ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YANICK HEURTEAUX

Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures

Annales de l'I. H. P., section B, tome 34, nº 3 (1998), p. 309-338
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1998__34_3_309_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 34, n° 3, 1998, p. 309-338 *Probabilités et Statistiques*

Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures

par

Yanick HEURTEAUX

Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.
Yanick.Heurteaux@math.u-psud.fr

RÉSUMÉ. – On montre comment, dans les bons cas, la fonction τ du formalisme multifractal permet de calculer la dimension inférieure et la dimension supérieure d'une mesure. On peut alors prouver la dérivabilité de la fonction τ lorsque la mesure est une quasi-Bernoulli et préciser ainsi un travail de Brown Michon et Peyrière sur l'analyse multifractale de ces mesures. © Elsevier, Paris

Mots clés : Mesure de Hausdorff; Mesure de packing; Dimension de Hausdorff; Dimension de Tricot; Dimension inférieure et supérieure; Analyse multifractale.

ABSTRACT. – In good cases, we prove that the function τ which appears in multifractal formalism is adapted to calculate the lower and the upper dimension of a measure. Then, we are able to prove the derivability of τ for quasi-Bernoulli measures, thus precising some of Brown Michon and Peyrière results concerning the multifractal analysis of these measures. © Elsevier, Paris

Key words: Hausdorff measure; Packing measure; Hausdorff dimension; Tricot dimension; Lower and upper dimension; Multifractal analysis.

Code matière AMS (1991). 28 A 12, 28 A 78, 28 D 05, 28 D 20, 60 F 10.

Dans tout ce travail, d est un entier supérieur ou égal à 1 et m désigne une probabilité borélienne sur $[0,1[^d$. On cherche à comparer la mesure m avec les mesures de Hausdorff. Plus précisément, on cherche à donner des estimations, si possible optimales, de la dimension inférieure et de la dimension supérieure de la mesure m. Celles-ci sont définies par :

$$\begin{cases} \dim_*(m) = \sup\{\alpha > 0 \ ; \ \dim E < \alpha \Longrightarrow m(E) = 0\} \\ \qquad\qquad = \sup\{\alpha \geq 0 \ ; \ m \ll \mathcal{H}^\alpha\} \\ \dim^*(m) = \inf\{\dim E \ ; \ m([0,1[^d \backslash E) = 0\} \\ \qquad\qquad = \inf\{\alpha \geq 0 \ ; \ m \perp \mathcal{H}^\alpha\} \end{cases}$$

où $\mathcal{H}^\alpha$ désigne la mesure de Hausdorff dans la dimension α et $\dim E$ désigne la dimension de Hausdorff de l'ensemble E. Pour plus de détails sur les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$, on peut consulter [14].

Dans [17], on s'est déjà intéressé à ce problème. Les estimations qu'on y a établies ont le mérite d'être concrètes et de donner dans certaines situations des résultats explicites (voir [17] ainsi que les exemples développés à la fin de la cinquième partie de ce travail). Cependant, elles sont rarement optimales.

Notre objectif ici est d'obtenir, pour une large classe de mesures m, des formules qui permettent un calcul théorique explicite de leur dimension inférieure et supérieure. La fonction τ, bien connue en analyse multifractale, est alors le bon outil pour atteindre cet objectif. Pour la définir, on fixe un entier ℓ supérieur ou égal à deux et on note $\mathcal{F}_n$ la famille des cubes ℓ-adiques de la $n^{\text{ème}}$ génération inclus dans le cube unité. En d'autres termes :

$$\mathcal{F}_n = \left\{ I = \prod_{i=1}^{d} [k_i/\ell^n, (k_i+1)/\ell^n[\ ; \ 0 \leq k_i < \ell^n \right\}.$$

Pour $x > 0$, on définit alors $\tau(x)$ par :

$$(1) \quad \tau(x) = \limsup_{n \to +\infty} \tau_n(x) \quad \text{avec} \quad \tau_n(x) = \frac{1}{n \log \ell} \log \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x \right).$$

(on a pris comme convention que $0^x = 0$). Lorsqu'on en aura besoin, on notera toujours $I_n(X)$ l'unique élément de $\mathcal{F}_n$ contenant X et $|I| = \ell^{-n}$ si $I \in \mathcal{F}_n$.

Il est souvent implicite ([12]) et parfois prouvé rigoureusement ([22]) que lorsque $\tau'(1)$ existe, la mesure m est mono-dimensionnelle et vérifie $\dim_*(m) = \dim^*(m) = -\tau'(1)$.

Dans ce papier, on s'intéresse surtout au cas où la fonction τ n'est pas dérivable au point 1. On est alors amené à faire intervenir la notion de dimension de Tricot. Si $\operatorname{Dim} E$ désigne la dimension de Tricot de l'ensemble E (voir [24], [25] ou la première partie de ce travail pour une définition précise), on peut introduire les quantités $\operatorname{Dim}_*(m)$ et $\operatorname{Dim}^*(m)$ définies par :

$$\begin{cases} \operatorname{Dim}_*(m) = \sup\{\alpha > 0 \ ; \ \operatorname{Dim} E < \alpha \Longrightarrow m(E) = 0\} \\ \operatorname{Dim}^*(m) = \inf\{\operatorname{Dim} E \ ; \ m([0,1[^d \backslash E) = 0\} \end{cases}.$$

Les quantités $\operatorname{Dim}_*(m)$ et $\operatorname{Dim}^*(m)$ semblent n'avoir jamais été étudiées par le passé mais s'avèrent ici indispensables pour interpréter correctement la dérivée à gauche de la fonction τ au point 1 (voir proposition 5.1).

Sans hypothèse restrictive sur la mesure m, on prouve au cours de la première partie de ce travail les inégalités :

$$\dim_*(m) \geq -\tau'_+(1) \quad \text{et} \quad \operatorname{Dim}^*(m) \leq -\tau'_-(1),$$

où $\tau'_-(1)$ et $\tau'_+(1)$ désignent les dérivées à gauche et à droite de la fonction τ au point 1. La preuve de ce résultat reprend en les raffinant les idées de [17] (voir aussi [22]). L'intérêt par rapport à [17] est que maintenant, on obtient des estimations qui sont souvent optimales. C'est ce qu'on décrit lors de la deuxième partie. On y montre, sous certaines conditions (hypothèse (4)), les égalités :

$$\dim_*(m) = -\tau'_+(1) \quad \text{et} \quad \operatorname{Dim}^*(m) = -\tau'_-(1).$$

Lors de la troisième partie, nous nous intéressons aux mesures quasi-Bernoulli (propriété (5)) et nous montrons comment les résultats de la partie 2 peuvent s'appliquer dans ce cadre. Pour ces mesures, nous établissons la dérivabilité de la fonction τ au point 1 et la coïncidence entre $-\tau'(1)$ et les quatre quantités $\dim_*(m)$, $\operatorname{Dim}_*(m)$, $\dim^*(m)$ et $\operatorname{Dim}^*(m)$. Dans [8], Brown, Michon et Peyrière ont prouvé, que lorsque m est une quasi-Bernoulli, le formalisme multifractal fonctionne. Plus précisément, si τ est dérivable en un point x avec $\alpha = -\tau'(x)$ et si

$$E_\alpha = \left\{ X \in [0,1[^d \ ; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\log m(I_n(X))}{\log |I_n(X)|} = \alpha \right\},$$

on a la relation :

$$\dim (E_\alpha) = \tau^*(\alpha),$$

où τ^* désigne la transformée de Legendre de la fonction τ. Nous montrons que τ est dérivable, non seulement au point 1, mais aussi en tout point x. Ainsi, tout nombre α compris entre $-\tau'(+\infty)$ et $-\tau'(-\infty)$, s'ecrit toujours $\alpha = -\tau'(x)$ pour un certain x. On précise donc [8] en disant :

$$\forall \alpha \in (-\tau'(+\infty), \tau'(+\infty)), \quad \dim E_\alpha = \tau^*(\alpha).$$

Lors de la quatrième partie, nous revenons au cas général. Sans hypothèse restrictive sur la mesure m, nous ne savons pas si les inégalités $\dim_*(m) \leq -\tau'_+(1)$ et $\mathrm{Dim}^*(m) \geq -\tau'_-(1)$ sont toujours valables. Cependant, nous nous efforçons de donner une majoration de $\dim_*(m)$ et une minoration de $\mathrm{Dim}^*(m)$ vérifiées en toute généralité. Les dimensions de Rényi permettent d'atteindre cet objectif. Sans restriction sur m, nous montrons que :

$$\begin{cases} \dim_*(m) \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} \sum\limits_{I \in \mathcal{F}_n} m(I) \log_\ell(m(I)) \\ \mathrm{Dim}^*(m) \geq \limsup\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} \sum\limits_{I \in \mathcal{F}_n} m(I) \log_\ell(m(I)) \end{cases}.$$

Enfin, la dernière partie est consacrée à l'étude de quelques exemples. En particulier, lors de la proposition 5.1, nous décrivons un exemple de mesure m vérifiant :

$$\dim^*(m) < \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau'_-(1),$$

prouvant ainsi que la dimension de Tricot est en général le bon outil pour interpréter géométriquement le nombre $-\tau'_-(1)$.

L'exemple décrit lors de la proposition 5.2 possède un autre intérêt. Il met en valeur une mesure m vérifiant les hypothèses de la partie 2 et telle qu'on ait les inégalités strictes :

$$\begin{cases} \dim_*(m) < \liminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} \sum\limits_{I \in \mathcal{F}_n} m(I) \log_\ell(m(I)) \\ \mathrm{Dim}^*(m) > \limsup\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} \sum\limits_{I \in \mathcal{F}_n} m(I) \log_\ell(m(I)) \end{cases}.$$

1. ESTIMATIONS DE $\dim_*(m)$ ET $\mathrm{Dim}^*(m)$ À L'AIDE DE LA FONCTION τ

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, prenons le temps de redéfinir les mesures de packing et la dimension de Tricot (on peut consulter [24] et [25] pour plus de détails). Si $E \subset [0,1[^d$, on appelle ℓ^{-n}–packing de E, toute famille $(I_\gamma)_\gamma \subset \bigcup_{p\geq n} \mathcal{F}_p$ constituée d'éléments deux à deux disjoints et rencontrant E. Si $\alpha > 0$, on pose :

$$\mathcal{P}^\alpha(E) = \lim_{n\to+\infty} \sup \left\{ \sum_\gamma |I_\gamma|^\alpha \ ; \ (I_\gamma)_\gamma \ \ \ell^{-n} - \text{packing de } E \right\}.$$

Cette quantité n'étant pas σ-additive sur les boréliens de $[0,1[^d$, on définit ensuite les mesures de packing par :

$$\hat{\mathcal{P}}^\alpha(E) = \inf \left\{ \sum_n \mathcal{P}^\alpha(E_n) \ ; \ E \subset \bigcup_n E_n \right\}.$$

Lorsque α varie, on obtient ainsi une famille de mesures sur les boréliens de $[0,1[^d$ qui permet de définir la dimension de Tricot de l'ensemble E par :

$$\mathrm{Dim}\, E = \inf \left\{ \alpha \ ; \ \hat{\mathcal{P}}^\alpha(E) = 0 \right\} = \sup \left\{ \alpha \ ; \ \hat{\mathcal{P}}^\alpha(E) = +\infty \right\}.$$

On a toujours l'implication :

$$\hat{\mathcal{P}}^\alpha(E) = 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^\alpha(E) = 0,$$

ce qui permet de conclure que $\dim E \leq \mathrm{Dim}\, E$.

De la même façon qu'on peut comparer une mesure m donnée avec les mesures de Hausdorff, on peut aussi la comparer avec les mesures de packing et définir $\mathrm{Dim}_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$ par :

$$\begin{cases} \mathrm{Dim}_*(m) = \sup\{\alpha > 0 \ ; \ \mathrm{Dim}\, E < \alpha \Longrightarrow m(E) = 0\} \\ \qquad\qquad\ = \sup\{\alpha \geq 0 \ ; \ m \ll \hat{\mathcal{P}}^\alpha\} \\ \mathrm{Dim}^*(m) = \inf\{\mathrm{Dim}\, E \ ; \ m([0,1[^d \backslash E) = 0\} \\ \qquad\qquad\ = \inf\{\alpha \geq 0 \ ; \ m \perp \hat{\mathcal{P}}^\alpha\} \end{cases}$$

Il est bien connu (voir par exemple [14], [4] ou [25]) que les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$ sont reliées au comportement presque sûr de la quantité :

$$\underline{\alpha}(X) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log m(I_n(X))}{\log |I_n(X)|}.$$

De même, on peut facilement prouver que les quantités $\mathrm{Dim}_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$ sont reliées au comportement presque sûr de la quantité :

$$\overline{\alpha}(X) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log m(I_n(X))}{\log |I_n(X)|}.$$

Plus précisément, on peut isoler la propriété suivante qui sera la clé des estimations qui vont suivre :

PROPOSITION 1.1. – *Soit m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. on a :*

(i) $\dim_*(m) \geq \alpha \Longleftrightarrow \underline{\alpha}(X) \geq \alpha$ *pour dm presque tout X*

(ii) $\mathrm{Dim}^*(m) \leq \alpha \Longleftrightarrow \overline{\alpha}(X) \leq \alpha$ *pour dm presque tout X.*

Remarques. – 1. On a mis en valeur les deux estimations qui nous seront utiles par la suite, mais on peut de même montrer que :

$$\begin{cases} \dim^*(m) \leq \alpha \Longleftrightarrow \underline{\alpha}(X) \leq \alpha \text{ pour } dm \text{ presque tout } X \\ \mathrm{Dim}_*(m) \geq \alpha \Longleftrightarrow \overline{\alpha}(X) \geq \alpha \text{ pour } dm \text{ presque tout } X \end{cases}.$$

2. La proposition 1.1 nous assure aussi de façon immédiate les implications :

$$\begin{cases} m(\{X\ ;\ \underline{\alpha}(X) \leq \alpha\}) > 0 \Rightarrow \dim_*(m) \leq \alpha \\ m(\{X\ ;\ \overline{\alpha}(X) \geq \alpha\}) > 0 \Rightarrow \mathrm{Dim}^*(m) \geq \alpha \end{cases}.$$

On sera aussi amené à utiliser la proposition 1.1 de cette façon par la suite.

Preuve de (i). – Bien que l'assertion (i) soit classique (voir par exemple [14] ou [25]), rappelons-en brièvement la preuve. Pour prouver $\Leftarrow$, on fixe α tel que $\underline{\alpha}(X) \geq \alpha$ pour dm presque tout X puis $\varepsilon > 0$. La mesure m est alors portée par $\bigcup_n E_n$ où :

$$E_n = \left\{X \in [0,1[^d\ ;\ \forall p \geq n,\quad m(I_p(X)) \leq |I_p(X)|^{\alpha-\varepsilon}\right\}.$$

Il est alors élémentaire de vérifier que sur les ensembles E_n, l'inégalité $m \leq \mathcal{H}^{\alpha-\varepsilon}$ est vérifiée. Comme la mesure m est portée par $\bigcup_n E_n$, il s'ensuit qu'elle est absolument continue par rapport à $\mathcal{H}^{\alpha-\varepsilon}$. On a donc $\dim_*(m) \geq \alpha - \varepsilon$ et on conclut grâce à l'arbitraire sur ε.

Réciproquement, fixons un réel $\alpha > 0$ tel qu'il existe un borélien E non négligeable pour m et vérifiant :

$$\forall X \in E, \quad \underline{\alpha}(X) < \alpha.$$

On peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{X \in E \ ; \ \underline{\alpha}(X) < \alpha - \varepsilon\}$ soit encore non négligeable. Appelons F ce nouvel ensemble. On a :

$$\forall X \in F, \ \forall n_0 \geq 1, \ \exists n \geq n_0 \ ; \qquad m(I_n(X)) > |I_n(X)|^{\alpha-\varepsilon}.$$

On peut alors conclure que :

$$\mathcal{H}^{\alpha-\varepsilon}(F) < +\infty.$$

En effet, si on fixe un entier n_0, on peut construire un recouvrement de F par des cubes <u>deux à deux disjoints</u>, de génération supérieure ou égale à n_0 et vérifiant :

$$m(I) \geq |I|^{\alpha-\varepsilon}.$$

Si on note $\mathcal{R}$ ce recouvrement, on a alors :

$$\sum_{I \in \mathcal{R}} |I|^{\alpha-\varepsilon} \leq m\left(\bigcup_{I \in \mathcal{R}} I\right) \leq 1.$$

Finalement, $\mathcal{H}^{\alpha-\varepsilon}(F)$ est au plus égal à 1. Il s'ensuit que $\mathcal{H}^{\alpha-\varepsilon/2}(F) = 0$ et donc que $\alpha > \dim_*(m)$.

Preuve de (ii). – Cette assertion ne semble pas se trouver dans la littérature ; tout du moins sous cette forme. Commençons par établir l'implication $\Leftarrow$. Supposons que $\overline{\alpha}(X) \leq \alpha \ dm$ presque partout et fixons $\varepsilon > 0$. La mesure m est portée par un ensemble E tel que :

$$\forall X \in E, \quad \exists n \in \mathbb{N} \ ; \quad \forall p \geq n, \quad m(I_p(X)) > |I_p(X)|^{\alpha+\varepsilon}.$$

Notons alors :

$$E_n = \left\{X \in E \ ; \ \forall p \geq n, \quad m(I_p(X)) > |I_p(X)|^{\alpha+\varepsilon}\right\}.$$

Si $\mathcal{P}$ désigne un packing de E_n constitué de cubes de génération au moins égales à n, on obtient :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}} |I|^{\alpha+\varepsilon} \leq \sum_{I \in \mathcal{P}} m(I) = m\left(\bigcup_{I \in \mathcal{P}} I\right) \leq 1.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}^{\alpha+\varepsilon}(E_n) < +\infty.$$

Ainsi, E est réunion des ensembles E_n qui vérifient tous $\mathcal{P}^{\alpha+2\varepsilon}(E_n) = 0$. Par définition de la mesure $\hat{\mathcal{P}}^{\alpha+2\varepsilon}$, on en déduit que :

$$\hat{\mathcal{P}}^{\alpha+2\varepsilon}(E) = 0.$$

Finalement, la mesure m est étrangère à la mesure $\hat{\mathcal{P}}^{\alpha+2\varepsilon}$. Comme ε est arbitraire, on en déduit donc que $\mathrm{Dim}^*(m) \leq \alpha$.

Réciproquement, fixons α tel que :

$$m\{X \in [0,1[^d \; ; \; \overline{\alpha}(X) > \alpha\} > 0$$

et posons pour $n \geq 0$:

$$B_n = \{X \in [0,1[^d \; ; \; m(I_n(X)) < |I_n(X)|^\alpha\}.$$

On a donc :

$$m\left(\limsup_{n\to+\infty} B_n\right) > 0.$$

Montrons que la mesure $\hat{\mathcal{P}}^\alpha$ n'est pas étrangère à m ; ce qui revient à dire que pour tout borélien A, on a l'implication :

$$\hat{\mathcal{P}}^\alpha(A) = 0 \Longrightarrow m(A) < 1.$$

Prenons un borélien A vérifiant $\hat{\mathcal{P}}^\alpha(A) = 0$ et écrivons :

$$A = (A \cap \liminf A_n) \cup (A \cap \limsup B_n),$$

où $A_n = [0,1[^d \backslash B_n$. Il suffit de montrer que $m(A \cap \limsup B_n) = 0$ pour conclure que $m(A) < 1$. Ce dernier point est une conséquence immédiate du lemme élémentaire suivant :

LEMME 1.2. – *Pour tout borélien E inclus dans $[0,1[^d$, on a :*

$$m\left(E \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n\right) \leq \hat{\mathcal{P}}^\alpha(E).$$

Commençons par établir que :

$$m\left(E \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n\right) \leq \mathcal{P}^\alpha(E).$$

Pour cela, fixons $n_0 \geq 1$. Pour chaque point $X \in E \cap \limsup B_n$, on peut trouver un plus petit entier $n \geq n_0$ tel que :

$$m(I_n(X)) < |I_n(X)|^\alpha.$$

Notons $\mathcal{P}$ la famille des cubes ainsi selectionnés. Par construction, ils sont deux à deux disjoints et forment un recouvrement de $E \cap \limsup B_n$. On a donc :

$$m\left(E \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n\right) \leq \sum_{I\in\mathcal{P}} m(I) \leq \sum_{I\in\mathcal{P}} |I|^\alpha.$$

De plus, $\mathcal{P}$ constitue un packing de $E \cap \limsup B_n$. On conclut donc immédiatement que :

$$m\left(E \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n\right) \leq \mathcal{P}^\alpha(E).$$

Enfin, si $E \subset \bigcup_{p\geq 1} E_p$, le résultat précédent et la σ-sous-additivité de la mesure m nous donnent :

$$m\left(E \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n\right) \leq \sum_{p\geq 1} \mathcal{P}^\alpha(E_p).$$

La conclusion du lemme s'obtient en passant à la borne inférieure sur tous les recouvrements dénombrables de E.

En toute rigueur, on vient de montrer que si $\{X\ ;\ \overline{\alpha}(X) > \alpha\}$ est non négligeable, alors $\mathrm{Dim}^*(m) \geq \alpha$. Cependant, on aurait pu effectuer le même raisonnement en faisant intervenir un $\tilde{\alpha} > \alpha$ tel que $\{X\ ;\ \overline{\alpha}(X) > \tilde{\alpha}\}$ soit encore non négligeable. On a donc en fait établi que $\mathrm{Dim}^*(m) \geq \tilde{\alpha} > \alpha$.

La proposition 1.1 étant acquise, on peut alors énoncer le théorème général suivant :

THÉORÈME 1.3. – *Soit m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. Si τ est définie comme en* (1), *on a :*
(i) $\quad \forall\alpha < -\tau'_+(1), \quad m \ll \mathcal{H}^\alpha \quad$ *et* $\quad$ (ii) $\forall\alpha > -\tau'_-(1), \quad m \perp \hat{\mathcal{P}}^\alpha$.
En d'autres termes :

(i) $\mathrm{Dim}_*(m) \geq \dim_*(m) \geq -\tau'_+(1)$ *et* (ii) $\dim^*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m) \leq -\tau'_-(1)$.

Notons τ^* la transformée de Legendre de la fonction τ. C'est-à-dire :

$$\tau^*(\alpha) = \inf_x(\alpha\, x + \tau(x)).$$

Les nombres $-\tau'_+(1)$ et $-\tau'_-(1)$ ont alors une interprétation géométrique simple. La fonction τ^* est définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ contenant $[-\tau'_+(1), -\tau'_-(1)]$. Elle est concave et vérifie :

$$\forall \alpha \in \mathcal{I}, \quad \tau^*(\alpha) \le \alpha \quad \text{et} \quad \tau^*(\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in [-\tau'_+(1), -\tau'_-(1)].$$

Dans Falconer ([12] page 260), on peut comprendre que si la fonction τ est dérivable au point 1, la mesure m est portée par un ensemble de dimension de Hausdorff $-\tau'(1)$. Ngai donne dans [22] une preuve rigoureuse de l'égalité $\dim_*(m) = \dim^*(m) = -\tau'(1)$ lorsque τ est dérivable au point 1. D'une façon générale, au cours des travaux sur la multifractalité, il est souvent implicite qu'il y a un lien entre les solutions de $\tau^*(\alpha) = \alpha$ et la dimension des ensembles qui portent la mesure m. Ici, nous explicitons complètement ce lien en termes de comparaisons entre la mesure m et les mesures de Hausdorff ou de packing.

Dans la pratique, connaître avec exactitude la fonction τ peut être difficile. Cependant, si on sait majorer au voisinage de 1 la fonction τ par une fonction χ dérivable à gauche et à droite au point 1 et vérifiant $\chi(1) = 0$, on pourra conclure que :

$$\dim_*(m) \ge -\chi'_+(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) \le -\chi'_-(1).$$

C'est ce qu'on fait dans les exemples c et d de la partie 5. Le corollaire qui suit peut aussi se justifier grâce à cette remarque. Il était annoncé dans [17] (à la nuance près qu'on n'avait pas effectué les comparaisons avec les mesures $\hat{\mathcal{P}}^\alpha$).

COROLLAIRE 1.4 (voir [17]). – *Posons pour $n \ge 0$ et $x > 0$:*

$$\beta_n(x) = \sup_{I \in \mathcal{F}_n} \left(\sum_{J \subset I,\ J \in \mathcal{F}_{n+1}} \left(\frac{m(J)}{m(I)} \right)^x \right) \quad \textit{et} \quad \beta(x) = \limsup_{n \to +\infty} \beta_n(x),$$

avec la convention $(0/0)^x = 0$. On a alors :

$$\dim_*(m) \ge -\frac{\beta'_+(1)}{\log \ell} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) \le -\frac{\beta'_-(1)}{\log \ell}.$$

Preuve du corollaire 1.4. – Si $x > 0$, le nombre $\beta_n(x)$ vérifie :

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_{n+1}} m(I)^x \le \beta_n(x) \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x.$$

En itérant cette inégalité, on obtient :

$$\tau_{n+1}(x) \leq \frac{\log \beta_n(x) + \ldots + \log \beta_0(x)}{(n+1)\log \ell}.$$

On peut donc conclure que :

$$\begin{aligned}\tau(x) &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \beta_n(x) + \ldots + \log \beta_0(x)}{(n+1)\log \ell}\\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \beta_n(x)}{\log \ell} = \frac{\log \beta(x)}{\log \ell}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, β est une fonction convexe (l'inégalité de Hölder nous assure même que la fonction β_n est log-convexe). Elle est donc dérivable à gauche et à droite au point 1. En remarquant que $\beta(1) = 1$ et en utilisant le théorème 1.3, on termine alors aisément la preuve.

Venons-en maintenant à la preuve du théorème 1.3. Pour démontrer l'inégalité (ii), on reprend en l'améliorant une idée déjà exploitée par Bourgain ([7]) et par Batakis ([1]) dans un autre contexte. La preuve de (i) est assez voisine. Rappelons tout d'abord les propriétés élémentaires de la fonction τ. Elle est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, décroissante, vérifie $\tau(1) = 0$ et $\inf(0, d(1-x)) \leq \tau(x) \leq \sup(0, d(1-x))$ si $x > 0$. De plus, l'inégalité de Hölder nous assure que τ_n est convexe. Ainsi, τ est aussi convexe. Elle est donc dérivable à gauche et à droite partout.

Preuve de l'inégalité (i). – Fixons deux réels α et β tels que $\alpha < \beta < -\tau_+'(1)$, puis un réel $x > 1$ vérifiant :

$$\tau(x) < \beta(1-x).$$

Par définition de la fonction τ, on peut alors trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^x \leq \ell^{n\beta(1-x)}. \tag{2}$$

Introduisons alors $\mathcal{L}_n = \{I \in \mathcal{F}_n \ ; \ m(I) > |I|^\alpha\}$ et $A_n = \bigcup_{I\in\mathcal{L}_n} I$. On a :

$$m(A_n) = \sum_{I\in\mathcal{L}_n} m(I)^{x+(1-x)} \leq \sum_{I\in\mathcal{L}_n} m(I)^x |I|^{\alpha(1-x)} \leq \ell^{n(\beta-\alpha)(1-x)}.$$

On en déduit, grâce au lemme de Borel-Cantelli que :

$$m\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0.$$

On vient donc de prouver que :

$$\text{pour } m\text{-presque tout } X \in [0,1[^d, \quad \underline{\alpha}(X) \geq \alpha.$$

Grâce à la proposition 1.1, on a donc établi l'inégalité $\dim_*(m) \geq \alpha$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Preuve de l'inégalité (ii). – On fixe ici deux réels α et β vérifiant $\alpha > \beta > -\tau'_-(1)$ puis un réel $x < 1$ tel que :

$$\tau(x) < \beta(1-x).$$

On trouve alors comme plus haut un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^x \leq \ell^{n\beta(1-x)}. \tag{3}$$

La différence entre l'inégalité (2) et l'inégalité (3) vient de ce que maintenant x est strictement inférieur à 1. Donnons à $\mathcal{L}_n$ et à A_n la même signification que lors de la preuve de l'inégalité (i). On peut écrire ici :

$$m([0,1[^d \backslash A_n) = \sum_{I\notin\mathcal{L}_n} m(I)^{x+(1-x)} \leq \sum_{I\notin\mathcal{L}_n} m(I)^x |I|^{\alpha(1-x)} \leq \ell^{n(\beta-\alpha)(1-x)}.$$

Finalement, on a :

$$m\left(\limsup_{n\to+\infty}([0,1[^d \backslash A_n)\right) = 0.$$

La mesure m est donc portée par l'ensemble $E = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ et on a :

$$\forall X \in E, \quad \overline{\alpha}(X) \leq \alpha.$$

La proposition 1.1 nous assure alors que $\mathrm{Dim}^*(m) \leq \alpha$. L'arbitraire sur α termine la preuve de l'inégalité (ii).

Remarque finale. – On peut voir le résultat du théorème 1.3 comme une interprétation analytique d'inégalités de grandes déviations. Notons :

$$Y_n = \sum_{I\in\mathcal{F}_n} \log_\ell(m(I))\mathbb{1}_I.$$

Dans l'espace probabilisé $([0,1[^d, \mathcal{B}, m)$, on a alors :

$$\forall t > -1, \quad \tau(1+t) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log_\ell(E(\ell^{tY_n})).$$

Si $\alpha < -\tau'_+(1)$, l'inégalité de Chernoff s'écrit alors :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log_\ell(m(Y_n \geq -n\alpha)) \leq \tau^*(\alpha) - \alpha < 0.$$

En interprétant cette inégalité, on peut alors retrouver que $\dim_*(m) \geq \alpha$. On peut traiter de même l'autre inégalité du théorème 1.3 (voir aussi [8]).

2. UNE RÉCIPROQUE AU THÉORÈME 1.3

On cherche au cours de cette partie à décrire une situation où l'on peut affirmer que les quantités $\tau'_-(1)$ et $\tau'_+(1)$ évaluent exactement les nombres $\dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$. On suppose que l'on a codé les éléments de $\mathcal{F}_n$ sous la forme $I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_n}$ où $0 \leq \epsilon_j < \ell^d$ de telle sorte qu'on ait les inclusions :

$$I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_{n+1}} \subset I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_n},$$

pour tous choix des entiers $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n+1}$ dans $\{0, \ldots, \ell^d - 1\}$.

Si $I = I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_n} \in \mathcal{F}_n$ et $J = I_{\epsilon_{n+1}\ldots\epsilon_{n+p}} \in \mathcal{F}_p$, on notera par souci de simplification :

$$IJ = I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_{n+p}}.$$

On introduit alors la propriété (4) suivante :

$$(4)\ \exists C > 0\ ;\ \forall n, p \geq 1,\ \forall I \in \mathcal{F}_n,\ \forall J \in \mathcal{F}_p, \quad m(IJ) \leq C\, m(I)\, m(J).$$

Rappelons que la mesure m est appelée quasi-Bernoulli si elle vérifie la propriété (4) et si de plus $m(IJ) \geq \frac{1}{C}\, m(I)\, m(J)$ (voir par exemple [8]).

La condition (4) permet de donner une réciproque au théorème 1.3. C'est l'objet de l'énoncé qui suit :

THÉORÈME 2.1. – *Soit* m *une mesure de probabilités sur* $[0,1[^d$. *On suppose de plus que* m *vérifie la condition* (4). *Si* τ *est définie par la formule* (1), *on a :*

$$\dim_*(m) = -\tau'_+(1) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau'_-(1).$$

La preuve du théorème 2.1 s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 2.2. – *Sous l'hypothèse* (4), *la suite* $\tau_n(x)$ *converge pour tout* $x > 0$. *On a de plus :*

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x > 0, \quad \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x \geq C^{-x}\, \ell^{n\,\tau(x)}.$$

Preuve du lemme 2.2. – Fixons $x > 0$. L'hypothèse (4) nous assure que :

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_{n+p}} m(I)^x = \sum_{J \in \mathcal{F}_n,\ K \in \mathcal{F}_p} m(JK)^x \leq C^x \left(\sum_{J \in \mathcal{F}_n} m(J)^x\right)\left(\sum_{K \in \mathcal{F}_p} m(K)^x\right).$$

Ainsi, la suite :

$$U_n = C^x \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x$$

est sous-multiplicative. On sait alors que la suite $(U_n)^{1/n}$ converge vers sa borne inférieure. La suite U_n vérifie de plus l'inégalité :

$$U_n \geq C^x \inf\left(1, \ell^{nd(1-x)}\right).$$

Ainsi, la limite de $(U_n)^{1/n}$ est strictement positive. On peut donc passer au logarithme pour obtenir que la suite $\tau_n(x)$ converge. Enfin, comme la limite de $(U_n)^{1/n}$ correspond à la borne inférieure de la suite, on obtient finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n)^{1/n} = \inf_{n \geq 1} (U_n)^{1/n} = \ell^{\tau(x)}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 2.1.

Commençons par établir l'inégalité $\dim_*(m) \leq -\tau'_+(1)$. Notons $\alpha_0 = -\tau'_+(1)$ et fixons $\alpha > -\tau'_+(1)$. En s'appuyant sur la proposition 1.1, on est ramené à exhiber un borélien E vérifiant $m(E) > 0$ et tel que :

$$\forall X \in E, \quad \underline{\alpha}(X) \leq \alpha.$$

Fixons enfin $x > 1$. Le lemme 2.2 et la convexité de la fonction τ nous assurent que :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x \geq C^{-x}\, \ell^{n\alpha_0(1-x)}.$$

Notons alors $\mathcal{L}_n = \{I \in \mathcal{F}_n \ ; \ m(I) > |I|^\alpha\}$ et $A_n = \bigcup_{I \in \mathcal{L}_n} I$. On a :

$$\begin{aligned}
C^{-x}\, \ell^{n\alpha_0(1-x)} &\leq \sum_{I \notin \mathcal{L}_n} m(I)^{x-1+1} + \sum_{I \in \mathcal{L}_n} m(I)^x \\
&\leq \sum_{I \notin \mathcal{L}_n} m(I)\, |I|^{(x-1)\alpha} + m(A_n)^x \\
&\leq (1 - m(A_n))\, \ell^{n\alpha(1-x)} + m(A_n).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$m(A_n) \geq \frac{C^{-x} \ell^{n\alpha_0(1-x)} - \ell^{n\alpha(1-x)}}{1 - \ell^{n\alpha(1-x)}}.$$

Choisissons alors $\delta > 0$ tel que $C^{-1}\ell^{-\delta\alpha_0} > \ell^{-\delta\alpha}$. C'est possible puisque $\alpha > \alpha_0$. Si $x = 1 + \delta/n$, l'inégalité précédente devient :

$$m(A_n) \geq \frac{C^{-(1+\delta/n)} \ell^{-\delta\alpha_0} - \ell^{-\delta\alpha}}{1 - \ell^{-\delta\alpha}}.$$

On peut donc trouver un réel η strictement positif tel que pour tout entier n assez grand, on ait :

$$m(A_n) \geq \eta.$$

Il est alors clair que :

$$m\Big(\limsup_{n \to +\infty} A_n\Big) \geq \eta.$$

Le borélien $E = \limsup_{n \to +\infty} A_n$ répond bien à notre question : on vient de voir qu'il est non négligeable pour la mesure m. Il vérifie de plus :

$$\forall X \in E,\ \forall n_0 \geq 1,\ \exists n \geq n_0 \ ; \quad m(I_n(X)) > |I_n(X)|^\alpha.$$

La démonstration de l'inégalité $\mathrm{Dim}^*(m) \geq -\tau'_-(1)$ se fait en suivant les mêmes idées. Notons maintenant $\alpha_0 = -\tau'_-(1)$ et fixons $\alpha < \alpha_0$. Rappelons que $\alpha_0 \leq d$. Grâce à la proposition 1.1, il suffit de montrer que :

$$m\big(\{X \in [0,1[^d \ ; \ \overline{\alpha}(X) \geq \alpha\}\big) > 0.$$

Donnons à $\mathcal{L}_n$ et à A_n la même signification que plus haut et notons $B_n = [0,1[^d \backslash A_n$. Si $1/2 < x < 1$, le lemme 2.2, la convexité de la fonction τ et l'inégalité de Hölder nous assurent ici :

$$\begin{aligned} C^{-1}\ell^{n\alpha_0(1-x)} &\le C^{-x}\ell^{n\alpha_0(1-x)} \\ &\le \sum_{I\in\mathcal{L}_n} m(I)^{x-1+1} + \sum_{I\notin\mathcal{L}_n} m(I)^x \\ &\le \ell^{n\alpha(1-x)}(1-m(B_n)) + m(B_n)^x \left(\ell^{nd} - \#(\mathcal{L}_n)\right)^{1-x} \\ &\le \ell^{n\alpha(1-x)}(1-m(B_n)) + m(B_n)^{1/2}\,\ell^{nd(1-x)}. \end{aligned}$$

Choisissons δ strictement positif tel que :

$$C^{-1}\ell^{\delta\alpha_0} - \ell^{\delta\alpha} > 0.$$

Si $x = 1 - \delta/n$ et si n est assez grand, on aura bien $1/2 < x < 1$. Ainsi, pour les grandes valeurs de n, nous avons l'inégalité :

$$\ell^{\delta\alpha} m(B_n) - \ell^{\delta d}(m(B_n))^{1/2} \le \ell^{\delta\alpha} - C^{-1}\ell^{\delta\alpha_0}.$$

Si on pose $t = (m(B_n))^{1/2}$, on a donc :

$$bt^2 - at + c - b \le 0,$$

où a, b et c sont des nombres réels positifs, indépendants de n et tels que $a \ge c > b$. Si on note $\phi(t) = bt^2 - at + c - b$, on constate que $\phi(0) > 0$, $\phi(1) \le 0$ et que le trinôme du second degré possède deux racines strictement positives. Si γ désigne la plus petite racine de ϕ, on a alors :

$$(t \in [0,1] \ \text{ et } \ \phi(t) \le 0) \Longrightarrow t \ge \gamma.$$

En posant $\eta = \gamma^2$, on conclut que :

$$m(B_n) \ge \eta \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Finalement :

$$m\left(\limsup_{n\to+\infty} B_n\right) \ge \eta.$$

On termine la preuve en constatant que $\limsup B_n \subset \{X \,;\, \overline{\alpha}(X) \ge \alpha\}$.

3. LE CAS DES QUASI-BERNOULLI

On reprend les notations de la partie précédente. Si m est une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$, on introduit la propriété suivante :

$$\text{(5)} \qquad \begin{gathered} \exists C > 0 \ ; \quad \forall n, p \geq 1, \ \forall I \in \mathcal{F}_n, \ \forall J \in \mathcal{F}_p, \\ \frac{1}{C}\, m(I)\, m(J) \leq m(I\,J) \leq C\, m(I)\, m(J). \end{gathered}$$

On dit alors que m est une quasi-Bernoulli (voir [8]). Dans cette situation, on peut dégager l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Soit m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$ vérifiant l'hypothèse* (5). *Alors, la fonction τ est dérivable au point 1, la mesure m est mono-dimensionnelle et on a :*

$$\dim_*(m) = \operatorname{Dim}_*(m) = \dim^*(m) = \operatorname{Dim}^*(m) = -\tau'(1).$$

Pour prouver le théorème 3.1, on va adapter à notre situation une idée déjà exploitée par Carleson et Makarov-Volberg lorsqu'ils cherchent à estimer la dimension de la mesure harmonique de certains ensembles de Cantor (voir [10] et [19]). En fait, on va identifier la mesure m avec une mesure de probabilités sur l'ensemble de Cantor $\{0, \ldots, \ell^d - 1\}^{\mathbb{N}^*}$ et prouver l'existence d'une mesure équivalente à m, invariante par le shift à laquelle on pourra appliquer le théorème de Shannon-McMillan. C'est ce qui est traduit dans le lemme suivant.

LEMME 3.2. – *Il existe une mesure de probabilités μ sur $[0,1[^d$ et un nombre $h \geq 0$ tels que :*

$$\frac{1}{C}\, m \leq \mu \leq C\, m \quad \textit{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log \mu(I_n(X))}{\log |I_n(X)|} = h \ \ d\mu\textit{-presque partout.}$$

Avant de prouver le lemme 3.2, voyons comment il permet de conclure le théorème 3.1. Comme $\frac{1}{C}\, m \leq \mu \leq C\, m$, le lemme 3.2 nous apprend aussi que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log m(I_n(X))}{\log |I_n(X)|} = h \quad dm\text{-presque partout.}$$

Ainsi, à l'aide de la proposition 1.1, on a l'encadrement :

$$\dim^*(m) \leq \operatorname{Dim}^*(m) \leq h \leq \dim_*(m) \leq \operatorname{Dim}_*(m).$$

Finalement, ces cinq nombres sont tous égaux, car il est clair que $\dim_*(m) \leq \dim^*(m)$ et $\mathrm{Dim}_*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m)$. En utilisant la conclusion du théorème 2.1, on obtient qu'ils sont aussi égaux à $-\tau'_+(1)$ et à $-\tau'_-(1)$. En particulier, $\tau'(1)$ existe et le théorème en découle.

Preuve du lemme 3.2. – Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de Cantor $\{0,\ldots,\ell^d-1\}^{\mathbb{N}^*}$. On le munit de sa topologie naturelle. Notons :

$$J\ :\ [0,1[^d \longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{et} \quad S\ :\ \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]^d$$

les applications naturelles liées au codage des éléments de $\bigcup_n \mathcal{F}_n$. Elles sont définies par :

$$J(X) = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \text{ si } \{X\} = \bigcap_n I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_n} \qquad \text{et} \qquad S((\epsilon_i)_{i\geq 1}) = \bigcap_n \bar{I}_{\epsilon_1\ldots\epsilon_n}.$$

La fonction S est continue et surjective. La fonction J est mesurable, injective et prend ses valeurs dans un $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathcal{C}$ noté $\mathcal{C}\setminus\mathcal{N}$. Enfin, $S\circ J = Id_{[0,1[^d}$. Notons $\tilde{m}$ l'image de la mesure m par l'application J et $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots finis basés sur l'alphabet $\{0,\ldots,\ell^d-1\}$. Comme de coutume, on identifiera l'ensemble $\mathcal{M}$ et l'ensemble des cylindres de $\mathcal{C}$. La mesure $\tilde{m}$ est donc caractérisée par :

$$\forall a \in \mathcal{M}, \quad m(I_a) = \tilde{m}(a).$$

Enfin, la propriété (5) se traduit sur $\tilde{m}$ en :

$$(5') \qquad \forall a,b \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{C}\,\tilde{m}(a)\,\tilde{m}(b) \leq \tilde{m}(ab) \leq C\,\tilde{m}(a)\,\tilde{m}(b),$$

où ab désigne la concaténation des mots a et b. Sous l'hypothèse (5′), on peut alors utiliser les résultats de Carleson et Makarov-Volberg. Si T désigne le shift à gauche sur $\mathcal{C}$, il existe une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{C}$ invariante par T, ergodique, vérifiant aussi (5′) (avec une constante $\tilde{C}$) et telle que $\frac{1}{C}\,\tilde{\mu} \leq \tilde{m} \leq C\,\tilde{\mu}$. Rappelons que la mesure $\tilde{\mu}$ est obtenue en prenant une valeur d'adhérence faible de la suite $\tilde{\mu}_n$ définie par :

$$\tilde{\mu}_n(E) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{m}\big(T^{-k}(E)\big).$$

Comme le rappelle Carleson ([10]), l'ergodicité de la mesure $\tilde{\mu}$ est alors une conséquence élémentaire de la propriété de mélange vérifiée par $\tilde{\mu}$:

$$\forall a,b \in \mathcal{M}, \quad \tilde{\mu}(ab) \geq \frac{1}{\tilde{C}}\,\tilde{\mu}(a)\,\tilde{\mu}(b).$$

Le théorème de Shannon-McMillan appliqué à $\tilde{\mu}$ assure alors l'existence d'un réel $\tilde{h}$, appelé entropie de $\tilde{\mu}$ tel que :

$$\text{pour } \tilde{\mu} \text{ presque tout } x = (x_i)_{i\geq 1} \in \mathcal{C}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{-\log \tilde{\mu}(x_1 \ldots x_n)}{n} = \tilde{h}.$$

A propos du théorème de Shannon-McMillan, on peut se référer à [4]. Appelons μ l'image de $\tilde{\mu}$ par l'application S. La conclusion du lemme est immédiate en posant $h = \tilde{h}/\log \ell$ et en remarquant que l'on a :

$$\forall a \in \mathcal{M}, \quad \mu(I_a) = \tilde{\mu}(a).$$

Cette dernière relation vient de ce que les ensembles $S^{-1}(I_a) \setminus a$ et $a \setminus S^{-1}(I_a)$ sont inclus dans $\mathcal{N}$. Ils sont donc négligeables pour $\tilde{m}$ ainsi que pour $\tilde{\mu}$.

Remarques. – 1. Il est facile de constater que la mesure μ est invariante par l'application mesurable :

$$X = \bigcap_{n\geq 1} I_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_n} \longmapsto R(X) = \bigcap_{n\geq 2} I_{\epsilon_2 \ldots \epsilon_n}.$$

2. Dans cette situation, on a aussi l'identité :

$$-\tau'(1) = -\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I) \log_\ell(m(I)). \tag{6}$$

Cette dernière quantité est appelée dimension entropique de la mesure. Cette observation avait déjà été faite par Young ([27]) et Ngai ([22]). Donnons en une preuve élémentaire. Les inégalités de convexité nous assurent que pour tout entier n, on a :

$$\frac{\tau_n(x)}{x-1} \leq \tau_n'(1) \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \tau_n'(1) \leq \frac{\tau_n(x)}{x-1} \text{ si } x > 1.$$

En passant à la limite inférieure (resp. limite supérieure) par rapport à n puis en faisant tendre x vers 1^- (resp. 1^+), on obtient alors l'encadrement :

$$\tau_-'(1) \leq \liminf_{n\to+\infty} \tau_n'(1) \leq \limsup_{n\to+\infty} \tau_n'(1) \leq \tau_+'(1). \tag{7}$$

Cet encadrement est valable sans aucune hypothèse sur la mesure m. Si maintenant, $\tau'(1)$ existe, l'identité annoncée est vérifiée.

Le théorème 3.1 a des conséquences intéressantes sur l'analyse multifractale des quasi-Bernoulli. C'est l'objet des deux énoncés qui suivent.

THÉORÈME 3.3. – *Sous les hypothèses du théorème 3.1, la fonction τ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

On peut alors préciser les résultats de [8] de la façon suivante :

COROLLAIRE 3.4. – *Plaçons nous sous les hypothèses du théorème 3.1. Notons $\mathcal{I} = (-\tau'(+\infty), -\tau'(-\infty))$ l'intervalle de définition de la fonction τ^* (les parenthèses délimitant cet intervalle signifient qu'on ne sait pas si les bornes $-\tau'(+\infty)$ et $-\tau'(-\infty)$ appartiennent à $\mathcal{I}$). Si E_α est défini comme en introduction, on a :*

$$\forall \alpha \in \mathcal{I}, \quad \dim E_\alpha = \tau^*(\alpha).$$

Le corollaire 3.4 est une conséquence immédiate de la dérivabilité de la fonction τ et des travaux de Brown-Michon-Peyrière. La fonction τ' vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre $\alpha \in \mathcal{I}$ s'écrit $\alpha = -\tau'(x)$. Le résultat de Brown, Michon et Peyrière s'applique alors à l'ensemble E_α.

Venons en à la preuve du théorème 3.3. Si $x \in \mathbb{R}$, on s'aperçoit ici, en reprenant la démarche du lemme 2.2 que les suites :

$$C^{|x|} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x \quad \text{et} \quad C^{-|x|} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x$$

sont respectivement sous-multiplicative et sur-multiplicative. Il en résulte facilement que la suite de terme général $\left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x\right)^{1/n}$ converge et que sa limite est strictement positive et finie. En passant aux logarithmes, on en déduit que $\tau_n(x)$ converge vers une limite finie. On trouve de plus l'encadrement :

$$|\tau_n(x) - \tau(x)| \leq \frac{|x| \log C}{n \log \ell}. \tag{8}$$

Pour démontrer la dérivabilité de la fonction τ, on utilise alors des mesures de Gibbs intermédiaires. L'existence de telles mesures a été prouvée dans [8] pour les mesures quasi-Bernoulli. On peut aussi consulter [21] sur ce sujet. Plus précisément, si $\theta \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe une mesure m_θ sur $[0, 1[^d$ et une constante $C_\theta > 0$ telles que :

$$\forall I \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n, \quad \frac{1}{C_\theta} m(I)^\theta |I|^{\tau(\theta)} \leq m_\theta(I) \leq C_\theta \, m(I)^\theta |I|^{\tau(\theta)}. \tag{9}$$

Il est clair, grâce aux conditions (5) et (9), que la mesure m_θ est encore une quasi-Bernoulli. Avec des notations qui se comprennent, le théorème 3.1

nous assure donc que la fonction τ_θ est dérivable au point 1. Or, un calcul élémentaire basé sur l'encadrement (9) nous donne la relation :

$$\tau_\theta(x) = \tau(\theta\, x) - x\,\tau(\theta).$$

Ainsi, si $\theta \neq 0$, $\tau'(\theta)$ existe et vaut $\tau'(\theta) = (\tau(\theta) + \tau_\theta'(1))/\theta$.

La dérivabilité de la fonction τ en 0 se fait par un argument différent. L'encadrement (8) nous apprend entre autres que $\tau_n(0) = \tau(0)$. Ainsi, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \neq 0, \qquad \left| \frac{\tau_n(x) - \tau_n(0)}{x} - \frac{\tau(x) - \tau(0)}{x} \right| \leq \frac{c}{n}.$$

Comme τ_n est dérivable en 0, on obtient alors :

$$|(\tau_n)'(0) - \tau_-'(0)| \leq \frac{c}{n} \quad \text{et} \quad |(\tau_n)'(0) - \tau_+'(0)| \leq \frac{c}{n}.$$

Finalement :

$$\tau_-'(0) = \tau_+'(0) = \lim_{n \to +\infty} (\tau_n)'(0).$$

Rappelons pour terminer que le nombre $\delta = \tau(0)$ n'est autre que la valeur de la dimension de Hausdorff du support fermé de la mesure m et que $\tau^*(-\tau'(0)) = \delta$ correspond à la valeur maximale de la fonction τ^*.

4. LE LIEN AVEC LES DIMENSIONS DE RÉNYI

Comme on l'a vu au cours de la partie précédente, et comme l'avait déjà constaté Ngai ([22]), on a, lorsque $\tau'(1)$ existe :

$$\dim_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = -\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)\, \log_\ell(m(I)).$$

En toute généralité (voir [27]), on peut définir les dimensions de Rényi inférieure et supérieure de m par :

$$R_*(m) = \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)\, \log_\ell(m(I))$$

et

$$R^*(m) = \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)\, \log_\ell(m(I)).$$

Les nombres $R_*(m)$ et $R^*(m)$ ne coïncident pas toujours avec $-\tau'_+(1)$ et $-\tau'_-(1)$ (voir proposition 5.2), mais ils permettent sans hypothèse restrictive sur m de majorer $\dim_*(m)$ et de minorer $\mathrm{Dim}^*(m)$. C'est l'objet du résultat qui suit.

THÉORÈME 4.1. – *Pour toute mesure de probabilités sur* $[0,1[^d$, *on a :*

$$\dim_*(m) \leq R_*(m) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) \geq R^*(m).$$

On peut alors dégager le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.2. – *Si de plus la suite de fonctions* $(\tau''_n(x))_{n\geq 1}$ *est uniformément bornée au voisinage de* $x = 1$, *on a :*

$$\begin{cases} \dim_*(m) = R_*(m) = -\tau'_+(1) \\ \mathrm{Dim}^*(m) = R^*(m) = -\tau'_-(1) \end{cases}.$$

Le corollaire 4.2 est une conséquence élémentaire des théorèmes 1.3 et 4.1. Notons C un majorant des fonctions τ''_n sur l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. L'inégalité des accroissements finis nous assure alors que pour tout $x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \setminus \{1\}$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left| \frac{\tau_n(x)}{x-1} - \tau'_n(1) \right| \leq \frac{C}{2}|x-1|.$$

En passant à la limite inférieure en n (lorsque $x < 1$) et à la limite supérieure en n (lorsque $x > 1$), on obtient finalement :

$$\begin{cases} \forall x \in [1-\varepsilon, 1[, & \left| \dfrac{\tau(x)}{x-1} - \liminf\limits_{n\to+\infty} \tau'_n(1) \right| \leq \dfrac{C}{2}|x-1| \\ \forall x \in]1, 1+\varepsilon], & \left| \dfrac{\tau(x)}{x-1} - \limsup\limits_{n\to+\infty} \tau'_n(1) \right| \leq \dfrac{C}{2}|x-1| \end{cases}.$$

Ces estimations assurent que $-\tau'_-(1) = R^*(m)$ et $-\tau'_+(1) = R_*(m)$. On conclut alors grâce aux théorèmes 1.3 et 4.1.

Pour prouver les inégalités du théorème 4.1, on reprend les idées et les notations du théorème 2.1.

Preuve de l'inégalité $\dim_*(m) \leq R_*(m)$. – Fixons $\alpha > \beta > R_*(m)$. Le calcul effectué lors de la partie 2 et la convexité de la fonction τ_n nous permettent d'écrire en toute généralité :

$$\forall x > 1,\ \forall n \geq 1, \quad m(A_n) \geq \frac{\ell^{n\tau_n(x)} - \ell^{n\alpha(1-x)}}{1 - \ell^{n\alpha(1-x)}} \geq \frac{\ell^{n\tau'_n(1)(x-1)} - \ell^{n\alpha(1-x)}}{1 - \ell^{n\alpha(1-x)}}.$$

Par définition de $R_*(m)$, on peut alors trouver une sous-suite n_k telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad m(A_{n_k}) \geq \frac{\ell^{n_k \beta(1-x)} - \ell^{n_k \alpha(1-x)}}{1 - \ell^{n_k \alpha(1-x)}}.$$

En faisant tendre x vers 1, on obtient alors :

$$\forall k \geq 1, \quad m(A_{n_k}) \geq 1 - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Finalement, $m(\limsup A_n) \geq 1 - \frac{\beta}{\alpha}$ et on conclut comme lors de la partie 2.

Preuve de l'inégalité $\mathrm{Dim}^*(m) \geq R^*(m)$. – Fixons $\alpha < \beta < R^*(m)$. Si $x \in [1/2, 1[$, le calcul de la partie 2 et la convexité de la fonction τ_n nous donnent ici :

$$\ell^{n\tau_n'(1)(x-1)} \leq \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^x \leq \ell^{n\alpha(1-x)}(1 - m(B_n)) + m(B_n)^{1/2} \ell^{nd(1-x)}.$$

On peut alors trouver une sous-suite n_k telle que pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [1/2, 1[$:

$$\ell^{n_k \beta(1-x)} \leq \ell^{n_k \alpha(1-x)}(1 - m(B_{n_k})) + m(B_{n_k})^{1/2} \ell^{n_k d(1-x)}.$$

On conclut alors en suivant les idées de la partie 2 (ici, on peut prendre $\delta = 1$).

5. ÉTUDE DE QUELQUES EXEMPLES

a. Un exemple de mesure vérifiant $\dim^*(m) < \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau_-'(1)$

Fixons une suite $(p_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels strictement compris entre 0 et 1 et notons $q_n = 1 - p_n$. Considérons alors une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ telles que :

$$P(X_n = 0) = p_n \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = q_n$$

et notons m la loi de la variable aléatoire $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} X_n$.

La famille de mesures ainsi construites est classique et a déjà été largement étudiée. On peut par exemple consulter [13], [6] et [5]. La mesure m s'interprète aussi comme le produit infini de convolution des mesures $m_n = p_n \delta(0) + q_n \delta(1/2^n)$, où $\delta(x)$ désigne la masse de Dirac en x. La loi forte des grands nombres permet de dire que dP presque sûrement, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log((1-X_k)p_k+X_kq_k)-(p_k\log p_k+q_k\log q_k))=0.$$

Notons alors $I_n(x)$ l'intervalle dyadique de $n^{\text{ème}}$ génération contenant x. On déduit facilement de ce qui précède que pour m presque tout $x\in[0,1[$, on a :

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{\log m(I_n(x))}{\log|I_n(x)|}=\delta_i \quad\text{et}\quad \limsup_{n\to+\infty}\frac{\log m(I_n(x))}{\log|I_n(x)|}=\delta_s,$$

avec

$$\begin{cases}\delta_i=\liminf\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k\log_2 p_k+q_k\log_2 q_k\\ \delta_s=\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k\log_2 p_k+q_k\log_2 q_k\end{cases}.$$

On a noté $\log_2$ le logarithme en base 2 et on peut consulter [6] pour plus de détails. Il en résulte alors que :

$$\dim_*(m)=\dim^*(m)=\delta_i \quad\text{et}\quad \mathrm{Dim}_*(m)=\mathrm{Dim}^*(m)=\delta_s.$$

Si on cherche à interpréter la situation à l'aide de la fonction τ, on peut dégager le résultat suivant :

PROPOSITION 5.1. – *Soit m la mesure décrite précédemment. On a les relations :*

$$\begin{cases}\dim_*(m)=\dim^*(m)=R_*(m)=-\tau'_+(1)\\ \mathrm{Dim}_*(m)=\mathrm{Dim}^*(m)=R^*(m)=-\tau'_-(1)\end{cases}.$$

En particulier, on peut choisir les coefficients p_n tels que δ_i soit différent de δ_s, créant ainsi une mesure m pour laquelle $\dim^*(m)<-\tau'_-(1)$.

Preuve de la proposition 5.1. – Ici, ℓ est égal à 2. Un calcul élémentaire prouve que pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\tau_n(x)=\frac{1}{n\log 2}\sum_{k=1}^{n}\log\left((p_k)^x+(q_k)^x\right).$$

Ainsi, on a les égalités $\delta_i=R_*(m)$ et $\delta_s=R^*(m)$. De plus, Il est facile de constater que la suite de fonctions $(\tau''_n(x))_{n\geq1}$ est uniformément bornée sur $[1/2,3/2]$. La proposition 5.1 résulte alors du corollaire 4.2.

b. L'hypothèse (4) de la partie 2 n'entraîne pas la dérivabilité de τ

Cet exemple apparait déjà à peu de choses près dans [8]. Prenons $\ell = 5$, notons $I_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ l'intervalle $[\sum_{k=1}^n \varepsilon_k 5^{-k}, \sum_{k=1}^n \varepsilon_k 5^{-k} + 5^{-n}[$ et définissons la mesure m par :

$$\begin{cases} m(I_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) = \frac{1}{5} 2^{-(n-1)} \text{ si } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{2, 4\} \\ m(I_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) = \frac{1}{5} 3^{-(n-1)} \text{ si } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, 3, 5\} \end{cases},$$

étant entendu que les autres intervalles de $\mathcal{F}_n$ sont de mesure nulle. La mesure m est portée par la réunion de deux ensembles de Cantor, l'un de dimension $\log 2 / \log 5$ et l'autre de dimension $\log 3 / \log 5$. Il est évident que la mesure m vérifie l'hypothèse (4) de la partie 2 (on trouve ici $C = 5/2$). De plus, un calcul élémentaire nous affirme que :

$$\forall x > 0,\ \forall n \geq 1, \quad \tau_n(x) = \frac{1}{n \log 5} \log \left(\frac{2^x}{5^x} 2^{n(1-x)} + \frac{3^x}{5^x} 3^{n(1-x)} \right).$$

Ainsi, la fonction τ est définie par :

$$\tau(x) = \frac{\log 3}{\log 5}(1 - x) \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \tau(x) = \frac{\log 2}{\log 5}(1 - x) \text{ si } x > 1.$$

En particulier, τ n'est pas dérivable en 1. La mesure m vérifie aussi :

$$R_*(m) = R^*(m) = \frac{2 \log 2 + 3 \log 3}{5 \log 5}.$$

Tout ceci peut se résumer dans la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. – *La mesure décrite dans ce paragraphe vérifie :*

$$\begin{aligned} \dim_*(m) = \frac{\log 2}{\log 5} = -\tau'_+(1) < R_*(m) = \\ = R^*(m) < -\tau'_-(1) = \frac{\log 3}{\log 5} = \operatorname{Dim}^*(m). \end{aligned}$$

c. Une situation où l'on peut estimer $\operatorname{Dim}^*(m)$

Lorsqu'une mesure m est répartie de façon homogène sur $[0, 1[^d$, chaque fils J d'un élément $I \in \mathcal{F}_n$ porte asymptotiquement une masse relative $m(J)/m(I)$ proche de $1/\ell^d$. Si au contraire, certains fils ont une masse relative plus grande, on peut s'attendre à ce que la mesure m soit portée par un ensemble de petite dimension. A travers l'exemple qui suit, on donne des estimations quantifiées à cette phrase.

PROPOSITION 5.3. – *Soit k un entier vérifiant $1 \leq k < \ell^d$. On pose $\lambda = k/\ell^d$ et on fixe un réel p vérifiant $\lambda \leq p \leq 1$. On suppose que pour tout entier n, chaque $I \in \mathcal{F}_n$ possède k fils $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{F}_{n+1}$ tels que : $m(I_1 \cup \ldots \cup I_k) \geq p\, m(I)$. On a alors :*

$$\dim^*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m) \leq d - \left(p \log_\ell \left(\frac{p}{\lambda}\right) + (1-p) \log_\ell \left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)\right).$$

Preuve. – Fixons $I \in \mathcal{F}_n$ et notons $\mathcal{S} = \{I_1, \ldots, I_k\}$. Si $x < 1$, l'inégalité de Hölder nous assure que :

$$\begin{aligned}\sum_{J \subset I,\ J \in \mathcal{F}_n} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^x &= \sum_{J \in \mathcal{S}} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^x + \sum_{J \notin \mathcal{S}} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^x \\ &\leq k^{1-x} \left(\frac{m(\bigcup_{J \in \mathcal{S}} J)}{m(I)}\right)^x + (\ell^d - k)^{1-x} \left(1 - \frac{m(\bigcup_{J \in \mathcal{S}} J)}{m(I)}\right)^x.\end{aligned}$$

On constate alors que la fonction :

$$t \longmapsto \phi_x(t) = k^{1-x} t^x + (\ell^d - k)^{1-x} (1-t)^x$$

est concave et vérifie $\phi'_x(\lambda) = 0$. Ainsi, elle est décroissante sur l'intervalle $[\lambda, 1]$. Sous l'hypothèse de la proposition 5.3, la fonction β définie lors du corollaire 1.4 vérifie donc :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \beta(x) \leq \phi_x(p).$$

On obtient alors l'estimation en calculant la dérivée au point 1 de la fonction :

$$x \longmapsto -\frac{\phi_x(p)}{\log \ell}.$$

Remarquons pour conclure ce paragraphe que l'estimation de la proposition 5.3 est optimale. En effet, la mesure m est parfaitement déterminée dès qu'on connait la masse des éléments de $\bigcup_n \mathcal{F}_n$. Fixons k et p et construisons alors m en répartissant à chaque étape de façon homogène la masse $p\, m(I)$ sur les fils $I_1, \ldots, I_k$ de I et la masse $(1-p)\, m(I)$ sur les fils restant. Cette mesure m est alors telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \beta(x) = \phi_x(p).$$

La fonction β est donc dérivable au point 1. La mesure m est donc mono-dimensionnelle de dimension $-(\beta'(1)/\log \ell)$. Elle vérifie :

$$\begin{aligned}\dim_*(m) &= \mathrm{Dim}_*(m) = \dim^*(m) = \mathrm{Dim}^*(m)\\ &= d - \left(p \log_\ell \left(\frac{p}{\lambda}\right) + (1-p) \log_\ell \left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)\right).\end{aligned}$$

d. Une application aux fonctions quasi-symétriques

On sait que les fonctions quasi-symétriques peuvent être très singulières. En particulier, une telle fonction peut transformer un ensemble plein pour la mesure de Lebesgue en un ensemble de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 1 (voir [26]). Dans [16], Hayman et Hinkkanen donnent des estimations de la dimension de Hausdorff de $f(E)$ en fonction de celle de E. Nous donnons ici une application du corollaire 1.4 au problème de la distorsion des ensembles à travers une fonction quasi-symétrique.

PROPOSITION 5.4. – *Soit $K > 0$ et f une application K-quasi-symétrique sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que f vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \quad \frac{1}{K} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq K.$$

Notons $p = \frac{K}{K+1}$ et fixons $0 < \alpha < -(p \log_2 p + (1-p) \log_2(1-p))$. Pour tout borélien $E \subset \mathbb{R}$ et en notant $|f(E)|$ la longueur de $f(E)$, on a alors :

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = 0 \Longrightarrow |f(E)| = 0.$$

Remarques 1. – Il est facile de montrer qu'une application K-quasi-symétrique est α-hölderienne avec $\alpha = -\log_2 p$. Ainsi, on a trivialement :

$$\mathcal{H}^\alpha E = 0 \Longrightarrow |f(E)| = 0.$$

La proposition 5.4 donne un résultat plus précis.

2. Toute application quasi-symétrique f sur $\mathbb{R}$ peut se lire comme la restriction d'une application quasi-conforme F sur le demi-plan supérieur (voir [2]). Le pull-back du laplacien par cette application quasi-conforme est un opérateur uniformément elliptique sur le demi-plan, à coefficients L^∞ et à structure divergence. La mesure harmonique pour cet opérateur est alors équivalente à la mesure *df* qui n'est autre que l'image de la mesure de Lebesgue par l'application f^{-1}. Elle peut être singulière par rapport à la mesure de Lebesgue ([9]). Elle peut même, grâce aux travaux de Tukia, être portée par un ensemble de dimension < 1. La proposition 5.4

nous assure que les ensembles de dimension de Hausdorff inférieure à $-(p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p))$ sont négligeables pour cette mesure harmonique. En particulier, les ensembles qui portent la mesure harmonique ont tous une dimension supérieure à $-(p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p))$.

Preuve de la proposition 5.4. – On peut supposer que E est un borélien borné puis que E est inclus dans $[0,1]$. Ensuite, quitte à composer f avec une fonction affine sur $\mathbb{R}$ (ce qui ne change pas la valeur de K), on peut aussi supposer que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Ainsi, f est croissante et on peut trouver une mesure positive m sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x dm(t).$$

Si $I=[a,b]$, notons $I'=[a,(a+b)/2]$ et $I''=[(a+b)/2,b]$. La quasi-symétrie de f se traduit alors de la façon suivante sur m :

$$\forall I \subset [0,1], \quad m(I') \leq p\,m(I) \quad \text{et} \quad m(I'') \leq p\,m(I).$$

On a ici $d=1$ et on choisit $\ell = 2$. On est dans la situation du théorème 2 de [17]. On obtient aisément que :

$$\forall x > 1, \quad \beta(x) \leq p^x + (1-p)^x$$

et on peut alors conclure que :

$$\dim_*(m) \geq \frac{-\beta'_+(1)}{\log 2} \geq -(p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)).$$

Finalement, la proposition 5.4 résulte de la relation :

$$m(E) = |f(E)|.$$

Remarque finale. – La seule propriété de m qui était utile au raisonnement précédent est la suivante :

$$\forall n > 0, \ \ \forall I, J \in \mathcal{F}_n, \quad I \cup J \in \mathcal{F}_{n-1} \Longrightarrow m(J) \leq K\,m(I).$$

On dit qu'une telle mesure vérifie la propriété de doublement dyadique. Dans [15], on trouve une caractérisation de ces mesures. Leurs ensembles négligeables ont aussi été étudiés dans [18]. Ici, pour une telle mesure, on donne une estimation de $\dim_*(m)$ en fonction de K. Comme on le constate dans [17], cette estimation est optimale. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ désigne un pile ou face de paramètre p, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $P(X_n=1)=p$ et $P(X_n=0)=1-p$, et si m est la loi de $\sum 2^{-n}X_n$, la loi forte des grands nombres nous apprend que :

$$\dim_*(m) = \dim^*(m) = -(p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)).$$

Cet exemple était déjà connu en 1949 (voir [11]). C'est aussi un cas particulier de l'exemple développé lors de la proposition 5.1.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie Jacques Peyrière pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Il remercie aussi Alano Ancona de lui avoir signalé que les travaux de Carleson et de Makarov-Volberg ([10] et [19]) pouvaient sans doute être exploités pour analyser les mesures quasi-Bernoulli. Enfin, il remercie le referee pour ses remarques et ses suggestions.

RÉFÉRENCES

[1] A. Batakis, Harmonic measure of some Cantor type sets, *Ann. Acad. Sci. Fenn.,* vol. **21**, 1996, p. 255–270.
[2] A. Beurling et L. Ahlfors, The boundary correspondance under quasiconformal mappings, *Acta Math.,* vol. **96**, 1956, p. 125–142.
[3] A. S. Besicovitch, On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system, *Math. Annalen,* vol. **110**, 1934-35, p. 321–330.
[4] P. Billingsley, Ergodic theory and information, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
[5] A. Bisbas, A multifractal analysis of an interesting class of measures, *Colloq. Math.,* vol. **69**, 1995, p. 37–42.
[6] A. Bisbas et C. Karanikas, On the Hausdorff dimension of Rademacher Riesz products, *Monatsh. Math.,* vol. **110**, 1990, p. 15–21.
[7] J. Bourgain, On the Hausdorff dimension of harmonic measure in higher dimension, *Invent. Math.,* vol. **87**, 1987, p. 477–483.
[8] G. Brown, G. Michon et J. Peyrière, On the Multifractal Analysis of Measures, *J. Stat. Phys.,* vol. **66**, 1992, p. 775–790.
[9] L. Caffarelli, E. Fabes et C. Kenig, Completely singular elliptic-harmonic measures, *Ind. U. Math. J.,* vol. **30**, 1981, p. 917–924.
[10] L. Carleson, On the support of harmonic for sets of cantor type, *Ann. Acad. Sci. Fenn.,* vol. **10**, 1985, p. 113–123.
[11] H. G. Eggleston, The fractional dimension of a set defined by decimal properties, *Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2),* vol. **20**, 1949, p. 31–46.
[12] K. Falconer, Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, J. Wiley & Sons Ltd., New York, 1990.
[13] A. H. Fan, Décompositions de mesures et recouvrements aléatoires, Publication d'Orsay 89–03, 1989.
[14] A. H. Fan, Sur la dimension des mesures, *Studia Math.,* vol. **111**, 1994, p. 1–17.
[15] R. Fefferman, C. Kenig et J. Pipher, The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations, *Ann. of Math. (2),* vol. **134**, 1991, p. 65–124.
[16] W. K. Hayman et A. Hinkkanen, Distorsion estimates for quasisymmetric functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A,* vol. **36–37**, 1982–83, p. 51–67.
[17] Y. Heurteaux, Sur la comparaison des mesures avec les mesures de Hausdorff, *C.R. Acad. Sci., Paris,* t. 321, série 1, 1995, p. 61–65.
[18] R. Kaufman et J. M. Wu, Two problems on doubling measures, *Rev. Mat. Iberoamericana,* vol. **11**, 1995, p. 527–545.
[19] N. Makarov et A. Volberg, On the harmonic measure of discontinous fractals, preprint LOMI E-6-86, Lenningrad, 1986.
[20] A. Manning, The dimension of the maximal measure for a polynomial map, *Ann. of Maths. (2),* vol. **119**, 1984, p. 425–430.
[21] G. Michon, Mesures de Gibbs sur les cantor réguliers, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.,* vol. **58**, 1983, p. 267–285.

[22] S. M. NGAI, A dimension result arising from the L^q spectrum of a measure, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **125**, 1997, p. 2943-2951.
[23] J. PEYRIÈRE, An introduction to fractal measures and dimensions, Lectures at Xiangfan, 1995.
[24] C. TRICOT Jr, Sur la classification des ensembles boréliens de mesure de Lebesgue nulle, Thèse, Faculté des Sciences de l'Université de Genève, 1980.
[25] C. TRICOT Jr, Two definitions of fractional dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. **91**, 1982, p. 57–74.
[26] P. TUKIA, Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings, *Math. Scand.*, vol. **65**, 1989, p. 152–160.
[27] L. YOUNG, Dimension, entropy and Lyapunov exponents, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, vol. **2**, 1982, p. 109–124.

(Manuscrit reçu le 14 février 1997;
version révisée le 27 novembre 1997.)