

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YU. DAVYDOV

A. M. VERSHIK

## Réarrangements convexes des marches aléatoires

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 34, n° 1 (1998), p. 73-95

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1998\\_\\_34\\_1\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1998__34_1_73_0)

© Gauthier-Villars, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Réarrangements convexes des marches aléatoires

par

**Yu. DAVYDOV**

Laboratoire de Statistique et Probabilités,  
U.F.R. de Mathématiques - M2,  
Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

et

**A. M. VERSHIK** <sup>(1)</sup>

Institut Steklov de Mathématiques, Département de Saint Pétersbourg,  
27 Fontanka, 191011, Saint Pétersbourg, Russie.

---

**RÉSUMÉ.** – On étudie le comportement asymptotique des zonotopes aléatoires, c.-à.-d. des sommes de Minkowski des segments  $[0, \xi_i]$  où les  $\xi_i$  sont des variables aléatoires indépendantes  $d$ -dimensionnelles et de même loi, et les propriétés de leurs limites. En dimension  $d = 2$  on peut également utiliser des réarrangements convexes des marches aléatoires habituelles.

Si la loi  $\mathcal{P}$  de  $\xi_1$  a un moment d'ordre 1, la loi forte des grands nombres s'applique et l'ensemble limite convexe est non aléatoire. On montre que sous l'hypothèse d'existence du moment d'ordre 2, une variante du théorème central limite a lieu. On discute les applications de ces résultats à la convexification des processus stochastiques.

Le résultat principal est lié au cas où  $\mathcal{P}$  appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha < 1$ . On a démontré l'existence d'une loi limite non dégénérée et on a montré qu'elle possède des propriétés remarquables : elle est concentrée sur la famille des ensembles convexes dont la frontière a une structure du type Cantor et ressemble à celle d'un ensemble convexe générique dans le sens catégoriel. © Elsevier, Paris

*Mots clés :* Marches aléatoires, réordonnements convexes, ensembles aléatoires convexes, addition de Minkowski, formes convexes limites.

---

<sup>(1)</sup> Soutenu partiellement par les fonds RFFI N 94-01-00921 et INTAS N 93-0570.  
AMS 1991 subject classifications: 60D05, 60F05, 60J15.

ABSTRACT. – The asymptotic behavior of random zonotopes (Minkowski sums of random segments  $[0, \xi_i]$  where  $\xi_i$  are i.i.d.  $d$ -dimensional random variables) and the properties of their limits are considered. When the dimension  $d = 2$  one can also use the convex rearrangements of the ordinary random walks.

If the law  $\mathcal{P}$  of  $\xi_i$  has a first order moment, the strong law of large numbers is applicable and in this case the limiting convex set is not random. Under the additional hypothesis of existence of a second order moment some variants of CLT are found. We discuss some applications of these results to the convexification of stochastic processes.

The main result is related to the case when  $\mathcal{P}$  belongs to the domain of attraction of an  $\alpha$ -stable law,  $\alpha < 1$ . The weak convergence to a non-degenerate limiting distribution is proved. We establish the remarkable properties of this law: it is concentrated on the family of convex sets with Cantor type boundary structure; one can compare this structure with that of a generic set in category sense. © Elsevier, Paris

---

## I. INTRODUCTION

Ce travail peut être considéré comme une partie du programme de recherche des mesures de probabilité naturelles sur l'espace  $H$  des sous-ensembles convexes de  $R^d$ , naturelles dans le sens où d'un côté elles sont liées avec la sommation des variables aléatoires indépendantes et de l'autre elles sont concentrées sur une partie des éléments typiques de  $H$ .

Rappelons qu'un élément typique (générique) dans le sens catégoriel de l'espace  $H$  muni de la topologie de Hausdorff est un ensemble convexe fermé ayant la propriété suivante : sa frontière est  $C^1$ -lisse de courbure nulle en presque tout point (par rapport à la mesure de Lebesgue) et infini ailleurs (voir [17], p. 120).

Il existe des approches différentes à ce problème. Une d'elles a été utilisée par le deuxième auteur ([V1], [V2], v. aussi [B], [S], [A]) dans un travail sur le comportement asymptotique des mesures dilatées uniformes sur l'ensemble de tous polyèdres convexes à sommets entiers inclus dans un cube. La mesure limite dont l'existence d'ailleurs n'est démontrée à présent qu'en dimension  $d = 2$ , est dégénérée, c.-à.-d. est concentrée sur une seule figure convexe.

Une autre direction qui présente des perspectives prometteuses, est liée à l'étude des enveloppes convexes des marches aléatoires et processus stochastiques. Les lois de telles enveloppes ne sont plus dégénérées et dans les cas étudiés (le mouvement brownien plan [LG, ch. 3], le graphe du processus de Wiener intégré [S2]) possèdent de propriétés non-triviales.

L'approche, proposée dans cet article, est liée plus étroitement au schéma classique de sommation des variables aléatoires indépendantes. Pour obtenir, à partir d'une marche aléatoire initiale, un objet limite convexe on utilise en dimension 2 un procédé de réarrangement convexe (convexification) qu'on peut décrire de la manière suivante.

Soit  $\{\xi_i, i \in \mathbf{N}\}$  une suite de variables aléatoires (v. a.) 2-dimensionnelles. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi commune  $\mathcal{P}$ . Soient  $(\rho_i, \theta_i)$  les coordonnées polaires du vecteur  $\xi_i$ . Notons  $\theta_{\pi_1}, \dots, \theta_{\pi_n}$  les angles  $\theta_i, i = 1, \dots, n$ , réordonnés dans le sens croissant et considérons la ligne polygonale  $L_n$  dont les sommets sont les points  $S_0^* = 0, S_k^* = \sum_{i=1}^{i=k} \xi_{\pi_i}$ . Cette ligne représente exactement ce qu'on pourrait appeler *le réordonnement convexe* (ou *convexification*) de la marche aléatoire  $S_k$ .

On établit les liens de ce procédé avec l'étude des *zonotopes* aléatoires

$$Z_n = \sum_1^n [0, \xi_i],$$

qui représentent les sommes de Minkowski des segments  $[0, \xi_i]$ . Cela nous permet de traiter le cas  $d \geq 2$  et d'utiliser des techniques de géométrie convexe et les résultats connus sur l'addition de Minkowski des ensembles aléatoires indépendants.

Nous étudions donc ici le comportement asymptotique des courbes  $L_n/b_n$ , des zonotopes  $Z_n/b_n$  convenablement normalisés et les propriétés de leurs lois limites.

Si le moment d'ordre 1 de  $\xi_1$  est fini, alors la mesure limite sur l'espace des courbes convexes, obtenue par cette méthode, sera dégénérée. C'est un effet du type loi des grands nombres (LGN). La courbe limite admet une description simple en termes de la fonction de répartition de  $\mathcal{P}$ . Évidemment dans ce cas on est intéressé par des résultats du type théorème central limite (TCL) pour des écarts entre  $L_n$  et la courbe limite.

La situation où les v.a.  $\xi_i$  appartiennent au domaine d'attraction d'une loi stable  $\mathcal{L}_\alpha$  d'indice  $\alpha < 1$  est beaucoup plus informative. Cette fois la mesure limite est non-dégénérée et possède des propriétés remarquables. Tout d'abord, à la différence de la loi de l'enveloppe convexe, elle est

stable (de même indice  $\alpha$ ) par rapport à l'addition de Minkowski. De plus, elle est concentrée sur une famille d'ensembles convexes (plus exactement, *zonoïdes*) qui est générique dans le sens ci-dessus.

Le point essentiel de la démonstration de ces derniers résultats est la représentation (11) du zonoïde limite  $Z$  comme une intégrale par rapport à une mesure poissonnienne. Cette représentation montre que les propriétés géométriques de  $Z$  sont complètement déterminées par l'indice  $\alpha$  et par la mesure spectrale  $\sigma$  de la loi  $\mathcal{L}_\alpha$ . Nous pensons que cette représentation peut être utile dans des problèmes différents, en particulier, pour la construction de nouveaux estimateurs de  $\alpha$  et  $\sigma$ .

La structure de l'article est la suivante. Après avoir introduit les notations et après un rappel de quelques notions géométriques (cf. II) on donne dans le III deux théorèmes sur la LGN pour les réarrangements convexes des marches aléatoires avec moment d'ordre 1 fini. On discute ici une application au réarrangement convexe dans le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov et à la convexification des trajectoires du mouvement brownien. On montre aussi que la LGN pour des réarrangements convexes dans certains cas est liée directement avec les résultats de M. Wschebor [W], sur les oscillations des approximations du mouvement brownien.

Le IV est consacré au TCL. Pour les zonotopes on l'a déduit d'un résultat de [GHZ]. Pour aborder le cas des convexifications des marches aléatoires 2-dimensionnelles, plus compliqué, on propose une autre méthode qui permet d'établir une sorte de TCL (Th. 5) pour les lignes  $L_n$ .

Le V est le plus important dans l'article. On considère ici des marches aléatoires sans moment d'ordre 1. En supposant que la loi  $\mathcal{P}$  de notre marche aléatoire appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha < 1$  on obtient (Th. 6) la convergence faible des zonotopes  $Z_n$  (normalisés) vers un ensemble convexe aléatoire dont la frontière a presque sûrement une structure *du type de Cantor*. Il est intéressant de noter (Th. 7) que dans le cas 2-dimensionnel cet ensemble, comme l'enveloppe convexe du mouvement brownien, n'a pas de points anguleux.

Enfin, au VI, on présente quelques questions ouvertes.

## II. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Commençons par donner un index des notations utilisées dans cet article.

**Ensembles convexes et addition de Minkowski.** Les notions et propriétés suivantes sont assez bien connues (cf., par exemple, [Le], [Sc]).

$(H, \chi)$  - l'espace des sous-ensembles convexes de  $R^d$  muni de la métrique de Hausdorff :

$$\chi(A_1, A_2) = \max\left\{ \sup_{x_1 \in A_1} \inf_{x_2 \in A_2} |x_1 - x_2|, \sup_{x_2 \in A_2} \inf_{x_1 \in A_1} |x_1 - x_2| \right\}.$$

$$\| A \| = \chi(A, \{0\}).$$

$H_r = \{A \in H \mid \| A \| \leq r\}$ , cet ensemble est compact dans  $H$ .

$h(A, t)$ ,  $t \in R^d$  - la fonction d'appui de l'ensemble convexe  $A$  :

$$h(A, t) = \sup_{x \in A} \langle x, t \rangle, \quad t \in R^d,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - produit scalaire dans  $R^d$ .

$M_A(t)$ ,  $t \in S^{d-1}$  - la fonction de Minkowski de l'ensemble convexe  $A$  :

$$M_A(t) = h(A, t), \quad t \in S^{d-1}.$$

$A \oplus B$  - la somme de Minkowski de deux ensembles convexes :

$$A \oplus B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}.$$

$C(S^{d-1})$  - l'espace des fonctions continues sur  $S^{d-1}$  avec la norme uniforme  $\| \cdot \|_{C(S^{d-1})}$ .

L'application  $J : H \rightarrow C(S^{d-1})$ ,  $J(A) = M_A(\cdot)$  est une isometrie :

$$\chi(A_1, A_2) = \|M_{A_1} - M_{A_2}\|_{C(S^{d-1})}.$$

Voici encore deux propriétés importantes de la fonction de Minkowski :

$$M_{A_1 \oplus A_2} = M_{A_1} + M_{A_2};$$

$$M_{cA} = cM_A, \quad c > 0.$$

### Notations diverses

$D^d[a, b]$  - l'espace de Skorokhod des fonctions cadlag définies sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $R^d$ .

$\partial A, A^-, A^c$  - la frontière, la fermeture et le complément de l'ensemble  $A$ .

$[0, z]$  - le segment de bornes 0 et  $z$  de  $R^d$  :

$$[0, z] = \{x \mid x = \lambda z, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

$x_+, x_-$  - respectivement les parties positive et négative de  $x$ .

$(\xi_i, i \in N)$  - suite des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $R^d$  de même loi  $\mathcal{P}$ .

$(\rho_i, \theta_i)$  - coordonnées *polaires* de  $\xi_i$ :

$$\rho_i = |\xi_i|, \quad \theta_i = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}.$$

$\mathcal{Q}$  - la loi commune du couple  $(\rho_i, \theta_i)$ .

$\mathcal{N}(0, 1)$  - la loi gaussienne sur  $R^1$  de paramètres  $(0, 1)$ .

$\Phi$  - la fonction de répartition de la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

$\mathcal{L}_\alpha$  - loi stable sur  $R^d$  d'indice  $\alpha$ .

$\mathcal{P}_\phi$  - la loi de la variable aléatoire  $\phi$ .

$\implies$  - symbole de convergence faible des lois.

$\lambda^d$  - mesure de Lebesgue dans  $R^d$ .

$\delta_x$  - mesure de Dirac concentrée en un seul point  $x$ .

$\text{supp}\{\mu\}$  - le support de la mesure  $\mu$ .

$\mathcal{B}_A$  - la tribu des sous-ensembles boréliens de  $A$ .

$\mathbb{1}_A$  - la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ .

v.a. - variables aléatoires.

i.i.d. - indépendantes identiquement distribuées.

p.s. - presque sûrement.

$\stackrel{\text{def}}{=}$  - égalité par définition.

$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$  - égalité en loi.

■ - le signe de fin des démonstrations.

### III. LOI DES GRANDS NOMBRES

Pour comprendre les liaisons du problème initial avec l'addition de Minkowski étudions d'abord un cas particulier. Supposons que la loi  $\mathcal{P}$  est concentrée sur le demi-plan  $R^1 \times R_+$  et considérons, en même temps que les lignes  $L_n$ , les ensembles convexes

$$Z_n = \sum_1^n [0, \xi_i],$$

où  $[0, x]$  désigne le segment dans  $R^2$  de bornes 0 et  $x$  et la somme est prise au sens de Minkowski. Un ensemble de ce type s'appelle *zonotope*. Il est

facile à voir que dans ce cas la ligne  $L_n$  représente exactement la *moitié droite* de la frontière de  $Z_n$ , c.à.d. la partie droite de la frontière comprise entre deux lignes d'appui  $R^1 \times \{0\}$  et  $R^1 \times \{S_n\}$ . Donc, pour étudier le comportement asymptotique de  $L_n$  il nous suffit d'effectuer l'étude de  $Z_n$ . Mais la dernière est beaucoup plus préférable parce que les propriétés des fonctions de Minkowski (cf. §2) permettent de réduire le problème à l'étude des sommes de v.a. i.i.d. à valeurs dans l'espace de Banach  $C(S^1)$  et d'utiliser les résultats bien connus sur la LGN (et le TCL) pour les ensembles convexes aléatoires.

**Loi forte de grands nombres**

On va considérer d'abord les zonotopes  $Z_n$  engendrés par une suite  $(\xi_i)$  de variables aléatoires indépendantes  $d$ -dimensionnelles sous l'hypothèse de l'existence des moments d'ordre 1. Pour simplifier les notations on pose  $M_i = M_{[0, \xi_i]}$ .

THÉORÈME 1. – *Supposons que  $E\rho_1 < \infty$ .*

*Alors la limite*

$$Z = \lim_n \frac{1}{n} Z_n$$

*existe presque sûrement. De plus elle est un ensemble convexe non-aléatoire dont la fonction de Minkowski est égale à*

$$M_Z(t) = EM_1(t) = E\rho_1(\theta_1, t) \mathbb{1}_{R_+}(\langle \theta_1, t \rangle). \tag{1}$$

*Démonstration.* – Ce théorème est un cas particulier de la loi des grands nombres pour les suites des ensembles aléatoires indépendants identiquement répartis ([AV]). ■

REMARQUE 1. – La longueur de la frontière de  $Z$  est égale à  $2E|\xi_1|$ .

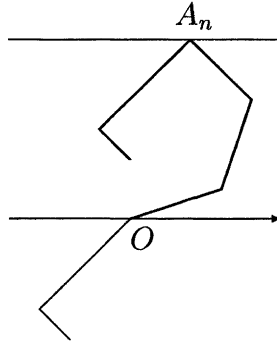
Supposons maintenant que  $d = 2$  et revenons aux courbes  $L_n/n$ .

THÉORÈME 2. – *Supposons que  $E\rho_1 < \infty$ . Alors les courbes  $L_n/n$  convergent p.s. en métrique de Hausdorff vers une courbe limite non-aléatoire  $L$ . La description de  $L$  dans le cas  $E\xi_1 = 0$  est donnée par (2), (3). Une autre description, valable sans restrictions, est représenté par (8), (9).*

*Démonstration.* – Soit  $E_+ = R^1 \times R_+$ . On pose  $\xi_k^+ = \xi_k \mathbb{1}_{E_+}(\xi_k)$ ,  $\xi_k^- = \xi_k - \xi_k^+$ . On note  $Z_n^+$ ,  $L_n^+$  les zonotopes et les courbes convexes associés aux v.a.  $\xi_k^+$ . Évidemment, les v.a.  $(\xi_k^+)$  sont i.i.d. et  $\mathcal{P}_{\xi_1^+}$  est



concentrée sur  $E_+$ . Grâce au théorème 1 les zonotopes  $Z_n^+/n$  convergent p.s. vers un ensemble convexe non-aléatoire  $Z_+$ . Alors, comme indiqué dans l'introduction, les courbes  $L_n^+/n$  convergent elles aussi vers une courbe  $L^+$  et cette courbe n'est autre que la moitié droite de la frontière  $\partial Z^+$ . De la même manière,  $L_n^-/n \rightarrow L^-$ , où  $L^-$  représente la moitié gauche de la frontière  $\partial Z^-$ ,  $Z^-$  étant limite de  $Z_n^-/n$ .



**Figure 1.** – La partie en trait épais correspond à  $L_n/n$ , la partie comprise entre  $O$  et  $A_n$  représente  $L_n^+/n$ , la partie en trait fin représente  $L_n^-/n$ .

Il n'est pas difficile de comprendre (cf. Fig. 1) que  $L_n^+/n$  coïncide en même temps avec la partie droite de  $L_n/n$  qui se trouve entre  $O$  et le point de contact  $A_n$  avec  $L_n/n$  de la droite d'appui parallèle à l'axe des abscisses. On remarque également que  $L_n^-/n$  coïncide avec le reste de  $L_n/n$  translaté du vecteur  $\overrightarrow{A_n O}$ . Cette observation nous donne tout de suite la convergence p.s. de  $L_n/n$  vers une courbe limite  $L$  en recollant  $L^+$  et  $L^-$ . ■

De cette démonstration découle directement.

REMARQUE 2. – Si  $E\xi_1 = 0$  alors la courbe  $L$  sera fermée. Notons  $A$  l'ensemble convexe dont la frontière est  $L$ . Alors la fonction de Minkowski  $M_A$  de  $A$  est égale à

$$M_A(t) = \mathbb{1}_{[0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]}(t)m_1(t) + \mathbb{1}_{(\pi/2, 3\pi/2)}(t)m_2(t),$$

où

$$m_1(t) = E\rho_1 \mathbb{1}_{[0, \pi]}(\theta_1) \langle \theta_1, t \rangle \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(\langle \theta_1, t \rangle), \tag{2}$$

$$m_2(t) = E\rho_1 \mathbb{1}_{(\pi, 2\pi)}(\theta_1) \langle \theta_1, t \rangle \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(\langle \theta_1, t \rangle). \tag{3}$$

REMARQUE 3. – La longueur de  $L$  est égale à  $E|\xi_1|$ .

EXEMPLE 1. – Supposons que la loi  $\mathcal{P}$  est invariante par rotations de centre  $O$ . Alors  $\rho_1$  et  $\theta_1$  sont indépendantes et la loi de  $\theta_1$  est la loi uniforme sur  $S^{d-1}$ . Nous avons donc  $M_Z(t) = C_{d-1} E\rho_1$  où  $C_{d-1} = E\mathbb{1}_{R_+}(\langle \theta_1, t \rangle)$  ne dépend pas de  $t$  grâce à l'uniformité de la loi de  $\theta_1$ . La fonction  $M_Z(t)$  est donc constante, ce qui signifie que l'ensemble limite  $Z$  est dans ce cas une boule dont le centre est  $O$ .

Si  $d = 2$  alors cette boule est de rayon  $E\rho_1/\pi$ . La courbe limite  $L$  dans ce cas est la circonférence de rayon  $r = E\rho_1/2\pi$  et de centre  $(0, r)$ .

L'exemple suivant nous sera utile dans la suite. En outre il montre que le calcul de  $Z$  d'après (1) n'est pas facile même quand la structure de la loi  $\mathcal{P}$  est extrêmement simple.

EXEMPLE 2. – Supposons maintenant que  $d = 2$  et que la loi  $\mathcal{P}$  est concentrée sur la ligne verticale  $\{x = 1\}$ . Cela signifie que  $\xi_i = (1, \psi_i)$ . Soit  $G$  la fonction de répartition de  $\psi_i$ .

Considérons la ligne  $L_n$  qui représente, comme cela était expliqué dans l'introduction, le réordonnement convexe de notre marche aléatoire et notons  $l_n(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , la fonction dont le graphe est  $\frac{1}{n}L_n$ . C'est une fonction convexe polygonale de sommets  $(\frac{k}{n}, \frac{1}{n} \sum_1^k \psi_i^*)$  où les  $\psi_i^*$  sont les statistiques d'ordre correspondant à  $\psi_i$ . D'après le théorème 1,  $l_n$  converge presque sûrement vers une fonction  $l$  convexe non-aléatoire. Cela entraîne que presque sûrement  $l'_n(t)$  converge pour presque chaque  $t$  vers  $l'(t)$ . Fixons  $t \in [0, 1]$  et choisissons  $k = k(n)$  de telle manière que  $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ . Soit  $G_n^*$  la fonction empirique pour les  $\psi_1, \dots, \psi_n$  :

$$G_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_1^n \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(\psi_i).$$

Par définition

$$l'_n(t) = \psi_k^* = (G_n^*)^{-1} \left( \frac{k-1}{n} \right).$$

(Rappelons que la fonction inverse  $F^{-1}$  pour une fonction de répartition  $F$  est définie par  $F^{-1}(x) = \sup\{y | F(y) \leq x\}$ .) On a donc par le théorème de Glivenko-Kantelli pour chaque point  $t$  de continuité de  $G^{-1}$

$$l'_n(t) \rightarrow G^{-1}(t).$$

Cela signifie que  $l(t) = \int_0^t G^{-1}(s) ds$ .

### Application au principe d'invariance

Soit  $\mathcal{A}$  l'espace des fonctions  $f(t), t \in [0, 1]$ , absolument continues. Définissons l'opérateur  $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  de *réarrangement convexe* par la formule

$$Vf(t) = f(0) + \int_0^t T(f')(s)ds,$$

où  $T$  est l'opérateur de *réarrangement monotone*: si  $g(t), t \in [0, 1]$ , est une fonction mesurable alors  $Tg$  est la seule fonction croissante cadlag qui est équadistribuée avec  $g$  :

$$\lambda(Tg)^{-1} = \lambda g^{-1}.$$

L'opérateur  $T$  et ses analogues sont bien connus. Cet opérateur possède différentes propriétés intéressantes et il joue un rôle important dans l'analyse et la théorie des processus stochastiques (cf. [KPS], [E]). L'opérateur  $V$ , semble-t-il, a été introduit par un des auteurs, certaines de ses propriétés ont été étudiées dans [Zh].

Il est clair que pour une fonction  $f$  continue polygonale l'image  $Vf$  est une fonction convexe et polygonale obtenue par une permutation des segments du graphe de  $f$ . Cela explique la terminologie choisie.

Considérons maintenant un processus de mouvement brownien  $w = (w(t), t \in [0, 1])$  et une suite  $(u_n), u_n = (u_n(t), t \in [0, 1])$  de processus de lignes polygonales

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_k + (nt - k)\xi_{k+1}), \quad t \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad (4)$$

où  $S_n = \sum_1^n \xi_i$  et  $\xi_i$  sont des v. a. i. d.,  $E\xi_i = 0, \text{Var}\xi_i = 1$ .

Il est facile de voir que les réarrangements convexes normalisés  $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}Vu_n$  coïncident exactement avec les fonctions convexes  $l_n$  de l'exemple 2 si l'on y prend  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\xi_1}$ . Par conséquent nous avons la convergence

$$v_n(t) \rightarrow \int_0^t G^{-1}(s)ds,$$

où  $G$  est la fonction de répartition de  $\xi_1$ .

Il est intéressant à noter que grâce au principe d'invariance de Donsker-Prokhorov les processus  $u_n$  convergent faiblement dans  $C[0, 1]$  vers  $w$  quelle que soit la loi de  $\xi_1$  (bien sûr,  $E\xi_1 = 0, \text{Var}\xi_1 = 1$ ). En même temps leurs réarrangements convexes  $v_n$  convergent vers des fonctions différentes. Ils gardent le souvenir de la loi initiale !

En conclusion remarquons qu'un résultat analogue a lieu si l'on remplace le processus du mouvement brownien  $w$  par un processus stable  $w_\alpha$  d'indice  $\alpha > 1$  et si l'on suppose que les v. a. i. d.  $(\xi_k)$  sont dans le domaine d'attraction de  $w_\alpha(1)$ .

**Application à la convexification des trajectoires**

Revenons au processus  $w$  du mouvement brownien et considérons ses approximations polygonales

$$w_n(t) = w\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - k)w\left(\frac{k+1}{n}\right), \quad t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]. \quad (5)$$

Ces processus sont analogues de (4), mais cette fois la suite orthogaussienne  $(\xi_k)$  est remplacée par un tableau triangulaire

$$\left\{ \Delta_{n,k} = w\left(\frac{k+1}{n}\right) - w\left(\frac{k}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Cela signifie qu'on ne peut pas appliquer le résultat de l'exemple 2 parce que l'on n'obtient directement que la convergence en probabilité. Néanmoins il n'est pas difficile de vérifier que la convergence presque sûre a lieu dans cette situation. Par conséquent on obtient pour presque chaque trajectoire la convergence de  $\frac{1}{\sqrt{n}}Vw_n$  vers la fonction convexe  $t \mapsto \int_0^t \Phi^{-1}(s)ds$ .

Maintenant il est facile de déduire le résultat suivant que l'on peut considérer comme un complément aux résultats de M. Wschebor (1992, [W]) sur le comportement asymptotique des dérivées dans les procédés d'approximation du mouvement brownien.

**THÉORÈME 3.** – Soit  $w = (w(t), t \in [0, 1])$  un processus de mouvement brownien et  $(w_n)$  ses approximations polygonales. Pour chaque trajectoire, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}w'_n(t)$  peut être considérée comme une v. a. réelle  $Y_n$  définie sur l'espace probabilisé  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ . Alors pour presque chaque trajectoire de  $w$ , la loi de cette v.a.  $Y_n$  converge faiblement vers la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

*Démonstration.* – Il est bien connu que la convergence des fonctions convexes entraîne la convergence presque partout de leurs dérivées. Nous avons donc pour presque chaque  $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Vw_n)'(t) \rightarrow \Phi^{-1}(t).$$

Puisque  $(Vw_n)'(t) = (Tw_n')(t)$  la loi de  $Tw_n'$  converge vers la loi de la fonction  $\Phi^{-1}$  c'est à dire vers  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour terminer il suffit de rappeler que la loi de  $Tw_n'$  est la même que celle de  $w_n'$ . ■

En réalité la convergence des réarrangements convexes signifie beaucoup plus que la convergence faible des dérivées. La discussion détaillée de cette question sort du cadre de cet article et on la laisse pour une autre publication.

#### IV. THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Pour les zotopes la question d'application du TCL est assez simple. Le résultat suivant est la conséquence directe du Th. 2.12 [GHZ].

THÉORÈME 4. – Soit  $(\xi_i)$  une suite de variables aléatoire indépendantes  $d$ -dimensionnelles de même loi  $\mathcal{P}$ . Supposons que le moment d'ordre 2 existe :  $E\rho_1^2 < \infty$ . Alors les processus

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (M_i(t) - M_Z(t)), \quad t \in S^{d-1},$$

convergent faiblement dans  $C(S^{d-1})$  vers un processus gaussien continu centré  $(\zeta(t))$ ,  $t \in S^{d-1}$  dont la fonction de covariance est

$$R(t, s) = EM_1(t)M_1(s) - M_Z(t)M_Z(s).$$

COROLLAIRE 1. – Sous les hypothèses du théorème 4 les v.a.  $\sqrt{n}\chi(\frac{1}{n}Z_n, Z)$  convergent en loi vers  $\sup_{t \in S^{d-1}} |\zeta(t)|$ .

Démonstration. – Il suffit de remarquer que

$$\sqrt{n}\chi\left(\frac{1}{n}Z_n, Z\right) = \|\zeta_n\|_{C(S^{d-1})}. \quad \blacksquare$$

#### TCL pour les lignes $L_n$

Dans ce cas la situation est plus compliquée. Les courbes  $L_n$  ne sont plus fermées mais elles sont localement convexes dans le sens suivant. Elles partent de  $O$  et, quand on parcourt la courbe de  $O$  jusqu'à l'autre bout, l'angle entre le vecteur tangent et l'axe des abscisses prend ses valeurs dans  $[0, 2\pi]$  et représente une fonction croissante. Une telle courbe  $l$  peut être paramétrée de la manière suivante. Soit  $l_+$  la partie droite de  $l$  contenue entre l'axe des abscisses et la droite d'appui supérieure parallèle à cet axe. On note  $l_-$  le reste de  $l$ . Notons  $l^{(1)}(t), l^{(2)}(t)$  les coordonnées du premier point (dans le sens du passage) de franchissement de  $l_+$ , si  $t \in [0, \pi]$ , et de  $l_-$ , si  $t \in [\pi, 2\pi]$ , par la droite d'appui formant l'angle  $t$  avec l'axe des abscisses.

On obtient ainsi une paire de fonctions  $(l^{(1)}(t), l^{(2)}(t)), t \in [0, 2\pi]$ , qui caractérise la courbe initiale  $l$ . Étant donné deux courbes de ce type  $l, m$  paramétrées par  $(l^{(1)}(t), l^{(2)}(t)), (m^{(1)}(t), m^{(2)}(t))$  il n'est pas difficile de comprendre que la valeur

$$\delta(l, m) = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |(l^{(1)}(t) - m^{(1)}(t)) \sin t - (l^{(2)}(t) - m^{(2)}(t)) \cos t|$$

représente une sorte de distance entre  $l$  et  $m$ . Dans le cas où  $l$  et  $m$  sont fermées

$$\delta(l, m) = \chi(L, M),$$

où  $L, M$  sont les ensembles convexes tels que  $l = \partial L, m = \partial M$ .

Revenons maintenant aux courbes aléatoires  $L_n$ . Il est facile de voir que le paramétrage décrit ci-dessus prend pour  $L_n$  la forme suivante

$$L_n^{(1)}(t) = \frac{1}{n} \sum_1^n \rho_i \cos \theta_i \mathbb{1}_{[0, t]}(\theta_i), \tag{6}$$

$$L_n^{(2)}(t) = \frac{1}{n} \sum_1^n \rho_i \sin \theta_i \mathbb{1}_{[0, t]}(\theta_i). \tag{7}$$

On remarque que les trajectoires des processus  $\bar{L}_n(t) = (L_n^{(1)}(t), L_n^{(2)}(t)), t \in [0, 2\pi]$ , sont des fonctions continues à droite et constantes sur les intervalles  $[\theta_{\pi_i}, \theta_{\pi_{i+1}})$ , de plus  $(L_n^{(1)}(\theta_{\pi_i}), L_n^{(2)}(\theta_{\pi_{i+1}})) = S_i^*/n$ , c.à.d. cette valeur coïncide avec le  $i$ -ème sommet de la courbe  $L_n/n$ .

Soit  $a(t) = E\{\rho_1 | \theta_1 = t\}$ ,  $\sigma^2(t) = \text{Var}\{\rho_1 | \theta_1 = t\}$  la moyenne et la variance conditionnelles de  $\rho_1$  sachant  $\theta_1$ . Soit  $F = \mathcal{P}_{\theta_1}$ .

En appliquant la loi des grands nombres on remarque avant tout que les processus  $\bar{L}_n$  p.s. convergent uniformément sur  $[0, 2\pi]$  vers la fonction non-aléatoire  $\bar{L} = (L^{(1)}, L^{(2)})$ ,

$$L^{(1)}(t) = \int_0^t a(s) \cos s F(ds), \tag{8}$$

$$L^{(2)}(t) = \int_0^t a(s) \sin s F(ds), \tag{9}$$

ce qui nous donne une autre description, par rapport à celle de la Remarque 2, de la courbe limite  $L$ .

Considérons deux processus définis sur  $R^1$

$$w_F(t) = w(F(t)), \quad w_F^\circ(t) = w_1(F(t)) - F(t)w_1(1),$$

où  $w, w_1$  sont deux copies indépendantes du processus du mouvement brownien.

Les processus  $w_F, w_F^\circ$  sont gaussiens, centrés et de fonctions de covariance  $\min\{F(t), F(s)\}$ ,  $\min\{F(t), F(s)\} - F(t)F(s)$  respectivement.

Il est clair que les intégrales stochastiques sont bien définies

$$I(h) = \int h(s)dw_F(s), \quad J(h) = \int h(s)dw_F^\circ(s), \quad h \in L^2(R^1, dF).$$

$$\text{De plus, } EI(h) = EJ(h) = 0, \quad EI^2(h) = \int h^2 dF, \quad EJ^2(h) = \int h^2 dF - (\int h dF)^2.$$

THÉORÈME 5. — *Supposons que les v.a. initiales  $\{\xi_i\}$  sont i.i.d. et que le moment d'ordre 2 est fini :  $E\rho_1^2 < \infty$ . Supposons aussi que la fonction de répartition de  $F$  est continue. Alors les processus  $\eta_n(t) = (\eta_n^{(1)}(t), \eta_n^{(2)}(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,*

$$\eta_n^{(i)}(t) = \sqrt{n}(L_n^{(i)}(t) - L^{(i)}(t)), \quad i = 1, 2,$$

*convergent faiblement dans  $D^2[0, 2\pi]$  vers un processus gaussien continu  $\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ , où*

$$\eta^{(1)}(t) = \int_0^t \sigma(s) \cos s dw_F(s) + \int_0^t a(s) \cos s dw_F^\circ(s),$$

$$\eta^{(2)}(t) = \int_0^t \sigma(s) \sin s dw_F(s) + \int_0^t a(s) \sin s dw_F^\circ(s).$$

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses du théorème 5*

$$\sqrt{n}\delta(L_n/n, L) \implies \zeta,$$

où

$$\zeta = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\eta^{(1)}(t) \sin t - \eta^{(2)}(t) \cos t|.$$

REMARQUE 4. — Les propriétés des trajectoires des processus  $\eta^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , ainsi que certaines autres propriétés des courbes  $L_n$  et  $L$  ont été étudiées dans [Vi].

*Démonstration.* – La convergence des lois de dimension finie des processus  $\bar{L}_n$  se vérifie directement par la méthode de Cramer-Wold et par l'application du théorème central limite de P. Lévy. Un simple calcul des fonctions de covariance donne l'identification du processus limite. On va démontrer la compacité relative. Évidemment, il suffit de l'établir pour chaque composant séparément, par exemple, pour  $L_n^{(1)}$ , l'étude de l'autre étant analogue.

Notons  $\mu_n^*$  les mesures empiriques dans  $R^2$  correspondant à la loi  $\mathcal{P}$ ,

$$\mu_n^* = \frac{1}{n} \sum \delta_{\xi_k},$$

et considérons la famille  $\mathcal{H} = \{h_t, t \in [0, 2\pi]\}$  des fonctions

$$h_t(x, y) = x \cos y \mathbb{1}_{[0,t]}(y), \quad x \in R^+, \quad y \in [0, 2\pi].$$

Les processus empiriques qui correspondent à la loi  $\mathcal{P}$  et à  $\mathcal{H}$  sont définis par l'égalité

$$\omega_n(h) = \sqrt{n} \left( \int h d\mu_n^* - E \left( \int h d\mu_n^* \right) \right), \quad h \in \mathcal{H}.$$

Dans notre cas  $\omega_n(h_t) = \eta_n^{(1)}(t)$ . Pour étudier le comportement de  $\eta_n^{(1)}$  on peut donc utiliser les résultats sur les processus empiriques.

Soit  $H_{[\cdot]}(\delta, \mathcal{H}, d_{\mathcal{P}})$  l'entropie en crochet (sa définition et ses propriétés peuvent se trouver dans [O]) de la classe  $\mathcal{H}$  par rapport à la métrique  $d_{\mathcal{P}}(f, g) = (\int |f - g|^2 d\mathcal{P})^{1/2}$ . Dans nos conditions on obtient facilement que  $H_{[\cdot]}(\delta, \mathcal{H}, d_{\mathcal{P}}) \leq -C \log \delta$ . On a donc

$$\int_0^1 \sqrt{H_{[\cdot]}(u, \mathcal{H}, d_{\mathcal{P}})} du < \infty,$$

ce qui représente la condition de [O] suffisante pour que  $\mathcal{H}$  soit une  $\mathcal{P}$ -classe de Donsker. Par conséquent, on obtient la compacité relative des processus  $\eta_n^{(1)}$ . ■

### V. STRUCTURE DE LA MESURE LIMITE DANS LE CAS D'ATTRACTION PAR UNE LOI STABLE D'INDICE $\alpha < 1$

Dans ce paragraphe on suppose que  $(\xi_i)$  est une suite de v.a. i.i.d.  $d$ -dimensionnelles et appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable  $\mathcal{L}_\alpha$



d'indice  $\alpha < 1$ . Cela signifie qu'il existe des constantes  $b_n$  telles que les sommes normalisées

$$\frac{\zeta_n}{b_n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{b_n}$$

convergent faiblement vers  $\mathcal{L}_\alpha$ . Cette loi limite  $\mathcal{L}_\alpha$  est complètement définie (cf. [L]), à une translation près, par le paramètre  $\alpha$  et par une mesure  $\sigma$  sur  $S^{d-1}$ , dite *spectrale*, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha n P \left\{ \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \in A, \|\xi_1\| > b_n \right\} = \sigma(A), \quad A \in \mathcal{B}_{S^{d-1}}.$$

L'objet essentiel de notre étude, ce sont les zonotopes  $Z_n$

$$Z_n = \sum_1^n [0, \xi_i],$$

où  $\sum$  est l'addition de Minkowski et  $[0, x]$  est le segment fermé d'extrémités  $O$  et  $x$ .

Notons  $Q_n$  les lois dans  $H$  des zonotopes normalisés  $b_n^{-1}Z_n$ , on va montrer que  $Q_n$  converge faiblement vers une mesure  $Q$   $\alpha$ -stable concentrée sur des ensembles convexes dont la frontière a une structure particulière.

La définition de l' $\alpha$ -stabilité que l'on utilise ici est la suivante (cf. [GH]) :

La mesure  $Q$  dans  $H$  est dite *strictement  $\alpha$ -stable* si pour les ensembles aléatoires convexes  $V_1, V_2, V$  indépendants et de même loi  $Q$  et pour tous  $a, b \geq 0$  on a

$$aV_1 + bV_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} V.$$

Rappelons quelques notions géométriques.

Soit  $A \subset R^d$  un ensemble convexe compact. Pour  $x \in \partial A$  on note  $L_x$  l'hyperplan d'appui pour  $A$  passant par  $x$ . (C'est un espace affine de dimension  $d - 1$  tel que  $x \in L_x$  et l'ensemble  $A$  se trouve d'un seul côté de  $L_x$ ). L'intersection  $L_x \cap \partial A$  s'appelle *face*. La face de dimension  $d - 1$  s'appelle *facette*. La facette qui représente un parallélépipède s'appellera *parallélépipédique*. On note  $\Pi_A$  l'union de toutes facettes parallélépipédiques de  $A$ . On note  $\mu$  la mesure superficielle de Lebesgue sur  $\partial A$ .

**THÉORÈME 6.** – *Sous les conditions ci-dessus les mesures  $Q_n$  convergent faiblement vers une mesure  $Q$  strictement  $\alpha$ -stable.*

Si la mesure spectrale  $\sigma$  est absolument continue et si son support coïncide avec  $S^{d-1}$  alors pour  $Q$ -presque chaque  $Z \in H$  sa frontière  $\partial Z$  a les propriétés suivantes :

1)  $\mu(\partial Z \setminus \Pi_Z) = 0;$

2) Deux parallélépipèdes  $K, L \in \Pi_Z$  ou n'ont pas de point commun ou coïncident.

REMARQUE 5. – Ce théorème montre que la frontière  $\partial Z$  a p.s. la structure du type de Cantor : le complément de l'intérieur de  $\Pi_Z$  dans  $\partial Z$  est un ensemble parfait (i.e. fermé et sans points isolés) de  $\mu$ -mesure zéro. Dans le cas 2-dimensionnel cette structure ressemble donc à celle de l'enveloppe convexe du mouvement brownien [LG]. Le résultat suivant montre que cette ressemblance est encore plus forte.

Rappelons qu'un point  $z$  de la frontière  $\partial Z$  d'un ensemble convexe  $Z \subset R^2$  s'appelle *anguleux* si  $Z$  est contenu dans un angle de sommet  $z$  et de mesure  $\beta < \pi$ .

THÉORÈME 7. – *Supposons que les hypothèses du théorème 6 sont vérifiées et que  $d = 2$ . Alors, outre les conclusions du théorème 6, on a la propriété suivante : Pour  $Q$ -presque chaque  $Z \in H$  sa frontière  $\partial Z$  n'a pas de point anguleux.*

Démonstration du théorème 6. – D'après le Th.1.19 [7] le segment aléatoire  $[0, \xi_1]$  appartient au domaine d'attraction d'une loi stable  $\mathcal{L}_\alpha$  sur  $H$  avec la normalisation  $b_n^{-1}$ . Cela signifie que  $Q_n$  converge faiblement vers une mesure limite  $Q$ . Autrement dit les zonotopes  $Z_n/b_n$  convergent faiblement vers un ensemble  $Z$  aléatoire convexe stable d'indice  $\alpha$  dont la loi  $\mathcal{P}_Z$  est  $Q$ . En plus,  $Z$  admet la représentation

$$Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{K_1} x M_\alpha(dx), \tag{10}$$

Nous renvoyons à [GH] pour la démonstration ainsi que pour la construction de l'intégrale stochastique par rapport à l'addition de Minkowski. Ici  $M_\alpha$  est une mesure stochastique  $\alpha$ -stable subordonnée à la mesure spectrale  $\hat{\sigma}$  qui est concentrée sur l'ensemble  $\{A \in H, A = [0, x], x \in S^{d-1}\}$  et telle que pour  $\mathcal{A} = \{[0, x], x \in B, B \in \mathcal{B}_{S^{d-1}}\}$

$$\hat{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(B).$$

Cela signifie plus exactement qu'il existe une v.a. réelle positive  $\alpha$ -stable  $\theta$  telle que :

1)  $M_\alpha(A) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\hat{\sigma}(A))^{1/\alpha} \theta.$

2) Quels que soient  $A_1, \dots, A_n$  disjoints, les v.a.

$$M_\alpha(A_1), \dots, M_\alpha(A_n)$$

sont indépendantes et p.s.

$$M_\alpha\left(\bigcup_1^n A_i\right) = \sum_1^n M_\alpha(A_i).$$

Soit maintenant  $\pi$  une mesure stochastique *poissonnienne* sur  $K_1 \times R_+$  avec la mesure spectrale  $\hat{\sigma} \times \gamma$  où  $\gamma$  est la mesure sur  $R_+$  de densité  $x^{-\frac{1}{1+\alpha}}$ . Il n'est pas difficile de vérifier (par exemple, de la même manière que dans [16], ch. 3) que la représentation (10) est équivalente à la suivante :

$$Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{K_1 \times R_+} x \pi(dx). \quad (11)$$

La mesure  $\hat{\sigma}$  étant concentrée sur l'ensemble des segments du type  $[0, z]$ ,  $\|z\| = 1$ , l'intégrale dans (11) n'est autre que la somme dénombrable des segments

$$Z(\omega) = \sum_1^\infty [0, h_k(\omega)], \quad (12)$$

c.-à.-d. l'ensemble limite  $Z$  est un *zonoïde*.

La somme de Minkowski de  $d - 1$  quelconques de ces segments est un parallélépipède (p.s.  $(d - 1)$ -dimensionnel) qui définit deux facettes parallèles et congruentes de  $Z$ . Par exemple, si on fixe l'ensemble des indices  $I = \{k_1, \dots, k_{d-1}\}$ , alors ces facettes sont égales à

$$E_{\underline{+}} = E + h_{\underline{+}}, \quad (13)$$

où  $h_{\underline{+}} = \sum_{k \notin I} \mathbb{1}_{V_{\underline{+}}}(h_k) h_k$ ,  $E = \sum_1^{d-1} [0, h_{k_i}]$ ,  $V_{\underline{+}}, V_{\underline{-}}$  sont deux demi-espaces définis par l'hyperplan engendré par  $\{h_k, k \in I\}$ .

Autrement dit  $E_{\underline{+}}$  n'est autre que le parallélépipède  $E$  translaté du vecteur  $h_{\underline{+}}$ .

Maintenant il est clair que pour chaque  $n$

$$\mu\left(\partial\left(\sum_1^n [0, h_i]\right)\right) \leq \mu(\Pi_Z),$$

Par conséquent,

$$\mu(\partial Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\partial\left(\sum_1^n [0, h_i]\right)\right) \leq \mu(\Pi_Z),$$

Comme l'inégalité inverse est évidente cela donne 1).

De plus, on remarque que toutes les faces de  $\Pi_Z$  sont du type (13).

Pour démontrer 2) il nous suffit de montrer que deux faces  $K_1, K_2 \in \Pi_Z$  définies par deux ensembles d'indices différents  $I_1, I_2$  n'ont pas de point commun. On peut supposer que

$$K_1 = E_1 + \left\{ \sum_{k \notin I_1} \mathbb{1}_{V_+^1}(h_k) h_k \right\}, \quad K_2 = E_2 + \left\{ \sum_{k \notin I_2} \mathbb{1}_{V_+^2}(h_k) h_k \right\},$$

où  $E_{1,2} = \sum_{i \in I_{1,2}} [0, h_{k_i}]$ ,  $V_{\pm}^1, V_{\pm}^2$  sont les demi-espaces ouverts définis par les hyperplans engendrés respectivement par  $E_1, E_2$ . On suppose que  $V_+^1, V_+^2$  sont choisis de telle manière que  $E_2 \subset (V_+^1)^-$ ,  $E_1 \subset (V_-^2)^-$ .

Soit

$$\hat{K}_1 = E_1 + \left\{ \sum_{k \notin I_1} \mathbb{1}_{V_+^1 \setminus V_+^2}(h_k) h_k \right\},$$

$$\hat{K}_2 = E_2 + \left\{ \sum_{k \notin I_2} \mathbb{1}_{V_+^2 \setminus V_+^1}(h_k) h_k \right\}.$$

Il est clair que  $\hat{K}_1, \hat{K}_2$  sont égaux à  $K_1, K_2$  translatés du vecteur

$$h = - \sum_{k \notin I_1 \cup I_2} \mathbb{1}_{V_+^1 \cap V_+^2}(h_k) h_k.$$

Par conséquent, si on avait  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , on aurait aussi  $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 \neq \emptyset$ . Mais ceci est impossible puisque grâce à la condition  $\text{supp}\{\sigma\} = S^{d-1}$ , avec probabilité 1 parmi les vecteur  $\{h_k(\omega)\}$  il en existe un qui appartient à  $V_+^1 \cap V_-^2$  et un qui appartient à  $V_+^2 \cap V_-^1$ . On a donc

$$\hat{K}_2 \subset V_+^2, \quad \hat{K}_1 \subset V_-^2,$$

ce qui donne la contradiction. ■

*Démonstration du théorème 7.* – Avant tout remarquons que la présence d'un point anguleux sur  $\partial Z$  signifierait en langage des fonctions de

Minkowski que la fonction de Minkowski  $M_Z$  de  $Z$  possède la propriété suivante :

$$P\{\omega \mid \exists \Delta(\omega) \subset [0, 2\pi] \\ \text{et v.a. } \gamma, \varphi \text{ t.q. } M(t) = \gamma \cos(t - \varphi) \text{ pour } t \in \Delta(\omega)\} > 0,$$

où on a posé  $M(t) = M_Z(e^{it})$ .

Admettons le. Alors on pourrait choisir un intervalle  $[a, b] \subset [0, 2\pi]$  tel que

$$P\{\omega \mid \exists \text{ v.a. } \gamma, \varphi \text{ t.q. } M(t) = \gamma \cos(t - \varphi) \text{ pour } t \in [a, b]\} > 0.$$

Cela signifierait à son tour que pour  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $t_i \in [a, b]$ , la loi conditionnelle de  $M(t_3)$  sachant  $M(t_1), M(t_2)$  a un atome, ce qui est en contradiction avec le lemme suivant.

LEMME 1. — *Quelque soit  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $t_i \in S^1$ ,  $|t_3 - t_1| < \pi/2$ , la loi commune des v.a.  $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$  est absolument continue.*

*Démonstration du lemme 1.* — Soit  $f$  la fonction caractéristique du vecteur  $(M(t_1), M(t_2), M(t_3))$ ,

$$f(s_1, s_2, s_3) = E \exp \left\{ i \sum_1^3 s_j M(t_j) \right\}.$$

On va montrer que

$$\int_{R^3} |f(s_1, s_2, s_3)| ds_1 ds_2 ds_3 < \infty.$$

Évidemment cela entraîne l'existence de la densité. En utilisant le critère [F, XVII, § 5] de l'appartenance au domaine d'attraction par une loi stable il n'est pas difficile de voir que la loi de la v.a.  $\sum_1^3 s_j M(t_j)$  est stable d'indice  $\alpha$  et la valeur absolue de sa fonction caractéristique  $g$  admet la représentation

$$|g(s)| = \exp\{-c_\alpha \cdot c|s|^\alpha\},$$

où  $c_\alpha = \Gamma(1 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})$ ,  $\Gamma$  est la fonction gamma, et  $c = E|\sigma|^\alpha$ ,  $\sigma = \sum_1^3 s_j \cos(t_j - \tau) \mathbb{1}_{R_+}(\cos(t_j - \tau))$ ,  $\tau$  est une v.a. de loi uniforme sur  $[0, 2\pi)$  telle que  $\theta_1 = e^{i\tau}$ .

Comme

$$|f(s_1, s_2, s_3)| = |g(1)| = \exp\{-c_\alpha E|\sigma|^\alpha\},$$

il nous suffit de montrer l'existence d'une constante  $a > 0$  telle que

$$E|\sigma|^\alpha \geq a(|s_1|^\alpha + |s_2|^\alpha + |s_3|^\alpha). \tag{14}$$

Il est clair que

$$E|\sigma|^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^\alpha dx,$$

où  $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x)$  et

$$h_1(x) = s_1 \cos x \mathbb{1}_{R_+}(\cos x), \quad h_2(x) = s_2 \cos(x - t'_2) \mathbb{1}_{R_+}(\cos(x - t'_2)),$$

$$h_3(x) = s_3 \cos(x - t'_3) \mathbb{1}_{R_+}(\cos(x - t'_3)),$$

$$t'_2 = t_2 - t_1, \quad t'_3 = t_3 - t_1.$$

Comme  $h(x) = s_1 \cos x$  pour  $x \in [-\frac{\pi}{2}, t'_2 - \frac{\pi}{2}]$  et  $h(x) = s_3 \cos(x - t'_3)$  pour  $x \in [-\frac{\pi}{2} + t'_2, \frac{\pi}{2} + t'_3]$  on a toujours l'inégalité  $E|\sigma|^\alpha \geq a_1(|s_1|^\alpha + |s_3|^\alpha)$  pour une constante  $a_1$  positive. Il nous reste donc à montrer qu'il existe une  $a_2 > 0$  telle que

$$E|\sigma|^\alpha \geq a_2 |s_2|^\alpha. \tag{15}$$

Il est nécessaire de considérer quelques cas.

1.  $s_1 > 0, s_2 > 0, s_3 > 0$ . Dans ce cas (15) est évidente.

2.  $s_1 > 0, s_2 < 0, s_3 > 0$ . On pose  $u_1 = t'_2 - \pi/2, u_2 = (t'_2 + t'_3 - \pi)/2, u_3 = t'_3 - \pi/2$ . Supposons que  $t_1 h_1(u_2) + t_2 h_2(u_2) > 0$ . Alors pour  $x \in [u_1, u_2]$  on a  $|h(x)| = t_1 h_1(x) + t_2 h_2(x)$  et l'inégalité de Jensen donne

$$E|\sigma|^\alpha \geq \frac{1}{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} |h(x)|^\alpha dx \geq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{u_1}^{u_2} |h(x)| dx \right)^\alpha = \frac{1}{2\pi} (t_1 B_1 + t_2 B_2)^\alpha,$$

où

$$B_1 = \int_{u_1}^{u_2} |h_1(x)| dx, \quad B_2 = \int_{u_1}^{u_2} |h_2(x)| dx.$$

Il est facile à vérifier que  $h_2(u_2) B_1 > h_1(u_2) B_2$ .

Donc

$$t_1 B_1 + t_2 B_2 > -t_2 \frac{h_2(u_2)}{h_1(u_2)} B_1 + t_2 B_2 = |t_2| a'_2,$$

avec  $a'_2 > 0$ , d'où vient (15) avec  $a_2 = 2\pi^{-1} a'_2$ .

Si  $t_1 h_1(u_2) + t_2 h_2(u_2) \leq 0$ , on utilise les raisonnements analogues avec l'intervalle  $[u_1, u_2]$  remplacé par  $[u_2, u_3]$ .

3.  $s_1 > 0, s_2 > 0, s_3 < 0$ . Maintenant  $|h(x)| = t_1 h_1(x) + t_2 h_2(x)$  pour  $x \in [u_1, u_3]$ . Par conséquent

$$\int_{u_2}^{u_3} |h(x)| dx \geq t_2 \int_{u_2}^{u_3} h_2(x) dx = a_2 t_2$$

avec une  $a_2$  positive.

L'inégalité (15) en suit directement.

Tous les autres cas se réduisent évidemment vers un des cas étudiés. Nous avons donc toujours (14). ■

L'application de ce lemme termine la démonstration du théorème. ■

## VI. QUESTIONS OUVERTES

1. Il semble que les mesures limites, disons  $Q_\alpha$ , du Th. 6 sont singulières pour des  $\alpha$  différents. Est-ce vrai ?

2. Qu'est ce qui se passe pour les mesures  $Q_\alpha$  quand  $\alpha \rightarrow 0$  ? Existe-t-il une limite ?

3. Quelle est la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $\partial Z \setminus \Pi_Z$  du Th. 7 ?

4. Quelles sont les propriétés des trajectoires du processus gaussien  $(\zeta(t), t \in S^{d-1})$  du Th. 4 ? Sont elles analogues à celles obtenues dans [Vi] ?

## REMERCIEMENTS

Nous voudrions remercier A. Nagaev pour son attention et intérêt à ce travail. On remercie les rapporteurs anonymes pour des remarques utiles et stimulantes.

## RÉFÉRENCES

- [A] V. I. ARNOLD, Statistics of integral convex polygons, *Func. Anal. and its Appl.*, Vol. **14**, 1980, p. 79-81.
- [AV] Z. ARTSTEIN et R. A. VITALE, A strong law of large numbers for random compact sets, *Ann. Probab.*, Vol. **3**, 1975, p. 879-882.
- [AW] J.-M. AZAIS et M. WSCHBOR, Almost sure oscillation of certain random processes, Preprint, 1995.
- [B] I. BARANY, Limit shape of convex lattice polygons, *Discrete Comput.*, Vol. **13**, 1995, p. 279-295.

- [E] V. A. EGOROV, Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les sommes réordonnées, *Theor. Probab. and Appl.*, Vol. **35**, 1990, p. 343-349.
- [F] W. FELLER, An introduction to probability theory and its applications, Vol. **II**, 1971, John Wiley, New York.
- [GH] E. GINÉ et M. HAHN, Characterization and domains of attraction of  $p$ -stable random compact sets, *Ann. Probab.*, Vol. **13**, 1985, p. 447-468.
- [GHZ] E. GINÉ, M. HAHN et J. ZINN, Limit theorems for random sets: an application of probability in Banach space results, *Lect. Notes in Math.*, Vol. **990**, 1983, p. 112-135, Springer, New York.
- [KPS] S. G. KREIN, Yu. I. PETUNIN et E. M. SEMENOV, Interpolation des opérateurs linéaires, Moscou, Nauka, 1978.
- [Le] K. LEICHTWEISS, Konvexe Mengen, VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1980.
- [L] W. LINDE, Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Leipzig, Teubner, 1983.
- [LG] J.-F. LE GALL, Some properties of planar brownian motion, *Lecture Notes in Math.*, Vol. **1527**, 1992.
- [O] M. OSSIANDER, A central limit theorem under metric entropy with  $L^2$ -bracketing, *Ann. Probab.*, Vol. **15**, 1987, p. 897-919.
- [S1] Ya. G. SINAI, The probabilistic approach to the analysis of statistics for convex polygonal lines, *Func. Anal. and its Appl.*, Vol. **28**, 1994, p. 108-113.
- [S2] Ya. G. SINAI, Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **148**, 1992, p. 601-621.
- [ST] G. SAMORODNITSKY et Murad S. TAQQU, Stable non-Gaussian Random Processes, Chapman & Hall, New York 1994, 632 p.
- [Sc] R. SCHNEIDER, Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, University Press, Cambridge, 1993, 490 p.
- [V1] A. M. VERSHIK, The limit shape of lattice convex polygons and related topics, *Funct. Anal. and its Appl.*, Vol. **28**, 1994, N 1, 13-20.
- [V2] A. M. VERSHIK, Statistics of the combinatorial partitions and its limit shape, *Funct. Anal. and its Appl.*, Vol. **30**, 1996, N 1.
- [Vi] B. N. VILKOV, Asymptotics of random convex polygons, *Zapiski Nauchnyh Seminarov PDMI*, Vol. **223**, Dynamical Systems *et al.* 1995, Nauka, (ed. A. M. VERSHIK).
- [W] M. WSHEBOR, Sur les accroissements du processus de Wiener, *C. R. Acad. Sci., Paris*, T. **315**, série 1, 1992, p. 1293-1296.
- [Zh] E. E. ZHUKOVA, Réarrangements monotones et convexes des fonctions et processus stochastiques, Thèse de candidat, Université de Saint-Pétersbourg, Russie, 1995.

(Manuscrit reçu le 26 août 1996;  
version révisée reçue le 29 septembre 1997.)