

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JÉRÔME DEPAUW

Flux moyen d'un courant électrique dans un réseau aléatoire stationnaire de résistances

Annales de l'I. H. P., section B, tome 35, n° 3 (1999), p. 355-370

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1999__35_3_355_0

© Gauthier-Villars, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Flux moyen d'un courant électrique dans un réseau aléatoire stationnaire de résistances

par

Jérôme DEPAUW

Université Rabelais, faculté des Sciences,
Parc de Grandmont, 37200 Tours.
Adresse électronique: depauw@univ-tours.fr

RÉSUMÉ. – Dans une note précédente (voir [3]) le théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 2 d'une action de \mathbf{Z}^3 a été démontré avec l'hypothèse d'intégrabilité suffisante L_p pour un $p > 2$. On montre ici que le flux d'un courant électrique dans un réseau aléatoire cubique stationnaire de résistances définit un exemple de cocycle de degré 2, auquel s'applique ce théorème. © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – In a preceding note (see [3]) the pointwise ergodic theorem for cocycle of degree 2 of a \mathbf{Z}^3 action has been proved under the hypothesis of L_p integrability for one $p > 2$. We prove here that the current through surfaces in a random electrical network defines a cocycle of degree 2, to which this theorem can be applied. © Elsevier, Paris

INTRODUCTION

Dans un réseau fini de résistances, un régime électrique unique s'établit quand une différence de potentiel est fixée entre deux points A et B . Le rapport de l'intensité à la différence de potentiel est la conductance

A.M.S Classifications: 28 D; 60 F.

équivalente du réseau. Considérons le cas de résistances montées sur un réseau cubique de côté n , c'est-à-dire sur les arêtes de longueur 1 joignant les sommets de coordonnées entières $\in \{0, \dots, n-1\}^3$. Le point A est relié à l'extrémité supérieure des n^2 segments verticaux, chacun composés de $n-1$ résistances en série, et le point B à leur extrémité inférieure. La conductance équivalente $\rho(n)$ est donc égale à $\rho(n) = \frac{F(n)}{V(n)}$ où $F(n)$ désigne l'intensité du courant traversant le circuit, c'est-à-dire le flux du courant à travers une surface carrée horizontale de côté n interceptant tous les segments verticaux, et $V(n)$ désigne la différence de potentiel entre les extrémités d'un de ces segments verticaux de hauteur n . Si de plus les n^3 résistances sont identiques, de conductance ρ , un calcul simple montre que $\rho(n) = \frac{n^2 \rho}{n-1}$. Réciproquement la connaissance du flux et de l'accroissement du potentiel permet donc de retrouver la conductance de chaque arête : $\rho = \frac{(n-1)F(n)}{n^2V(n)}$.

Lorsque les conductances ne sont plus prises identiques, et que pour n tendant vers l'infini, la quantité $\frac{(n-1)F(n)}{n^2V(n)}$ converge, sa limite représente une notion conductance moyenne par arête verticale pour un réseau infini. Kesten (voir [6]) a fait la conjecture suivante : si les conductances prennent aléatoirement deux valeurs $a, b > 0$ de manière indépendante et suivant une même loi, alors $\frac{(n-1)F(n)}{n^2V(n)}$ converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini.

Une autre notion de conductance moyenne par arête s'obtient en considérant un régime électrique sur le réseau infini. Dans un tel réseau, le problème de l'existence et de l'unicité d'un régime électrique est plus difficile (voir [4], [8] et [13]). Il a cependant une solution connue pour un réseau cubique aléatoire stationnaire de résistances. Supposons donné un tel réseau avec l'hypothèse que les résistances, qui sont donc maintenant des variables aléatoires positives indexées par les arêtes de \mathbf{Z}^3 , de loi conjointe invariante par translation, sont bornées inférieurement et supérieurement. Alors, pour une espérance donnée de l'accroissement du potentiel le long d'une arête, Golden et Papanicolaou montrent par la méthode de projection orthogonale l'existence d'un potentiel électrique dont les accroissements le long des arêtes sont des variables de loi conjointe invariante par translation, et de carré intégrable. La notion de conductance moyenne par arête s'appuie sur la formule précédente : si $F(n)$ désigne maintenant le flux du courant stationnaire, toujours à travers une surface carrée horizontale de côté n , et $V(n)$ désigne l'accroissement du potentiel stationnaire, toujours entre deux extrémités d'un segment vertical de hauteur n , alors la conductance moyenne par arête est définie par $\rho_{\text{moyenne}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)F(n)}{n^2V(n)}$. Ceci est encore égal à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)/n^2}{V(n)/(n-1)}$. D'après le théorème ergodique ponctuel

pour les actions de \mathbf{Z}^2 (respectivement de \mathbf{Z}), le numérateur (respectivement le dénominateur) admet presque sûrement une limite appelée flux moyen (respectivement accroissement moyen du potentiel). Ces expressions se généralisent au cas de surfaces et de segments de directions quelconques. Une notion de conductance moyenne directionnelle apparaît alors si les limites sont bien définies. Elle représente de plus un phénomène volumique si les convergences ont lieu uniformément par rapport aux directions.

L'objet de cet article est de montrer la convergence dans le cas du flux, uniformément en la direction du carré. Suivant les lois de l'électricité, le flux du courant à travers une surface simple de \mathbf{R}^3 ne dépend que du bord de la surface. Ce courant engendre donc un cocycle de degré 2. Il faut alors vérifier que le théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 2 peut être appliqué à cet exemple. L'essentiel du travail consiste à vérifier, par une méthode proche de celle de Boivin [1] et Koslov [7], que le courant est de puissance p -ième intégrable pour un $p > 2$. La méthode de la projection orthogonale ne donne a priori que la propriété de carré intégrable.

Ainsi le théorème ergodique pour cocycle de degré 2 pour corollaire que le flux moyen du courant à travers une surface triangulaire ou carrée de \mathbf{R}^3 a presque sûrement une limite quand son diamètre tend vers l'infini, uniformément par rapport à sa direction.

Afin de simplifier l'exposé, l'article est divisé en deux paragraphes. Le plus gros des calculs est renvoyé dans le second, qui constitue une sorte d'annexe indépendante sous la forme de l'étude d'un opérateur. Cet opérateur peut avoir des applications autres que celle considérée ici. En effet, il est l'analogue, pour la théorie ergodique, de l'opérateur de Riesz du calcul intégral.

1. FLUX MOYEN

1.1. Présentation du résultat

Soit (Ω, \mathcal{B}, m) un espace de probabilité et $(T_j)_{1 \leq j \leq 3}$ trois automorphismes commutant, engendrant une action ergodique de \mathbf{Z}^3 notée $T : x = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow T_x = T_1^{x_1} T_2^{x_2} T_3^{x_3}$. La base canonique de \mathbf{R}^3 est notée (e_1, e_2, e_3) . Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in]0, 1[^3$ tel que l'équation $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 = k_0$ n'ait pas de solution entière. Considérons le réseau $\mathcal{R} = \mathbf{Z}^3 + (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Une fonction $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ définie sur le système dynamique $(\Omega, \mathcal{B}, m, T)$ de \mathbf{Z}^3 , à valeurs dans \mathbf{R}_+^3 , définit un réseau de conductances aléatoires stationnaires, $\rho_j(T_x \omega)$ représentant la

conductance de l'arête $[x + \alpha - e_j, x + \alpha]$ de \mathcal{R} , pour l'état aléatoire ω . Un régime électrique stationnaire est une fonction $U = (U_1, U_2, U_3)$ telle que $U_j(T_x\omega)$ représente la différence de potentiel entre les sommets de la même arête; $B_j(T_x\omega) = (\rho_j U_j)(T_x\omega)$ est alors le courant dans cette arête. Remarquons que si $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ vérifient $\det(e_j, e_k, e_l) = \pm 1$ alors $B_j(T_x\omega)$ est aussi, au signe près, le flux du courant à travers la surface carrée de sommets $(x, x + e_k, x + e_k + e_l, x + e_l)$. En posant les opérateurs $\partial_j = T_j - Id$ et $\partial_j^* = T_j^{-1} - Id$, les équations de l'électricité s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{Loi des mailles} \quad & \partial_j^* U_k = \partial_k^* U_j \quad \text{pour } j \neq k \in \{1, 2, 3\}; \\ \text{Loi des nœuds} \quad & \sum_{j=1}^3 \partial_j B_j = 0; \\ \text{Loi de Ohm} \quad & \rho_j U_j = B_j \quad \text{pour } j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

La loi des mailles exprime la nullité de l'accroissement du potentiel le long des chemins fermés de sommets $(\alpha, \alpha - e_j, \alpha - e_j - e_k, \alpha - e_k, \alpha)$; la loi des nœuds que la somme des courants arrivant au nœud α est nulle. Pour obtenir un régime électrique unique et non nul, on impose l'espérance des différences de potentiel U_j . Le problème revient alors à résoudre le système suivant, d'inconnue (U_j) :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} E(U_j) = u_j \quad \text{pour } j \in \{1, 2, 3\}; \\ \partial_j^* U_k = \partial_k^* U_j \quad \text{pour } j \neq k \in \{1, 2, 3\}; \\ \sum_{j=1}^3 \partial_j (\rho_j U_j) = 0. \end{array} \right.$$

où les u_j sont des réels donnés, et E désigne l'espérance par rapport à m . Le théorème suivant de Golden et Papanicolaou [5] donne l'existence de solution L_2 :

Théorème. – Si la conductance ρ vérifie pour tout $1 \leq j \leq 3$, $a < \rho_j < b$ avec a et b deux constantes > 0 , alors le système (S) a une solution unique $(U_1, U_2, U_3) \in (L_2(\Omega, m))^3$.

Ce résultat est renforcé par le théorème suivant, analogue de celui donné par Boivin [1] pour \mathbf{Z}^2 :

THÉORÈME 1. – Il existe $p > 2$ tel que la solution L_2 soit dans $(L_p(\Omega, m))^3$ (p dépend des constantes a et b).

On peut associer au courant (B_j) son « flux » à travers des surfaces planes :

DÉFINITION. – Le flux $(FB)(\omega, x, y)$ du courant (B_j) à travers la surface triangulaire de sommets $(0, x, x + y)$ dans l'état ω est défini par $(FB)(\omega, x, y) = \sum_{(j,z)} \eta_j B_j(T_z\omega)$, la somme portant sur les $(j, z) \in \{1, 2, 3\} \times \mathbf{Z}^3$ tels que le segment $[z + \alpha - e_j, z + \alpha]$ traverse la surface délimitée par le triangle de sommets $(0, x, x + y)$; $\eta_j = \pm 1$ suivant le signe du déterminant de (x, y, e_j) .

Le flux entrant dans une surface fermée est nul. Avec la surface constituée des quatre faces du tétraèdre de sommets $(\alpha, x + \alpha, x + y + \alpha, x + y + z + \alpha)$ on obtient donc

$$0 = (FB)(\omega, x, y) + (FB)(\omega, x + y, z) - (FB)(\omega, x, y + z) - (FB)(T_x\omega, y, z).$$

La fonction (FB) est donc un cocycle de degré 2 pour l'action T de \mathbf{Z}^3 .

Pour $x, y \in \mathbf{Z}^3$, $\|x\|$, $x \cdot y$, et $x \wedge y$ désignent respectivement la norme, le produit scalaire et vectoriel de \mathbf{R}^3 . Pour $\theta \in]0, \pi/2[$, \mathcal{T}_θ est l'ensemble des couples (x, y) tels que le triangle de sommets $(0, x, x + y)$ ait ses trois angles $> \theta$. L'existence presque sûre du flux moyen du courant est alors donnée par le théorème ergodique suivant :

COROLLAIRE. – Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. Pour presque tout $\omega \in \Omega$

$$\lim_{\substack{x, y \rightarrow \infty \\ (x, y) \in \mathcal{T}_\theta}} \left(\frac{2}{\|x \wedge y\|} (FB)(\omega, x, y) - \frac{x \wedge y}{\|x \wedge y\|} \cdot E(B) \right) = 0,$$

le vecteur $E(B)$ étant le vecteur des espérances $E(B) = (E(B_j))_{1 \leq j \leq 3}$.

Remarque. – La quantité $\frac{\|x \wedge y\|}{2}$ et le vecteur $\frac{x \wedge y}{\|x \wedge y\|}$ sont respectivement l'aire et la normale du triangle $(0, x, x + y)$.

Cette convergence est une conséquence du théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 2, qui s'applique grâce à l'intégrabilité L_p , pour un $p > 2$ (voir la note [3]). Celle-ci est donnée par le théorème 1. La convergence pour la norme L_2 est aussi vérifiée, grâce à l'intégrabilité L_2 de B et au théorème ergodique correspondant.

1.2. Démonstration du théorème 1

Soit $p > 1$. Notons L_p l'espace $L_p(\Omega, m)$, et $L_p^3 = L_p \times L_p \times L_p$ muni de la norme

$$\|(h_j)_{1 \leq j \leq 3}\|_p = \left(\sum_{j=1}^3 \|h_j\|_p^p \right)^{1/p}.$$

On pose aussi E_p^3 l'adhérence dans L_p^3 de l'espace des fonctions de la forme $(\partial_1^* f, \partial_2^* f, \partial_3^* f)$ avec $f \in L_\infty$. La résolution de (S) passe par la

résolution d'un système préliminaire « à coefficients constants et avec second membre ». Soit $(h_1, h_2, h_3) \in L_p^3$. Considérons le système (S') d'inconnue $(V_1, V_2, V_3) \in L_p^3$:

$$(S') \begin{cases} E(V_j) = 0 & j \in \{1, 2, 3\} & (1) \\ \partial_j^* V_k = \partial_k^* V_j & j \neq k \in \{1, 2, 3\} & (2) \\ \sum_{j=1}^3 \partial_j V_j = \sum_{j=1}^3 \partial_j h_j & & (3) \end{cases}$$

La proposition suivante, de Boivin et Derriennic ([2] Proposition 3, en remplaçant T_j par T_j^{-1} et L_1 par L_p , ce qui ne change pas la démonstration) donne l'espace des solutions des équations (1) et (2).

Proposition. — On a l'égalité $E_p^3 = \{(V_1, V_2, V_3) \in L_p^3 \text{ vérifiant (1) et (2)}\}$.

La résolution de (S') se ramène alors à la recherche d'une solution de l'équation (3) dans l'espace E_p^3 . On a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — L'équation (3) a une unique solution dans E_p^3 , et l'opérateur G défini par $G(h_1, h_2, h_3) = (V_1, V_2, V_3)$ est continu pour la norme de L_p^3 .

Unicité. Soit (V_1, V_2, V_3) et (V'_1, V'_2, V'_3) deux solutions de l'équation (3) dans E_p^3 . Soit $W_j = V_j - V'_j$. On a donc

$$\begin{cases} E(W_j) = 0 & j \in \{1, 2, 3\} \\ \partial_j^* W_k = \partial_k^* W_j & j \neq k \in \{1, 2, 3\} \\ \sum_{j=1}^3 \partial_j W_j = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $\sum_{1 \leq j \leq 3} \partial_j \partial_j^* W_k = 0$ pour tout $k = 1, 2, 3$, c'est à dire $W_k = \frac{1}{6} \sum_{1 \leq j \leq 3} (T_j W_k + T_j^{-1} W_k)$. Or les opérateurs T_j et T_j^{-1} sont de norme 1, et la boule unité de L_p est strictement convexe, donc W_k est invariant par T ; elle est donc constante par ergodicité, puis nulle d'après la première équation. Ceci montre l'unicité.

Existence. L'existence est une conséquence de l'étude de l'opérateur « de Riesz » présentée dans le paragraphe suivant. En effet, d'après la proposition B, il est immédiat que la fonction $(V_1, V_2, V_3) \in L_p^3$ définie par $V_j = R_j^* (\sum_{k=1}^3 R_k h_k)$ est la solution de l'équation (3) dans l'espace E_p^3 . La continuité de G dans L_p^3 se déduit alors de celle de R_j dans L_p , ce qui achève la preuve de la proposition 1.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2. – La norme $c(p)$ de l'opérateur G dans L_p^3 vérifie $c(2) = 1$ et $\lim_{p \rightarrow 2} c(p) = 1$.

Remarque. – Il est évident que $c(p) \geq 1$ car E_p^3 est un ensemble de points fixes de G .

Démonstration de la proposition 2. La première assertion relève de l'analyse hilbertienne. En effet l'espace L_2^3 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle V, V' \rangle = \sum_{j=1}^3 E(V_j \cdot V'_j)$, correspondant à la norme définie sur L_p^3 avec $p = 2$. Soit $h \in L_2^3$ et $V = G(h)$. Alors V et $h - V$ sont orthogonales; en effet $V \in E_p^3$ donc il existe une suite de fonctions $f_n \in L_2$ telle que $(\partial_1^* f_n, \partial_2^* f_n, \partial_3^* f_n)$ converge vers V dans L_2^3 . Or

$$\langle (\partial_j^* f_n)_{1 \leq j \leq 3}, h - V \rangle = \sum_{j=1}^3 E(\partial_j^* f_n \cdot (h_j - V_j)).$$

Soit par l'adjoint ∂_j de ∂_j^* , puis en commutant la somme et l'intégrale

$$= E \left(f_n \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \partial_j (h_j - V_j) \right) \right)$$

ce qui est nul d'après l'équation (3). En laissant tendre n vers l'infini, on obtient bien $\langle V, h - V \rangle = 0$. Il en découle d'après le théorème de Pythagore $\|h\|_2^2 = \|h - V\|_2^2 + \|V\|_2^2 \geq \|V\|_2^2$, c'est-à-dire $\|h\|_2 \geq \|G(h)\|_2$. Ceci montre que $c(2) = 1$. D'après le théorème de convexité de Riesz (Voir Stein & Weiss [12]), la fonction qui à p associe $c(p)$ est convexe donc continue sur $]1, +\infty[$, ce qui montre la proposition 2.

En faisant le changement de variable $V_j = U_j - u_j$, le système (S) devient

$$(S) \begin{cases} E(V_j) = 0 & j \in \{1, 2, 3\} \quad (1) \\ \partial_j^* V_k = \partial_k^* V_j & j \neq k \in \{1, 2, 3\} \quad (2) \\ \sum_{j=1}^3 \partial_j V_j = \sum_{j=1}^3 \partial_j \left(\left(1 - \frac{\rho_j}{b}\right) V_j - \frac{\rho_j}{b} u_j \right) & (3) \end{cases}$$

soit encore $(V_1, V_2, V_3) = G\left(\left(\left(1 - \frac{\rho_i}{b}\right) V_j - \frac{\rho_i}{b} u_j\right)_{1 \leq j \leq 3}\right)$. La solution s'obtient par approximations successives. Partant de $V^{(0)} = (V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, V_3^{(0)}) \in L_p^3$ quelconque, considérons la suite $V^{(n)} = (V_1^{(n)}, V_2^{(n)}, V_3^{(n)})$ de L_p^3 définie par récurrence par

$$V^{(n+1)} = G\left(\left(\left(1 - \frac{\rho_j}{b}\right) V_j^{(n)} - \frac{\rho_j}{b} u_j\right)_{1 \leq j \leq 3}\right).$$

D'après l'hypothèse $a < \rho < b$, on a alors $\|V^{(n+1)} - V^{(n)}\|_p \leq c(p)(1 - \frac{a}{b})\|V^{(n)} - V^{(n-1)}\|_p$. Si p est tel que $c(p)(1 - \frac{a}{b}) < 1$, la suite $V^{(n)}$ converge vers une limite indépendante de $V^{(0)}$, qui est donc l'unique solution de (S). C'est le cas si $p = 2$ (car $c(2) = 1$) et pour $p > 2$ assez proche de 2 (car $\lim_{p \rightarrow 2^+} c = 1$). L'inclusion $L_p \subset L_2$ montre que l'on retrouve dans ce cas la solution L_2 , ce qui démontre le théorème 1.

2. OPÉRATEUR « DE RIESZ »

Dans le cas simple d'un second membre de la forme $h_j = \sum_{l=1}^3 \partial_l^* \partial_l g_j$ avec $g_j \in L_\infty$, l'équation (3) du paragraphe précédent admet dans l'espace E_p^3 la solution immédiate $V_j = \partial_j^* (\sum_{k=1}^3 \partial_k g_k)$. En notant $\Delta = \frac{-1}{6} \sum_{l=1}^3 \partial_l^* \partial_l$, et en utilisant l'identité formelle $-\Delta = \sqrt{-\Delta} \sqrt{-\Delta}$, cette solution s'écrit $V_j = \frac{\partial_j^*}{\sqrt{-6\Delta}} (\sum_{k=1}^3 \frac{\partial_k}{\sqrt{-6\Delta}} h_k)$. L'opérateur $R_j = \frac{\partial_j}{\sqrt{-6\Delta}}$ est l'analogue, dans le cadre d'une action ergodique de \mathbf{Z}^3 , de l'opérateur de Riesz de \mathbf{R}^3 du calcul intégral. L'objet de ce paragraphe, qui constitue une sorte d'annexe indépendante du précédent du point de vue des démonstrations, est d'en montrer la continuité dans L_p pour $p > 1$, et les propriétés élémentaires nécessaires à la résolution de l'équation (3) dans E_p^3 .

Soit p la fonction de \mathbf{Z}^3 dans \mathbf{R} suivante

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/12 & \text{si } \|x\| = 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Soit P l'opérateur défini sur L_p par $Pf(\omega) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^3} p(x)f(T_{-x}\omega)$. On a alors $P^n f(\omega) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^3} p_n(x)f(T_{-x}\omega)$ où p_n est définie par récurrence par $p_1 = p$ et la relation de convolution $p_{n+1} = p_n \star p_1$. Par convention p_0 est la fonction δ élément neutre pour la convolution: $\delta(x) = 1$ si $x = 0$ et 0 sinon. Comme $-\Delta = 2(Id - P)$, la définition de R_j peut se faire grâce à l'analogie avec le développement en série entière $\frac{1}{\sqrt{1-s}} = \sum_{n \geq 0} a_n s^n$ où $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Le calcul formel se pose de la manière suivante:

$$\frac{\partial_j}{\sqrt{-6\Delta}} h = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{Id - P}} \partial_j h = \frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{n \geq 0} a_n P^n (\partial_j h).$$

Or P^n s'exprime à l'aide d'une somme en x , donc en l'intervertissant avec la somme en n on obtient $R_j h(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^3} r_j(x) h(T_{-x}\omega)$ avec

$$r_j(x) = \frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{n \geq 0} a_n (p_n(x + e_j) - p_n(x)).$$

Pour légitimer ce calcul formel, notamment la convergence des séries, on utilise des estimations de $p_n(x)$. Celles-ci s'obtiennent à l'aide d'un théorème limite local. En effet, puisque $\sum_{x \in \mathbb{Z}^3} p(x) = 1$, la fonction p est associée à une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^3 .

2.1. Estimations du noyau r_j

Notons ∇_j l'opérateur défini sur les fonctions de \mathbb{Z}^3 dans \mathbb{R} par $\nabla_j q(x) = q(x + e_j) - q(x)$. Le théorème limite local est énoncé ici dans une forme proche de celle de Lawler [9].

Théorème (théorème limite local). — Pour n tendant vers l'infini, uniformément en x

$$\begin{aligned} \left| \nabla_j p_n(x) - \left(\frac{6}{2\pi n}\right)^{3/2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &= O(\sqrt{n}^{-6}) \\ &= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}^{-4}) \\ \left| \nabla_i \nabla_j p_n(x) - \left(\frac{6}{2\pi n}\right)^{3/2} \nabla_i \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &= O(\sqrt{n}^{-7}) \\ &= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}^{-5}). \end{aligned}$$

Démonstration. — Le théorème limite locale de Lawler ([9] théorème 1.2.1) est énoncé dans le cas de la marche aléatoire équiprobable sur les plus proches voisins. Celle-ci est associée à la fonction p' définie par $p'(x) = \frac{1}{6}$ si $\|x\| = 1$ et 0 sinon. Des conditions de parité apparaissent liées au fait qu'elle ne charge au temps n que les points dont la sommes des coordonnées à même parité que n . Sa démonstration peut se reprendre pour la marche associée à p , à partir de l'expression de $p_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} \hat{p}^n(\theta) e^{-ix \cdot \theta} d\theta$ où $\hat{p}(\theta)$ désigne la valeur de la transformée de Fourier de p au point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$:

$$\hat{p}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^3} p(x) e^{ix \cdot \theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \cos \theta_j \right).$$

De plus, comme $|\hat{p}(\theta)| = 1$ si et seulement si les coordonnées θ_j sont multiples de 2π , le théorème devient vrai sans condition de parité. Sur ces

questions d'apériodicité, voir les propositions P8 et P9 page 75 du livre de Spitzer [10]. Pour les deux dernières inégalités, Lawler ([9]) ne considère que le cas $j = l$ mais la démonstration convient aussi pour $j \neq l$.

En multipliant par $\frac{a_n}{\sqrt{12}} \sim \frac{1}{\sqrt{12\pi n}}$ les estimations du théorème limite local, celles-ci deviennent

COROLLAIRE. – Pour n tendant vers l'infini, uniformément en x

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &= O(\sqrt{n}^{-7}) \\ &= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}^{-5}) \\ \left| \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_l \nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_l \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &= O(\sqrt{n}^{-8}) \\ &= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}^{-6}). \end{aligned}$$

Démonstration. – La formule de Stirling $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n}))$ s'applique à a_n : $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (1 + O(\frac{1}{n}))$. De plus, pour $n > 1$, la formule des accroissements finis s'écrit

$$\begin{aligned} \left| \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &< \sup_{\|x-y\| \leq 1} \left(\frac{6\|y\|}{n} e^{-\frac{6\|y\|^2}{2n}} \right) \\ \left| \nabla_l \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &< \sup_{\|x-y\| \leq \sqrt{2}} \left(\left(\frac{6}{n} + \frac{36\|y\|^2}{n^2} \right) e^{-\frac{6\|y\|^2}{2n}} \right). \end{aligned}$$

On a donc, pour n tendant vers l'infini, uniformément en x

$$\begin{aligned} \left| \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \left| \nabla_l \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| &= O\left(\frac{1}{n}\right) \\ & & \text{et} & \\ \text{''} &= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}) & \text{''} &= \|x\|^{-2} O(1). \end{aligned}$$

Les estimations annoncées dans le corollaire se déduisent alors du théorème précédent.

Remarque. – La multiplication par $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ a fait gagner « un cran » dans les estimations. Ainsi, le corollaire ci-dessus, comme les résultats qui suivent, sont à mettre en parallèle avec les résultats analogues énoncés dans [9], mais dans le cas de la dimension $d = 4$.

En sommant en n les égalités du corollaire, on obtient les estimations suivantes:

LEMME. – Pour tout $\alpha < 4$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|x\|^{\alpha+1} \sum_{n \geq 0} \left| \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| = 0$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|x\|^{\alpha+2} \sum_{n \geq 0} \left| \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_l \nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_l \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \right| = 0.$$

Démonstration. – Même démonstration que le lemme 1.5.2 dans [9], à partir du corollaire ci-dessus.

Le théorème 1.5.5 de Lawler [9] compare les fonctions de Green de \mathbf{R}^d et de \mathbf{Z}^d . Le théorème suivant est l’analogie pour le noyau de Riesz.

THÉORÈME A. – Soit \bar{r}_j le noyau de Riesz de \mathbf{R}^3 défini par $\bar{r}_j(x) = -\frac{x_j}{\pi^2 \|x\|^4}$. Alors, pour $\|x\|$ tendant vers l’infini

$$|r_j(x) - \bar{r}_j(x)| = O\left(\frac{1}{\|x\|^4}\right)$$

$$\left| \nabla_l r_j(x) - \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{r}_j(x) \right| = O\left(\frac{1}{\|x\|^5}\right).$$

Démonstration. – D’après le lemme précédent,

$$r_j(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} + o\left(\frac{1}{\|x\|^4}\right).$$

Comme dans la démonstration du théorème 1.5.5 de [9], une application de la formule de Taylor-Young permet d’écrire

$$r_j(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{3}{2(\pi n)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} + O\left(\frac{1}{\|x\|^4}\right).$$

Par un calcul de somme de Riemann, cette expression devient

$$\int_{t \geq 0} \frac{3}{2(\pi t)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-\frac{6\|x\|^2}{2t}} dt + O\left(\frac{1}{\|x\|^4}\right).$$

L’intégrale se calcule par changement de variable, d’où

$$r_j(x) = \frac{-x_j}{\pi^2 \|x\|^4} + O\left(\frac{1}{\|x\|^4}\right).$$

Par un calcul analogue

$$\begin{aligned}\nabla_l r_j(x) &= \int_{t \geq 0} \frac{3}{2(\pi t)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} e^{-\frac{6\|x\|^2}{2t}} dt + O\left(\frac{1}{\|x\|^5}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{-x_j}{\pi^2 \|x\|^4} + O\left(\frac{1}{\|x\|^5}\right),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.2. Continuité et propriétés de l'opérateur

Les estimations du théorème A sont à la base du théorème suivant

THÉORÈME B. – Soit $p > 1$. L'opérateur R_j défini sur l'espace des fonctions h de la forme $h = \Delta g$ pour $g \in L_\infty$ par

$$R_j h(\omega) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{x \in [-M, M]^3} r_j(x) h(T_{-x}\omega)$$

est continu pour la norme de L_p .

Démonstration. – Considérons d'abord le cas des fonctions de la forme $h = \partial_l g$ pour $g \in L_\infty$. Avec la transformation d'Abel, la somme ci-dessus devient

$$\sum_{\substack{x \in C_M \\ -M \leq x_l \leq M-1}} \nabla_l r_j(x) g(T_{-x}\omega) - \sum_{\substack{x \in C_M \\ x_l = M}} r_j(x) g(T_{-x}\omega) + \sum_{\substack{x \in C_M \\ x_l = -M}} r_j(x) g(T_{-x+e_l}\omega)$$

où $C_M = [-M, M]^3$. D'après le théorème A, $r_j(x) = O(\|x\|^{-3})$ et $\nabla_l r_j(x) = O(\|x\|^{-4})$, donc cette expression converge dans L_∞ quand M tend vers l'infini, vers $\sum_{x \in \mathbf{Z}^3} \nabla_l r_j(x) g(T_{-x}\omega)$ qui est une série normalement convergente. Ceci montre que la limite de l'énoncé est bien définie. La continuité de R_j découle du principe de transfert, appliqué à la version discrète suivante du théorème classique sur la continuité de l'opérateur de Riesz.

Théorème. – Soit $p > 1$. L'opérateur de Riesz discret \mathcal{R}_j défini sur $L_p(\mathbf{Z}^3) \cap L_1(\mathbf{Z}^3)$ par $\mathcal{R}_j q = r_j \star q$ est continu pour la norme de $L_p(\mathbf{Z}^3)$.

Démonstration. – Même démonstration que pour l'opérateur de Riesz de \mathbf{R}^3 , à partir des faits suivant:

$$r_j \in L_2(\mathbf{Z}^3); \quad \nabla_l r_j(x) = O(\|x\|^{-4}); \quad \hat{r}_j \text{ est bornée}$$

(voir le livre de Stein [11] page 29). Les deux premières conditions découlent du théorème A. La transformée de Fourier de r_j se calcule à partir de celle de p

$$\begin{aligned} \hat{r}_j(\theta) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{12}} (e^{i\theta_j} - 1) a_n \hat{p}^n(\theta) = \frac{e^{i\theta_j} - 1}{\sqrt{12} \sqrt{1 - \hat{p}(\theta)}} \\ &= \frac{e^{i\theta_j} - 1}{\sqrt{\sum_{1 \leq l \leq 3} |e^{i\theta_l} - 1|^2}}, \end{aligned}$$

ce qui montre quelle est bornée par 1.

Le principe de transfert s'applique de la manière suivante. Soit $h = \partial_l g$ avec $g \in L_\infty$. Pour $M, N > 0$, et $\omega \in \Omega$, on pose l'opérateur R_j^M défini par

$$R_j^M h(\omega) = \sum_{x \in C_M} r_j(x) h(T_{-x}\omega)$$

et la fonction $h_{M+N,\omega}$ défini sur \mathbf{Z}^3 par

$$h_{M+N,\omega}(x) = \begin{cases} h(T_x\omega) & \text{si } x \in C_{M+N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une application de la transformation d'Abel analogue à la précédente montre que, pour tout $x \in C_N$, $|\mathcal{R}_j h_{M+N,\omega}(x) - R_j^M h(T_x\omega)|$ est majoré par

$$\|g\|_\infty \left(\sum_{y \notin C_{M-1}} |\nabla_l r_j(y)| + \sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^3 \\ y_l = \pm M}} |r_j(y)| + \sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^3 \\ y_l = x_l \pm (M+N)}} |r_j(y)| \right)$$

D'après le théorème A, cette majoration est du type $\|g\|_\infty O(\frac{1}{M})$, uniformément en N et $x \in C_N$. En prenant la moyenne des puissances p -ième sur les $x \in C_N$ on a donc

$$\sum_{x \in C_N} \frac{|R_j^M h(T_x\omega)|^p}{(2N+1)^3} \leq \sum_{x \in C_N} \frac{|\mathcal{R}_j h_{M+N,\omega}(x)|^p}{(2N+1)^3} + \left(\|g\|_\infty O\left(\frac{1}{M}\right) \right)^p.$$

Le terme de gauche du membre de droite est majoré par $\frac{\|\mathcal{R}_j h_{M+N,\omega}\|_{L_p(\mathbf{Z}^3)}^p}{(2N+1)^3}$, donc d'après la continuité de \mathcal{R}_j par

$$\|\mathcal{R}_j\|_{L_p(\mathbf{Z}^3)}^p \frac{\|h_{M+N,\omega}\|_{L_p(\mathbf{Z}^3)}^p}{(2N+1)^3}.$$

Pour N tendant vers l'infini, d'après le théorème ergodique ponctuel appliqué à cette majoration, et au membre de gauche de l'inégalité ci-dessus, Il existe un ensemble négligeable en dehors duquel

$$\|R_j^M h\|_{L_p(\Omega)}^p \leq \|R_j\|_{L_p(\mathbf{Z}^3)}^p \|h\|_{L_p(\Omega)}^p + \left(\|g\|_\infty O\left(\frac{1}{M}\right) \right)^p.$$

En laissant enfin tendre M vers l'infini, $R_j^M h$ converge vers $R_j h$ dans $L_\infty(\Omega)$ donc dans $L_p(\Omega)$. Ceci montre la continuité de R_j :

$$\|R_j h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|R_j\|_{L_p(\mathbf{Z}^3)} \|h\|_{L_p(\Omega)}.$$

On a donc défini R_j comme opérateur continu pour la norme de L_p , sur l'espace des fonctions de la forme $h = \partial_l g$ pour $g \in L_\infty$. Il s'étend par linéarité aux fonctions $h = \sum_{1 \leq l \leq 3} \partial_l g_l$, donc a fortiori aux fonctions $h = \sum_{1 \leq l \leq 3} \partial_l \partial_l^* g$, ce qui achève la preuve du théorème B.

L'espace L_∞ est dense dans L_p , donc l'opérateur R_j s'étend par continuité à l'espace $\text{Im} \Delta$ des fonctions de la forme $h = \Delta g$ pour $g \in L_p$, puis à son adhérence. Or, pour $p = 2$, Δ est un opérateur autoadjoint, d'où la décomposition $L_2 = \overline{\text{Im} \Delta} \oplus \text{Ker} \Delta$. Comme cela a été vu dans la démonstration de l'unicité de la solution de (S') , la stricte convexité de L_2 entraîne que $\text{Ker} \Delta$ est l'espace C des fonctions constantes. Cette décomposition s'étend par densité aux $p \in]1, 2[$, puis par dualité à tout $p > 1$: $L_p = C \oplus \overline{\text{Im} \Delta}$. On pose alors R_j nul sur C , ce qui complète sa définition comme opérateur continu sur L_p tout entier.

L'opérateur R_j^* s'étudie de la même manière, à partir de la fonction r_j^* définie sur \mathbf{Z}^3 par

$$r_j^*(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_j^* p_n(x)$$

avec $\nabla_j^* p_n(x) = p_n(x - e_j) - p_n(x)$.

Remarque. – On a démontré au passage le résultat utile suivant :

LEMME A. – Pour tout $g \in L_\infty$, on a $R_j \partial_l g(\omega) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^3} \nabla_l r_j(x) g(T_{-x} \omega)$, la série étant normalement convergente dans L_∞ .

Il reste à vérifier que l'expression donnant la solution du système (S') à l'aide de l'opérateur formel $\frac{\partial_j}{\sqrt{-6\Delta}}$ est valide pour l'opérateur R_j . C'est l'objet des deux propositions suivantes. La première regroupe l'analogie des propriétés classiques des opérateurs de Riesz, la seconde les propriétés spécifiquement liées à la résolution de (S') .

PROPOSITION A. – On a les propriétés suivantes :

- (a) ∂_k et ∂_k^* commutent avec R_j et R_j^* ;
- (b) On a les jeux d'indice suivants: $R_j \partial_k = R_k \partial_j$ et $R_j^* \partial_k^* = R_k^* \partial_j^*$;
- (c) pour tout $h \in L_p$ on a $\sum_{1 \leq j \leq 3} R_j R_j^* h = h - E(h)$.

Démonstration. – Ces propriétés sont claires sur C . Il suffit donc d'après la construction de R_j de les vérifier pour les fonctions h de la forme $h = \Delta g$ avec $g \in L_\infty$. La première découle de la définition donnée dans le théorème B et de la commutation évidente des opérateurs ∂_k et ∂_k^* avec R_j^M et R_j^{M*} . La seconde se déduit du lemme A et de la commutation de ∇_j et ∇_j^* avec ∇_k et ∇_k^* . La démonstration de (c) est un peu plus longue. D'après (a) on a $R_j R_j^* \partial_l \partial_l^* g = R_j \partial_l (R_j^* \partial_l^* g)$. Or $R_j^* \partial_l^* g \in L_\infty$, donc le lemme A s'applique deux fois

$$\sum_{1 \leq j \leq 3} R_j R_j^* \partial_l \partial_l^* g(\omega) = \sum_{1 \leq j \leq 3} \sum_{y \in \mathbb{Z}^3} \nabla_l r_j(y) \sum_{z \in \mathbb{Z}^3} \nabla_l^* r_j^*(z) g(T_{-y-z} \omega)$$

La série double est absolument convergente car $\nabla_l r_j(x) = O(\frac{1}{\|x\|^4})$, donc c'est encore égale à

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^3} \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} \nabla_l r_j \star \nabla_l^* r_j^* \right) (x) g(T_{-x} \omega).$$

Or, pour chaque j , la transformé de Fourier de $\nabla_l r_j \star \nabla_l^* r_j^*$ en θ vaut

$$(e^{i\theta_l} - 1) \hat{r}_j(\theta) (e^{-i\theta_l} - 1) \overline{\hat{r}_j(\theta)}.$$

En sommant en j , d'après l'expression de \hat{r}_j calculée plus haut, on obtient $|e^{i\theta_l} - 1|^2$, ce qui montre que $\sum_{1 \leq j \leq 3} \nabla_l r_j \star \nabla_l^* r_j^* = \nabla_l \nabla_l^* \delta$. En faisant la substitution dans la somme en x celle-ci devient alors $\partial_l \partial_l^* g(\omega)$. Enfin, en sommant en l , on obtient $\sum_{1 \leq j \leq 3} R_j R_j^* \Delta g = \Delta g$, ce qui montre bien (c).

PROPOSITION B. – On a les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $f \in L_p$, $(R_1^* f, R_2^* f, R_3^* f) \in E_p^3$;
- (ii) $\sum_{1 \leq j \leq 3} \partial_j R_j^* R_k = \partial_k$.

Démonstration. – D'après les propriétés (a) et (b) de la proposition A, on a, pour tout $g \in L_p$,

$$(R_j^* (\partial_l^* \partial_l g))_{1 \leq j \leq 3} = (\partial_j^* (R_l^* \partial_l g))_{1 \leq j \leq 3} \in E_p^3.$$

Donc, en sommant en l cela devient $(R_j^* (\Delta g))_{1 \leq j \leq 3} \in E_p^3$. Or l'espace E_p^3 est fermé, donc par continuité de R_j^* , $(R_j^* f)_{1 \leq j \leq 3} \in E_p^3$ pour tout

$f \in \overline{\text{Im}\Delta}$. Ce qui démontre la propriété (i), puisqu'elle est évidemment vraie sur les constantes. La propriété (ii) est une simple conséquence des trois propriétés de la proposition A.

Remarque. – C'est en fait l'opérateur $G_{j,k} = R_j^* R_k$ qui est utilisé pour la résolution de (S') . Il s'écrit formellement $G_{j,k} = \frac{\partial_j^* \partial_k}{-6\Delta}$. Il peut s'étudier directement, par une méthode analogue à celle suivie dans ce paragraphe (voir [1] et [7]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BOIVIN, Weak convergence for reversible random walks in a random environment. *The Annals Of Probability*, vol. **21**, No. 2427-1440, 1993.
- [2] D. BOIVIN and Y. DERRIENNIC, The ergodic theorem for additive cocycles of \mathbf{Z}^d or \mathbf{R}^d . *Ergod. Theory & Dynamical Systems*, vol. **11**, 1991, p. 19-39.
- [3] J. DEPAUW, Théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré deux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I, 1997, p. 87-90.
- [4] H. FLANDERS, Infinite networks: I-Resistive networks. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-18, No. 3, May, 1971.
- [5] K. GOLDEN and G. PAPANICOLAOU, Bounds for effective parameters of heterogeneous media by analytic continuation. *Comm. Math. Phys.*, vol. 90, 1983, p. 473-491.
- [6] H. KESTEN, Percolation Theory for Mathematicians. *Birkhäuser*, 1982.
- [7] S. M. KOSLOV, The method of averaging and walks in inhomogeneous environments. *Russian Math. Surveys*, vol. 40, 1985, p. 73-145.
- [8] R. KUNNEMANN, The diffusion limit for reversible jump on \mathbf{Z}^d with ergodic random bond conductivities. *Comm. Math. Phys.*, vol. 90, 1983, p. 27-68.
- [9] G. LAWLER, Intersections of Random Walks. *Birkhäuser*, 1991.
- [10] F. SPITZER, Principles of Random Walks. Springer-Verlag, 1976.
- [11] E. STEIN, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. *Princeton University Press*, 1970.
- [12] E. M. STEIN and G. WEISS, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. *Princeton University Press*, 1971.
- [13] A. H. ZEMANIAN, Infinite Electrical Networks. *Cambridge Tracts in Math.*, 101.

(Manuscrit reçu le 30 septembre 1997;
version révisée reçue le 2 décembre 1998.)