ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

FRÉDÉRIQUE DUHEILLE

Une preuve probabiliste élémentaire d'un résultat de P. Baird et J. C. Wood

Annales de l'I. H. P., section B, tome 33, n° 2 (1997), p. 283-291
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1997__33_2_283_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 33, n° 2, 1997, p. 283-291 *Probabilités et Statistiques*

Une preuve probabiliste élémentaire d'un résultat de P. Baird et J. C. Wood

par

Frédérique DUHEILLE

Laboratoire de Probabilités Université Claude-Bernard, Lyon-I,
43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.
E-mail: duheille@jonas.univ-lyon1.fr

RÉSUMÉ. – Nous donnons ici une démonstration élémentaire d'un théorème de P. Baird et J. C. Wood assurant que tout morphisme harmonique de $\mathbf{R}^3$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ est de la forme $g \circ \pi$, où π est une projection orthogonale de $\mathbf{R}^3$ sur un sous-espace de dimension deux de $\mathbf{R}^3$ et g est une application holomorphe ou antiholomorphe sur ce sous-espace.

Mots clés : Morphisme harmonique, mouvement brownien.

ABSTRACT. – We expose an elementary proof of the following theorem of P. Baird and J. C. Wood [2]: any harmonic morphism from $\mathbf{R}^3$ to $\mathbf{R}^2$ is the composition $g \circ \pi$, where π is an orthogonal projection from $\mathbf{R}^3$ to a 2-dimensional subspace and g is an analytic or conjugate-analytic function on this subspace.

1. INTRODUCTION

En 1988, P. Baird et J. C. Wood [2] ont obtenu la caractérisation des morphismes harmoniques entre $\mathbf{R}^3$ et une surface de Riemann, c'est-à-dire, des applications entre ces deux espaces qui conservent les fonctions harmoniques. Ce problème avait été posé, en d'autres termes, par

A.M.S. Classification : 58 E 20, 60 J 45.

C. G. J. Jacobi [7] en 1847. Le résultat obtenu s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME 1. – *Tout morphisme harmonique non-constant de* $\mathbf{R}^3$ *à valeurs dans une surface de Riemann* N *se factorise sous la forme* $g \circ \pi$, *où* π *est une projection orthogonale de* $\mathbf{R}^3$ *sur un sous-espace de dimension deux de* $\mathbf{R}^3$ *et* g *est une application faiblement conforme à valeurs dans* N.

Dans cet article, nous démontrons le théorème 1 de manière élémentaire en faisant appel au mouvement brownien. Pour simplifier les notations, nous nous restreindrons aux morphismes harmoniques de $\mathbf{R}^3$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, le cas des morphismes harmoniques à valeurs dans une surface riemannienne se traitant de la même façon.

Rappelons tout d'abord la définition et quelques propriétés des morphismes harmoniques.

DÉFINITION 2. – *Considérons deux variétés riemanniennes* M *et* N. *Une fonction continue* $f : M \to N$ *est un morphisme harmonique si, pour tout ouvert* V *de* N *vérifiant* $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ *et pour toute fonction* h *harmonique de* V *dans* $\mathbf{R}$, *l'application composée* $h \circ f$ *est harmonique sur* $f^{-1}(V)$.

La propriété suivante caractérise les morphismes harmoniques entre deux espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$:

PROPOSITION 3 [5]. – *Soit* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ *une fonction deux fois continûment dérivable, d'un ouvert* U *de* $\mathbf{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}^p$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *la fonction* f *est un morphisme harmonique,*

(ii) *chacune des fonctions* f_i *est harmonique et leurs gradients sont orthogonaux et de même norme :*

$$(*) \qquad \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle = \lambda^2(x)\delta_{ij}.$$

Les morphismes harmoniques admettent également une interprétation probabiliste. Il s'agit en fait d'une généralisation d'un résultat classique de P. Lévy (*voir* par exemple [8] ou [4]) assurant que le mouvement brownien plan est invariant par transformation conforme. Plus précisément, en 1979, A. Bernard, E. A. Campbell et A. M. Davie [3] ont démontré que :

PROPOSITION 4. – *Soient* f *une fonction d'un domaine* $U \subset \mathbf{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}^p$ *et* $(B_t)_{0 \leq t \leq \tau}$ *un mouvement brownien de* $\mathbf{R}^n$ *issu de* $B_0 \equiv b_0 \in U$, *arrêté au premier instant* τ *de sortie de* U. *L'application* f *est un morphisme harmonique si et seulement si les trajectoires du processus* $(f(B_t))_{0 \leq t \leq \tau}$ *sont celles d'un mouvement brownien de* $\mathbf{R}^p$.

Le cas des morphismes harmoniques non-constants f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^3$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ a été plus particulièrement étudié par A. Bernard, E. A. Campbell et A. M. Davie [3] qui ont montré que les lignes de niveau de ces applications sont des segments de droites non concourants dans U. Réciproquement, la propriété suivante fournit une autre caractérisation des morphismes harmoniques :

PROPOSITION 5 [3]. – *Soit U un domaine de $\mathbf{R}^3$ et $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbf{R}^2$, une application deux fois continûment différentiable. Supposons que f vérifie :*

(i) *par chaque point de U, il existe un segment sur lequel f est constante,*

(ii) *les gradients de f_1 et f_2 sont orthogonaux et de même norme :*

$$(*) \qquad \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle = 0 \qquad et \qquad ||\nabla f_1|| = ||\nabla f_2||.$$

Alors f est un morphisme harmonique.

2. PREUVE DU THÉORÈME 1

La preuve de P. Baird et J. C. Wood [2] du théorème 1 repose sur les trois points suivants :

(1) Les lignes de niveau d'un morphisme harmonique non-constant de $\mathbf{R}^3$ dans une surface de Riemann sont des droites (ce résultat est dû à A. Bernard, E. A. Campbell et A. M. Davie [3]),

(2) Les directions de ces droites orientées forment un morphisme harmonique $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{S}^2$ (ce point est démontré par P. Baird et J. C. Wood [2], par une technique de calcul différentiel dans la Grassmannienne des plans orientés de $\mathbf{R}^3$),

(3) Un argument sophistiqué de géométrie différentielle faisant appel à la classification de certaines applications méromorphes d'une surface de Riemann N à valeurs dans $\mathbf{C}^3$.

Remarque. – P. Baird et J. Eells ([1], p. 15) ont généralisé le point (1) en démontrant que les lignes de niveau de tout morphisme harmonique à valeurs dans une surface de Riemann et qui est une submersion, sont minimales.

Notre démonstration utilise le point (1) et le point (2) (que nous démontrons plus simplement en annexe), ainsi que le lemme suivant, dont la démonstration est de nature probabiliste (dans l'esprit de [3]) :

LEMME 6. – *Soit* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *un morphisme harmonique. Désignons par* $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{S}^2$ *le morphisme harmonique associé à la direction des droites de niveau de* f. *Supposons que* ϕ *ne soit pas constant. Nous supposerons également que la droite de niveau de* f *passant par l'origine* $\overline{0} = (0, 0, 0)$ *coïncide avec l'axe* $(0z)$ *orienté positivement. Alors, il existe* $\epsilon_0 > 0$ *tel que* $\overline{0}$ *soit l'unique point du disque* $B(\overline{0}, \epsilon_0) \cap \{z = 0\}$ *dont l'image par* ϕ *est* $\phi(\overline{0}) = (0, 0, 1)$. *En d'autres termes, dans un voisinage suffisamment petit de* $\overline{0}$, *il n'y a pas de droite de niveau de* f *parallèle à* $(0z)$ *et distincte de* $(0z)$.

Preuve. – Un morphisme harmonique est analytique réel et cette propriété est préservée lorsque l'on se restreint au plan $\{z = 0\}$. Par conséquent, pour tout $\epsilon_0 > 0$ pris suffisamment petit, l'image réciproque de $\phi(\overline{0})$ par ϕ dans le disque $B(\overline{0}, \epsilon_0) \cap \{z = 0\}$ est de la forme $M \times \{0\}$, où M un sous-ensemble connexe M de $\mathbf{R}^2$. Supposons que l'ensemble connexe M contienne au moins deux points. Il n'est donc pas polaire pour le mouvement brownien plan. L'ensemble $M \times \mathbf{R}$ de $\mathbf{R}^3$ est alors visité avec une probabilité strictement positive par le mouvement brownien de $\mathbf{R}^3$. Or, par définition de M, $\phi(M \times \mathbf{R}) = \phi(M \times \{0\})$ est un point dans $\mathbf{S}^2$, ce qui est absurde en vertu de la proposition 4. En effet, considérons un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ issu d'un point $B_0 \equiv b_0 \notin M \times \mathbf{R}$. Le processus $(\phi(B_t))_{t \geq 0}$ a les mêmes trajectoires qu'un mouvement brownien sphérique issu de $\phi(b_0)$. Il ne visite donc pas le point $\phi(M \times \mathbf{R})$ (car il est bien connu que les points sont polaires pour le mouvement brownien sphérique), ce qui contredit le fait que $(B_t)_{t \geq 0}$ visite l'ensemble $M \times \mathbf{R}$ avec une probabilité strictement positive. □

Nous allons démontrer le théorème 1 par l'absurde. Supposons donc que le morphisme harmonique $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ne se factorise pas par une projection orthogonale, ou, ce qui est équivalent, que le morphisme harmonique ϕ associé à f ne soit pas constant. Nous noterons D_p la droite de niveau de f passant par p. Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que D_0 coïncide avec l'axe $(0z)$ orienté positivement.

Notons :

$$C_\epsilon = \{(\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta, 0), \theta \in [0, 2\pi]\}, \qquad \epsilon > 0$$

et

$$\Gamma_\epsilon = \bigcup_{p \in C_\epsilon} D_p$$

et désignons par U_ϵ la composante connexe de $\mathbf{R}^3 \backslash \Gamma_\epsilon$ contenant l'origine $\overline{0}$.

On a alors le résultat suivant :

LEMME 7. – *Sous l'hypothèse que le morphisme ϕ associé à f n'est pas constant, pour tout $\epsilon > 0$ pris suffisamment petit, la composante connexe U_ϵ contient un demi-cône d'axe $(0z)$.*

Preuve. – Fixons $\epsilon_0 > 0$ vérifiant la propriété du lemme 6 et choisissons $\epsilon < \epsilon_0/2$ de sorte que l'image par ϕ de la boule centrée à l'origine et de rayon 2ϵ soit incluse dans la demi-sphère supérieure. Fixons $p = (\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta, 0) \in C_\epsilon$. D'après le lemme 6, la droite D_p associée à ce point n'est pas parallèle à l'axe $(0z)$ et un calcul élémentaire montre que le point $(0, 0, z(\theta))$ de l'axe $(0z)$ réalisant la distance de l'axe $(0z)$ à la droite D_p vérifie :

$$z(\theta) = -\epsilon \frac{(\phi_1(p) \cos\theta + \phi_2(p) \sin\theta)\phi_3(p)}{\phi_1(p)^2 + \phi_2(p)^2}.$$

Notons $s = \sup\{z(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$. L'origine $\overline{0}$ étant la seule préimage de $(0, 0, 1)$ par ϕ dans $B(\overline{0}, 2\epsilon) \cap \{z = 0\}$, on a $s < +\infty$.

L'ensemble Γ_ϵ est fermé et U_ϵ est ouvert car c'est une composante connexe de $\mathbf{R}^3 \backslash \Gamma_\epsilon$. D'après [5], un morphisme harmonique non-constant est une application ouverte donc $\phi(U_\epsilon)$ est un ouvert de $\mathbf{S}^2$ contenant $\phi(\overline{0})$. Par conséquent, il contient strictement une calotte sphérique ouverte de centre $\phi(\overline{0})$ et de rayon $\alpha > 0$. Montrons que U_ϵ contient le demi-cône V d'axe $(0z)$ d'ouverture α et de sommet $S = (0, 0, s)$. En effet, supposons que V intersecte Γ_ϵ en un point (x_0, y_0, z_0). Les coordonnées de ce point vérifient l'inégalité

$$x_0^2 + y_0^2 \leq \tan^2\alpha \ (z_0 - s)^2$$

et il existe $\theta \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tels que

$$(x_s, y_s, s) \in D_{(\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta, 0)}$$

et

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_s, y_s, s) + \lambda\phi(\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta, 0).$$

Or

$$x_0^2 + y_0^2 - \tan^2\alpha(z_0 - s)^2 = x_s^2 + y_s^2 + (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \tan^2\alpha\phi_3^2)\lambda^2 + 2\lambda(x_s\phi_1 + y_s\phi_2),$$

cette quantité étant strictement positive en vertu de l'inégalité $s \geq z(\theta)$. Le demi-cône considéré est donc inclus dans U_ϵ. $\square$

Le lemme 7 implique à son tour le résultat suivant :

LEMME 8. – *Deux droites de niveau distinctes d'un morphisme harmonique* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *ne sont pas parallèles.*

Preuve. – Raisonnons par l'absurde et supposons que f ait deux droites de niveau parallèles et distinctes. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ces droites coïncident avec l'axe $(0z)$ et la droite D, parallèle à $(0z)$ et passant par le point $(1,0,0)$. Considérons, pour $\epsilon > 0$, les ensembles C_ϵ, U_ϵ et un demi-cône V d'axe $(0z)$ inclus dans U_ϵ, dont l'existence est assurée par le lemme 7. Pour $\epsilon > 0$ pris suffisamment petit, on aura bien évidemment $D \not\subset U_\epsilon$. Or D intersecte nécessairement le demi-cône V, d'axe parallèle à D. La droite D intersecte donc le bord de U_ϵ, formé de droites de niveau de f. C'est impossible car, f étant défini sur $\mathbf{R}^3$, deux droites de niveau ne sont pas concourantes. $\square$

Reprenons la preuve du théorème 1. Nous sommes maintenant en mesure d'établir une contradiction. Soit V l'image par ϕ de la boule ouverte B centrée à l'origine et de rayon 1. L'application ϕ étant ouverte, V est un ouvert de $\mathbf{S}^2$. Nous allons montrer, à l'aide du lemme 1, que $\phi(\mathbf{R}^3)$ n'intersecte pas l'ouvert $-V$ de $\mathbf{S}^2$. Il en résultera que l'image de $\phi(\mathbf{R}^3)$ par une projection stéréographique $\tilde{\pi}$ admettant comme pôle un point quelconque de $-V$ est bornée dans $\mathbf{R}^2$. L'application $\tilde{\pi} \circ \phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, obtenue en composant deux morphismes harmoniques, est un morphisme harmonique. Le théorème de Liouville appliqué à chacune des coordonnées de $\tilde{\pi} \circ \phi$ (qui sont des fonctions harmoniques) nous permet alors d'affirmer que ϕ est constante, d'où la contradiction souhaitée.

Il reste à montrer que $\phi^{-1}(-V) = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe deux points p_1 et p_2 de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\phi(p_1) = \phi_0 \in V$ et $\phi(p_2) = -\phi_0$. Ces points p_1 et p_2 ne peuvent appartenir à la même droite de niveau de f car ϕ est constant sur ces droites : ils sont donc nécessairement situés sur deux droites de niveau parallèles et distinctes, ce qui est absurde en vertu du lemme 8. $\square$

ANNEXE

Nous donnons ici une démonstration élémentaire du fait que les direction des droites de niveau orientées d'un morphisme harmonique de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ forment un morphisme harmonique de $\mathbf{R}^3$ à valeurs dans $\mathbf{S}^2$.

Notons $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ un morphisme harmonique et K, l'ensemble de ses points critiques :

$$K = \{p \in \mathbf{R}^3, df(p) \text{ n'est pas surjective}\}.$$

En un point p de $\mathbf{R}^3 \backslash K$, nous désignerons par

$$\phi(p) = (\phi_1(p), \phi_2(p), \phi_3(p))$$

le vecteur directeur unitaire de la droite de niveau de f passant par p. Ce vecteur est déterminé de manière unique si l'on impose que le repère $(\nabla f_1(p), \nabla f_2(p), \phi(p))$ soit direct, ce qui fournit l'expression suivante de ϕ en un point non critique :

$$\phi(p) = (\nabla f_1(p) \wedge \nabla f_2(p))/||\nabla f_1(p)||^2.$$

On a alors le lemme suivant dû à P. Baird et J.C. Wood [2] :

LEMME 9. – *L'application ϕ ainsi définie se prolonge continûment sur $\mathbf{R}^3$ en un morphisme harmonique à valeurs dans $\mathbf{S}^2$.*

Preuve. – P. Baird et J.C. Wood [2] semblent affirmer que la continuité de ϕ a été établie par A. Bernard, E. A. Campbell et A. M. Davie dans [3]. Cependant, c'est la direction des droites de niveau non orientées qui est en fait étudiée dans [3], c'est-à-dire, la composée de ϕ et de la projection $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{PR}^2$. Nous explicitons ici l'argument qui permet de prouver la continuité de $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{S}^2$. Par ailleurs, nous donnons une démonstration « à la main » de l'harmonicité de ϕ.

Il est immédiat de voir que ϕ est un morphisme harmonique sur $\mathbf{R}^3 \backslash K$. Soit en effet $p \notin K$. Le caractère « morphisme harmonique » étant une propriété locale, nous pouvons étudier la composée de ϕ et d'une projection stéréographique de pôle bien choisi. Cette nouvelle application est un morphisme harmonique défini dans un voisinage de p inclus dans $\mathbf{R}^3 \backslash K$ (et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$) si et seulement si ϕ un morphisme harmonique à valeurs dans $\mathbf{S}^2$. De plus, ses lignes de niveau sont des droites. D'après la proposition 5, il nous suffit donc de vérifier la condition $(*)$ portant sur les gradients. La projection stéréographique étant une application conforme, nous pouvons nous contenter de vérifier que la différentielle de ϕ, $d\phi : \mathrm{T}_p\mathbf{R}^3 \to \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbf{S}^2$, est la composition d'une projection $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ et d'une application linéaire conforme du plan.

Supposons par exemple

$$\nabla f_1(p) = (a, 0, 0) \quad \text{et} \quad \nabla f_2(p) = (0, a, 0) \quad \text{avec } a \in \mathbf{R}^*.$$

On a alors $\phi(p) = (0,0,1)$, $\mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbf{S}^2 = \{z = 1\}$ et nous devons vérifier que les vecteurs $\nabla\phi_1(p)$ et $\nabla\phi_2(p)$ sont orthogonaux et de même norme. Calculons ces gradients en p (on notera $f_{1x} = \partial f_1/\partial x$, $f_{1xy} = \partial^2 f_1/\partial x \partial y$, ...) :

$$\nabla\phi_1(p) = -\nabla f_{1z}/a \qquad \text{et} \qquad \nabla\phi_2(p) = -\nabla f_{2z}/a.$$

Par ailleurs,

$$0 = \nabla(||\nabla f_1||^2 - ||\nabla f_2||^2)(p) = 2a(\nabla f_{1x}(p) - \nabla f_{2y}(p))$$

et

$$0 = \nabla(\langle\nabla f_1, \nabla f_2\rangle)(p) = a(\nabla f_{2x}(p) + \nabla f_{1y}(p)) \ .$$

L'harmonicité de f et ces dernières égalités impliquent $f_{1zz}(p) = f_{2zz}(p) = 0$, puis $\nabla f_{2z}(p) = (-f_{1yz}(p), f_{1xz}(p), 0)$. Les deux vecteurs $\nabla\phi_1(p)$ et $\nabla\phi_2(p)$ sont donc orthogonaux et de même norme, ce qui prouve la condition $(*)$.

Le prolongement de ϕ en un point critique p se déduit de la continuité des directions des droites de niveau non orientées (*voir* A. Bernard, E. A. Campbell et A. M. Davie [3]) et du lemme suivant dû à B. Fuglede [5] :

LEMME 10. – *L'ensemble K des points critiques d'un morphisme harmonique non constant est polaire pour le mouvement brownien.*

Considérons en effet la boule fermée B_ϵ centrée en p et de rayon $\epsilon > 0$. Le lemme 10 implique que $B_\epsilon \backslash K$ est connexe. L'ensemble $\overline{\phi(B_\epsilon \backslash K)} \subset \mathbf{S}^2$ est par conséquent connexe, ainsi que l'ensemble

$$E = \bigcap_{\epsilon \searrow 0} \overline{\phi(B_\epsilon \backslash K)},$$

constitué des valeurs d'adhérence de ϕ en p. Or, l'image de E par la projection $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{PR}^2$ coïncide avec l'ensemble des directions des droites de niveau non orientées de f en p ; l'ensemble E est donc un singleton.

L'application ϕ est donc un morphisme harmonique de $\mathbf{R}^3 \backslash K$ dans $\mathbf{S}^2$ continu sur $\mathbf{R}^3$. Considérons un ouvert U de $\mathbf{S}^2$ et une fonction harmonique h sur U. La fonction composée $h \circ \phi$ est harmonique sur $\phi^{-1}(U)\backslash K$ et continue sur $\phi^{-1}(U)$. L'ensemble K étant polaire d'après le lemme 10, un théorème classique de prolongement de fonctions harmoniques (*voir* par exemple [6]) nous permet d'affirmer que $h \circ \phi$ est harmonique sur $\phi^{-1}(U)$. L'application ϕ est donc un morphisme harmonique sur $\mathbf{R}^3$.

Remarque. – La continuité de ϕ implique que l'orientation d'une droite de niveau est constante le long de cette droite.

RÉFÉRENCES

[1] P. Baird et J. Eells, A Conservation Law for Harmonic Maps, *Geometry Symposium Utrecht 1980*, Lecture Notes in Mathematics n° **894**, Springer-Verlag.

[2] P. Baird et J.C. Wood, Bernstein Theorems for Harmonic Morphisms from $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{S}^3$, *Math. Ann.*, vol. **280**, 1988, p. 579-603.

[3] A. Bernard, E. A. Campbell et A. M. Davie, Brownian Motion and Generalized Analytic and Inner Functions, *Ann. Inst. Fourier,* vol. **29**, 1979, p. 207-228.

[4] R. Durrett, *Brownian Motion and Martingales in Analysis,* Wadsworth, Monterey, Calif. (1984).

[5] B. Fuglede, Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds, *Ann. Inst. Fourier,* vol. **28**, 1978, p. 107-144.

[6] L. L. Helms, *Introduction to Potential Theory,* Wiley-Interscience, New York London Sydney (1969).

[7] C. G. J. Jacobi, Über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. *Crelle Reine Angew. Math.*, vol. **36**, 1847, p. 113-134.

[8] D. Revuz et M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

(Manuscrit reçu le 24 octobre 1995;
révisé le 24 juin 1996.)