ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. DELLACHERIE
D. TAÏBI
S. MARTINEZ
J. SAN MARTIN

Noyaux potentiels associés à une filtration

Annales de l'I. H. P., section B, tome 34, nº 6 (1998), p. 707-725
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1998__34_6_707_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 34, n° 6, 1998, p. 707-725 *Probabilités et Statistiques*

Noyaux potentiels associés à une filtration

par

C. DELLACHERIE et D. TAÏBI

Université de Rouen, mathématiques Upresa 60-85, Site Colbert, 76821 Mont-Saint-Aignan Cedex
dellache@univ-rouen.fr taibi@univ-rouen.fr

et

S. MARTINEZ et J. SAN MARTIN [1]

Departamento de Ingeniería Matemática Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile Casilla 170-3 Correo 3 Santiago-Chile
smartine@dim.uchile.cl jsanmart@dim.uchile.cl

ABSTRACT. – We study from the point of view of potential theory some operators V which are "integrals of martingales" and noteworthy the formula $(I + V)^{-1} = I - N$ where N is a submarkovian kernel. We give an explicit expression of N when the filtration is finite and get the general case with an usual approximation procedure. Some links are made with the matrix theory (ultrametric and Stieltjes matrices) and the graph theory (flows and capacities) when the space is finite. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – On étudie, du point de vue de la théorie du potentiel, des opérateurs V du type "intégrales de martingale", et notamment la formule $(I + V)^{-1} = I - N$ où N est un noyau sous-markovien. On donne une expression explicite de N dans le cas d'une filtration finie, et on traite le cas général par un procédé d'approximation usuel. On fait le lien avec la théorie des matrices (matrices ultramétriques et de Stieltjes) et la théorie des graphes (flots et capacités) quand l'espace est fini. © Elsevier, Paris

[1] C.D., S.M. et J.S.M. remercient le programme ECOS-Conicyt et FONDECYT pour l'appui donné à ce travail de recherche.

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles, on appellera *opérateur* toute application linéaire continue de $\mathbb{L}_2$ dans $\mathbb{L}_2$ et *noyau* tout opérateur croissant. On note I l'identité et J_u l'opérateur de multiplication par la v.a. bornée u. On dira qu'un noyau V est un *noyau potentiel [à la Markov]* si l'opérateur $I + V$ est inversible, d'inverse de la forme $I - N$ où N est un noyau [sousmarkovien, i.e. vérifiant $N1 \leq 1$] — ainsi V ferme une résolvante sousmarkovienne ssi pV est un noyau potentiel à la Markov pour tout $p > 0$. Il est clair que l'adjoint d'un noyau potentiel est un noyau potentiel, mais la propriété d'être à la Markov ne passe généralement pas à l'adjoint.

L'énoncé suivant, qui illustre notre terminologie, sera souvent utilisé par la suite ; il sera précisé au **4** .

1 Lemme. *Soient u et v deux v.a. bornées, $\mathcal{E}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et E l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{E}$. Si la v.a. $\mathcal{E}$-mesurable*

$$\sigma = \frac{1}{1 + E(uv)},$$

qui vérifie $(I + J_u E J_v)(\sigma u) = u$ sur $\{\sigma \text{ finie}\}$, est bornée, alors l'opérateur $I + J_u E J_v$ est inversible, d'inverse

$$(I + J_u E J_v)^{-1} = I - J_{\sigma u} E J_v = I - J_u E J_{\sigma v}.$$

En particulier, si u et v sont positives, l'opérateur $J_u E J_v$ est un noyau potentiel, lequel est à la Markov et auto-adjoint si de plus u et v sont $\mathcal{E}$-mesurables.

Démonstration. – Soit à résoudre en y l'équation $y + uE(vy) = x$. Multiplions par v les deux membres, puis prenons-en les espérances conditionnelles : on obtient $\sigma^{-1} E(vy) = E(vx)$, d'où aisément la conclusion.

Mokobodzki et Bouleau [2] ont montré que, si $\mathbb{A} = (A_t)$ est un processus croissant borné déterministe, alors le noyau défini par

$$Vf = \int_0^\infty f_{t-}\, dA_t \quad \text{ou} \quad Vf = \int_0^\infty f_t\, dA_t,$$

où $t \mapsto f_{t-}$ (resp $t \mapsto f_t$) est la version continue à gauche (resp à droite) de la martingale $t \mapsto \mathbb{E}[\, f | \mathcal{F}_t]$, est un noyau potentiel à la Markov auto-adjoint ; la démonstration de Bouleau s'étend au cas où $\mathbb{A}$ est prévisible *si* A_∞ est p.s. constant, auquel cas $c = \frac{1}{1+A_\infty}$ vérifie $(I + V)c = 1$. D'autre part, deux des auteurs ont démontré avec Michon dans [6] que, si Ω est fini, $\mathcal{F}$ la tribu des parties de Ω et $\mathbb{P}$ la loi uniforme, toute matrice $(v_{ij})_{i,j\in\Omega}$ à termes positifs, symétrique et *ultramétrique*, i.e. vérifiant pour tout $i, j, k \in \Omega$

$$v_{ij} \geq \inf(v_{ik}, v_{kj}),$$

est la matrice d'un noyau potentiel à la Markov auto-adjoint, en exhibant une suite finie de partitions emboîtées de Ω "adaptée" à V ; une étape cruciale de la démonstration est l'existence d'un vecteur $z = (z_i) \geq 0$ tel que $(I + V)z = 1$.

Unifiant [2] et [6], nous montrons ici que tout noyau de la forme

$$(\mathcal{P}) \qquad Vf = \int_0^\infty f_{t-}\, dA_t$$

où $\mathbb{A}$ est un processus croissant *prévisible* borné, ou de la forme

$$(\mathcal{O}) \qquad Vf = \int_0^\infty f_t\, dA_t$$

où $\mathbb{A}$ est un processus croissant *adapté* borné, est un noyau potentiel auto-adjoint à la Markov et que toute matrice ultramétrique est de cette forme pour une certaine filtration. De plus, on verra qu'un noyau de la forme

$$(\mathcal{Q}) \qquad Vf = \int_0^\infty f_{t-}\, dA_t$$

où $\mathbb{A}$ est un processus croissant borné supposé *seulement adapté* est encore un noyau potentiel à la Markov (généralement non auto-adjoint) *si les sauts de $\mathbb{A}$ ne sont pas trop "imprévisiblement" grands*; ce sera le cas des noyaux du type $f \mapsto f_{T-}$ où T est un t.d'a. quelconque (rappelons qu'on a $f_{T-} = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_{T-}]$ pour tout $f \in \mathbb{L}_2$ si et seulement si T est prévisible).

On peut montrer qu'une solution $f \geq 0$ de l'équation $f + Vf = 1$ permet de construire un changement de probabilité ramenant l'étude de V au cas où A_∞ est constant. Cependant, tel que nous procédons ici, il n'est pas plus difficile de résoudre en f l'équation $f + Vf = g$ pour tout $g \in \mathbb{L}_2$, et de montrer qu'on a $f \leq g$ pour $g \geq 0$ et $f \geq 0$ pour $g = 1$, ce qui revient exactement à dire que $I + V$ est inversible, d'inverse $I - N$ tel que N soit croissant et sousmarkovien. Enfin, résoudre en f l'équation $f + Vf = g$ revient à trouver, pour la martingale (g_t) donnée, une martingale (f_t) telle qu'on ait pour tout t

$$\int_0^t f_{s(-)}\, dA'_s + \mathbb{E}[\int_t^\infty f_{s(-)}\, dA'_s|\mathcal{F}_t] = g_t$$

où $\mathbb{A}'$ est égal à $\mathbb{A}$ augmenté d'un saut unité à l'infini, et donc notre problème est une variation sur le thème de la décomposition de Doob-Meyer, mais qui ne peut être résolu par le calcul différentiel stochastique classique.

Nous procéderons en deux temps. Nous commencerons par supposer que la filtration est finie, ce qui nous permettra d'établir une décomposition multiplicative explicite des opérateurs $I + V$ avec V de la forme $(\mathcal{O})$, $(\mathcal{P})$ ou $(\mathcal{Q})$ permettant de les inverser facilement, d'où des décompositions explicites multiplicative de $(I+V)^{-1}$ et additive de $N = I - (I+V)^{-1}$. Puis, après un retour sur les matrices ultramétriques précédé de généralités sur les rapports entre filtrations et ultramétriques, nous étendrons une bonne part des résultats obtenus (hormis les décompositions explicites) au cas d'une filtration quelconque par passage à la limite du discret au continu. Il est cependant possible d'aborder directement le cas continu comme le montre Hu [5] en utilisant un calcul différentiel stochastique rétrograde.

I. Cas d'une filtration finie

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration finie $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_q\}$; on convient pour fixer les idées que $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale tandis que $\mathcal{F}_q$ est égale à $\mathcal{F}$. On note E_k l'opérateur d'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_k]$, l'identité E_q étant aussi notée I ; on a évidemment $J_v E_k = E_k J_v$ ssi la v.a. bornée v est $\mathcal{F}_k$-mesurable.

Nous allons étudier les opérateurs H ayant une écriture du type

$$(\sharp) \qquad H = \sum_{i=0}^{p} J_{a_i} E_{k_i} J_{z_i}$$

où p est un entier, les a_i, z_i des variables aléatoires bornées et $i \mapsto k_i$ une application croissante de $\{0, ..., p\}$ dans $\{0, ..., q\}$, et plus particulièrement ceux où $i \mapsto k_i$ est injective, les z_i égaux à 1 et les $a_i \geq 0$ et adaptés aux $\mathcal{F}_{k_i}$ ou aux $\mathcal{F}_{k_{i+1}}$ (on retrouve alors $(\mathcal{O})$ et $(\mathcal{Q})$ dans notre cadre discret; $(\mathcal{P})$ est ici un cas particulier de $(\mathcal{O})$ qui n'a pas lieu d'être distingué). On appellera k_0 *un index* de H, le "un" rappelant que cette notion dépend de l'écriture $(\sharp)$ de H ; il n'existe pas en général d'écriture $(\sharp)$ "canonique".

Nous ferons tacitement grand usage du petit lemme suivant.

2 Lemme. *Si K est un opérateur de type $(\sharp)$ et k un entier minorant un index de K, on a, en notant K^* l'adjoint de K,*

$$K J_u E_k = J_{K(u)} E_k \quad \text{et} \quad E_k J_u K = E_k J_{K^*(u)}$$

pour toute v.a. bornée u. En particulier, on a

$$K E_k = J_{K(1)} E_k \quad \text{et} \quad E_k K = E_k J_{K^*(1)}.$$

Démonstration. – La première égalité résulte aisément des égalités

$$E_\ell J_v[uE_k(x)] = E_\ell[E_\ell(vu)E_k(x)] = E_\ell(vu)E_k(x) = E_\ell J_v(u)E_k(x)$$

vraies pour toute v.a. bornée v, tout $x \in \mathbb{L}_2$ et tout $k, \ell \leq q$ avec $k \leq \ell$, et la seconde de la première par passage à l'adjoint.

Il résulte du lemme 2 que l'ensemble $\mathcal{A}$ des opérateurs de type ($\sharp$) est l'algèbre (non commutative) engendrée par les opérateurs de multiplication et les opérateurs de conditionnement extraits de la filtration. L'algèbre $\mathcal{A}$, clairement stable par passage à l'adjoint, contient tous les opérateurs de rang fini (prendre dans ($\sharp$) tous les E_{k_i} égaux à E_0 et faire parcourir à $a_i = z_i$ les éléments d'une base hilbertienne) ; en particulier, elle est égale à l'algèbre de toutes les matrices si Ω est fini. De plus, beaucoup d'éléments de $\mathcal{A}$ ayant un inverse sont inversibles dans $\mathcal{A}$; plus précisément, on a le résultat suivant, conséquence immédiate des lemmes 1 et 2.

3 **Proposition.** *Soient $K \in \mathcal{A}$ inversible dans $\mathcal{A}$, k un entier minorant un index de K et a, z deux v.a. bornées. Alors on a*

$$K + J_a E_k J_z = K(I + J_\alpha E_k J_z) \quad \text{où} \quad \alpha = K^{-1}a \quad \text{est bornée.}$$

De plus, si la v.a. $\mathcal{F}_k$-mesurable

$$\sigma = \frac{1}{1 + E_k(\alpha z)}$$

est bornée, auquel cas $I + J_\alpha E_k J_z$ est inversible, alors l'opérateur $H = K + J_a E_k J_z$ est inversible et on a

$$H^{-1} = (I - J_{\sigma\alpha} E_k J_z)K^{-1} \quad \text{et} \quad \sigma\alpha = H^{-1}a$$

si bien que H et H^{-1}appartiennent à $\mathcal{A}$.

4 Nous montrerons, dans un prochain article consacré à l'étude de l'algèbre $\mathcal{A}$, que

a) Étant données deux v.a. finies u et v et un opérateur d'espérance conditionnelle E, l'opérateur a priori non borné $J_u E J_v$ s'étend en un opérateur borné ssi la v.a. $E(u^2)E(v^2)$ est bornée, et que, s'il en est ainsi, la v.a. $E(uv)$ est bornée, l'opérateur $I + J_u E J_v$ étant alors inversible ssi la v.a. $(1 + E(uv))^{-1}$ est bornée.

b) Ayant modifié la définition de $\mathcal{A}$ en y supposant seulement que les v.a. finies a_i, z_i soient telles que les $E_{k_i}(a_i^2)E_{k_i}(z_i^2)$ soient bornées, alors

$\mathcal{A}$ est encore une algèbre, et tout élément de $\mathcal{A}$ ayant un inverse est en fait inversible dans $\mathcal{A}$.

5 Nous appliquons récursivement **3** à un opérateur H de type ($\sharp$) s'écrivant $H = I + V$ avec $V = \sum_{j=p}^{0} J_{a_j} E_{k_j} J_{z_j}$ où les "monômes" ont été rangés selon les "puissances" décroissantes. Nous posons, pour $i = p+1, p, ..., 0$,

$$(1) \qquad H_i = I + \sum_{j=p}^{i} J_{a_j} E_{k_j} J_{z_j} \text{ avec } H_0 = H \text{ et } H_{p+1} = I.$$

Si, pour un $i \leq p$, H_{i+1} est inversible dans $\mathcal{A}$ et si on pose

$$(2) \qquad \alpha_i = H_{i+1}^{-1} a_i \quad \text{et} \quad \zeta_i = H_{i+1}^{*-1} z_i$$

(ζ_i étant défini pour retrouver la symétrie entre a_i et z_i plus loin), on a

$$(3) \qquad H_i = H_{i+1}(I + J_{\alpha_i} E_{k_i} J_{z_i})$$

d'où, si H_j est inversible dans $\mathcal{A}$ pour $j = p, ..., i+1$, la décomposition multiplicative

$$(4) \qquad H_i = \prod_{j=p}^{i} (I + J_{\alpha_j} E_{k_j} J_{z_j}).$$

De plus, si, H_{i+1} étant inversible dans $\mathcal{A}$ pour un $i \leq p$, la v.a.

$$\sigma_i = \frac{1}{1 + E_{k_i}(\alpha_i z_i)}$$

est bornée, alors H_i est inversible dans $\mathcal{A}$ et on a $\sigma_i \alpha_i = H_i^{-1} a_i$ et

$$(5) \qquad H_i^{-1} = (I - J_{\sigma_i \alpha_i} E_{k_i} J_{z_i})\, H_{i+1}^{-1}$$

d'où, si H_j est inversible dans $\mathcal{A}$ pour $j = p, ..., i+1$ et σ_j bornée pour $j = p, ..., i$, la décomposition multiplicative

$$(6) \qquad H_i^{-1} = \prod_{j=i}^{p} (I - J_{\sigma_j \alpha_j} E_{k_j} J_{z_j}).$$

Enfin si, pour $j = p, ..., i$, les H_j^{-1} existant, on définit N_j par $H_j^{-1} = I - N_j$, on a $N_i = N_{i+1} + J_{\sigma_i \alpha_i} E_{k_i} J_{z_i} H_{i+1}^{-1}$ d'après (5), d'où

$$(7) \qquad N_i = \sum_{j=i}^{p} J_{\sigma_j} J_{\alpha_j} E_{k_j} J_{\zeta_j},$$

écriture de type ($\sharp$) symétrique en a_j, z_j car σ_j, étant $\mathcal{F}_{k_j}$-mesurable, peut se placer aussi bien à droite qu'à gauche dans son "monôme" tandis qu'on a

$$\sigma_j = \frac{1}{1 + E_{k_j}(\alpha_j z_j)} = \frac{1}{1 + E_{k_j}(a_j \zeta_j)} \tag{8}$$

grâce à l'égalité $E_{k_j}(H_{j+1}^{-1}(a_j)z_j) = E_{k_j}(a_j H_{j+1}^{*-1}(z_j))$ due au fait que k_j minore un index de H_{j+1}^{-1} d'après (6).

6 Voyons un cas intéressant où tous les "si" précédents sont satisfaits, celui où tous les a_i sont égaux à 1 et tous les z_i positifs (auquel cas on peut rassembler tous les "monômes" de V de même "puissance" en un seul "monôme" et donc, quitte à modifier trivialement les z_i, supposer p égal à q et $i \mapsto k_i$ à l'identité). On a alors $\sigma_i \alpha_i = H_i^{-1} 1 = \alpha_{i-1}$. Ainsi les α_i sont bien définis par récurrence rétrograde pour $i = p, ..., 0$ et -1 par

$$\alpha_p = 1, \quad \alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i}{1 + E_i(\alpha_i z_i)},$$

sont ≥ 0 et décroissent avec i ; de plus de $H_i^{-1} 1 = \alpha_{i-1} \geq 0$ on déduit $N_i 1 \leq 1$, mais les N_i ne sont pas croissants en général (ce serait le cas si les z_i étaient $\mathcal{F}_i$-mesurables, mais nous verrons mieux ci-dessous). En passant à l'adjoint, on a un résultat analogue ($N_i^* 1 \leq 1$ remplaçant $N_i 1 \leq 1$) si tous les z_i sont égaux à 1 et tous les a_i positifs, auquel cas V a une écriture discrète du type $Vf = \int_0^\infty f_t \, dA_t$ avec $\mathbb{A}$ croissant borné comme en ($\mathcal{O}$), sauf que $\mathbb{A}$ n'est pas supposé adapté.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter notre résultat fondamental. Pour toute v.a. $u \geq 0$ et pour $i = 0, ..., q$, on désigne par $e_i(u)$ (un représentant de) l'ess.sup des v.a. $\mathcal{F}_i$-mesurables majorées par u.

7 Théorème. *Soit $V = \sum_{j=0}^{p} J_{a_j} E_{k_j} J_{z_j}$ un élément de $\mathcal{A}$ où les v.a. a_j et z_j sont ≥ 0 et $\mathcal{F}_{k_{j+1}}$-mesurables (avec $\mathcal{F}_{q+1} = \mathcal{F}$). Si pour $j = p, ..., 0$ on a*

$$(\mathcal{H}) \qquad [a_j - e_{k_j}(a_j)] E_{k_j}(z_j) \leq 1 \quad \text{et} \quad [z_j - e_{k_j}(z_j)] E_{k_j}(a_j) \leq 1$$

(ce qui est évidemment le cas si les a_j et z_j sont $\mathcal{F}_{k_j}$-mesurables, ou encore si les a_j et z_j sont majorés par 1), alors V est un noyau potentiel à la Markov, ainsi que son adjoint. De plus, si on pose $(I + V)^{-1} = I - N$, le noyau sousmarkovien N s'écrit

$$N = \sum_{j=0}^{p} J_{\sigma_j} J_{\lambda_j a_j} E_{k_j} J_{z_j \mu_j}$$

où $\sigma_j, \lambda_j, \mu_j$ sont des v.a. comprises entre 0 *et* 1, σ_j *vérifiant*

$$\sigma_j = [1 + E_{k_j}(\lambda_j a_j z_j)]^{-1} = [1 + E_{k_j}(a_j z_j \mu_j)]^{-1}$$

et λ_j, μ_j étant définies par récurrence rétrograde pour $i = p, ..., 0$ par

$$\begin{aligned}
\lambda_p &= \mu_p = 1, \\
\lambda_{i-1} &= (I - J_{\sigma_i} J_{\lambda_i a_i} E_{k_i} J_{z_i})(\lambda_i) = \lambda_i \left[1 - \sigma_i a_i E_{k_i}(\lambda_i z_i)\right], \\
\mu_{i-1} &= (I - J_{\sigma_i} J_{z_i \mu_i} E_{k_i} J_{a_i})(\mu_i) = \mu_i \left[1 - \sigma_i z_i E_{k_i}(a_i \mu_i)\right].
\end{aligned}$$

Les λ_j, μ_j décroissent avec j, et on a $\lambda_0 = 1 - N1$, $\mu_0 = 1 - N^*1$. Enfin, on a les écritures multiplicatives

$$\begin{aligned}
I + V &= \prod_{i=p}^{0} (I + J_{\lambda_i a_i} E_{k_i} J_{z_i}) = \prod_{i=0}^{p} (I + J_{a_i} E_{k_i} J_{z_i \mu_i}) \\
I - N &= \prod_{i=0}^{p} (I - J_{\sigma_i \lambda_i a_i} E_{k_i} J_{z_i}) = \prod_{i=p}^{0} (I - J_{a_i} E_{k_i} J_{z_i \mu_i \sigma_i}).
\end{aligned}$$

Démonstration. – Nous posons $H = I + V$, et reprenons les notations du **5**. L'idée sous-jacente à la démonstration qui suit est qu'on a $\lambda_i = H_{i+1}^{-1} 1$, $\mu_i = H_{i+1}^{*-1} 1$, d'où, α_i valant $H_{i+1}^{-1} a_i$ et a_i étant $\mathcal{F}_{k_{i+1}}$-mesurable, $\alpha_i = H_{i+1}^{-1} E_{k_{i+1}} a_i = \lambda_i a_i$, et de même $\zeta_i = \mu_i a_i$, les inégalités supposées vérifiées par les a_i, z_i assurant la positivité des λ_i, μ_i. Alors (8) donne la valeur de σ_i tandis que (5) et son dual déterminent la récurrence donnant les λ_i, μ_i. Enfin, de (7) on déduit l'écriture additive de N, et de (4), (6) appliqués à $I + V$ et $I + V^*$ les écritures multiplicatives de $I + V$ et $I - N$.

Nous raisonnons par récurrence rétrograde. On suppose vérifié (c'est évident pour $i = p$) qu'on a $0 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$, $H_{i+1} \lambda_i = H_{i+1}^* \mu_i = 1$ et $E_{k_i}(\lambda_i a_i z_i) = E_{k_i}(a_i z_i \mu_i)$. Montrons d'abord que $1 - \sigma_i a_i E_{k_i}(\lambda_i z_i)$ est ≥ 0, ce qui impliquera $0 \leq \lambda_{i-1} \leq 1$. Comme σ_i vaut $[1 + E_{k_i}(\lambda_i a_i z_i)]^{-1}$, cela revient à vérifier qu'on a

$$a_i E_{k_i}(\lambda_i z_i) - E_{k_i}(\lambda_i a_i z_i) \leq 1\,;$$

or, si on minore $E_{k_i}(\lambda_i a_i z_i)$ par $e_{k_i}(a_i) E_{k_i}(\lambda_i z_i)$, cela devient

$$[a_i - e_{k_i}(a_i)] E_{k_i}(\lambda_i z_i) \leq 1$$

qui, λ_i étant compris entre 0 et 1, résulte des hypothèses de l'énoncé. De même, on a $0 \leq \mu_{i-1} \leq 1$. Ensuite, on a $H_{i+1}(\lambda_i a_i) = H_{i+1} J_{\lambda_i} E_{k_{i+1}}(a_i) = a_i$ et donc $H_i = H_{i+1}(I + J_{\lambda_i a_i} E_{k_i} J_{z_i})$, d'où

$$H_i \lambda_{i-1} = H_{i+1}(I + J_{\lambda_i a_i} E_{k_i} J_{z_i})(I - J_{\sigma_i} J_{\lambda_i a_i} E_{k_i} J_{z_i})\, \lambda_i = H_{i+1} \lambda_i = 1,$$

et de même $H_i^* \mu_{i-1} = 1$. Enfin, on a comme ci-dessus $H_i(\lambda_{i-1} a_{i-1}) = a_{i-1}$ et $H_i^*(z_{i-1} \mu_{i-1}) = z_{i-1}$, d'où

$$\begin{aligned} E_{k_{i-1}}(\lambda_{i-1} a_{i-1} z_{i-1}) &= E_{k_{i-1}}(\lambda_{i-1} a_{i-1} H_i^*(\mu_{i-1} z_{i-1})) \\ &= E_{k_{i-1}}(H_i(\lambda_{i-1} a_{i-1}) \mu_{i-1} z_{i-1}) = E_{k_{i-1}}(a_{i-1} z_{i-1} \mu_{i-1}). \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que tous les "si" du **5** sont maintenant satisfaits, et de conclure.

Remarque. – Soient τ_a, τ_z les premiers temps de croissance des processus sommes des a_i, z_i. On obtient une variante intéressante du théorème en remplaçant la condition $(\mathcal{H})$ par la condition $(\mathcal{H}')$ plus faible $[a_j - e_{k_j}(a_j)] E_{k_j}(z_j) \leq 1$ sur $\{\tau_a < j\}$ et $[z_j - e_{k_j}(z_j)] E_{k_j}(a_j) \leq 1$ sur $\{\tau_z < j\}$ pour $j = p, \ldots, 0$, avec essentiellement la même démonstration. Les λ_j, μ_j ne sont plus forcément compris entre 0 et 1, mais $\lambda_j a_j$ reste compris entre 0 et a_j, et de même $\mu_j z_j$ entre 0 et z_j. Les opérateurs V et V^* restent des noyaux potentiels, mais ne sont plus nécessairement à la Markov. La condition $(\mathcal{H}')$ qui, contrairement à $(\mathcal{H})$, ne limite pas la grandeur "inadaptée" des premiers sauts a_{τ_a} et z_{τ_z}, est trivialement vérifiée si les processus sommes des a_i et z_i n'ont au plus qu'un saut.

Nous explicitons sous forme de corollaires les deux cas particuliers de **7** déjà cités. Le premier élucide, dans le cas discret, la structure des opérateurs de type $(\mathcal{O})$.

8 Corollaire. *Soit $V = \sum_{j=0}^{q} J_{a_j} E_j$ un élément de $\mathcal{A}$ où les v.a. a_j sont ≥ 0 et $\mathcal{F}_j$-mesurables. Alors V est un noyau potentiel à la Markov auto-adjoint. De plus, si on pose $(I + V)^{-1} = I - N$, on a*

$$N = \sum_{j=0}^{q} J_{a_j \lambda_{j-1}} E_j J_{\lambda_j}$$

où les λ_i sont définis par récurrence rétrograde pour $i = q, \ldots, 0, -1$ par

$$\lambda_q = 1 \quad , \quad \lambda_{i-1} = \frac{\lambda_i}{1 + E_i(a_i \lambda_i)}.$$

Les λ_j *sont compris entre* 0 *et* 1, *décroissent avec* j, *et on a* $\lambda_0 = 1 - N1$. *Enfin, on a les écritures multiplicatives*

$$I + V = \prod_{i=q}^{0}(I + J_{a_i\lambda_i}E_i) \quad \text{et} \quad I - N = \prod_{i=0}^{q}(I - J_{a_i\lambda_{i-1}}E_i).$$

Remarques. – a) Sauf si les a_i sont constantes (auquel cas on évolue dans une sous-algèbre particulière de $\mathcal{A}$, analogue dans notre cadre discret à celle de [2]), et même si les a_i sont $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurables, les λ_i pour $i < q$ sont rarement $\mathcal{F}_i$-mesurables : ainsi les monômes $J_{\lambda_{j-1}}E_jJ_{\lambda_j}$ apparaissant dans l'écriture de type (♮) de N justifient a posteriori l'introduction de l'algèbre d'opérateurs "non adaptés" $\mathcal{A}$. En fait, il résulte de la définition par récurrence des λ_i qu'on a, pour $i < q$, $\lambda_i = \prod_{j=i+1}^{q}\sigma_j$ où $\sigma_j = [1 + E_j(\lambda_j a_j)]^{-1} = [1 + a_jE_j(\lambda_j)]^{-1}$ est $\mathcal{F}_j$-mesurable si bien que (λ_i) est plutôt adapté à une filtration du futur.

b) Comme pV pour $p > 0$ a la même forme que V, les noyaux $I + pV$ pour $p > 0$ ont un inverse de la forme $I - N_p$ où N_p est un noyau sousmarkovien, et V ferme alors la résolvante sousmarkovienne $(V_p)_{p>0}$ où $V_p = J_{1/p}N_p$.

9 Corollaire. *Soit* $V = \sum_{j=0}^{q} J_{a_j}E_j$ *un élément de* $\mathcal{A}$ *où les v.a.* a_j *sont comprises entre* 0 *et* 1 *et* $\mathcal{F}_{j+1}$*-mesurables. Alors* V *est un noyau potentiel à la Markov, ainsi que son adjoint. De plus, si on pose* $(I+V)^{-1} = I-N$, *on a*

$$N = \sum_{j=0}^{q} J_{\sigma_j}J_{\lambda_j a_j}E_jJ_{\mu_j} \quad \text{avec } \sigma_j = [1+E_j(\lambda_j a_j)]^{-1} = [1+E_j(a_j\mu_j)]^{-1},$$

$0 \leq \sigma_j, \lambda_j, \mu_j \leq 1$, *et* λ_j, μ_j *définies par récurrence pour* $i = q, ..., 0$ *par*

$$\lambda_q = \mu_q = 1, \;\; \lambda_{i-1} = \sigma_i\lambda_i\,[1 + E_i(\lambda_i a_i) - a_iE_i(\lambda_i)] \;\; \text{et} \;\; \mu_{i-1} = \sigma_i\mu_i$$

Les λ_j, μ_j *décroissent avec* j, *et on a* $\lambda_0 = 1-N1$, $\mu_0 = 1-N^*1$. *Enfin, on a*

$$I + V = \prod_{i=q}^{0}(I + J_{\lambda_i a_i}E_i) \quad \text{et} \quad I - N = \prod_{i=0}^{q}(I - J_{\sigma_i\lambda_i a_i}E_i).$$

Remarques. – a) Il résulte de **9** que, si T est un temps d'arrêt, alors l'opérateur $V{=}\sum_{i=1}^{q+1} 1_{\{T=i\}}E_{i-1}$ (analogue en temps discret de l'opérateur $f \mapsto f_{T-}$ de l'introduction) est un noyau potentiel. Plus généralement, d'après la remarque du **7**, l'opérateur $V{=}\sum_{i=1}^{q+1} x_i 1_{\{T=i\}}E_{i-1}$, où les x_i sont des v.a. ≥ 0 $\mathcal{F}_i$-mesurables (soit l'analogue de $f \mapsto xf_{T-}$ où x est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable) est un noyau potentiel.

b) Pour Ω fini à trois éléments (ou plus) il est facile de construire des matrices de la forme $\sum_i J_{a_i} E_i$, avec les $a_i \geq 0$ et $\mathcal{F}_{i+1}$-mesurables, qui ne soient pas des opérateurs potentiels. Cependant, dans le cas général, nos v.a. étant supposées bornées, tout V de la forme $\sum_i J_{a_i} E_i$, avec les $a_i \geq 0$ et $\mathcal{F}_{i+1}$-mesurables, est quand même un multiple d'un opérateur potentiel (ne fermant pas en général de résolvante).

II. Filtrations et ultramétriques

Nous commençons par quelques généralités sur les ultramétriques, puis sur les rapports entre filtrations et ultramétriques, qui suggérent que la notion de filtration est en général la bonne version (au sens de la mesurabilité) du concept d'ultramétrique. Puis, nous limitant au cas où Ω est fini, nous appliquons le I à l'étude des matrices ultramétriques.

Nous appelons *ultramétrique* sur un ensemble Ω toute fonction symétrique d de $\Omega \times \Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant $d(\omega, w) \leq \sup(d(\omega, v), d(v, w))$ pour tout $\omega, v, w \in \Omega$; l'ultramétrique d est une distance si elle est finie et si $d^{-1}(0)$ est la diagonale de $\Omega \times \Omega$. Nous préférerons utiliser les inverses d'ultramétriques : un *séparateur* sur Ω sera une fonction S telle que $1/S$ soit une ultramétrique, et donc une application symétrique de $\Omega \times \Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant

$$S(\omega, w) \geq \inf(S(\omega, v), S(v, w)),$$

pour tout $\omega, v, w \in \Omega$. Ainsi, pour Ω fini, les matrices ultramétriques de l'introduction s'identifient aux séparateurs à valeurs finies.

La proposition suivante est immédiate ; on y désigne par $\mathfrak{P}$ l'ensemble des partitions de Ω et, pour $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, par $\omega \neq_{\mathfrak{p}} w$ le fait que ω et w n'appartiennent pas à un même élément de $\mathfrak{p}$.

10 Théorème. *Une fonction S sur $\Omega \times \Omega$ vérifiant $S(\omega, \omega) = \sup_{w \in \Omega} S(\omega, w)$ pour tout $\omega \in \Omega$ est un séparateur ssi il existe une fonction c de $\mathfrak{P}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle qu'on ait*

$$S(\omega, w) = \inf_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} \,:\, \omega \neq_{\mathfrak{p}} w} c(\mathfrak{p})$$

pour tout $\omega, w \in \Omega$ avec $\omega \neq w$. De plus, si S est un séparateur sur Ω, la fonction c peut être choisie de sorte que $\{c < \infty\}$ soit contenu dans l'ensemble des partitions à deux éléments.

Remarques. – a) On peut supposer c croissante pour l'ordre naturel sur $\mathfrak{P}$, quitte à remplacer $c(\mathfrak{p})$ par $\inf\{c(\mathfrak{p}'), \mathfrak{p}'$ plus fine que $\mathfrak{p}\}$. On peut aussi supposer c définie seulement sur une partie $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{P}$, quitte à prolonger c sur $\mathfrak{P}\backslash\mathfrak{Q}$ par $+\infty$; on le fera tacitement ci-dessous.

b) Si Ω, fini, est l'ensemble des sommets d'un graphe connexe non orienté et si c, définie sur les partitions à deux éléments, est la fonction "coupe" associée à une "capacité" définie sur les arêtes du graphe (voir [1] pour tout ce qui concerne la théorie des graphes), on retrouve, par application du théorème de Ford-Fulkerson, un théorème de Gomory-Hu sur les matrices de flots maximaux (avec essentiellement la même démonstration), qui est aussi à l'origine du **14** ci-dessous.

c) Si Ω, dénombrable, est l'ensemble des sommets d'un arbre (non orienté) avec racine ρ, et si $\mathfrak{p}_n$ désigne, pour tout entier n, la partition associée à la relation d'équivalence $\omega =_n w$ ssi les chemins de ρ à ω et de ρ à w sont de longueur $> n$ et coïncident jusqu'à l'étape n, le séparateur associé à la fonction c définie sur l'ensemble des $\mathfrak{p}_n$ et valant n en $\mathfrak{p}_n$ a pour inverse la distance ultramétrique usuelle sur l'arbre de racine ρ.

L'ensemble Ω étant désormais muni d'une tribu $\mathcal{F}$, nous établissons maintenant une correspondance entre filtrations indexées par $\mathbb{R}_+$ et séparateurs sur Ω.

Soient, sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration continue à droite et $\omega =_t w$ (resp. $\omega \neq_t w$) la relation d'équivalence "ω et w appartiennent au même atome de $\mathcal{H}_t$" (resp. sa négation). On associe naturellement un séparateur $S_\mathbb{H}$ à $\mathbb{H}$ en posant

$$S_\mathbb{H}(\omega, w) = \inf\{t \geq 0 : \omega \neq_t w\} \;\; (\inf \emptyset = +\infty).$$

L'ultramétrique $1/S_\mathbb{H}$ est ici une distance ssi $\mathcal{H}_0$ est triviale et $\mathcal{H}_\infty$ sépare les points. Ceci dit, les valeurs de $S_\mathbb{H}$ prises sur la diagonale de $\Omega \times \Omega$ nous importent peu du moment qu'on a $S_\mathbb{H}(\omega, \omega) \geq S_\mathbb{H}(\omega, w)$ pour tout $\omega, w \in \Omega$, et on pourrait tout aussi bien poser $S_\mathbb{H}(\omega, \omega) = \sup_{w\neq\omega} S(\omega, w)$ au lieu de $S_\mathbb{H}(\omega, \omega) = +\infty$.

Réciproquement, soit S un séparateur sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et définissons une famille indexée par $\mathbb{R}_+$ de relations $\omega =_t w$ sur Ω par

$$\omega =_t w \text{ ssi } S(\omega, w) > t\,;$$

ce sont clairement des relations d'équivalence, d'autant plus fines que t est grand, ce qui permet d'associer naturellement une filtration continue à droite $\mathbb{H}^S$ à S en prenant pour $\mathcal{H}_t^S$ la tribu des éléments de $\mathcal{F}$ saturés pour la relation $=_t$.

Pour avoir une bonne correspondance entre filtrations et séparateurs, il faut qu'on ait $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{S_\mathbb{H}}$, et $S = S_{\mathbb{H}^S}$ hors de la diagonale. On peut montrer que c'est le cas si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace souslinien et si on restreint d'une part $\mathbb{H}$ à parcourir les filtrations continues à droite telles que chaque $\mathcal{H}_t$ soit l'intersection des sous-tribus séparables de $\mathcal{F}$ qui la contiennent et que chaque graphe de relation $\omega =_t w$ appartienne à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, et d'autre part S à parcourir les séparateurs $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$-mesurables. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de détails sur le cas général et nous nous limitons maintenant au cas où Ω est fini : tout ce qui précède est alors techniquement trivial.

Nous supposons donc que Ω est fini, $\mathcal{F}$ étant la tribu des parties de Ω. On identifie de manière évidente les notions de tribu, de partition, et de relation d'équivalence, et aussi, comme ci-dessus, celles de séparateur S hors diagonale et de filtration continue à droite $\mathbb{H}$ indexée par $\mathbb{R}_+$: comme S hors diagonale ne prend qu'un nombre fini q de valeurs $0 \leq t_1 < ... < t_q \leq +\infty$, la filtration $\mathbb{H}^S$ ne prend aussi que q valeurs d'où une filtration finie $\mathbb{F}^S = \{\mathcal{F}_0^S = \{\emptyset, \Omega\}, ..., \mathcal{F}_i^S = \mathcal{H}_{t_i}^S, ..., \mathcal{F}_q^S = \mathcal{F}\}$ naturellement associée au séparateur S (et aussi à tous les séparateurs $h(S)$ où h est une fonction strictement croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Nous munissons $(\Omega, \mathcal{F})$ de la loi uniforme $\mathbb{P}$. Pour toute sous-tribu $\mathcal{F}_i$, d'opérateur d'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_i$, nous notons E_i le séparateur $(\omega, w) \mapsto \mathbb{E}_i(1_{\{\omega\}})(w)$ (on a $\mathcal{F}_1^{E_i}{=}\mathcal{F}_i$), $f_i(\omega)$ l'atome de $\mathcal{F}_i$ contenant ω et $n_i(\omega)$ le cardinal de cet atome : la v.a. n_i est $\mathcal{F}_i$-mesurable, et $n_i(\omega)E_i(\omega, \cdot)$ est l'indicatrice de l'atome $f_i(\omega)$.

11 Théorème. *Une fonction finie S sur $\Omega \times \Omega$ est un séparateur sur Ω ssi il existe une filtration finie $\mathbb{F}$ sur Ω, à $q+1$ éléments, et, pour $i = 0, ..., q$, une v.a. a_i positive $\mathcal{F}_i$-mesurable, telles qu'on ait*

$$(S) \qquad S(\omega, w) = \sum_{i=0}^{q} a_i(\omega) E_i(\omega, w)$$

pour tout $\omega, w \in \Omega$. De plus, si S est un séparateur prenant q valeurs distinctes, on peut prendre pour $\mathbb{F}$ la filtration finie associée à S, et alors, pour v.a. $\mathcal{F}_i$-mesurable, la v.a. $a_i = n_i b_i$, où b_i est définie par récurrence pour $i = 0, ..., q$ par $b_0 = \inf S$ et

$$(A) \qquad b_i(\omega) = \inf_{w \in f_i(\omega)} S(\omega, w) - \sum_{j=0}^{i-1} b_j(\omega)$$

Démonstration. – Supposons d'abord S définie comme en (S). Comme, pour $\alpha, \beta \in \Omega$, chaque a_i et $E_i(\alpha, \cdot)$, égale à $E_i(\cdot, \alpha)$, est constante sur chaque atome de $\mathcal{F}_i$, que chaque suite $i \mapsto n_i(\alpha) E_i(\alpha, \beta)$ est décroissante, ne prend que deux valeurs au plus, et que $E_i(\alpha,\beta)$ est nul sauf pour $\beta \in f_i(\alpha)$, on a

$$\begin{aligned} S(\omega,v)\wedge S(v,w) &= \inf\big(\sum a_i(v)E_i(\omega,v), \sum a_i(v)E_i(v,w)\big) \\ &= \sum a_i(v)\inf(E_i(\omega,v),E_i(v,w)) \\ &\le \sum a_i(\omega)E_i(\omega,w) = S(\omega,w) \end{aligned}$$

d'où S est un séparateur. Réciproquement, soient S un séparateur fini, $\mathbb{F}$ la filtration finie $\{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,...,\mathcal{F}_q\}$ associée et (b_i) la suite à $q+1$ termes définie comme en (A). On doit montrer que la fonction S' définie sur $\Omega\times\Omega$ par

$$S'(\omega,w) = \sum_{j=0}^{q} n_j(\omega)b_j(\omega)E_j(\omega,w).$$

est égale à S. Fixons $\omega, w\in\Omega$ et posons si $\omega \neq w$

$$i = \sup\{j\in\mathbb{N} : w\in f_j(\omega)\}$$

et i=q si $\omega = w$. Par définition des b_j et choix de i, on a

$$S'(\omega,w) = \sum_{j=0}^{i} b_j(\omega) = \inf_{v\in f_i(\omega)} S(\omega,v)$$

alors que, par définition des $\mathcal{F}_j$ et choix de i, le séparateur S prend en w sa valeur minimale sur $f_i(\omega)$. D'où la conclusion.

En corollaire de **11** et **8** on obtient le résultat principal de [6].

12 Théorème. *Toute matrice ultramétrique est un opérateur potentiel à la Markov auto-adjoint.*

Remarques. – a) Il est établi dans [4] qu'une matrice est ultramétrique ssi c'est le noyau potentiel d'une chaîne de Markov induite sur un sous-ensemble de sommets par une marche aléatoire symétrique sur un arbre (fini) à racine.

b) Quoique la matrice ultramétrique infinie $(i\wedge j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ soit le noyau de Green de la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ obtenue en tuant la marche symétrique sur $\mathbb{Z}$ en 0, l'extension du cas Ω fini au cas Ω dénombrable n'est pas simple, la mesure uniforme n'étant plus bornée. Ainsi, le séparateur d'un arbre infini dyadique à racine n'est pas un noyau potentiel (mais est en un certain sens la somme d'un noyau potentiel et d'un noyau harmonique).

Nous terminons cette section en présentant un mode de génération des matrices ultramétriques indexées par Ω de cardinal n.

13 Théorème. *Une fonction symétrique finie S sur $\Omega \times \Omega$ vérifiant $S(\omega, \omega) \geq \sup_{w \in \Omega} S(\omega, w)$ pour tout $\omega \in \Omega$ est un séparateur fini sur Ω ssi il existe un ordre total $\leq$ sur Ω, identifié alors à $\{1, .., n\}$, et, pour $i = 1, ..., n-1$, des réels $s_{i,i+1} \geq 0$ tels qu'on ait pour tout $\omega, w \in \Omega$ avec $\omega < w$*

$$S(\omega, w) = \inf_{i \,:\, \omega \leq i < w} s_{i,i+1}$$

Démonstration. – La suffisance, qui est d'ailleurs un cas particulier du b) de **10**, est triviale. Pour la nécessité, la terminologie de théorie des graphes provenant essentiellement de [1], considérons le graphe complet G ayant Ω pour ensemble de sommets, chaque arête (ω, w) étant munie du poids $S(\omega, w)$. Pour T arbre partiel de G, soit $S(T)$ la somme des $S(\omega, w)$ pour (ω, w) parcourant les arêtes de T, et soit $\mathbb{T}$ l'ensemble des arbres partiels T maximisant $S(T)$. On vérifie sans peine que $S(\omega, w)$ est, pour $\omega \neq w$ et $T \in \mathbb{T}$, l'inf des valeurs de S prises sur les arêtes de l'unique géodésique de T allant de ω à w. Pour conclure il ne reste plus qu'à prouver que $\mathbb{T}$ contient un arbre linéaire. Choisissons pour chaque $T \in \mathbb{T}$ un sommet ω_T de valence 1 comme racine, désignons par $d_T(w)$ la distance dans T de ω_T au sommet w, et par $v_T(w)$ la valence de ce dernier dans T. Soit alors $\widetilde{T} \in \mathbb{T}$ maximisant $D(T) = \sum_{w \in \Omega} v_T(w) d_T(w)$ sur $\mathbb{T}$; nous allons vérifier, par l'absurde, que $\widetilde{T}$ est linéaire. Supposons que $\widetilde{T}$ ait un sommet w de valence ≥ 3 et désignons par u, v deux sommets distincts adjacents à w dans $\widetilde{T}$ et n'appartenant pas à la géodésique de ω_T à w dans $\widetilde{T}$. Soit T_u (resp T_v) l'arbre obtenu en supprimant l'arête (w, u) (resp (w, v)) et en ajoutant l'arête (u, v) dans $\widetilde{T}$. Par maximalité de $S(\widetilde{T})$, on a $S(\widetilde{T}) \geq S(T_u) \vee S(T_v)$ et donc $S(u, v) \leq S(w, u) \wedge S(w, v)$, ce qui implique, S étant un séparateur, $S(u, v) = S(w, u) \wedge S(w, v)$. Supposons par exemple qu'on a $S(u, v) = S(w, u)$: alors on a $T_u \in \mathbb{T}$ et $D(T_u) > D(\widetilde{T})$, ce qui est contraire à la maximalité de $D(\widetilde{T})$.

14 Corollaire. *Pour $\Omega = \{1, ..., n\}$, toute matrice ultramétrique est, à une même permutation des lignes et des colonnes près, de la forme*

$$\begin{pmatrix} ? & a & a \wedge b & a \wedge b \wedge c & a \wedge b \wedge c \wedge d & \cdots \\ a & ? & b & b \wedge c & b \wedge c \wedge d & \cdots \\ a \wedge b & b & ? & c & c \wedge d & \cdots \\ a \wedge b \wedge c & b \wedge c & c & ? & d & \cdots \\ a \wedge b \wedge c \wedge d & b \wedge c \wedge d & c \wedge d & d & ? & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d, ...$ sont des réels ≥ 0.

Remarques. – a) L'application surjective ainsi définie de $\mathbb{R}_+^n$ dans l'ensemble des classes d'équivalence (pour la relation que l'on devine) de matrices ultramétriques privées de leur diagonale est loin d'être injective. En fait, si à une matrice ultramétrique on associe naturellement, comme dans [4], un arbre à racine dont Ω est l'ensemble des n feuilles, représenté graphiquement avec les branches ne se chevauchant pas et les feuilles alignées, l'ordre dans lequel se présentent les feuilles est un des ordres totaux du **13** sur Ω et les $n-1$ nombres $a, b, c, \ldots$ du **14** sont les inverses des distances ultramétriques entre feuilles contigües.

b) Si, dans la matrice du **14**, on remplace en dessous de la diagonale principale les $a, b, c, d, \ldots$ par d'autres réels positifs $a', b', c', d', \ldots$, la matrice M obtenue n'est plus symétrique mais conserve des propriétés d'ultramétrie et de symétrie que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter. On peut d'ailleurs montrer qu'à une même permutation des lignes et colonnes près, on obtient ainsi les matrices ayant, relativement à une certaine filtration finie $\mathbb{F}$, une écriture de la forme $\sum J_{a_i} E_i$ où chaque a_i est $\mathcal{F}_{i+1}$–mesurable ; en particulier, en revenant aux notations $a, a', \ldots$, la matrice M est, d'après **7**, une matrice potentielle si les $|a-a'|, |b-b'|, \ldots$ sont majorés par 1.

III. Cas d'une filtration continue à droite

Nous désignons désormais par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration vérifiant les conditions habituelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rappelons que, pour $f \in \mathbb{L}_2$, on désigne par $t \mapsto f_t$ (resp $t \mapsto f_{t-}$) la version continue à droite (resp à gauche) de la martingale $t \mapsto \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_t]$; nous agrémenterons (f_t) ou (f_{t-}) d'un indice en exposant pour noter une approximation par discrétisation, le contexte ne permettant aucune ambiguïté.

Le résultat suivant élucide la nature des noyaux de la forme $(\mathcal{O})$ de l'introduction.

15 Théorème. Soit $\mathbb{A} = (A_t)$ *un processus croissant adapté borné et posons, pour tout* $f \in \mathbb{L}_2$, $Vf = \int_0^\infty f_t \, dA_t$. *L'opérateur* V *est un opérateur potentiel auto-adjoint à la Markov.*

Démonstration. – Vérifions que l'approximation discrète

$$V_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (A_{j2^{-n}} - A_{(j-1)2^{-n}}) \, E_{j2^{-n}}$$

de V tend fortement vers V quand n tend vers l'infini. Fixons $f \in \mathbb{L}_2$; on a

$$V_n f = \int_0^\infty f_t^n \, dA_t \quad \text{où} \quad f_t^n = \sum_{j=1}^{n2^n} 1_{]\,(j-1)2^{-n}, j2^{-n}\,]} \, E_{j2^{-n}} f,$$

les f_t^n convergeant uniformément sur tout compact en probabilité vers (f_t), et

$$||Vf - V_n f||_2^2 = \mathbb{E}[\int_0^\infty (f_t - f_t^n)\, dA_t]^2 \leq \mathbb{E}[\int_0^\infty (f_t - f_t^n)^2\, dA_t]\, ||\int_0^\infty dA_t||_\infty.$$

Comme les $|f_t^n|, |f_t|$ sont majorées par $f^* = \sup_t |f_t| \in \mathbb{L}_2$ et que, A_∞ étant bornée, $\mathbb{E}[\int_0^\infty f^{*2}\, dA_t]$ est fini, on déduit de ce qui précède que $(V_n f)$ converge vers Vf dans $\mathbb{L}_2$, d'où la conclusion. Maintenant, il résulte de **8** que V_n est un noyau potentiel à la Markov et que $N_n = I - (I + V_n)^{-1}$ s'écrit (en omettant de noter la dépendance en n des v.a. introduites)

$$N_n = \sum_{j=0}^{n2^n} J_{a_j} J_{\lambda_{j-1}} E_{k_j} J_{\lambda_j} \quad \text{avec} \quad a_j = A_{j2^{-n}} - A_{(j-1)2^{-n}}$$

où les λ_i sont des v.a. comprises entre 0 et 1. Nous allons vérifier que la suite (N_n) est bornée en norme $\mathbb{L}_2$, donc faiblement compacte, et qu'elle admet une seule valeur d'adhérence faible N, vérifiant $(I - N)^{-1} = I + V$. D'abord on a, pour $f \in \mathbb{L}_2$,

$$N_n f = \int_0^\infty \varphi_t^n\, dA_t \quad \text{où} \quad \varphi_t^n = \sum_{j=1}^{n2^n} 1_{](j-1)2^{-n}, j2^{-n}]}\, \lambda_{j-1} E_{j2^{-n}}(\lambda_j f)$$

et donc, comme ci-dessus,

$$||N_n f||_2^2 = \mathbb{E}[\int_0^\infty \varphi_t^n\, dA_t]^2 \leq \mathbb{E}[\int_0^\infty (\varphi_t^n)^2\, dA_t]\, ||\int_0^\infty dA_t||_\infty$$

d'où $\sup_n ||N_n||_2 < +\infty$, les $|\varphi_t^n|$ étant majorées par f^* de norme $||f^*||_2 \leq 2||f||_2$ et A_∞ étant bornée. Soit alors N une valeur d'adhérence faible de (N_n), et donc limite faible d'une sous-suite (N_{n_p}) : comme $I + V_n$ converge fortement vers $I + V$, $(I - N_{n_p})(I + V_{n_p})$ (resp $(I + V_{n_p})(I - N_{n_p})$) converge faiblement vers $(I - N)(I + V)$ (resp $(I + V)(I - N)$), et comme $I - N_n$ est l'inverse de $I + V_n$, on en déduit $(I - N)(I + V) = I = (I + V)(I - N)$. Enfin, N est évidemment sousmarkovien, d'où la conclusion.

Nous passons maintenant aux noyaux de la forme $(\mathcal{Q})$, et $(\mathcal{P})$ qui en est un cas particulier. Pour tout processus mesurable borné $\mathbb{X} = (X_t)$ nous désignons par $e(\mathbb{X}) = (e_t(\mathbb{X}))$ le processus prévisible, unique à l'indistinguabilité près, tel que $e_T(\mathbb{X})$ soit égal, pour chaque t.d'a. prévisible T, à l'ess.sup des v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurables majorées par X_T ; si ${}^p\mathbb{X}$ désigne la projection prévisible de $\mathbb{X}$, le processus $e(\mathbb{X})$ est la limite de la suite décroissante $(\mathbb{X}_n)$ où

$$\mathbb{X}_1 = {}^p\mathbb{X}, \cdots, \mathbb{X}_{2n} = \mathbb{X} \wedge \mathbb{X}_{2n-1}, \mathbb{X}_{2n+1} = {}^p\mathbb{X}_{2n}, \cdots$$

Si y est une v.a., nous notons $e(y)$ le processus $e(\mathbb{Y})$ où $Y_t = y$ pour tout t ; on a évidemment $e_T(X_T) = e_T(\mathbb{X})$ pour tout t.d'a. prévisible T.

16 Théorème. *Soit $\mathbb{A} = (A_t)$ un processus croissant adapté borné vérifiant $\Delta\mathbb{A} - e(\Delta\mathbb{A}) \leq 1$ (ce qui est le cas si $\mathbb{A}$ est un processus croissant prévisible borné), et posons, pour tout $f \in \mathbb{L}_2$, $Vf = \int_0^\infty f_{t-}\, dA_t$. L'opérateur V est un noyau potentiel à la Markov (auto-adjoint si $\mathbb{A}$ est prévisible).*

Démonstration. – On sait d'après **15** que l'opérateur W défini par $Wf = \int_0^\infty f_t\, dA_t$ est limite forte de ses approximations discrètes

$$W_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (A_{j2^{-n}} - A_{(j-1)2^{-n}}) E_{j2^{-n}}.$$

On a $Vf = Wf - \int_0^\infty \Delta f_t\, dA_t$ et $\int_0^\infty \Delta f_t\, dA_t$ est limite dans $\mathbb{L}_2$ de

$$\Delta V_n f = \int_0^\infty \Delta f_t^n\, dA_t$$

où

$$\Delta f_t^n = \sum_{j=1}^{n2^n} 1_{](j-1)2^{-n}, j2^{-n}]}\, \Delta E_{j2^{-n}} f \ \text{ et } \ \Delta E_{j2^{-n}} = E_{j2^{-n}} - E_{j2^{-n}-},$$

$E_{j2^{-n}-}$ étant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{j2^{-n}-}$; donc le noyau V est limite forte de ses approximations discrètes

$$V_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (A_{j2^{-n}} - A_{(j-1)2^{-n}})\, E_{j2^{-n}-}.$$

Alors **7** appliqué avec $a_j^n = A_{j2^{-n}} - A_{(j-1)2^{-n}}$ et $z_j^n = 1$ implique que les V_n sont des noyaux potentiel à la Markov, et un passage à la limite analogue à celui de **15** permet de conclure.

16 Corollaire. *Si T est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$, l'opérateur $f \mapsto f_{T-}$ est un noyau potentiel.*

RÉFÉRENCES

[1] C. BERGE et , A. GHOUILA-HOURI *Programmes, jeux et réseaux de transport*, Dunod, 1962.
[2] N. BOULEAU, Autour de la variance comme forme de Dirichlet etc., *Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, n° 8* p.39-53, L.N. in Mathematics n° 1235, Springer-Verlag 1989.
[3] C. DELLACHERIE, Étude atomique des filtrations, *non publié.*
[4] C. DELLACHERIE, S. MARTINEZ et J. SAN MARTIN J., Ultrametric matrices and induced Markov chains, *Adv. Appl. Math.* 17: 169-183, 1996.
[5] Y. HU, Potential kernels associated with a filtration and forward-backward SDE's, *soumis.*
[6] S. MARTINEZ, G. MICHON et J. SAN MARTIN J., Inverse of strictly ultrametric matrices are of Stieltjes type, *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, 15: 98-106, 1994.

(Manuscript received May 26, 1997;
Revised version received May 28, 1998.)