend vers 2.

La formule (23) s'écrit alors

$$\lambda_2 \|\ddot{x}_1\|_2^2 = - \frac{\alpha^{2/(2-\alpha)}}{2-\alpha} \left| C(\alpha-1)^3 + (\alpha-2) \sum_{i=1}^5 C_i(\alpha) \right|$$

Et l'on voit, puisque  $\lim_{\alpha \rightarrow 2^-} \frac{\alpha^{2/(2-\alpha)}}{2-\alpha} = +\infty$ , que pour  $\alpha$  suffisamment proche de 2,  $\lambda_2$  est négatif, il en est de même de  $\lambda_e$  et l'index de  $Q_\omega$  est donc  $i_0^* + n + 1$ .

Il reste à vérifier les relations (40) et (41). Convenons de noter dans les calculs qui suivent C toute constante réelle strictement positive indépendante de  $\alpha$ . Soit d'autre part  $\beta$  un réel fixé,  $1 < \beta < 2$ . On vérifie facilement que l'on a

$$x^\alpha(t) = x^\beta \left( \frac{\beta}{\alpha} t \right) \quad (42)$$

et

$$\alpha T_\alpha = \beta T_\beta$$

donc

$$T_\alpha = \frac{C}{\alpha} \quad (43)$$

La formule (10) donne alors :

$$x_1^\alpha(t) = C \alpha^{1/(2-\alpha)} x^\alpha(T_\alpha t) = C \alpha^{1/(2-\alpha)} x^\beta \left( \frac{\beta T_\alpha}{\alpha} t \right) \quad (44)$$

et

$$x_1^\alpha(t) = C \frac{\alpha^{1/(2-\alpha)}}{\alpha} \dot{x}^\alpha(T_\alpha t) = C \frac{\alpha^{1/(2-\alpha)}}{\alpha^2} \dot{x}^\beta \left( \frac{\beta T_\alpha}{\alpha} t \right) \quad (45)$$

Calculons  $L \dot{x}_1^\alpha$  :

$$L \dot{x}_1^\alpha = -J x_1^\alpha(t) + J x_1^\alpha(0) - J B_\alpha(t) J \dot{x}_1^\alpha(t) \quad [\text{voir (20)-(21)}]$$

Comme  $H_\alpha$  est positivement homogène de degré  $\alpha$ , on a :

$$H'_\alpha(x) = (\alpha - 1) H''_\alpha(x) x \quad (46)$$

$$(H''_\alpha(x) x, x) = \alpha(\alpha - 1) H_\alpha(x) \quad (47)$$

On a donc

$$x_1^\alpha = J H'(x_1^\alpha) = (\alpha - 1) J H''_\alpha(x_1) x_1 \quad (48)$$

d'où l'on tire

$$-J B(t) J \dot{x}_1^\alpha(t) = (\alpha - 1) J x_1^\alpha(t)$$

donc

$$L \dot{x}_1^\alpha = (\alpha - 2) J x_1^\alpha(t) + J x_1^\alpha(0) \quad (49)$$

et

$$D_1(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} (\dot{x}_1^\alpha(0), L \dot{x}_1^\alpha)$$

$$D_1(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} [\dot{x}_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(0)] - (\alpha - 1) [\dot{x}_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(t)] \quad (50)$$

En utilisant (44), (45) et (42) on a :

$$[\dot{x}_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(t)] = \frac{C}{\alpha^2} \alpha^{2/(2-\alpha)} \left[ \dot{x}^\beta(0), x^\beta \left( \frac{\beta T_\alpha}{\alpha} t \right) \right] \quad (51)$$

$$[\dot{x}_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(t)] = C(\alpha) \alpha^{2/(2-\alpha)}$$

où  $C(\alpha)$  est une fonction de  $\alpha$  bornée quand  $\alpha$  tend vers 2.

D'autre part (48), (47) et (44) donnent :

$$[x_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(0)] = \alpha(\alpha - 1)^2 H_\alpha(x_1^\alpha(0))$$

$$[\dot{x}_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(0)] = C \alpha(\alpha - 1)^2 \alpha^{2/(2-\alpha)} H_\alpha(x_1^\alpha(0)) \quad (52)$$

$$[\dot{x}_1^\alpha(0), J x_1^\alpha(0)] = C(\alpha - 1)^2 \alpha^{2/(2-\alpha)}$$

Au total en reportant (51) et (52) dans (50), on obtient bien la relation (40).

On épargnera au lecteur les calculs fastidieux conduisant aux relations (41).

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.

COROLLAIRE. — (a) Avec les mêmes hypothèses, si  $\alpha_0 < \alpha < 2$ , on a :

$$\forall \omega \in \mathbb{U} - \{1\}, \quad j(\omega) \geq i_1 + 2 \quad (53)$$

(b) Si la trajectoire  $(x, T)$  est dégénérée, la relation (53) est vérifiée pour tout  $\alpha$  entre 1 et 2.

*Démonstration.* — (a) Si la trajectoire est non dégénérée, pour  $\alpha_0 < \alpha < 2$  on a  $j(1 \pm) = i_1 + n + 1$  et il y a au plus  $(n-1)$  multiplicateurs sur le demi-cercle supérieur. D'après la proposition I. 1, l'index  $j$  ne peut décroître de plus de  $(n-1)$  unités à partir de  $i_1 + n + 1$ .

(b) Si la trajectoire est dégénérée, on a  $j(1 \pm) \geq i_1 + n$  mais il y a au plus  $(n-2)$  multiplicateurs sur le demi-cercle supérieur, donc (53) est encore vérifiée.

#### IV. — DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a une seule trajectoire fermée sur  $S$  vérifiant  $\dot{x} = Jn(x)$ . On fixe un réel  $\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$ , suffisamment proche de 2 si la trajectoire est non dégénérée (proposition III. 5).

Les seuls cercles critiques de  $\psi$  sont donc les  $S^1 u_k$ ,  $u_1$  étant le point où  $\psi$  atteint son minimum. Ce minimum  $\psi(u_1)$  est strictement négatif et le calcul montre que  $\psi(u_k) = (Tk)^{-2/(2-\alpha)} \psi(u_1)$ . La suite des valeurs critiques non nulles de  $\psi$ ,  $(\psi(u_k))_{k \geq 1}$  est donc strictement croissante. On démontre :

LEMME 1. — La fonction  $j$  est égale à 2 au voisinage de  $-1$  sur  $\mathbb{U}$ .

*Démonstration.* — Le théorème III. 3 donne pour  $p=1, 2, 3$  des points critiques  $v_1, v_2, v_3$  de  $\psi$  tels que

$$\text{index } v_1 = 0$$

$$\text{index } v_2 \leq 2$$

$$\text{index } v_3 \leq 4,$$

Il est clair que  $S^1 u_1 = S^1 v_1$  et que, la suite  $i_k$  étant croissante :

$$i_2 \leq 2$$

$$i_3 \leq 4$$

Or d'après la formule (10)

$$i_2 = j(-1) \quad \text{et} \quad i_3 = 2j \left[ \exp \left( \frac{2i\pi}{3} \right) \right]$$

On en déduit puisque (53) est vérifiée

$$j(-1) = j \left[ \exp \left( \frac{2i\pi}{3} \right) \right] = 2$$

La fonction  $j$  passe d'une valeur  $j(1 \pm) \geq n$  à la valeur 2 au point  $\exp \left( \frac{2i\pi}{3} \right)$ .

La proposition II. 5 (d) montre qu'il y a au moins  $(n-2)$  multiplicateurs sur l'arc de cercle compris entre 1 et  $\exp \left( \frac{2i\pi}{3} \right)$ . Il reste au plus un multiplicateur entre  $\exp \left( \frac{2i\pi}{3} \right)$  et  $-1$ , la fonction  $j$  ne peut, entre ces deux points prendre la valeur 3 et redescendre à la valeur 2 au point  $(-1)$ . D'où le lemme. ■

Ainsi il y a au moins  $(n-2)$  multiplicateurs de Floquet sur le demi-cercle supérieur. Rappelons que l'on a supposé  $n \geq 3$ .

On reprend les notations données à la fin du paragraphe II. On a :

LEMME 2. — Tous les  $\omega_p$ ,  $1 \leq p \leq m$ , sont positifs au sens de Krein. En particulier :

$$\forall p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad j_p - j_{p+1} > 0.$$

Démonstration. — On utilise à nouveau la proposition (II. 5). Notons  $\mu_p$  la multiplicité de  $\omega_p$  et  $\mu = \sum_{p=1}^m \mu_p$ . On sait que  $\mu$  vaut  $(n-2)$  ou  $(n-1)$ ; en effet on peut écrire :

$$j_{m+1} = 2 = j_1 - \sum_{p=1}^m (j_p - j_{p+1})$$

et on a

$$\left. \begin{array}{l} j_p - j_{p+1} \leq \mu_p \\ j_1 \geq n \end{array} \right\}$$

Distinguons les deux cas :

(1)  $\mu = n - 2$ . On voit que la seule possibilité est  $j_1 = n$  et  $j_p - j_{p+1} = \mu_p$  pour  $1 \leq p \leq m$ .

(2)  $\mu = n - 1$ . La trajectoire est dans ce cas non dégénérée, et on a  $j_1 = n + 1$  d'où la même conclusion. ■

La suite  $i_k$  vérifie la formule donnée au corollaire (II. 5) :

$$i_{k+1} - i_k = 2 + 2 \sum_{p=1}^m (j_p - j_{p+1}) \Delta_{k,p}$$

où

$$\Delta_{k,p} = E((k+1)\theta_p) - E(k\theta_p)$$

Il est clair que  $\Delta_{k,p}$  vaut 0 ou 1 et que

$$\Delta_{k,p} = 1 \Leftrightarrow [k\theta_p, (k+1)\theta_p] \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$$

Il existe donc des valeurs de l'entier  $k$  pour lesquelles  $i_{k+1} - i_k \geq 4$ .

Soit  $K$  la plus petite de ces valeurs. On a

$$i_k = 2(K-1) < 2K < i_{K+1}$$

et il y a exactement  $K$  cercles critiques  $S^1 u_k$  d'index  $\leq 2K$ . Or le théorème III. 3 donne  $(K+1)$  cercles critiques  $S^1 v_p$ ,  $1 \leq p \leq K+1$  d'index  $\leq 2K$ . Il y a donc coïncidence de deux cercles  $S^1 v_p = S^1 v_q$ ,  $p \neq q$ , et une infinité d'orbites critiques sur un même niveau critique. Or la suite des valeurs critiques  $\psi(u_k)$  de  $\psi$  est strictement croissante. On aboutit ainsi à une contradiction et le théorème est démontré.

## RÉFÉRENCES

- [1] H. SEIFERT, Periodische Bewegungen mekanischer Systemen, *Math. Zeit.*, vol. **51**, 1948, p. 197-216.
- [2] A. WEINSTEIN, Periodic orbits for convex Hamiltonian systems, *Ann. of Math.*, vol. **108**, 1978, p. 507-518.
- [3] F. CLARKE, Periodic solutions to Hamiltonian inclusions, *J. Diff. Equ.*, vol. **40**, 1981, p. 1-6.

- [4] P. H. RABINOWITZ, Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm. Pure. Appl. Math.*, vol. **31**, 1978, p. 36-68.
- [5] I. EKELAND, Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens convexes, *Annales I.H.P., Analyse non linéaire*, vol. **1**, 1984, p. 19-78.
- [6] A. WEINSTEIN, Normal modes for non linear Hamiltonian systems, *Inv. Math.*, vol. **20**, 1973, p. 47-57.
- [7] I. EKELAND et J. M. LASRY, On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface, *Ann. Math.*, vol. **12**, 1980, p. 283-319.
- [8] H. BERESTYCKI, J. M. LASRY, B. RUF et G. MANCINI, Existence of multiple periodic orbits on star-shaped Hamiltonians surfaces, *Comm. Pure. Appl. Math.*, vol. **38**, 1985, p. 252-290.
- [9] I. EKELAND, An index theory for periodic solutions of convex Hamiltonian systems, *Nonlinear functional analysis and its applications*, F. Browder ed., Proceedings of Symposia in Pure Math., **45**, 1986, p. 395-423.
- [10] V. YAKUBOVICH et V. STARZHINSKY, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*, Halsdedt Press, Wiley, 1980.
- [11] C. VITERBO, Indice des points critiques obtenus par minimaux (à paraître).
- [12] I. EKELAND et L. LASSOUED, Un flot hamiltonien a au moins deux trajectoires fermées sur toute surface d'énergie convexe et bornée, *C.R. Acad. Sc.*, t. **301**, série I, 1985, p. 162-164
- [13] P. H. RABINOWITZ, Periodic solutions of a Hamiltonian system on a prescribed energy surface, *J. Diff. Eq.*, vol. **33**, 1979, p. 336-352.
- [14] GLÜCK-ZILLER, Existence of periodic motions of conservative systems, *Seminar on minimal submanifolds*, Princeton University Press, 1983.
- [15] HAYASHI, Periodic solutions of classical Hamiltonian systems, *Tokyo J. Math.*, vol. **6**, 1983.
- [16] V. BENCI, Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire*, **1**, 1984, p. 401-411.
- [17] A. SZULKIN, Communication personnelle, décembre 1985.

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1985.)