ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

G. BARLES

Remarques sur des résultats d'existence pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

Annales de l'I. H. P., section C, tome 2, nº 1 (1985), p. 21-32

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1985__2_1_21_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 2, n° 1, 1985, p. 21-32. *Analyse non linéaire*

Remarques sur des résultats d'existence pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

par

G. BARLES
ENS, Saint-Cloud et Ceremade, Impasse du Docteur-Roux, 83150 Bandol

RÉSUMÉ. — Nous complétons certains résultats d'existence obtenus antérieurement par P. L. Lions pour les équations de Hamilton Jacobi du premier ordre. Ces résultats sont basés sur la notion de solution de viscosité.

Most-clés : Solution de viscosité, résultat d'existence, résultat de comparaison.

ABSTRACT. — We complement some existence results obtained previously by P. L. Lions for first-order Hamilton Jacobi Equations. These results rely on the notion of viscosity solution.

Key-words: Viscosity solution, existence result, comparison result.

INTRODUCTION

On démontre ici des résultats d'existence pour les problèmes suivants :

$$\text{(1)} \qquad H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

que l'on appelle problème de Dirichlet pour les équations de Hamilton-Jacobi et :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, u, Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times\,]0, T[\\ u(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times\,]0, T[\qquad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

que l'on appelle problème de Cauchy pour les équations de Hamilton-Jacobi. Dans les deux cas, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, φ et u_0 sont des fonctions données et $H(x, r, p)$ (resp. $H(x, t, r, p)$) est une fonction donnée continue sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ (resp. $\overline{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$) que l'on appelle l'Hamiltonien. Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, on n'impose aucune condition de comportement de u à l'infini : on demande seulement à u d'être bornée.

Les résultats prouvés ici reposent sur la notion de solution de viscosité introduite par M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*]. Pour une présentation complète de la notion de solution de viscosité et des propriétés qui en découlent le lecteur pourra se référer à M. G. Crandall, L. C. Evans et P. L. Lions [*2*], M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*] et P. L. Lions [*4*].

Les résultats d'existence de solutions de viscosité pour les problèmes (1) et (2) déjà connus sont obtenus essentiellement sous deux types d'hypothèses : les unes concernant la dépendance de H par rapport à x (cf. P. L. Lions [*4*] [*5*], P. E. Souganidis [*6*], G. Barles [*1*]), les autres concernant la dépendance de H par rapport à p (en particulier $H \to +\infty$ si $|p| \to +\infty$). Dans ce travail, on donne des résultats d'existence sous ce dernier type d'hypothèses.

La première partie de cet article est consacrée au problème de Dirichlet : on prouve sous des hypothèses convenables sur H et s'il existe une sous-solution de viscosité $\underline{u}$ et une sur-solution de viscosité $\overline{u}$ toutes deux lipschitziennes telles que $\underline{u} \leqslant \overline{u}$, qu'il existe une solution de viscosité u de (1). La condition supplémentaire $\underline{u} \leqslant \overline{u}$ est nécessitée par le fait que l'on relâche l'hypothèse classique de monotonie de $H(x, r, p)$ par rapport à r. On comparera aussi ce résultat à ceux obtenus par P. L. Lions [*3*] et on indiquera quand on a l'existence de $\underline{u}$ et $\overline{u}$.

La deuxième partie est consacrée au problème de Cauchy : on prouve que sous des hypothèses convenables concernant le comportement de H par rapport à t et p en particulier et s'il existe une sous-solution de viscosité $\underline{u}$ lipschitzienne de (2) alors il existe une solution de viscosité de (2) dans $BUC(\Omega \times]0, T[)$ (*). On expliquera comment ce résultat étend celui prouvé par P. L. Lions [*4*] et quand on a l'existence de $\underline{u}$.

I. RÉSULTATS D'EXISTENCE POUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET

On utilisera les hypothèses suivantes :

(3) H est uniformément continue sur $\overline{\Omega} \times (-R, R) \times \overline{B}_R$ $(\forall R < \infty)$

$$(4)\quad \begin{cases} \forall R < \infty, \quad \exists \gamma_R \in \mathbb{R}, \qquad H(x, t, p) - H(x, s, p) \geqslant \gamma_R (t - s) \\ \text{pour } x \in \overline{\Omega}, \qquad -R \leqslant s \leqslant t \leqslant R, \qquad p \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

(*) BUC (0) = ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur 0.

(5) $\liminf_{|p|\to\infty} H(x, t, p) > 0$ uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, t borné.

THÉORÈME I.1. — Sous les hypothèses (3), (4), (5) et s'il existe $\underline{u}$ et $\overline{u}$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ respectivement sous et sur-solution de viscosité de :

$$H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

avec $\underline{u}_{/\partial\Omega} = \varphi$ et $\underline{u} \leqslant \overline{u}$, il existe une solution de viscosité u de (1) dans $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, on peut donner le corollaire suivant :

COROLLAIRE I.1. — Sous les hypothèses (3), (4), (5) et s'il existe $M_2 \geqslant M_1$ tels que :

$$H(x, M_2, 0) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad H(x, M_1, 0) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

il existe une solution de viscosité $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ de :

$$H(x, u\ Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N.$$

REMARQUE I.1. — Indiquons que dans le corollaire I.1 l'existence de M_1 et M_2 peut être assurée par une hypothèse du type :

$$(6) \qquad \begin{cases} \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad \forall t \geqslant s \in \mathbb{R} \\ H(x, t, 0) - H(x, s, 0) \geqslant \alpha(t - s), \qquad H(x, 0, 0) \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

REMARQUE I.2. — Dans le cas du théorème I.1, l'existence de $\underline{u}$ a été étudiée en particulier par P. L. Lions : dans [*4*], une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\underline{u}$ est donnée (cf. [*4*], partie B, section IV).

REMARQUE I.3. — Par rapport au résultat d'existence prouvé par P. L. Lions dans [*5*], on a relâché l'hypothèse de monotonie de $H(x, t, p)$ par rapport à t ce qui a imposé des hypothèses supplémentaires comme l'existence de $\overline{u}$ et l'inégalité $\underline{u} \leqslant \overline{u}$. L'hypothèse (5) n'est pas vraiment plus générale que celle de [*5*] car si $\gamma_R > 0$ ($\forall R < \infty$), on peut considérer l'hamiltonien $\tilde{H}$ défini par :

$$\tilde{H}(x, t, p) = (1 + |p|)\, H(x, t, p)$$

H et $\tilde{H}$ ont les mêmes sur et sous-solutions de viscosité. De plus, comme $\gamma_R > 0$ ($\forall R < \infty$), $\tilde{H}$ vérifie (3), (4) et :

$$(5') \qquad \tilde{H}(x, t, p) \to +\infty \quad \text{si} \quad |p| \to +\infty$$

uniformément par rapport à $x \in \Omega$, t borné.

Ici le fait que γ_R peut être négatif (alors $\tilde{H}$ ne vérifie plus (4)) va nous imposer des manipulations supplémentaires basées sur des estimations *a priori*.

REMARQUE I.4. — Soit $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ une sous-solution de viscosité de :

$$H(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

telle que :

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u} \qquad \text{dans} \quad \Omega .$$

u vérifie :

$$H(x, u, Du) \leqslant 0 \qquad pp \quad \text{dans} \quad \Omega .$$

Si $R_0 = \max (\| \underline{u} \|_{L^\infty(\Omega)}, \| \bar{u} \|_{L^\infty(\Omega)})$, on a :

$$\| Du \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C$$

où $\quad C = \sup \{ | p | / \exists (x, t) \in \Omega \times (- R_0, R_0), H(x, t, p) \leqslant 0 \}$

C est fini d'après (5). Ceci nous donne une estimation *a priori* de $\| Du \|_{L^\infty(\Omega)}$ si u est une solution de viscosité de (1) vérifiant $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$.

Démonstration du théorème I.1. — On cherche *a priori* une solution de viscosité u de (1) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u} \\ \| Du \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C \end{array} \right. \tag{7}$$

On considère alors l'hamiltonien $\tilde{H}$ défini par :

$$\tilde{H}(x, t, p) = \left\{ \begin{array}{lll} (| p | - C)^+ + H(x, - R_0, p) & \text{si} & t \leqslant - R_0 \\ (| p | - C)^+ + H(x, t, p) & & - R_0 \leqslant t \leqslant R_0 \\ (| p | - C)^+ + H(x, R_0, p) & \text{si} & t \geqslant R_0 \end{array} \right.$$

où

$$a^+ = \max (a, 0) .$$

$\tilde{H}$ vérifie (3), (4), (5′) et dans (4) on peut prendre $\gamma_R \equiv \gamma = \inf (0, \gamma_{R_0})$. De plus, $\underline{u}$ et $\bar{u}$ sont encore respectivement sous et sur-solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega . \tag{8}$$

C'est évident pour $\bar{u}$ et pour $\underline{u}$, c'est une conséquence de la remarque I.4. On va prouver l'existence d'une solution de viscosité u de (8) vérifiant (7) et $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$; (7) impliquera que u est solution de viscosité de (1) vu la forme de $\tilde{H}$. Pour cela, on considère le procédé itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \tilde{H}(x, u^{n+1}, Du^{n+1}) + (1 - \gamma)u^{n+1} = (1 - \gamma)u^n & \text{dans} & \Omega \\ u^{n+1} = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega . & & \end{array} \right. \tag{9}$$

et

$$u^0 = \underline{u} .$$

On va prouver que la suite u^n est bien définie, qu'elle est croissante et qu'elle converge uniformément sur tout compact de Ω vers u solution de viscosité de (8).

Comme l'hamiltonien $\tilde{H}(x, t, p) + (1-\gamma)t - (1-\gamma)\underline{u}(x)$ vérifie (3), (4), (5′) avec, dans (4), $\gamma_R \equiv 1$ et comme u est sous-solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) + (1 - \gamma)u = (1 - \gamma)\underline{u} \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

d'après un résultat de P. L. Lions [5], il existe une unique solution de viscosité $u^1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ de :

$$(10) \qquad \begin{cases} \tilde{H}(x, u, Du) + (1 - \gamma)u = (1 - \gamma)\underline{u} & \text{dans} \quad \Omega \\ u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega . \end{cases}$$

De plus, il est clair en utilisant le résultat de comparaison dû à M. G. Crandall et P. L. Lions [3] que l'on a :

$$\underline{u} \leqslant u^1 \leqslant \bar{u}$$

En effet, $\underline{u}$ et $\bar{u}$ sont respectivement sous et sur-solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) + (1 - \gamma)u = (1 - \gamma)\underline{u} \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

et

$$\underline{u} = \varphi = u^1 \leqslant \bar{u} \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

Enfin comme $u^1 \geqslant \underline{u}$, u^1 est sous-solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

et donc de :

$$H(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

vu la forme de $\tilde{H}$. D'après la remarque I.4, on a :

$$\| Du^1 \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C .$$

Par récurrence, on prouve facilement l'existence de u^n car $\underline{u}$ est toujours sous-solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) + (1 - \gamma)u = (1 - \gamma)u^{n-1} \qquad \text{dans} \qquad \Omega \, (n \geqslant 2)$$

puisque, par hypothèse de récurrence, $\underline{u} \leqslant u^{n-1}$. De plus, $u^{n-1} \leqslant u^n$ car u^{n-1} est sous-solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) + (1 - \gamma)u = (1 - \gamma)u^{n-1} \qquad \text{dans} \quad \Omega \quad (n \geqslant 2)$$

en effet, par hypothèse de récurrence, $u^{n-2} \leqslant u^{n-1}$ et u^{n-1} est solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) + (1 - \gamma)u = (1 - \gamma)u^{n-2} \qquad \text{dans} \quad \Omega \quad (n \geqslant 2)$$

Enfin, $\| Du^n \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C$, par le même argument que pour u^1 puisque l'on a :

$$\underline{u} \leqslant u^{n-1} \leqslant u^n \leqslant \bar{u}$$

Soit alors K un compact de Ω; comme $\| u^n \|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leqslant \tilde{C}$ (où $\tilde{C}$ est une constante indépendante de n), il existe une sous-suite $u^{n'}$ convergent uniformément sur K vers une fonction $u \in W^{1,\infty}(K)$ par le théorème d'Ascoli. Mais la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, c'est toute la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers u. Ainsi u^n converge uniformément sur tout compact de Ω vers

$u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Par le résultat de stabilité des solutions de viscosité dû à M. G. Crandall et P. L. Lions [3], u est solution de viscosité de :

$$\tilde{H}(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega$$

De plus, par convergence simple $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$. Enfin, comme chaque u^n vérifie (7), u vérifie (7) et vu la forme de $\tilde{H}$, u est solution de viscosité de (1); ce qui termine la démonstration.

II. RÉSULTATS D'EXISTENCE POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY

On utilisera les hypothèses suivantes :

(11) H est borné uniformément continu sur $\overline{\Omega} \times [0, T] \times (-R, R) \times \overline{B}_R$ $(\forall R < \infty)$

$$(12) \quad \begin{cases} \forall R < \infty, \quad \exists \gamma_R \in \mathbb{R}, \quad H(x, t, u, p) - H(x, t, v, p) \geqslant \gamma_R(u - v) \\ \text{pour} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0, T], \qquad p \in \mathbb{R}^N, -R \leqslant u \leqslant v \leqslant R \end{cases}$$

$$(13) \qquad H(x, t, u, p) \to +\infty \quad \text{si} \quad |p| \to +\infty$$

uniformément par rapport à $x \in \overline{\Omega}$ $t \in [0, T]$, u borné

$$(14) \quad \begin{cases} \rho_R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{continu, croissant, borné tel que } \rho_R(h) \to 0 \text{ si } h \to 0^+ \\ \text{et} : H(x, t+h, u, p) \leqslant H(x, t, u, p) + \rho_R(h) \end{cases}$$

pour $x \in \overline{\Omega}$, $t \in]0, T[$, $h \geqslant 0$ tel que $t + h \leqslant T$, $|u| \leqslant R$ et $p \in \mathbb{R}^N$.

THÉORÈME II.1. — Sous les hypothèses (11), (12), (13), (14) et s'il existe $\underline{u}$ dans $W^{1,\infty}(\Omega \times]0, T[)$ sous-solution de viscosité de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times]0, T[$$

avec $\underline{u}(x, 0) = u_0(x)$ et $\underline{u}(x, t) = \varphi(x, t)$ sur $\partial\Omega \times]0, T[$

alors il existe $u \in \mathrm{BUC}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ solution de viscosité de (2).

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ on peut donner le résultat plus précis suivant :

COROLLAIRE II.1. — Sous les hypothèses (11), (12), (13), (14) et si u_0 est dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, il existe T_0 $(0 < T_0 < T)$ qui dépend de H et de $\|u_0\|_{1,\infty}$ et $u \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N \times [0, T_0])$ solution de viscosité de :

$$(15) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \times]0, T_0[\\ &u(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

REMARQUE II.1. — On peut faire la même remarque que dans la partie I quant à l'existence de $\underline{u}$. Là encore, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\underline{u}$ est donnée dans P. L. Lions [*4*] (cf. [*4*], partie C, section III).

REMARQUE II.2. — Ce résultat généralise un résultat de P. L. Lions [*4*] où (14) était remplacée par :

$$\text{H est lipschitzien en } t \qquad \text{pour} \qquad x \in \Omega, u \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\| H_t \|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T] \times (-R,R) \times \mathbb{R}^N)} \leqslant C_R .$$

REMARQUE II.3. — Les hypothèses du théorème II.1 impliquent l'existence d'une sur-solution de viscosité de (2) de manière évidente. Soit

$$\tilde{H}(x, u, p) = \operatorname*{Min}_{t \in [0,T]} H(x, t, u, p)$$

$\tilde{H}$ vérifie (11), (12), (13) et ne dépend pas de t ; de plus, $\underline{u}$ est sous-solution de viscosité de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{H}(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times]0, T[$$

donc d'après le résultat de P. L. Lions [*4*] mentionné dans la remarque II.2, il existe $\bar{u}$ solution de viscosité de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{H}(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times]0, T[$$

et

$$\bar{u}(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{et} \qquad u(x, t) = \varphi(x, t) \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \times]0, T[.$$

$\bar{u}$ est alors clairement sur-solution de viscosité de (2).

Démonstration du théorème II.1 :

REMARQUE II.4. — Par des résultats de comparaison dûs à M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*], si u est solution de viscosité de (2) dans BUC ($\Omega \times]0, T[$), on a :

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$$

(Rappelons que pour appliquer le résultat de comparaison que nous citons il suffit que l'une des fonctions à comparer soit dans $W^{1,\infty}(\bar{\Omega} \times]0, T[)$. On peut donc se ramener au cas où γ_R et ρ_R ne dépendent pas de R en faisant des manipulations sur H identiques à celles de la preuve du théorème I.1. On les notera respectivement γ et ρ. Enfin en faisant le changement d'inconnue $v = e^{(\gamma - 1)t}u$, on se ramène au cas où $\gamma = 1$ (cf. par ex. G. Barles [*1*]).

Étape 1 : La première étape consiste à prouver le résultat lorsque $\rho(h) = C \cdot h$ $(C > 0)$. Toute la démonstration repose sur une estimation *a priori* de $\| u_t \|_{L^\infty(\Omega \times]0,T[)}$ qui donnera une estimation *a priori* de $\| Du \|_{L^\infty(\Omega \times]0,T[)}$ en utilisant (13) et l'équation.

Soit donc $u \in W^{1,\infty}(\Omega \times]0,T[)$ la solution de viscosité supposée de l'équation (2). On a, d'abord :

$$u_t = -H(x,t,u,Du) \leqslant - \underset{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,T] \\ |r| \leq R_0 \\ p \in \mathbb{R}^N}}{\operatorname{Min}} H(x,t,r,p) = -\tilde{C}$$

où $R_0 = \max(\| \underline{u} \|_\infty, \| \bar{u} \|_\infty)$. Ce minimum est fini grâce à (11) et (13). Minorons u_t : soit $w(x,t) = u(x,t) - f(h)$ où $f(h) = h \max(C, \| \underline{u}_t \|_\infty)$, il est facile de voir que w est sous-solution de viscosité de :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(x,t,w,Dw) + C \cdot h = 0$$

De plus, $w(x,0) \leqslant u(x,h)$ et $w(x,t) \leqslant \varphi(x,t+h)$ sur $\partial\Omega \times]0,T[$. Soit $v(x,t) = u(x,t+h)$, v est sur-solution de viscosité de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + H(x,t,v,Dv) + C \cdot h = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T-h[\\ v(x,0) = u(x,h) \quad \text{dans} \quad \Omega, & v(x,t) = \varphi(x,t+h) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T-h[\end{cases}$$

Par un résultat de comparaison pour le problème de Cauchy, (cf. M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*]), on a :

$$w \leqslant v$$

D'où

$$u(x,t+h) - u(x,t) \geqslant -h \max(C, \| \underline{u}_t \|_\infty)$$

et

$$u_t \geq -\max(C, \| \underline{u}_t \|_\infty)$$

On a donc une estimation *a priori* de $\| u_t \|_\infty$ et en utilisant (13) et l'équation, on obtient :

$$\| Du \|_\infty \leqslant M$$

où

$$M = \sup \{ |p| / \underset{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,T] \\ u \in \mathbb{R}}}{\min} H(x,t,u,p) \leqslant \max(C, \tilde{C}^-, \| \underline{u}_t \|_\infty) \}$$

$M < \infty$ grâce à l'hypothèse (13).

A partir de ces estimations, on va prouver l'existence de u; soit χ : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\mathscr{C}^\infty$ décroissante, $\chi(x) = 1$ si $x \leqslant M+1$ et $\chi(x) = 0$ si $x \geqslant 2(M+1)$. On définit $\tilde{H}$ par :

$$\tilde{H}(x,t,r,p) = \chi(|p|)H(x,t,r,p) + (1 - \chi(|p|)) \underset{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,T] \\ r \in \mathbb{R}}}{\operatorname{Min}} H(x,t,r,p)$$

On prolonge $\tilde{H}$ par $\tilde{H}(x, T, r, p)$ pour $t \geqslant T$. On considère alors :

$$\tilde{H}_n(x, t, u, p) = n \int_t^{t+1/n} \tilde{H}(x, s, u, p)ds - v(1/n)$$

où v est le module de continuité de $t \to \tilde{H}(x, t, u, p)$ uniforme pour $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$. $\tilde{H}_n$ vérifie (11), (12), (13), (14) avec $\rho(h) = C \cdot h$. De plus $\tilde{H}_n$ est lipschitzien en t uniformément par rapport à $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$ et $\tilde{H}_n$ converge uniformément vers $\tilde{H}$ lorsque $n \to +\infty$ grâce à (11) et à la forme de $\tilde{H}$. Enfin, $\tilde{H}_n \leqslant \tilde{H}$ et donc $\underline{u}$ est sous-solution de viscosité de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{H}_n(x, t, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[$$

D'après un résultat de P. L. Lions [4], il existe une unique solution de viscosité $u^n \in W^{1,\infty}(\Omega \times]0, T[)$ de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \tilde{H}_n(x, t, u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad u(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

On remarque alors que :

$$\operatorname*{Min}_{\substack{x\in\Omega \\ t\in[0,T] \\ r\in\mathbb{R}}} \tilde{H}(x, t, r, p) = \operatorname*{Min}_{\substack{x\in\Omega \\ t\in[0,T] \\ r\in\mathbb{R}}} H(x, t, r, p)$$

et

$$\tilde{H}_n \geqslant \tilde{H} - 2v(1/n)$$

On a donc les estimations suivantes :

$$\| u_t^n \|_\infty \leqslant \max \left(C, (\tilde{C} - 2v(1/n))^-, \quad \| \underline{u}_t \|_\infty\right)$$

et

$$\| Du^n \|_\infty \leqslant M_n$$

où

$$M_n = \sup \Big\{ \, | p | / \operatorname*{Min}_{\substack{x\in\Omega \\ t\in[0,T] \\ r\in\mathbb{R}}} H(x, t, r, \rho) \leqslant \max (C, (\tilde{C} - 2v(1/n)), \quad \| \underline{u}_t \|_\infty) + 2v(1/n) \Big\}$$

On note que $M_n \searrow M$ lorsque $n \to \infty$.

Comme $\tilde{H}_n$ converge uniformément vers $\tilde{H}$ quand $n \to +\infty$, on montre facilement, en utilisant le résultat de comparaison pour le problème de Cauchy dû à M. G. Crandall et P. L. Lions [3], que u^n est une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$ qui converge uniformément vers $u \in W^{1,\infty}(\Omega \times]0, T[)$ avec :

$$\| u_t \|_\infty \leqslant \max (C, C^-, \| \underline{u}_t \|_\infty)$$
$$\| Du \|_\infty \leqslant M \,.$$

u est solution de viscosité de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \tilde{\mathrm{H}}(x, t, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0, \mathrm{T}[\\ u(x, 0) = u_0(x), \qquad u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, \mathrm{T}[\end{cases}$$

par le résultat de stabilité des solutions de viscosité (cf. M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*]).

L'estimation :

$$\| \mathrm{D}u \|_\infty \leqslant \mathrm{M}$$

et la forme de $\tilde{\mathrm{H}}$ impliquent que u est solution de viscosité de (2).

Étape 2 : Pour traiter le cas général on va approcher H uniformément par des hamiltoniens H_n qui vérifie (14) avec $\rho_n(h) = \mathrm{C}^n \cdot h$.

(a) **Construction des H^n.**

Comme on veut conserver la sous-solution $\underline{u}$, on va imposer $\mathrm{H}_n \leqslant \mathrm{H}$, ce qui motive un peu cette construction.

On prolonge H pour $t \leqslant 0$ par :

$$\mathrm{H}(x, t, r, p) = \mathrm{H}(x, 0, r, p) \qquad \text{si} \quad t \leqslant 0$$

On pose alors :

$$\mathrm{H}_n(x, t, r, p) = n \int_{t-1/n}^{t} \operatorname*{Min}_{w \in (s,t)} \mathrm{H}(x, w, r, p) ds .$$

H_n vérifie (11), (12), (13). De plus, $\mathrm{H}_n \leqslant \mathrm{H}$ car :

$$\operatorname*{Min}_{w \in (s,t)} \mathrm{H}(x, w, r, p) \leqslant \mathrm{H}(x, t, r, p)$$

et $\mathrm{H} - \rho(1/n) \leqslant \mathrm{H}_n$ car :

$$\mathrm{H}(x, t, r, p) \leqslant \mathrm{H}(x, w, r, p) + \rho(t - w) \qquad \text{si} \quad w \leqslant t$$

Donc comme ρ est croissante, si $w \in (t - 1/n, t)$:

$$\mathrm{H}(x, t, r, p) - \rho(1/n) \leqslant \mathrm{H}(x, w, r, p)$$

Intéressons-nous maintenant au comportement de H_n par rapport à t :

Lemme II.1. — H_n vérifie (14) avec $\rho(h) = \mathrm{C}^n \cdot h$ où $\mathrm{C}^n = 2n\rho(1/n)$.

Preuve du lemme II.1. — Pour plus de clarté, on omettra la dépendance de H et H_n par rapport à x, r et p. On va majorer $\mathrm{H}_n(t+h) - \mathrm{H}_n(t)$ pour $h \geqslant 0$. Sans perdre de généralité, on peut supposer $h \leqslant 1/n$.

$$\mathrm{H}_n(t + h) - \mathrm{H}_n(t) = n \left\{ \int_{t+h-1/n}^{t+h} \operatorname*{Min}_{w \in (s,t+h)} \mathrm{H}(w) ds + - \int_{t-1/n}^{t} \operatorname*{Min}_{w \in (s,t)} \mathrm{H}(w) ds \right\}$$

D'où :

$$\mathrm{H}_n(t+h) - \mathrm{H}_n(t) = n\left\{ \int_t^{t+h} \operatorname*{Min}_{w\in(s,t+h)} \mathrm{H}(w)ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t+h-1/n}^{t} (\operatorname*{Min}_{w\in(s,t+h)} \mathrm{H}(w) - \operatorname*{Min}_{w\in(s,t)} \mathrm{H}(w))ds + - \int_{t-1/n}^{t-1/n+h} \operatorname*{Min}_{w\in(s,t)} \mathrm{H}(w)ds \right\}$$

Le premier terme du membre de droite se majore par $nh\mathrm{H}(t+h)$, le deuxième par zéro et le troisième par $-nh[\mathrm{H}(t)-\rho(1/n)]$ car si $w\in(t-1/n,t)$:

$$\mathrm{H}(t) \leqslant \mathrm{H}(w) + \rho(1/n)$$

D'où :

$$\operatorname*{Min}_{w\in(s,t)} \mathrm{H}(w) \geqslant \mathrm{H}(t) - \rho(1/n)$$

Par conséquent :

$$\mathrm{H}_n(t+h) - \mathrm{H}_n(t) \leqslant nh\{\mathrm{H}(t+h) - \mathrm{H}(t) + \rho(1/n)\}$$
$$\mathrm{H}_n(t+h) - \mathrm{H}_n(t) \leqslant 2n\rho(1/n)h \qquad \text{car} \qquad h \leqslant 1/n.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme II.1.

D'après l'étape 1, il existe une unique solution de viscosité u^n dans $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega \times]0,\mathrm{T}[)$ de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{H}_n(x,t,u,\mathrm{D}u) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0,\mathrm{T}[\\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,t) = \varphi(x,t) & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,\mathrm{T}[\end{cases}$$

Comme H_n converge uniformément vers H sur $\overline{\Omega} \times [0,\mathrm{T}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathrm{N}$, on montre facilement en utilisant les résultats de comparaison pour le problème de Cauchy (cf. M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*]) que u^n est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega \times]0,\mathrm{T}[)$ qui converge uniformément sur $\overline{\Omega} \times [0,\mathrm{T}]$ vers $u \in \mathrm{BUC}(\Omega \times]0,\mathrm{T}[)$ qui est solution de viscosité de (2) par le résultat de stabilité des solutions de viscosité (cf. [*3*]).

Preuve du corollaire II.1. — La preuve du corollaire II.1 consiste à montrer que l'on peut construire sur un intervalle de temps $]0,\mathrm{T}_0[$ $(\mathrm{T}_0 > 0)$ une sous-solution de viscosité $\underline{u}$ de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{H}(x,t,u,\mathrm{D}u) = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0,\mathrm{T}_0[$$

vérifiant $\underline{u}(x,0) = u_0(x)$.

Soit C et T_0 définis par :

$$\mathrm{C} = \sup\{\mathrm{H}(x,t,r,p)/x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}, \quad t\in[0,\mathrm{T}], \quad |r| \leqslant \|u_0\|_\infty, \quad |p| \leqslant \|\mathrm{D}u_0\|_\infty\}$$

et, si $\mathrm{C}^+ = \max(\mathrm{C},0)$:

$$\mathrm{T}_0 = \sup\{t/\mathrm{C}^+(-1-\gamma t) \leqslant 0\}$$

où $\gamma = \gamma_\mathrm{R}$ avec $\mathrm{R} = 3\mathrm{C}^+\mathrm{T} + \|u_0\|_\infty$.

Alors $\underline{u}(x, t) = -2C^+t + u_0(x)$ est sous-solution de viscosité de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t\ u, Du) = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \times]0, T_0[$$

Prouvons cette affirmation : soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$ et soit (x_0, t_0) dans $\mathbb{R}^N \times]0, T_0[$ un point de maximum de $\underline{u} - \varphi$. D'après une remarque due à M. G. Crandall et P. L. Lions [*3*], on a :

$$\varphi_t(x_0, t_0) = -2C^+ \qquad (\underline{u}(x_0, .) \text{ est différentiable})$$

et

$$|D\varphi(x_0, t_0)| \leqslant \| Du_0 \|_\infty$$

Donc :

$$\begin{aligned}\varphi_t(x_0, t_0) &+ H(x_0, t_0, \underline{u}(x_0, t_0), D\varphi(x_0, t_0)) \\ &\leqslant -2C^+ + H(x_0, t_0, u_0(x_0), D\varphi(x_0, t_0)) - \gamma C t_0 \\ &\leqslant C^+(-1 - \gamma t_0)\end{aligned}$$

comme $t_0 \leqslant T_0$ on obtient le résultat :

$$\varphi_t(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \underline{u}(x_0, t_0), \quad D\varphi(x_0, t_0)) \leqslant 0$$

REMARQUE II.5. — On remarque que si $\gamma_R \geqslant 0$ ($\forall R < \infty$) (ou si γ_R est minoré auquel cas on se ramène au cas précédent) $\underline{u}$ existe sur $[0, T)$. De même si $C \leqslant 0$, u_0 est sous-solution de viscosité sur $[0, T]$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] G. BARLES, Existence results for first-order Hamilton-Jacobi equations. *Annales IHP, Analyse non linéaire*, t. **1**, 1984, p. 325-340.

[*2*] M. G. GRANDALL, L. C. EVANS, P. L. LIONS, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. AMS*, t. **282**, 1984, p. 487-502.

[*3*] M. G. GRANDALL et P. L. LIONS, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. AMS*, t. **277**, 1983, p. 1-42.

[*4*] P. L. LIONS, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman, London, 1982.

[*5*] P. L. LIONS, Existence results for first-order Hamilton-Jacobi equations. A paraître au *Ric. Mat.*

[*6*] P. E. SOUGANIDIS, Existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. A paraître in *Journal of Dif. Eqn.*

(Manuscrit reçu le 9 février 1984)

(reçu, révisé le 6 août 1984)