ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN PICARD

Formules de dualité sur l'espace de Poisson

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 4 (1996), p. 509-548

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_4_509_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 4, 1996, p. 509-548 *Probabilités et Statistiques*

Formules de dualité sur l'espace de Poisson

par

Jean PICARD

Laboratoire de Mathématiques Appliquées
URA 1501 du CNRS
Université Blaise Pascal
63177 Aubière Cedex, France.

RÉSUMÉ. – La formule d'intégration par parties de l'espace de Wiener est transportée sur l'espace de Poisson, où elle est considérée comme une conséquence d'une formule d'isométrie. Diverses applications sont ensuite abordées : changements de probabilité obtenus en ajoutant ou retranchant des masses à la mesure de Poisson; étude d'une notion de mesure de Gibbs et lien avec les mesures réversibles pour l'évolution d'un système de particules en interaction; plus généralement, étude des mesures invariantes pour ce système.

Mots clés : Espace de Poisson; intégration par parties; intégrales stochastiques anticipantes; changements de probabilité; systèmes de particules en interaction; mesures de Gibbs; mesures invariantes.

ABSTRACT. – The integration by parts formula on the Wiener space is transferred to the Poisson space, where it is considered as a consequence of an isometry formula. Some applications are then dealt with: changes of measure obtained by adding or substracting masses to the Poisson measure; study of a notion of Gibbs measure, and relation with the reversible measures for the evolution of an interacting particle system; more generally, study of the invariant measures for this system.

A.M.S. Classification : 60 G 57, 60 J 75, 60 H 07.

0. INTRODUCTION

La formule d'intégration par parties sur l'espace de Wiener, qui est à la base du calcul de Malliavin, exprime la dualité entre un opérateur de gradient (la dérivée de Malliavin) et un opérateur de divergence (l'intégrale de Skorokhod); cette formule repose sur la propriété de représentation chaotique du processus de Wiener; plus précisément, l'espace H des variables aléatoires de carré intégrable sur l'espace de Wiener peut se décomposer en une somme hilbertienne de chaos, et les opérateurs de gradient et de divergence opèrent de façon simple sur les chaos (*voir* par exemple le chapitre XXI de [4]). On peut en fait construire un espace de Hilbert abstrait, l'espace de Fock, isomorphe à H, sur lequel on peut définir des opérateurs d'annihilation et de création adjoints l'un de l'autre et qui correspondent respectivement aux opérateurs de gradient et de divergence sur H. Une conséquence de cette remarque est que la formule d'intégration par parties, qui peut donc s'écrire sur l'espace de Fock, peut être transportée à tout processus ayant la propriété de représentation chaotique; l'exemple le plus simple est le processus de Poisson, pour lequel le calcul stochastique non adapté est construit dans [5]. Pour que la formule obtenue par transport ait un intérêt, il faut cependant donner une interprétation intuitive aux opérateurs de création et d'annihilation sur l'espace des variables de ce processus. Or il se trouve qu'une telle interprétation existe dans le cas de l'espace de Poisson (*voir* [16], [17]) et permet donc d'obtenir une formule d'intégration par parties sur cet espace; nous désirons étudier plus en détail cette formule et quelques unes de ses conséquences.

Une mesure aléatoire λ^+ sur $\mathbb{R}_+$ de loi de Poisson d'intensité λ^- vérifie la propriété

$$\mathbb{E} \int Z_t d\lambda^+(t) = \mathbb{E} \int Z_t d\lambda^-(t)$$

pour tout processus prévisible positif Z; au §1, nous allons vérifier que cette formule est aussi satisfaite par les processus Z anticipants, pourvu que Z_t ne dépende pas de la présence d'un saut de λ^+ en t; cette propriété permet en fait de caractériser la loi de Poisson (*voir* [15]) et est à la base de tous nos autres résultats; en particulier, au §2, nous en déduirons une formule de dualité dont la formule d'intégration par parties sur l'espace de Fock est un cas particulier; une application de ce résultat sera d'obtenir une expression pour la propriété de représentation prévisible du processus de Poisson standard. Signalons également que dans [9] une formule de dualité assez voisine de la notre est étudiée.

La principale différence avec le cas de l'espace de Wiener est que l'opérateur d'annihilation n'est plus une dérivation; ceci explique que les auteurs désirant appliquer le calcul de Malliavin aux processus avec sauts se soient plutôt tournés vers d'autres opérateurs obtenus en déplaçant infinitésimalement les points chargés par la mesure de Poisson (*voir* [1], [3], ou encore [21], [22] qui utilise une décomposition chaotique d'un type différent). Nous appliquerons néanmoins notre formule de dualité à l'étude des mesures absolument continues par rapport à la loi de Poisson. Une mesure ponctuelle peut être vue comme un système aléatoire de particules (en appelant ainsi les points chargés par la mesure); nous pouvons alors ajouter ou retrancher des particules à ce système; au §3, nous étudirons les changements de probabilités résultant de ces transformations, ce qui peut être vu comme un analogue du problème de Girsanov anticipant. Au §4, nous introduirons une notion de mesure de Gibbs sur l'espace de Poisson équivalente à celle de [15]. Au §5, nous considérerons des systèmes de particules en évolution du type de ceux étudiés dans [11]; plus précisément, les particules seront immobiles, l'évolution se manifestant par la naissance et la mort de particules; dans le cas où le nombre de particules est fini, nous étudirons l'existence et l'unicité de mesures invariantes pour une telle évolution, et expliciterons le lien entre la réversibilité de la mesure invariante et les mesures de Gibbs du §4; enfin, au §6, nous calculerons la mesure invariante dans un cas particulier au moyen d'un calcul sur les chaos. À chaque étape, nous indiquerons les propriétés analogues valables sur l'espace de Wiener.

1. UNE FORMULE D'ISOMÉTRIE

Nous commençons par introduire les notations et hypothèses valables dans tout l'article. Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace lusinien (c'est-à-dire isomorphe à une partie borélienne d'un espace compact métrisable) muni d'une mesure σ-finie diffuse non nulle λ^-; alors l'espace mesuré $(T, \mathcal{T}, \lambda^-)$ est isomorphe à l'intervalle fini ou infini $[0, \lambda^-(T)]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit Ω l'espace des mesures ω sur T à valeurs entières, telles que $\omega(\{t\}) \leq 1$ pour tout t et $\omega(A) < \infty$ dès que $\lambda^-(A) < \infty$; on considère alors la mesure aléatoire sur T définie sur Ω par

$$\lambda^+(\omega, A) = \omega(A),$$

la tribu $\mathcal{F}$ sur Ω engendrée par les applications $\lambda^+(A)$, $A \in \mathcal{T}$, et la probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle λ^+ est une mesure de

Poisson d'intensité λ^- (nous ne désirons pas compléter les tribus); si par isomorphisme on se ramène au cas où T est un intervalle réel et λ^- est la mesure de Lebesgue, le processus $\lambda^+([0,t])$ devient alors un processus de Poisson standard. On note $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ la mesure de Poisson compensée. Un point chargé par λ^+ sera appelé une particule. Sur $(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{F})$ on considère les mesures

$$\mu^\pm(dt, d\omega) = \lambda^\pm(\omega, dt)\mathbb{P}(d\omega), \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Si $A \in \mathcal{T}$, on note $\mathcal{F}_A$ la tribu de Ω engendrée par les variables aléatoires $\lambda^+(B)$, $B \subset A$. Sur $T \times \Omega$ on considère la sous-tribu $\mathcal{I}$ de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{F}$ engendrée par les parties $A \times U$, $A \in \mathcal{T}$ et $U \in \mathcal{F}_{A^c}$. Pour tout t dans T, on introduit les transformations mesurables ε_t^+ et ε_t^- de Ω dans lui-même définies par

$$(\varepsilon_t^+\omega)(A) = \omega(A \setminus \{t\}) + 1_{\{t \in A\}}, \qquad (\varepsilon_t^-\omega)(A) = \omega(A \setminus \{t\}),$$

ainsi que l'opérateur D_t agissant sur les variables aléatoires réelles par

$$D_t F = F \circ \varepsilon_t^+ - F \circ \varepsilon_t^-.$$

Les transformations $\varepsilon_t^\pm$ agissent en ajoutant ou retranchant une particule en t. Si B est une partie mesurable de T, on définit de même

$$(\varepsilon_B^-\omega)(A) = \omega(A \setminus B).$$

Nous appellerons processus défini sur Ω et indexé par T toute application mesurable sur $T \times \Omega$; nous dirons qu'un processus réel est à support borné s'il est nul hors d'une partie de λ^- mesure finie.

Remarque. – On a $D_t F = (F \circ \varepsilon_t^+ - F)$ μ^- presque partout, donc D est l'opérateur de translation de [16]; cela implique que si on se limite aux variables $F \in L^2(\mathbb{P})$ telles que $D_t F \in L^2(\mu^-)$, D apparaît comme l'opérateur d'annihilation sur $L^2(\mathbb{P})$ vu comme l'espace de Fock de $L^2(T, \lambda^-)$. Cependant, nous désirons étudier $D_t F$ sous la mesure $|\mu|$, et cela exige plus que la structure d'espace de Fock.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la formule qui est à la base de tous nos résultats.

THÉORÈME 1. – *Les mesures μ^+ et μ^- coïncident sur $\mathcal{I}$; en particulier, si Z_t est un processus $\mathcal{I}$ mesurable et $\mu^\pm$ intégrable, on a*

$$\mathbb{E} \int Z_t d\lambda(t) = 0.$$

De plus Z est $\mathcal{I}$ mesurable si et seulement si $D_t Z_t = 0$.

Démonstration. – Il suffit de vérifier l'égalité de μ^+ et μ^- sur le système de générateurs $A \times U$, $A \in \mathcal{T}$, $U \in \mathcal{F}_{A^c}$, qui est stable par intersection finie. Or

$$\mu^-(A \times U) = \lambda^-(A)\mathbb{P}[U] = \mathbb{E}[\lambda^+(A)]\mathbb{P}[U] = \mathbb{E}[\lambda^+(A)1_U] = \mu^+(A \times U)$$

car $\lambda^+(A)$ et U sont indépendants. En ce qui concerne la dernière partie de l'énoncé, il est clair que si Z est la fonction indicatrice d'un ensemble $A \times U$ avec $U \in \mathcal{F}_{A^c}$, alors $D_t Z_t = 0$; par le théorème de la classe monotone, on en déduit que tout processus $\mathcal{I}$ mesurable vérifie cette propriété; il nous suffit donc de vérifier la réciproque. Pour cela, on peut se ramener au cas où T est un intervalle de $\mathbb{R}_+$; on considère alors la double suite A_k^n, $k \geq 0$, $n \geq 1$, de parties mesurables de T définies par $A_k^n = [k/n, (k+1)/n) \cap T$. Alors

$$Z_t \circ \varepsilon_t^- = \lim_n \sum_k (Z_t \circ \varepsilon_{A_k^n}^-) 1_{A_k^n}(t)$$

car t ne peut pas être point d'accumulation de particules; cela montre que $Z_t \circ \varepsilon_t^-$ est $\mathcal{I}$ mesurable; or si $D_t Z_t = 0$, on a $Z_t = Z_t \circ \varepsilon_t^-$. □

COROLLAIRE 1. – *Soit Z_t un processus positif ou $\mu^\pm$ intégrable. Alors*

$$\mathbb{E} \int Z_t d\lambda^\pm(t) = \mathbb{E} \int Z_t \circ \varepsilon_t^\pm d\lambda^\mp(t).$$

Démonstration. – Il suffit d'appliquer le théorème 1 au processus $\mathcal{I}$ mesurable $Z_t \circ \varepsilon_t^\pm$ en remarquant que $\lambda^\pm$ ne charge pas la partie où $Z_t \neq Z_t \circ \varepsilon_t^\pm$, ce qui implique que

$$\int Z_t d\lambda^\pm(t) = \int Z_t \circ \varepsilon_t^\pm d\lambda^\pm(t).$$

□

Remarque. – Cette formule caractérise la loi de Poisson : *voir* [15] et les références qui y sont citées.

COROLLAIRE 2. – *Pour tout processus Z_t, posons*

$$Z'_t = (Z_t \circ \varepsilon_t^+)(1 - \lambda^+(\{t\})) + (Z_t \circ \varepsilon_t^-)\lambda^+(\{t\}).$$

Pour tout $p \geq 1$, l'application $Z \mapsto Z'$ est une isométrie involutive de $L^p(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{F}, |\mu|)$, le sous-espace des éléments invariants étant constitué des processus $\mathcal{I}$ mesurables; pour $p = 2$, c'est la symétrie orthogonale par *rapport à* $L^2(T \times \Omega, \mathcal{I}, |\mu|)$. *De plus, l'application* $(Z_t) \mapsto (D_t Z_t)$ *est continue de* $L^p(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{F}, |\mu|)$ *dans lui-même.*

Démonstration. – On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int |Z'_t|^p\,|d\lambda(t)| &= \mathbb{E}\int |Z_t \circ \varepsilon_t^+|^p d\lambda^-(t) + \mathbb{E}\int |Z_t \circ \varepsilon_t^-|^p d\lambda^+(t)\\ &= \mathbb{E}\int |Z_t|^p\,|d\lambda(t)|\end{aligned}$$

en appliquant le corollaire 1. La propriété de symétrie orthogonale dans le cas $p = 2$ s'en déduit aisément; quant à la continuité de $Z \mapsto DZ$, elle peut se montrer soit directement, soit en remarquant que $|D_t Z_t| = |Z'_t - Z_t|$. □

Comme μ^+ et μ^- sont étrangères, l'espace $L^p(|\mu|)$ peut être vu comme la somme de ses deux sous-espaces $L^p(\mu^\pm)$, la décomposition d'un processus Z étant

$$Z_t = Z_t \lambda^+(\{t\}) + Z_t\big(1 - \lambda^+(\{t\})\big).$$

L'application $Z \mapsto Z'$ induit alors deux isométries inverses l'une de l'autre entre les deux espaces $L^p(\mu^\pm)$. Remarquons que ces propriétés d'isométrie n'ont pas d'équivalent sur l'espace de Wiener; en particulier, l'opérateur $(Z_t) \mapsto (D_t Z_t)$ ne peut pas être défini pour tout Z; on peut le considérer comme la trace de $(D_t Z_s)$, mais il s'agit alors d'un opérateur de type différent du notre. Nous allons maintenant voir comment le théorème 1 se généralise au cas de processus à plusieurs paramètres et en déduire un calcul de variance.

COROLLAIRE 3. – *Soit* Z_τ, $\tau = (t_1, \ldots, t_k) \in T^k$ *un processus mesurable positif à* k *paramètres qui s'annule dès que deux paramètres sont égaux. On suppose que pour toute suite* α_j *à valeurs dans* $\{+, -\}$ *et tout* $\tau = (t_1, \ldots, t_k)$,

$$Z_\tau \circ \varepsilon_{t_1}^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \varepsilon_{t_k}^{\alpha_k} = Z_\tau.$$

Alors l'expression

$$\mathbb{E}\int Z_\tau d\lambda^{\alpha_1}(t_1) \ldots d\lambda^{\alpha_k}(t_k)$$

ne dépend pas de la suite α_j.

Démonstration. – Il suffit de vérifier que l'expression est inchangée quand on modifie un des α_j, par exemple α_k. Soit Y le processus

$$Y_t = \int Z(t_1, \ldots, t_{k-1}, t) d\lambda^{\alpha_1}(t_1) \ldots d\lambda^{\alpha_{k-1}}(t_{k-1}).$$

Comme Z s'annule dès que deux paramètres sont égaux, l'intégrale ne porte que sur les instants $t_j \neq t$, et comme de plus

$$Z(t_1,\dots,t_k,t)\circ\varepsilon_t^+ = Z(t_1,\dots,t_k,t)\circ\varepsilon_t^-,$$

on a $Y_t\circ\varepsilon_t^+ = Y_t\circ\varepsilon_t^-$; le théorème 1 permet alors de conclure. □

COROLLAIRE 4. – *Soit Z_t un processus $\mathcal{I}$ mesurable borné à support borné. Alors*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int Z_t d\lambda(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\int |Z_t|^2 d\lambda^\pm(t) + \mathbb{E}\iint D_t Z_s\, D_s Z_t d\lambda^\pm(s) d\lambda^\pm(t).$$

Remarque. – Quand nous aurons vu que pour les processus $\mathcal{I}$ mesurables, l'intégration par rapport à λ correspond à l'opérateur de création, cette formule avec $\pm = -$ est alors une formule valable sur l'espace de Fock (proposition 3.1 de [18]).

Démonstration. – Le corollaire 3 montre que le membre de droite ne dépend pas des indices $\pm$ choisis, donc montrons la formule par exemple avec les indices $+$. On écrit

$$\int Z_t d\lambda(t) = \int Z_t d\lambda^+(t) - \int Z_t d\lambda^-(t)$$

et on décompose le carré. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int Z_t d\lambda^+(t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\iint Z_t Z_s d\lambda^+(s) d\lambda^+(t)\\ &= \mathbb{E}\iint (Z_t\circ\varepsilon_s^+)(Z_s\circ\varepsilon_t^+) d\lambda^+(s) d\lambda^+(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int Z_t d\lambda^-(t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\iint_{s\neq t} Z_t Z_s d\lambda^-(s) d\lambda^-(t)\\ &= \mathbb{E}\iint_{s\neq t} (Z_t\circ\varepsilon_s^-)(Z_s\circ\varepsilon_t^-) d\lambda^-(s) d\lambda^-(t)\\ &= \mathbb{E}\iint_{s\neq t} (Z_t\circ\varepsilon_s^-)(Z_s\circ\varepsilon_t^-) d\lambda^+(s) d\lambda^+(t)\\ &= \mathbb{E}\iint (Z_t\circ\varepsilon_s^-)(Z_s\circ\varepsilon_t^-) d\lambda^+(s) d\lambda^+(t)\\ &\quad - \mathbb{E}\int |Z_t|^2 d\lambda^+(t)\end{aligned}$$

en appliquant le corollaire 3, et en procédant de la même façon,

$$\mathbb{E}\left[\int Z_t d\lambda^+(t) \int Z_s d\lambda^-(s)\right] = \mathbb{E}\iint (Z_t \circ \varepsilon_s^-)(Z_s \circ \varepsilon_t^+) d\lambda^+(s) d\lambda^+(t)$$
$$- \mathbb{E}\int |Z_t|^2 d\lambda^+(t).$$

Le résultat s'obtient en combinant ces équations. □

2. FORMULES D'INTÉGRATION PAR PARTIES

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur D_t vérifie une formule d'intégration par parties; nous étudirons ensuite les liens avec d'autres propriétés de dualité, en particulier la dualité entre création et annihilation sur l'espace de Fock associé à $L^2(T, \lambda^-)$; cela nous conduira à donner une interprétation de l'opérateur de création semblable à celle de [17]. Dans le cas du processus de Poisson standard, nous en déduirons une formule explicite pour la représentation prévisible des variables intégrables.

THÉORÈME 2. – *Soient Z_t^1 et Z_t^2 deux processus; on suppose que $Z_t^1\, D_t Z_t^2$ et $Z_t^2\, D_t Z_t^1$ sont $|\mu|$ intégrables; alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int Z_t^1\, D_t Z_t^2\, d\lambda(t) &= \mathbb{E}\int Z_t^2\, D_t Z_t^1\, d\lambda(t) \\ &= \mathbb{E}\int D_t Z_t^1\, D_t Z_t^2\, d\lambda^-(t).\end{aligned} \tag{1}$$

Démonstration. – On décompose la première intégrale par rapport à λ et on utilise le corollaire 1 pour tout ramener à des intégrales par rapport à λ^-; on a

$$\mathbb{E}\int Z_t^1\, D_t Z_t^2\, d\lambda^+(t) = \mathbb{E}\int (Z_t^1 \circ \varepsilon_t^+) D_t Z_t^2\, d\lambda^-(t),$$

d'où

$$\mathbb{E}\int Z_t^1\, D_t Z_t^2\, d\lambda(t) = \mathbb{E}\int D_t Z_t^1\, D_t Z_t^2\, d\lambda^-(t).$$

Cette expression est symétrique en (Z^1, Z^2) donc est aussi égale au deuxième terme de (1). □

COROLLAIRE 5. – *Soit F une variable bornée et Z_t un processus $\mu^\pm$ intégrable. Alors*

$$\mathbb{E}\int Z_t\, D_t F\, d\lambda^\pm(t) = \mathbb{E}\big[F\int (Z_t \circ \varepsilon_t^\mp) d\lambda(t)\big].$$

Plus généralement, cette égalité est satisfaite dès que $Z_t D_t F$ et $F(Z_t \circ \varepsilon_t^\mp)$ sont respectivement $\mu^\pm$ et $|\mu|$ intégrables.

Démonstration. – On applique le théorème 2 avec $Z_t^1 = F$ et

$$Z_t^2 = Z_t\big(\lambda^+(\{t\}) - 1\big) \qquad \text{ou} \qquad Z_t^2 = Z_t \lambda^+(\{t\}).$$

□

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{S}$ des processus $\mathcal{I}$ mesurables Z_t qui sont bornés et à support borné; dans ce cas

$$\mathbb{E}\int Z_t D_t F\, d\lambda^-(t) = \mathbb{E}\big[F\int Z_t d\lambda(t)\big] \tag{2}$$

pour tout F borné et $\int Z_t d\lambda(t)$ est l'unique variable vérifiant cette propriété. Posons

$$\|Z\|^2 = \mathbb{E}\int |Z_t|^2 d\lambda^-(t) + \mathbb{E}\Big[\Big(\int Z_t d\lambda(t)\Big)^2\Big],$$

la variance de l'intégrale par rapport à λ étant donnée par le corollaire 4; soit $\overline{\mathcal{S}}$ la partie de $L^2(T \times \Omega, \mathcal{I}, \mu^-)$ constituée des processus Z_t tels qu'il existe une suite $Z^n \in \mathcal{S}$ qui converge vers Z dans $L^2(\mu^-)$ et qui est de Cauchy pour $\|.\|$. La formule d'intégration par parties (2) permet de montrer que l'opérateur

$$Z \mapsto \int Z_t d\lambda(t)$$

se prolonge de manière unique en un opérateur fermé δ_0 de $\overline{\mathcal{S}}$ dans $L^2(\mathbb{P})$, la valeur $\delta_0(Z)$ étant définie comme l'unique variable vérifiant

$$\mathbb{E}\big[F\delta_0(Z)\big] = \mathbb{E}\int Z_t D_t F d\lambda^-(t)$$

pour tout F borné à support borné; en particulier, $\delta_0(Z)$ coïncide avec l'intégrale de Stieltjes $\int Z_t d\lambda(t)$ lorsque $Z \in L^1(\mu^-) \cap \overline{\mathcal{S}}$. Le corollaire 4 permet de montrer que le domaine $\overline{\mathcal{S}}$ contient les processus $\mathcal{I}$ mesurables Z_t tels que

$$\mathbb{E}\int |Z_t|^2 d\lambda^-(t) + \mathbb{E}\iint |D_s Z_t|\,|D_t Z_s| d\lambda^-(s) d\lambda^-(t) < \infty. \tag{3}$$

En effet, Z peut être approché en moyenne quadratique par

$$Z_t^n = ((Z_t \vee (-n)) \wedge n) 1_{A_n}(t)$$

où A_n est une suite de parties mesurables de T de mesures finies qui croit vers T; alors, sous l'hypothèse (3),

$$\mathbb{E} \int |Z_t^m - Z_t^n|^2 d\lambda^-(t) + \mathbb{E} \iint D_s(Z_t^m - Z_t^n) D_t(Z_s^m - Z_s^n) d\lambda^-(s) d\lambda^-(t)$$

tend vers 0 par convergence dominée lorsque $m, n \to \infty$, donc Z^n est de Cauchy pour $\|.\|$.

Sortons du cadre des processus $\mathcal{I}$ mesurables et écrivons la formule du corollaire 5 dans le cas $\pm = -$; le membre de gauche est le produit scalaire dans $L^2(T \times \Omega, \mu^-)$ du processus Z_t et du processus $D_t F$; comme D est l'opérateur d'annihilation, l'intégrale du membre de droite fournit donc l'opérateur de création δ, c'est-à-dire l'analogue de l'intégrale de Skorokhod; son domaine est constitué des processus Z tels que $(Z_t \circ \varepsilon_t^-) \in \overline{\mathcal{S}}$ et il est défini par

$$\delta(Z) = \delta_0(Z \circ \varepsilon^-).$$

On vérifie alors facilement que δ coïncide avec la description qui en est donnée dans [17]. De plus, une condition suffisante d'appartenance au domaine de δ est à nouveau donnée par (3).

Exemple. – Considérons le cas du processus de Poisson standard, c'est-à-dire $T = \mathbb{R}_+$ et λ^- est la mesure de Lebesgue; soit $\mathcal{F}_t$ la filtration $\mathcal{F}_{[0,t]}$. Si Z_t est un processus prévisible, $D_s Z_t \, D_t Z_s$ est nul (*voir* le début de la démonstration du corollaire 6 ci-dessous) donc si Z est de plus de carré intégrable, il est dans le domaine de δ et il est facile de vérifier que $\delta(Z)$ coïncide avec l'intégrale de Ito de Z par rapport à λ.

Remarque 1. – Le corollaire 5 permet également d'obtenir la formule de dualité de [9], à savoir

$$\mathbb{E} \int (F \circ \varepsilon_t^+) Z_t d\lambda^-(t) = \mathbb{E}\big[F \int (Z_t \circ \varepsilon_t^-) d\lambda^+(t)\big].$$

Cette formule conduit à un opérateur qui dans le cas prévisible coïncide avec l'intégrale de Ito par rapport à λ^+ (au lieu de λ pour δ).

Remarque 2. – Soit Z un processus de carré intégrable; s'il est prévisible ou si $D_s Z_t$ est de carré $\lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P}$ intégrable, alors il est dans le domaine de δ. Dans le cas de l'espace de Wiener, ces deux conditions sont également suffisantes ([18]), mais nous ne pouvons pas les regrouper en une seule condition du type (3).

La propriété de représentation prévisible pour le processus de Poisson standard est bien connue; le résultat suivant, qui donne une forme explicite à cette représentation pourrait s'obtenir par des méthodes plus élémentaires, mais nous le présentons ici car c'est une application simple de la formule d'intégration par parties. En fait, une démonstration directe pourrait conduire à une autre démonstration du corollaire 5 dans le cas $\pm = -$.

COROLLAIRE 6. – *Soit Ω l'espace de Poisson standard muni de la filtration $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$; pour $\omega \in \Omega$ et pour $0 \leq s < t \leq \infty$, soit ω_t^s la restriction de la mesure ω à $[s,t[$. Soit F une variable aléatoire intégrable et soit*

$$Z_t(\omega) = \int (D_t F)(\omega_t^0 + \overline{\omega}_\infty^t) d\mathbb{P}(\overline{\omega}),$$

où par convention $Z_t(\omega)$ est nul lorsque l'expression n'est pas intégrable. Alors Z est prévisible, $\int_0^t |Z_s||d\lambda(s)|$ est presque sûrement fini pour tout t, et

$$\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[F] + \int_0^t Z_s d\lambda(s).$$

Remarque. – Sur l'espace de Wiener, la formule de représentation prévisible est bien connue pour les variables F de carré intégrable telles que DF est de carré intégrable ([19]); cette formule admet quelques extensions (affaiblissement des conditions d'intégrabilité [12], généralisation aux distributions [27]), mais on ignore la forme de la représentation pour des variables intégrables générales. Dans le cas qui nous occupe, si F est borné, on peut vérifier que le processus Z_t est la projection prévisible du processus $D_t F$. Une autre expression pour Z_t peut être obtenue en faisant des variations infinitésimales sur les instants de saut ([22], [7]), mais cette expression exige une régularité sur F.

Démonstration. – Nous commençons par vérifier qu'un processus Y_t est prévisible si et seulement si $Y_t(\omega) = Y_t(\omega_t^0)$; pour montrer que la condition est nécessaire, on la vérifie pour les processus

$$Y_t = 1_{]s_1,s_2]}(t) 1_A, \qquad A \in \mathcal{F}_{s_1}, \quad s_1 < s_2,$$

qui engendrent la tribu prévisible, et on conclut par un théorème de classe monotone; pour montrer qu'elle est suffisante, on remarque que pour tout $A \in \mathcal{T}$, le processus $\omega_t^0(A)$ est adapté et continu à gauche donc prévisible;

on en déduit que l'application $(t, \omega) \mapsto (t, \omega_t^0)$ est mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ muni de la tribu prévisible dans le même ensemble muni de la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{F}$; le processus $Y_t(\omega_t^0)$ est alors prévisible comme composé de cette application et de Y. En particulier, le processus Z_t est prévisible. Montrons maintenant que

$$\overline{Z}_t(\omega) = \int \left| D_t F(\omega_t^0 + \overline{\omega}_\infty^t) \right| d\mathbb{P}(\overline{\omega}) < \infty$$

pour presque tout (t, ω); soit Y_t un processus prévisible positif ou nul; alors

$$Y_t(\omega) = Y_t(\omega_t^0) = Y_t(\omega_t^0 + \overline{\omega}_\infty^t)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int Y_t \overline{Z}_t dt &= \iiint Y_t(\omega_t^0 + \overline{\omega}_\infty^t) \left| D_t F(\omega_t^0 + \overline{\omega}_\infty^t) \right| dt \, d\mathbb{P}(\omega) \, d\mathbb{P}(\overline{\omega}) \\ &= \mathbb{E} \int Y_t |D_t F| dt \\ &\leq \mathbb{E}\left[|F| \int Y_t dt + \int |F \circ \varepsilon_t^+| Y_t dt \right] \\ &= \mathbb{E}\left[|F| \int Y_t |d\lambda(t)| \right] \end{aligned} \tag{4}$$

où on a utilisé dans la dernière ligne le corollaire 1 et la $\mathcal{I}$ mesurabilité de Y. En prenant pour Y les indicatrices des intervalles $[0, \zeta_n]$, avec

$$\zeta_n = \inf\left\{ t; \int_0^t |d\lambda(s)| \geq n - 1 \right\}, \tag{5}$$

on a

$$\mathbb{E} \int_0^{\zeta_n} \overline{Z}_t dt \leq n \mathbb{E}[|F|],$$

donc $\overline{Z}$ est presque partout fini. De plus, $Z_t 1_{[0, \zeta_n]}$ est prévisible donc $\mathcal{I}$ mesurable; on en déduit que

$$\mathbb{E} \int_0^{\zeta_n} |Z_t| \, |d\lambda(t)| = 2\mathbb{E} \int_0^{\zeta_n} |Z_t| dt \leq 2n \mathbb{E}[|F|]$$

car $|Z| \leq \overline{Z}$, donc $\int_0^t |Z_s||d\lambda(s)|$ est presque sûrement fini. D'autre part, on sait qu'il existe un processus prévisible U_t tel que $\int_0^t |U_s||d\lambda(s)|$ est presque sûrement fini, et

$$\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[F] + \int_0^t U_s d\lambda(s). \tag{6}$$

Soit Y_t un processus prévisible borné dont le support est contenu dans $[0, \zeta_n \wedge \zeta_n']$, où ζ_n a été défini par (5), et

$$\zeta_n' = \inf\left\{t; \int_0^t |U_s| ds \geq n\right\}.$$

Alors, en procédant comme en (4),

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_s Y_s ds = \mathbb{E}\int_0^t D_s F\, Y_s ds = \mathbb{E}\left[F \int_0^t Y_s d\lambda(s)\right] = \mathbb{E}[M_t N_t]$$

où M_t est la martingale uniformément intégrable $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t]$ et N_t est la martingale bornée $\int_0^t Y_s d\lambda(s)$; le produit $M_t N_t$ est alors une semimartingale spéciale, le crochet prévisible

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t U_s Y_s ds$$

étant borné; la martingale locale $M_t N_t - \langle M, N\rangle_t$ est donc uniformément intégrable, donc

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_s Y_s ds = \mathbb{E}\langle M, N\rangle_t = \mathbb{E}\int_0^t U_s Y_s ds.$$

Ce résultat est valable pour tout n et tout Y prévisible borné à support dans $[0, \zeta_n \wedge \zeta_n']$, donc, comme Z et U sont prévisibles, on en déduit qu'ils coïncident μ^- presque partout; comme ils sont $\mathcal{I}$ mesurables, ils coïncident aussi $|\mu|$ presque partout, donc le corollaire se déduit de (6). $\square$

On remarque que si M_t désigne la martingale $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t]$, alors $Z_t = D_t M_t$, donc

$$dM_t = D_t M_t \, d\lambda(t).$$

En fait, cette propriété caractérise les martingales locales parmi les processus càdlàg adaptés à variation localement intégrable. Cette remarque permet de décrire toutes les martingales locales; soit F_0 une constante, et pour $n \geq 1$, soit $F_n(t_1, \ldots, t_n)$ une fonction borélienne définie sur $\{t_1 < \ldots < t_n\}$ et telle que pour presque tout $(t_1, \ldots, t_n)$, la fonction $t \mapsto F_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t)$ est localement intégrable; alors si $\xi_0 = 0$ et ξ_n, $n \geq 1$, désignent les temps de saut du processus de Poisson, le processus M_t défini sur $[\xi_n, \xi_{n+1}[$ par

$$M_{\xi_n} = F_n(\xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad dM_t/dt = M_t - F_{n+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$$

est une martingale locale, et toutes les martingales locales sont obtenues ainsi. Cependant un tel résultat est difficile à utiliser pour décrire les martingales locales convergeant vers une variable F; lorsque F est intégrable, le corollaire 6 fournit parmi celles-ci la martingale uniformément intégrable.

3. TRANSFORMATIONS DU SYSTÈME DE PARTICULES

Nous allons maintenant étudier diverses transformations du système de particules λ^+ afin de calculer les changements de loi qui en résultent. Dans le cas de l'espace de Wiener, on considère une transformation non linéaire du processus de Wiener qui consiste généralement à ajouter aux trajectoires du processus une variable à valeurs dans l'espace de Cameron-Martin; sous certaines hypothèses de régularité, on essaie alors d'exprimer la loi du processus transformé; cette étude est plus simple lorsque la transformation est inversible (*voir* [28] pour des cas non inversibles) et peut se ramener au calcul d'un déterminant ([18]); on sait maintenant étudier un certain nombre de cas, par exemple [2], [8]. Dans le cas de l'espace de Poisson, nous allons déplacer des particules, en ajouter et en retrancher; notons que ce type de transformation est assez vite non inversible (par exemple si on enlève le premier saut d'un processus de Poisson standard); si on considère le processus de Wiener comme une limite de processus de Poisson lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, cela signifie que des transformations non inversibles au niveau microscopique (c'est-à-dire sur l'espace de Poisson), peuvent devenir inversibles au niveau macroscopique (c'est-à-dire sur l'espace de Wiener). De plus, les transformations que nous considérerons seront en général aléatoires. Nous commençons par étudier le cas simple où on ne modifie le système de particules qu'en un point; pour cela, étudions la transformation qui pour un point t ajoute une particule en t s'il n'y en avait pas déjà une, et la supprime dans le cas contraire.

PROPOSITION 1. – *Soit Φ l'application de $T \times \Omega$ dans lui-même qui à (t, ω) fait correspondre $(t, \varepsilon_t^+ \omega)$ si $\omega(\{t\}) = 0$ et $(t, \varepsilon_t^- \omega)$ sinon. Soit Z_t un processus positif ou nul. L'image par Φ de la mesure de densité Z par rapport à $|\mu|$ est absolument continue par rapport à $|\mu|$ de densité Z' (processus défini au corollaire 2).*

Démonstration. – Soit Y_t un processus positif ou nul; alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int (Y \circ \Phi)_t Z_t |d\lambda(t)| &= \mathbb{E}\int (Y_t \circ \varepsilon_t^+) Z_t d\lambda^-(t) + \mathbb{E}\int (Y_t \circ \varepsilon_t^-) Z_t d\lambda^+(t)\\ &= \mathbb{E}\int Y_t (Z_t \circ \varepsilon_t^-) d\lambda^+(t)\\ &\quad + \mathbb{E}\int Y_t (Z_t \circ \varepsilon_t^+) d\lambda^-(t)\\ &= \mathbb{E}\int Y_t Z_t' |d\lambda(t)|.\end{aligned}$$

□

Si sur le système initial de loi $\mathbb{P}$, on choisit un point t avec une loi $Z_t|d\lambda(t)|$, et si on modifie l'état du système en ce point t, alors la proposition 1 implique que le système transformé a pour densité $\int Z'_t|d\lambda(t)|$ par rapport à $\mathbb{P}$.

Exemple 1. – Considérons une particule ζ, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans T et qui est presque sûrement chargée par λ^+; en appliquant la proposition 1 à $Z_t = 1_{\{\zeta=t\}}$, on obtient une formule de décomposition qui précise la loi jointe de ζ et du système résiduel $\varepsilon_\zeta^- \omega$ obtenu à partir de ω en supprimant la particule ζ; en remarquant que Z'_t est nul μ^+ presque partout, on en déduit que la loi de $(\zeta, \varepsilon_\zeta^- .)$ est absolument continue par rapport à μ^- de densité $Z_t \circ \varepsilon_t^+$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\big[G(\zeta, \varepsilon_\zeta^- .)\big] = \mathbb{E}\int G(t, .) 1_{\{\zeta \circ \varepsilon_t^+ = t\}} d\lambda^-(t).$$

En particulier la loi du système résiduel $\varepsilon_\zeta^- \omega$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ de densité $\lambda^-\{t; \zeta \circ \varepsilon_t^+ = t\}$, et ζ a pour densité $\mathbb{P}[\zeta \circ \varepsilon_t^+ = t]$ par rapport à λ^-. On peut aussi écrire

$$\mathbb{E}\big[G(\zeta, .)\big] = \mathbb{E}\int G(t, \varepsilon_t^+ .) 1_{\{\zeta \circ \varepsilon_t^+ = t\}} d\lambda^-(t)$$

ce qui fournit la mesure de Palm

$$\mathbb{E}\big[F \mid \zeta = t\big] = \mathbb{E}\big[F \circ \varepsilon_t^+ \mid \zeta \circ \varepsilon_t^+ = t\big].$$

Dans cet exemple, nous avons appliqué la proposition 1 pour un processus Z_t ne prenant que les valeurs 0 ou 1. Pour interpréter le résultat correspondant à des processus Z_t plus généraux, il nous faut considérer des variables aléatoires ζ floues, c'est-à-dire définies sur un espace de probabilité élargi; le passage de ω à $\varepsilon_\zeta^- \omega$ ou $\varepsilon_\zeta^+ \omega$ n'est alors plus déterminé par le système ω seul, mais est donné par une probabilité de transition. Soit Z_t^n une suite de processus positifs ou nuls dont l'intégrale par rapport à $|\lambda|$ est inférieure ou égale à 1, et considérons les opérateurs

$$\mathcal{A}_n F = \int Z_t^n \, D_t F \, d\lambda(t)$$

défini pour les variables F bornées. Si nous décomposons λ, nous pouvons écrire

$$\mathcal{A}_n F = \int Z_t^n (F - F \circ \varepsilon_t^-) d\lambda^+(t) + \int Z_t^n (F - F \circ \varepsilon_t^+) d\lambda^-(t).$$

Ainsi $-\mathcal{A}_n$ est le générateur d'une chaîne de Markov inhomogène (λ_n^+) à valeurs dans Ω décrite ainsi; sachant λ_n^+, on choisit un point t avec densité $Z_t^n(\lambda_n^+)$ par rapport à $\lambda_n^+ + \lambda^-$; si aucun point n'est choisi on prend $\lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^+$; sinon on pose

$$\lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^+(\{t\})\varepsilon_t^-(\lambda_n^+) + \big(1 - \lambda_n^+(\{t\})\big)\varepsilon_t^+(\lambda_n^+).$$

La proposition 1 permet de décrire l'évolution de la loi de λ_n^+.

COROLLAIRE 7. – *Supposons que λ_0^+ est de densité L_0 par rapport à $\mathbb{P}$; alors la densité L_n de λ_n^+ est donnée par la formule de récurrence*

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n\left(1 - \int Z_t^n |d\lambda(t)|\right) + \int (L_n Z_t^n) \circ \varepsilon_t^- d\lambda^+(t) \\ &\quad + \int (L_n Z_t^n) \circ \varepsilon_t^+ d\lambda^-(t) \\ &= L_n - \int D_t(L_n Z_t^n) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Démonstration. – Soit $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ un espace de probabilité sur lequel on définit λ_n^+. On a

$$\widetilde{\mathbb{P}}\big[\lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^+ \mid \lambda_n^+\big] = 1 - \int Z_t^n\big(d\lambda_n^+(t) + d\lambda^-(t)\big),$$

donc la restriction de la loi de λ_{n+1}^+ à $\{\lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^+\}$ a pour densité

$$L_{n+1}^0 = L_n\left(1 - \int Z_t^n |d\lambda(t)|\right).$$

Considérons maintenant la restriction à $\{\lambda_{n+1}^+ \neq \lambda_n^+\}$; soit ζ le point de T où la particule est ajoutée ou enlevée; alors la loi de (ζ, λ_n^+) est de densité $L_n Z_t^n$ par rapport à $|\mu|$, donc d'après la proposition 1, la loi de (ζ, λ_{n+1}^+) est de densité $(L_n Z^n)_t'$, donc en projetant sur Ω, la loi de λ_{n+1}^+ restreinte est de densité

$$L_{n+1}^1 = \int (L_n Z^n)_t' |d\lambda(t)|.$$

On en déduit $L_{n+1} = L_{n+1}^0 + L_{n+1}^1$. □

Exemple 2. – Si h est une fonction mesurable positive et λ^- intégrable sur T, on peut prendre

$$Z_t^n = Z_t = \left(\int h(s) d\lambda^+(s)\right)^{-1} h(t)\lambda^+(\{t\}).$$

Il s'agit d'un échantillonnage des particules avec pondération donnée par h et dans lequel on retire les particules tirées au fur et à mesure. Dans ce cas, la densité de λ_n^+ satisfait la relation de récurrence

$$L_{n+1} = \int (L_n \circ \varepsilon_t^+) \Big(\int h(s) d\lambda^+(s) + h(t) \Big)^{-1} h(t) d\lambda^-(t),$$

ce qui permet de retrouver le résultat du corollaire 4.3 de [20].

Exemple 3. – Considérons un processus de Poisson sur un intervalle borné, soit $T = [0, 1]$, λ^- est un multiple de la mesure de Lebesgue, et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$; prenons $L_0 = 1$, soit $\gamma = 1/N > 0$ et supposons que

$$Z_t^n = Y_t 1_{\{n\gamma \leq t < (n+1)\gamma \wedge \zeta_n\}}, \qquad 0 \leq n < N,$$

pour un processus adapté positif ou nul borné Y_t tel que $Y_t < 1$ μ^+ presque partout, et

$$\zeta_n = \inf \Big\{ t \geq n\gamma ; \int_{n\gamma}^t Y_s |d\lambda(s)| \geq 1 \Big\}.$$

Alors en appliquant le corollaire 7, la densité L_n est donnée par

$$L_n = \prod_{k=0}^{n-1} \Big(1 - \int_{k\gamma}^{(k+1)\gamma} D_t Z_t^k \, d\lambda(t) \Big).$$

Lorsque γ tend vers 0, la densité L_N converge en moyenne vers l'exponentielle stochastique de $-\int D_t Y_t d\lambda(t)$, soit

$$L = \exp \Big(\int \log(1 - D_t Y_t) d\lambda^+(t) + \int D_t Y_t d\lambda^-(t) \Big).$$

Quant à la chaine de Markov λ_n^+, elle converge vers le processus de Markov λ_t^+ décrit ainsi; λ_t^+ est un processus de saut pur dont la condition initiale λ_0^+ est de loi $\mathbb{P}$; entre deux particules du système initial λ_0^+, on ajoute à l'instant t une particule en t avec intensité $Y_t(\lambda_{t-}^+)$, et une particule présente en t sur le système initial est retirée à l'instant t avec probabilité $Y_t(\lambda_{t-}^+)$. Alors λ_1^+ est de densité L, ce qui correspond au résultat classique de changement d'intensité si on remarque que $\lambda_1^+([0, t])$ est un processus ponctuel d'intensité $1 - D_t Y_t$. La généralisation de cette transformation au cas où Y_t n'est plus adapté correspond au problème de Girsanov anticipant de [8], et semble délicate; nous l'aborderons ci-dessous (exemple 7) par une autre méthode.

Décrivons maintenant la transformation de Ω dans laquelle nous ajoutons et supprimons simultanément plusieurs particules. Pour $k \geq 1$, considérons T^k et soit Δ_k la réunion des hyperplans diagonaux, c'est-à-dire l'ensemble des k-uplets dont deux composantes au moins sont égales; on pose $S_k(T) = T^k \setminus \Delta_k$, $S_0(T) = \{\emptyset\}$, et soit $S(T)$ la réunion disjointe des $S_k(T)$, c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments distincts de T. D'autre part soit $P_k(T)$ l'ensemble des parties à k éléments de T et soit $P(T)$ la réunion des $P_k(T)$, c'est-à-dire l'ensemble des parties finies de T; il existe une projection naturelle π_k de $S_k(T)$ sur $P_k(T)$. Si m est une mesure sur T, on peut considérer la mesure produit $m^{\otimes k}$ sur T^k, où par convention $m^{\otimes 0}$ est la masse de Dirac en $\emptyset$; on peut alors considérer la restriction de $m^{\otimes k}$ à $S_k(T)$ et obtenir ainsi une mesure sur $S(T)$ que nous noterons encore m, soit

$$dm(\tau) = dm(t_1) \ldots dm(t_k)$$

pour $\tau = (t_1, \ldots, t_k)$. On en déduit une mesure sur $P(T)$, que nous noterons encore m, et qui est définie sur chaque $P_k(T)$ par

$$m(A) = m\big(\pi^{-1}(A)\big) \;/\; k!.$$

En appliquant ce procédé à $|\lambda|$, on obtient une mesure aléatoire $|\lambda|$ sur $P(T)$, et on considère sur $P(T) \times \Omega$ la mesure

$$\nu(dA, d\omega) = |\lambda(\omega, dA)|\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Cette mesure est définie par

$$\int Z d\nu = \mathbb{E} \sum_k \int_{S_k(T)} Z_{\{t_1,\ldots,t_k\}} |d\lambda(t_1)| \ldots |d\lambda(t_k)| \;/\; k!,$$

ou, si on met un ordre total sur T, par

$$\int Z d\nu = \mathbb{E} \sum_k \int_{\{t_1 < \ldots < t_k\}} Z_{\{t_1,\ldots,t_k\}} |d\lambda(t_1)| \ldots |d\lambda(t_k)|.$$

Cette mesure nous servira de mesure de référence comme $|\mu|$ dans la proposition 1. Les transformations de Ω que nous allons étudier sont les applications $\varepsilon(A)$, $A \in P(T)$, de Ω dans lui-même qui modifient l'état des points de A, c'est-à-dire

$$\varepsilon(A)\omega = \varepsilon_{t_1}^{-\alpha(t_1,\omega)} \circ \ldots \circ \varepsilon_{t_k}^{-\alpha(t_k,\omega)} \omega$$

pour $A = \{t_1, \ldots, t_k\}$ et où $\alpha(t, \omega)$ est $+$ si $\omega(\{t\}) = 1$ et est $-$ sinon; par convention $\varepsilon(\emptyset)$ est l'identité.

PROPOSITION 2. – *Soit Z_A, $A \in P(T)$ un processus positif ou nul indexé par les parties finies de T; on considère alors le processus Z'_A défini par $Z'_A = Z_A \circ \varepsilon(A)$. D'autre part, soit Φ l'application de $P(T) \times \Omega$ dans lui-même définie par*

$$\Phi(A, \omega) = \big(A, \varepsilon(A)\omega\big).$$

Alors l'image par Φ de la mesure de densité Z par rapport à ν est absolument continue par rapport à ν de densité Z'.

Démonstration. – Il nous faut montrer que pour tout $G(A, \omega)$ mesurable positif, on a

$$\int (G \circ \Phi)(A, \omega) Z_A(\omega) d\nu(A, \omega) = \int G(A, \omega) Z'_A(\omega) d\nu(A, \omega).$$

Il suffit de considérer des fonctions G à support dans un $P_k(T) \times \Omega$. Si α_j est une suite à valeurs dans $\{-, +\}$ et pour $\tau = (t_1, \ldots, t_k) \in S_k(T)$, nous utiliserons les notations

$$d\lambda^\alpha(\tau) = d\lambda^{\alpha_1}(t_1) \ldots d\lambda^{\alpha_k}(t_k), \qquad \varepsilon_\tau^\alpha = \varepsilon_{t_1}^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \varepsilon_{t_k}^{\alpha_k}.$$

Alors

$$|d\lambda(\tau)| = \sum_\alpha d\lambda^\alpha(\tau)$$

d'où

$$\begin{aligned}
k! &\int (G \circ \Phi)(A, \omega) Z_A(\omega) d\nu(A, \omega) \\
&= \sum_\alpha \mathbb{E} \int G(\pi(\tau), \varepsilon(\pi(\tau)).) Z_{\pi(\tau)} d\lambda^\alpha(\tau) \\
&= \sum_\alpha \mathbb{E} \int G(\pi(\tau), \varepsilon_\tau^{-\alpha}.) \big(Z'_{\pi(\tau)} \circ \varepsilon_\tau^{-\alpha}\big) d\lambda^\alpha(\tau) \\
&= \sum_\alpha \mathbb{E} \int G(\pi(\tau), \varepsilon_\tau^{-\alpha}.) \big(Z'_{\pi(\tau)} \circ \varepsilon_\tau^{-\alpha}\big) d\lambda^{-\alpha}(\tau) \\
&= \sum_\alpha \mathbb{E} \int G(\pi(\tau), .) Z'_{\pi(\tau)} d\lambda^{-\alpha}(\tau) \\
&= k! \int G(A, \omega) Z'_A d\nu(A, \omega)
\end{aligned}$$

en utilisant le corollaire 3 pour passer de la deuxième à la troisième ligne et où on rappelle que π est la projection de $S(T)$ sur $P(T)$. $\square$

Comme dans la proposition 1, si on choisit un ensemble A avec loi $Z_A|d\lambda(A)|$ alors le système transformé a pour densité $\int Z'_A|d\lambda(A)|$.

Remarque. – Dans la transformation $\varepsilon(A)$, on modifie simultanément l'état de tous les points de A; il est souvent plus commode d'introduire un ordre entre ces points; on considère alors un processus $\overline{Z}_\tau$ indexé par $S(T)$ et on pose $\overline{Z}'_\tau = \overline{Z}_\tau \circ \varepsilon(\pi(\tau))$; dans ce cas, si on prend

$$Z_A = \sum_{\pi(\tau)=A} \overline{Z}_\tau, \tag{7}$$

alors Z'_A est obtenu à partir de $\overline{Z}'_\tau$ par le même procédé (*voir* exemple 5 ci-dessous).

Exemple 4. – Soient $\zeta_1 \neq \zeta_2$ deux particules qu'on veut supprimer; la loi du système résiduel après la transformation $\varepsilon^-_{\{\zeta_1,\zeta_2\}}$ est obtenue en prenant pour Z_A la fonction indicatrice de l'événement $\{A = \{\zeta_1, \zeta_2\}\}$; alors

$$Z'_{\{s,t\}} = 1_{\{s,t\}}\big(\{\zeta_1,\zeta_2\} \circ \varepsilon_s^+ \circ \varepsilon_t^+\big)(1 - \lambda^+(\{s\}))(1 - \lambda^+(\{t\}))$$

donc le système résiduel est de densité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{S_2(T)} Z'_{\{s,t\}}|d\lambda(s)||d\lambda(t)| \\
&\quad= \frac{1}{2}(\lambda^- \otimes \lambda^-)\big\{(s,t); \{\zeta_1,\zeta_2\} \circ \varepsilon_s^+ \circ \varepsilon_t^+ = \{s,t\}\big\} \\
&\quad= (\lambda^- \otimes \lambda^-)\big\{(s,t); (\zeta_1,\zeta_2) \circ \varepsilon_s^+ \circ \varepsilon_t^+ = (s,t)\big\}.
\end{aligned}$$

Exemple 5. – Soit ζ une particule qu'on déplace en un point t choisi avec loi $f(\zeta,t)d\lambda^-(t)$. Dans ce cas, Z_A est nul sauf si A est de cardinal 2, et alors Z_A est obtenu par (7) à partir de

$$\overline{Z}_\tau = f(s,t)1_{\{\zeta=s\}}(1 - \lambda^+(\{t\}))$$

pour $\tau = (s,t)$. On en déduit que

$$\overline{Z}'_\tau = f(s,t)1_{\{\zeta\circ\varepsilon_s^+\circ\varepsilon_t^- = s\}}\lambda^+(\{t\})(1 - \lambda^+(\{s\})),$$

donc le système transformé a pour densité

$$\iint f(s,t)1_{\{s\}}(\zeta \circ \varepsilon_s^+ \circ \varepsilon_t^-)d\lambda^-(s)d\lambda^+(t).$$

Exemple 6. – Nous désirons maintenant déplacer une particule ζ en un point $\zeta' = t$ choisi avec loi $K(\zeta, dt)$ pour un noyau $K(s, dt)$ que nous supposons déterministe pour simplifier; si K n'est pas absolument continu par rapport à λ^-, on ne peut plus employer la technique de l'exemple précédent; en revanche on peut utiliser la proposition 1 en décomposant la transformation. Notons λ_0^+ le système initial, λ_1^+ le système intermédiaire obtenu en enlevant ζ, et λ_2^+ le système final obtenu en ajoutant ζ'; d'après l'exemple 1, la loi de (ζ, λ_1^+) est

$$1_{\{\zeta\circ\varepsilon_s^+=s\}}\lambda^-(ds)\mathbb{P}(d\omega).$$

La loi de $(\zeta, \zeta', \lambda_1^+)$ est donc

$$1_{\{\zeta\circ\varepsilon_s^+=s\}}K(s,dt)\lambda^-(ds)\mathbb{P}(d\omega).$$

Si on suppose qu'il existe un noyau $K^\star$ tel que

$$K(s,dt)\lambda^-(ds) = K^\star(t,ds)\lambda^-(dt),$$

alors la loi de (ζ', λ_1^+) peut être mise sous la forme

$$\lambda^-(dt)\mathbb{P}(d\omega)\int 1_{\{\zeta\circ\varepsilon_s^+=s\}}K^\star(t,ds),$$

donc en appliquant la proposition 1, on obtient la loi de (ζ', λ_2^+) et donc la loi de λ_2^+ qui est de densité

$$\iint 1_{\{s\}}(\zeta\circ\varepsilon_s^+\circ\varepsilon_t^-)K^\star(t,ds)\lambda^+(dt).$$

Lorsque $K(s,dt) = f(s,t)\lambda^-(dt)$, alors $K^\star(t,ds) = f(s,t)\lambda^-(ds)$ et on retrouve le résultat de l'exemple 5.

Exemple 7. – Reprenons l'exemple 3 mais avec un processus Y_t qui peut être anticipant (nous conservons les autres hypothèses), et étudions le processus λ_t^+. Cela signifie que nous faisons un échantillonnage progressif A des points de T où le point t est choisi avec probabilité $Y_t(\lambda_{t-}^+)|d\lambda(t)|$, et que λ_t^+ est obtenu à partir de λ_0^+ en modifiant l'état des points de $A\cap[0,t]$. Considérons sur $P(T)\times\Omega$ les processus

$$U_t(A,\omega) = Y_t\big(\varepsilon(A\cap[0,t[)\omega\big), \qquad V_t(A,\omega) = Y_t\big(\varepsilon(A\cap]t,1])\omega\big).$$

Alors $\sum_{s\le t} 1_{\{s\in A\}}$ est un processus ponctuel adapté à la filtration de λ_t^+ et de compensateur prévisible $\int_0^t U_s|d\lambda(s)|$. En considérant globalement le passage de λ_0^+ à λ_1^+, on obtient une transformation du type de la proposition 2 avec

$$Z_A = \exp\Big(\int_{A^C} \log(1 - U_t) d\lambda^+(t) - \int U_t d\lambda^-(t)\Big) \prod_{t\in A} U_t.$$

Pour A fixé, définissons $V_t'(A,.)$ à partir de $V_t(A,.)$ par le procédé du corollaire 2. Alors on remarque que

$$(U_t \circ \Phi)(A,\omega) = Y_t\big(\varepsilon(A \cap [t,1])\omega\big)$$

est égal à V_t si $t \notin A$ et à V_t' si $t \in A$. On en déduit que

$$Z_A' = \exp\Big(\int_{A^C} \log(1 - V_t) d\lambda^+(t) - \int V_t d\lambda^-(t)\Big) \prod_{t\in A} V_t'.$$

La densité de la loi de λ_1^+ est donc $\int Z_A' |d\lambda(A)|$; nous allons en donner une autre expression qui permet de retrouver l'exemple 3 lorsque Y est adapté. À ω fixé, supposons que nous fassions un échantillonnage rétrograde (dans le sens décroissant du temps) A de $[0,1]$ où un point t est choisi avec intensité

$$V_t'(A,\omega)d\lambda^-(t) + \frac{V_t'}{1 - D_t V_t}(A,\omega)d\lambda^+(t).$$

L'ensemble A que nous obtenons ainsi a pour loi

$$d\rho(A) = \exp\Big(\int_{A^C} \log\big(\frac{1 - V_t}{1 - D_t V_t}\big) d\lambda^+(t) - \int V_t' d\lambda^-(t)\Big)$$
$$\prod_{t\in A}\Big(V_t'\Big(1 - \lambda^+(\{t\}) + \frac{\lambda^+(\{t\})}{1 - D_t V_t}\Big)\Big)|d\lambda(A)|.$$

Un petit calcul permet alors de vérifier que la densité de la loi de λ_1^+ peut être mise sous la forme

$$\int Z_A'|d\lambda(A)| = \int \exp\Big(\int \log(1 - D_t V_t) d\lambda^+(t) + \int D_t V_t d\lambda^-(t)\Big) d\rho(A).$$

Lorsque Y_t est adapté, Y_t et Y_t' sont invariants par $\varepsilon(A\cap]t,1])$ donc $D_t V_t = D_t Y_t$, ce qui signifie que la fonction intégrée ne dépend pas de A; on retrouve ainsi le résultat de l'exemple 3.

Remarque. – En prenant $d\lambda^-(t) = n dt$, $\lambda([0,t])/\sqrt{n}$ converge vers le processus de Wiener standard. En prenant Y_t de l'ordre de $1/\sqrt{n}$, on obtient à la limite un problème de transformation du processus de Wiener du type étudié dans [8]. Un phénomène de loi des grands nombres fait qu'à la limite la formule pour la densité ne fait plus apparaître d'intégration par rapport à une mesure ρ; cette intégration semble difficile à éliminer dans le cas ponctuel et cela est probablement dû à la non inversibilité de la transformation.

4. MESURES DE GIBBS

La formule du théorème 1 est la propriété de $\mathbb{P}$ qui est à la base de toute notre étude; cette formule dit que si Z_t est $\mathcal{I}$ mesurable, l'espérance de $\int Z_t d\lambda^+(t)$ est égale à l'espérance de $\int Z_t d\lambda^-(t)$. Nous voudrions maintenant remplacer $\mathbb{P}$ par une mesure $\mathbb{P}_g$ satisfaisant une propriété analogue, mais pour laquelle λ^- est remplacée par une mesure aléatoire absolument continue par rapport à λ^-. Une telle mesure $\mathbb{P}_g$, lorsqu'elle existe, est une mesure de Gibbs correspondant à une certaine spécification (*voir* [15]). Dans ce paragraphe, nous étudions les liens entre la spécification et la dérivée de Radon-Nikodym $d\mathbb{P}_g \,/\, d\mathbb{P}$, et au §5, nous verrons que $\mathbb{P}_g$ est une mesure réversible pour un système de particules en évolution. Nous nous limiterons au cas simple où le nombre de particules est fini; pour cela, nous supposerons que la mesure λ^- est finie; cela impliquera l'unicité de la mesure de Gibbs. Nous verrons que l'étude des cas où λ^- est infinie peut être ramenée à un problème de mesures de Gibbs pour un système de particules sur un ensemble de sites dénombrable.

On se fixe un processus b_t positif ou nul $\mathcal{I}$ mesurable, et on dira que $\mathbb{P}_g$ est une mesure de Gibbs pour la spécification b_t si c'est une mesure σ-finie non nulle sur Ω telle que

$$\mathbb{E}_g \int Z_t d\lambda^+(t) = \mathbb{E}_g \int Z_t b_t d\lambda^-(t) \tag{8}$$

pour tout Z positif $\mathcal{I}$ mesurable. Si $\mathbb{P}_g$ est une probabilité et si $\lambda^+(T)$ est $\mathbb{P}_g$ intégrable, alors $\mathbb{P}_g$ est une mesure de Gibbs si et seulement si

$$\mathbb{E}_g\left[\lambda^+(A) \mid \mathcal{F}_{A^c}\right] = \mathbb{E}_g\left[\int_A b_t d\lambda^-(t) \,\middle|\, \mathcal{F}_{A^c}\right]$$

pour tout A; cela signifie que la probabilité de trouver une particule au voisinage du point t connaissant le reste du système est égale à $b_t d\lambda^-(t)$. On remarque également qu'une mesure de Gibbs satisfait une formule d'intégration par parties

$$\mathbb{E} \int Z_t^1 D_t Z_t^2 d\lambda^b(t) = \mathbb{E} \int Z_t^2 D_t Z_t^1 d\lambda^b(t)$$

avec

$$d\lambda^b(t) = d\lambda^+(t) - b_t d\lambda^-(t).$$

Le résultat suivant fournit les conditions d'existence et d'unicité d'une mesure de Gibbs; en particulier, $\mathbb{P}_g$ ne peut exister que si b_t satisfait une relation de compatibilité.

PROPOSITION 3. – *Nous supposons que* λ^- *est finie et que* b_t *est un processus positif ou nul* $\mathcal{I}$ *mesurable.*

(*a*) *Soit* L *une variable positive ou nulle; la mesure* $\mathbb{P}_L$ *de densité* L *par rapport à* $\mathbb{P}$ *est une mesure de Gibbs de spécification* b_t *si et seulement si*

$$L \circ \varepsilon_t^+ = b_t(L \circ \varepsilon_t^-) \tag{9}$$

$\mu^\pm$ *presque partout.*

(*b*) *Supposons qu'il existe une mesure de Gibbs* $\mathbb{P}_g$*; alors* $\mathbb{P}_g$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$*, les autres mesures de Gibbs lui sont proportionnelles, et*

$$(b_t \circ \varepsilon_s^+)(b_s \circ \varepsilon_t^-) = (b_s \circ \varepsilon_t^+)(b_t \circ \varepsilon_s^-) \tag{10}$$

$\lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P}_g$ *presque partout.*

(*c*) *Réciproquement, si la relation (10) est satisfaite* $\lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P}$ *presque partout, alors il existe une mesure de Gibbs; si de plus* b_t *est borné, il en existe une et une seule qui soit une probabilité.*

Démonstration. – Soit $\mathbb{P}_L$ la mesure de densité L et soit Z_t un processus positif $\mathcal{I}$ mesurable; alors

$$\mathbb{E}_L \int Z_t d\lambda^+(t) = \mathbb{E} \int L Z_t d\lambda^+(t) = \mathbb{E} \int (L \circ \varepsilon_t^+) Z_t d\lambda^-(t)$$

et

$$\mathbb{E}_L \int Z_t b_t d\lambda^-(t) = \mathbb{E} \int (L \circ \varepsilon_t^-) Z_t b_t d\lambda^-(t).$$

La mesure $\mathbb{P}_L$ est de Gibbs si et seulement si ces deux quantités sont égales pour tout processus $\mathcal{I}$ mesurable Z; comme $(L \circ \varepsilon_t^+)$ et $b_t(L \circ \varepsilon_t^-)$ sont $\mathcal{I}$ mesurables, l'égalité pour tout Z est donc équivalente à l'égalité μ^- presque partout de ces deux processus, mais aussi, par le théorème 1, à l'égalité μ^+ presque partout, ce qui montre (a). Soit $\mathbb{P}_g$ une mesure de Gibbs. Soit $k \geq 1$ et $f(\tau)$, $\tau = (t_1, \ldots, t_k)$ une fonction borélienne positive qui s'annule sur Δ_k; alors on montre par récurrence sur k que

$$\mathbb{E}_g \int f(\tau) d\lambda^+(t_1) \ldots d\lambda^+(t_k) = \mathbb{E}_g \int f(\tau) b_{t_1} \ldots b_{t_k} d\lambda^-(t_1) \ldots d\lambda^-(t_k).$$

En prenant pour f l'indicatrice d'une partie $A \subset T^k \setminus \Delta_k$, l'expression ci-dessus est nulle dès que A est $(\lambda^-)^{\otimes k}$ négligeable; en considérant la restriction de $\mathbb{P}_g$ à $\{\lambda^+(T) = k\}$, cela implique que les points chargés par λ^+ sont distribués de façon absolument continue par rapport à $(\lambda^-)^{\otimes k}$, donc $\mathbb{P}_g \ll \mathbb{P}$. La densité L doit alors satisfaire (9); si $(t_k, k \geq 1)$ sont des éléments distincts de T et si

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{k} \delta_{t_j}$$

(en notant δ_{t_j} la masse de Dirac en t_j), la relation (9) implique que

$$L(\omega_n) = L(0) \prod_{k=1}^{n} b_{t_k}(\omega_k) \tag{11}$$

pour presque tout $(t_1, \ldots, t_n)$, ce qui montre que L est $\mathbb{P}$ presque partout déterminée par sa valeur en $\omega = 0$, donc que les autres mesures de Gibbs sont proportionnelles à $\mathbb{P}_g$. Nous déduisons également de (9) que

$$L \circ \varepsilon_t^+ \circ \varepsilon_s^+ = (Lb_t) \circ \varepsilon_s^+ = L(b_t \circ \varepsilon_s^+) b_s$$

$\lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P}$ presque partout. Par symétrie en s et t, on a donc

$$L(b_t \circ \varepsilon_s^+) b_s = L(b_s \circ \varepsilon_t^+) b_t.$$

En travaillant sous $\lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P}_g$ on peut simplifier par L et on obtient (10), ce qui termine la démonstration de (b). Enfin, supposons vérifiée l'hypothèse de (c). Identifions T à $[0, 1]$; pour toute suite strictement croissante t_j et pour ω_n comme ci-dessus, définissons $L(\omega_n)$ par (11) pour une valeur $L(0) > 0$ fixée; pour presque tout $(t_1, t_2, \ldots)$, on montre par récurrence sur n que

$$L(\omega_n) = b_{t_j}(\omega_n) L(\omega_n - \delta_{t_j}). \tag{12}$$

En effet, cette relation est vérifiée pour $n = j$, et si elle est vérifiée au rang n,

$$\begin{aligned} L(\omega_{n+1}) &= b_{t_{n+1}}(\omega_{n+1}) L(\omega_n) \\ &= b_{t_{n+1}}(\omega_{n+1}) b_{t_j}(\omega_n) L(\omega_n - \delta_{t_j}) \\ &= b_{t_{n+1}}(\omega_{n+1} - \delta_{t_j}) b_{t_j}(\omega_{n+1}) L(\omega_n - \delta_{t_j}) \\ &= b_{t_j}(\omega_{n+1}) L(\omega_{n+1} - \delta_{t_j}) \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition (11) dans les première et quatrième lignes, l'hypothèse de récurrence dans la deuxième ligne, et (10) dans la troisième ligne; on a donc bien démontré (12). On en déduit que

$$L(\omega) = b_t(\omega)(L \circ \varepsilon_t^-)(\omega)$$

pour $\mathbb{P}$ presque tout ω et pour tout t dans le support de ω. La relation (9) est donc satisfaite μ^+ presque partout et on en déduit que $\mathbb{P}_L$ est une mesure de Gibbs de spécification b_t. Si de plus b_t est bornée, l'existence de moments exponentiels pour une variable de Poisson montre que L défini par (11) est $\mathbb{P}$ intégrable, donc on peut choisir $L(0)$ de façon à ce que $\mathbb{P}_L$ soit une probabilité. □

COROLLAIRE 8. – *Sous les hypothèses de la proposition 3, supposons que* $b_t > 0$*; on a existence d'une mesure de Gibbs* $\mathbb{P}_g$ *si et seulement si*

$$D_s \log b_t = D_t \log b_s \qquad \lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P} \quad p.p., \tag{13}$$

et dans ce cas, $\mathbb{P}_g$ *et* $\mathbb{P}$ *sont équivalentes, la densité* $L = d\mathbb{P}_g/d\mathbb{P}$ *vérifiant*

$$b_t = \exp D_t \log L. \tag{14}$$

Réciproquement, toute mesure de densité $L > 0$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *est une mesure de Gibbs de spécification* b_t *donnée par (14).*

Démonstration. – Il est facile de vérifier que la relation de compatibilité (10) se met sous la forme (13) lorsque $b_t > 0$; la relation (11) pour la densité L montre que dans ce cas $L > 0$, et (14) se déduit de (9). La réciproque est une conséquence de la proposition 3 (a). □

Exemple. – Soit $T = [0, 1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$ et soit h_t un processus prévisible strictement positif et borné; nous considérons la probabilité Q sous laquelle $\int_0^t h_s ds$ est le compensateur prévisible de $\lambda^+([0, t])$; alors Q est de densité

$$L = \exp\left(\int \log h_t d\lambda^+(t) - \int (h_t - 1) dt\right)$$

par rapport à $\mathbb{P}$. On déduit du corollaire 8 que Q est la mesure de Gibbs de spécification

$$b_t = h_t \exp\left(\int_t^1 D_t \log h_s d\lambda^+(s) - \int_t^1 D_t h_s ds\right)$$

(un résultat analogue pour l'espace de Wiener est étudié dans [23]). En revanche, si h_t s'annule, Q n'est plus nécessairement une mesure de Gibbs; prenons par exemple

$$h_t = 1 - 1_{]1/2,1]}(t) 1_{\{0\}}\left(\lambda^+([0, 1/2])\right).$$

Cela signifie que $\lambda^+([0, t])$ est un processus de Poisson standard auquel on enlève les sauts sur $[1/2, 1]$ lorsqu'il n'y en pas eu sur $[0, 1/2]$; la densité L

vaut 1 sur $\{\lambda^+([0,1/2]) \geq 1\}$, $e^{1/2}$ sur $\{\lambda^+([0,1]) = 0\}$, et 0 ailleurs. Alors, pour $0 < t < 1/2 < s < 1$, on a

$$L(\delta_s + \delta_t) = 1, \qquad L(\delta_s) = 0,$$

ce qui, si Q était une mesure de Gibbs, serait incompatible avec la relation

$$L(\delta_s + \delta_t) = L(\delta_s) b_t(\delta_s).$$

Remarque 1. – Supposons que b_t soit compris entre deux constantes positives. Alors le corollaire 8 donne une expression bornée pour $D_t \log L$; dans le cas du processus de Poisson standard, on peut donc en déduire une expression pour $\log L$ par la formule de représentation intégrale du corollaire 6.

Remarque 2. – Essayons d'écrire nos mesures de Gibbs sous une forme plus classique, c'est-à-dire en faisant intervenir un potentiel hamiltonien comme en [15]. Considérons donc une probabilité $\mathbb{P}_L$ de densité $L > 0$ par rapport à $\mathbb{P}$; alors la variable $-\log L$ peut être représentée sous la forme

$$-\log L = \sum_{A \in P(T)} \phi(A) \lambda^+(A)$$

où $\lambda^+(A) = \prod_{t \in A} \lambda^+(\{t\})$ et ϕ est définie par récurrence sur le cardinal de A par

$$\phi(\emptyset) = -\log L(0), \qquad \phi(A) = -\log L(\delta_A) - \sum_{B \subset A, B \neq A} \phi(B),$$

δ_A désignant la mesure de support A. La fonction $\phi(A)$ peut être vue comme le coefficient d'interaction entre des particules situées aux points de A; pour $\Lambda \in \mathcal{T}$, posons

$$H_\Lambda = \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \phi(A) \lambda^+(A).$$

Alors sous $\mathbb{P}_L$, la loi conditionnelle de $\lambda^+\big|_\Lambda$ sachant $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ est de densité proportionnelle à $\exp -H_\Lambda$, ce qui correspond bien à la définition classique des mesures de Gibbs. De plus, la spécification est alors donnée par

$$b_t = \exp - \sum_{A \not\ni t} \Big(\phi(A \cup \{t\}) - \phi(A) \Big) \lambda^+(A).$$

Remarque 3. – Le cas où $\lambda^-(T)$ est infinie peut être étudié en utilisant la théorie classique des mesures de Gibbs. Supposons par exemple que

$T = \mathbb{R}^d$ et λ^- est la mesure de Lebesgue; alors on peut discrétiser T en l'identifiant à $T_0^{Z^d}$, où $T_0 = [0,1]^d$; si Ω_0 est l'espace des mesures ponctuelles sur T_0, Ω s'identifie alors à $\Omega_0^{Z^d}$; pour toute partie finie Λ de Z^d, nous pouvons appliquer la proposition 3 à T_0^Λ et obtenir la mesure de Gibbs conditionnelle sachant l'état du système hors de T_0^Λ; on est ainsi ramené à un problème classique du type [10] pour un réseau qui est Z^d et un espace d'état en chaque site qui est Ω_0.

Remarque 4. – Lorsque Ω est l'espace de Wiener sur (T, λ^-), si λ^+ désigne la mesure gaussienne canonique sur Ω et si b_t est un processus à valeurs réelles, nous pouvons à nouveau rechercher une mesure de Gibbs de spécification b_t, c'est-à-dire vérifiant une relation similaire à (8); il s'agit d'un problème assez proche de [24]. Si on se place sous une probabilité $\mathbb{P}_L$ de densité $L > 0$ par rapport à la mesure de Wiener, sous certaines hypothèses de régularité, $\mathbb{P}_L$ apparaît comme une mesure de Gibbs de spécification $b_t = D_t \log L$; en particulier, dans ce cas, la relation de compatibilité s'écrit $D_t b_s = D_s b_t$. Il faut cependant noter que notre condition ne caractérise $\mathbb{P}_L$ que parmi les mesures équivalentes à la mesure de Wiener; pour avoir une caractérisation plus précise, il faut utiliser la formule d'intégration par parties générale (qui dans le cas des mesures ponctuelles était une conséquence de notre condition); par exemple, la relation pour $b_t = 0$ exprime seulement que λ^+ est centrée et à accroissements indépendants. La raison de cette différence de comportement est qu'une loi de Poisson est caractérisée par sa moyenne, alors que pour une loi normale il faut aussi la variance.

5. ÉVOLUTION DE SYSTÈMES DE PARTICULES

Nous désirons étudier l'évolution d'un système de particules en interaction, chaque particule étant immobile et en un point de T; cette évolution sera modélisée comme en [11] par un processus de Markov à espace d'état Ω dont le générateur sera un opérateur $-\mathcal{A}$ du type déjà considéré au §3, soit

$$\mathcal{A}F = \int Z_t D_t F d\lambda(t) \tag{15}$$

pour un processus $Z_t \geq 0$. Cela signifie qu'à l'instant u, il y a naissance d'une particule en t avec intensité $Z_t d\lambda^-(t) du$, et mort d'une particule présente en t avec intensité $Z_t du$; la donnée de Z_t est équivalente à la donnée des deux processus $Z_t \circ \varepsilon_t^+$ et $Z_t \circ \varepsilon_t^-$, et ces deux processus représentent donc respectivement les taux de mortalité et de natalité des particules. Dans le cas particulier $Z \equiv 1$, il n'y pas d'interaction et $\mathcal{A}$ est l'opérateur de nombre sur l'espace de Fock; le processus associé, qui est décrit dans [25], est alors l'équivalent du processus de Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener.

Dans la théorie classique des systèmes de particules, les particules se trouvent sur un ensemble de sites dénombrables; on se pose alors en général le problème du comportement en temps grand du système, par exemple l'existence de mesures invariantes; la réponse à ce problème est beaucoup plus simple lorsque l'ensemble des sites est fini, car le processus est alors à espace d'état fini, ce qui implique qu'une hypothèse de communicabilité entre les états suffit à assurer l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante. Nous allons montrer qu'il en est de même ici lorsque $\lambda^-(T)$ est fini; nous donnerons également des conditions sous lesquelles la mesure invariante est réversible (invariante par retournement du temps) et est une mesure de Gibbs au sens du §4. Nous commençons par construire le processus de Markov; dans le cas où Z_t est borné, ce résultat correspond au théorème 2.2 de [11].

PROPOSITION 4. – *Supposons que λ^- est finie et que*

$$\int Z_t d\lambda^-(t) \leq C\big(1 + \lambda^+(T)\big) \tag{16}$$

pour une constante $C > 0$. Alors $-\mathcal{A}$ défini par (15) est le générateur d'un processus de Markov λ_u^+ dont les trajectoires sont des fonctions en escalier à valeurs dans Ω.

Démonstration. – Posons

$$\overline{\mathcal{A}}F = \int Z_t D_t F d\lambda(t) \Big/ \int Z_t |d\lambda(t)|$$

si le dénominateur est non nul, 0 sinon; alors $-\overline{\mathcal{A}}$ est le générateur d'une chaîne de Markov sur Ω; le processus λ_u^+ est alors obtenu par changement de temps, un saut se produisant avec intensité $\int Z(d\lambda_u^+ + d\lambda^-)$. Cela résout le problème à condition de vérifier que le processus n'explose pas, c'est-à-dire qu'il n'y a pas accumulation d'un nombre infini de naissances en un temps fini; d'après l'hypothèse de majoration (16) sur le taux de natalité, il suffit de vérifier que le nombre de particules $\lambda_u^+(T)$ n'explose pas en temps fini. Or, en notant $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ l'espace de probabilité sur lequel est défini λ_u^+ et d'après (16),

$$\widetilde{\mathbb{P}}\big[\lambda_{u+du}^+(T) = \lambda_u^+(T) + 1 \mid \lambda_u^+\big] \leq C\big(1 + \lambda_u^+(T)\big)du,$$

ce qui permet de vérifier que $e^{-Cu}(1+\lambda_u^+(T))$ est une surmartingale. $\square$

Remarque. – Un point important dans la démonstration précédente est que $\int Z_t|d\lambda(t)|$ est fini; lorsque λ^- n'est pas finie, cette propriété n'est en général plus satisfaite et le problème de l'existence de λ_u^+ devient sensiblement plus délicat car λ_u^+ peut avoir une infinité de sauts dans tout intervalle de temps de longueur non nulle, et ne peut donc plus être décrit comme une chaîne de Markov changée de temps. Les méthodes de construction que nous pouvons envisager d'utiliser dans ce cas sont analogues aux méthodes employées dans la construction des systèmes de particules sur un réseau et nécessitent une hypothèse sur Z limitant l'interaction entre des points éloignés de T. On peut par exemple utiliser une méthode d'approximation permettant de se ramener au cas où le générateur est un opérateur borné (comme dans [13]). On peut aussi, sous d'autres hypothèses, envisager l'utilisation d'une technique fondée sur la forme de Dirichlet associée à $\mathcal{A}$ ([14]), ou par un résultat de percolation se ramener à une construction locale au moyen d'une méthode due à Harris pour le cas discret (*voir* [6]). Toutefois, même si nous avons réussi à construire λ_u^+, l'étude de son comportement asymptotique est nettement plus délicat que lorsque λ^- est borné; par exemple, la loi du système de particules ne reste en général pas absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, mais seulement localement absolument continue.

Nous nous proposons d'appliquer notre formule d'intégration par parties pour calculer l'adjoint de $\mathcal{A}$ et en déduire des critères pour l'invariance et la réversibilité des mesures sur Ω.

PROPOSITION 5. – *Supposons que λ^- est finie. Soit $L \geq 0$ une variable aléatoire et considérons la mesure $\mathbb{P}_L = L.\mathbb{P}$. On suppose que $\int Z_t|d\lambda(t)|$ est $\mathbb{P}_L$ intégrable. Alors, si F et G sont deux variables bornées,*

$$\mathbb{E}_L\big[G\mathcal{A}F\big] = \mathbb{E}_L\big[F\mathcal{A}_L^\star G\big]$$

avec

$$\mathcal{A}_L^\star G = \frac{1}{L}\int D_t(LGZ_t)d\lambda(t).$$

Démonstration. – La formule résulte immédiatement du théorème 2 pourvu que nous vérifions la $|\mu|$ intégrabilité de LGZ_tD_tF et $FD_t(LGZ_t)$; comme F et G sont bornés, il suffit de vérifier la $|\mu|$ intégrabilité des deux processus $(LZ_t)\circ\varepsilon_t^\pm$, ou, comme ils sont $\mathcal{I}$ mesurables, leur μ^-

intégrabilité. Or

$$\mathbb{E}\int \big((LZ_t)\circ\varepsilon_t^+ + (LZ_t)\circ\varepsilon_t^-\big)d\lambda^-(t) = \mathbb{E}\left[L\int Z_t\big(d\lambda^+(t)+d\lambda^-(t)\big)\right]$$
$$= \mathbb{E}_L\int Z_t|d\lambda(t)|$$

est fini par hypothèse. □

La mesure $\mathbb{P}_L$ est dite invariante si $\mathcal{A}_L^\star 1$ est nul $\mathbb{P}_L$ presque sûrement, c'est-à-dire si

$$L\int D_t(LZ_t)d\lambda(t) = 0 \qquad \mathbb{P}\text{ p.s.}$$

Dans ce cas, sous les hypothèses de la proposition 4 et si λ_0^+ est de loi $\mathbb{P}_L$, alors λ_u^+ est de loi $\mathbb{P}_L$ et $-\mathcal{A}_L^\star$ représente le générateur du processus retourné à un temps fixe. La mesure $\mathbb{P}_L$ est dite réversible si $\mathcal{A}_L^\star = \mathcal{A}$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_L$. Par exemple, lorsque $L = 1$, en utilisant l'isométrie $Z \mapsto Z'$ du corollaire 2, un petit calcul montre que

$$\mathcal{A}_1^\star G = G\int D_tZ_t\,d\lambda(t) + \int Z_t'\,D_tG\,d\lambda(t).$$

Ainsi $\mathbb{P}$ est invariante si $\int D_tZ_td\lambda(t)$ est nul, et alors le générateur du processus retourné est obtenu en remplaçant Z_t par Z_t', c'est-à-dire en interchangeant les taux de natalité et de mortalité des particules; $\mathbb{P}$ est réversible si et seulement si D_tZ_t est nulle $\mu^\pm$ presque partout.

PROPOSITION 6. – *Sous les hypothèses de la proposition 5, la mesure $\mathbb{P}_L$ est réversible si et seulement si $D_t(LZ_t)$ est nul $|d\lambda|\,d\mathbb{P}_L$ presque partout.*

Démonstration. – On déduit facilement de la proposition 5 que la condition est suffisante. Supposons donc que $\mathbb{P}_L$ est réversible. Un petit calcul montre que l'égalité $\mathcal{A}_L^\star F = \mathcal{A}F$ pour une variable bornée F est équivalente à

$$\int (F\circ\varepsilon_t^-)D_t(LZ_t)d\lambda^+(t) = \int (F\circ\varepsilon_t^+)D_t(LZ_t)d\lambda^-(t). \tag{17}$$

Soit A une partie mesurable de T et soit $F = \lambda^+(A)\wedge 1$; alors l'égalité (17) montre que

$$\int_A D_t(LZ_t)d\lambda^-(t) = 0 \qquad \mathbb{P}_L\text{ p.s. sur }\quad \{\lambda^+(A)=0\}.$$

On en déduit que pour presque tout $t\in A$, $LD_t(LZ_t)$ est $\mathbb{P}$ presque sûrement nul sur $\{\lambda^+(A)=0\}$, donc est nul avec une probabilité au moins égale à $\exp(-\lambda^-(A))$; si (A_k^n) est la suite de partitions de T utilisée dans la démonstration du théorème 1, on en déduit que

$$\mu^-\{(t,.); LD_t(LZ_t) \neq 0\} \leq \sum_k \lambda^-(A_k^n)\big(1 - \exp(-\lambda^-(A_k^n))\big)$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $LD_t(LZ_t)$ est nul μ^- presque partout, d'où

$$D_t(LZ_t) = 0 \qquad d\lambda^-(t)d\mathbb{P}_L \quad \text{p.p.} \tag{18}$$

D'autre part, l'égalité (17) écrite pour $F = 1 - (\lambda^+(A) \wedge 1)$ et jointe à (18) implique que

$$\int_A D_t(LZ_t)d\lambda^+(t) = 0 \qquad \mathbb{P}_L \text{ p.s. sur } \{\lambda^+(A) = 1\},$$

donc

$$\int_A |D_t(LZ_t)|d\lambda^+(t) = 0 \qquad \mathbb{P}_L \text{ p.s. sur } \{\lambda^+(A) \leq 1\}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left[L\int_A |D_t(LZ_t)|d\lambda^+(t) = 0\right] \geq (1+\lambda^-(A))\exp -\lambda^-(A) \geq 1-\lambda^-(A)^2,$$

ce qui permet, en considérant à nouveau la partition (A_k^n), de montrer que

$$\mathbb{P}\left[L\int |D_t(LZ_t)|d\lambda^+(t) = 0\right] \geq 1 - \sum_k \lambda^-(A_k^n)^2.$$

Cette suite tend vers 1 quand n tend vers l'infini, donc $LD_t(LZ_t)$ est nul μ^+ presque partout, c'est-à-dire

$$D_t(LZ_t) = 0 \qquad d\lambda^+(t)d\mathbb{P}_L \quad \text{p.p.} \tag{19}$$

On déduit la proposition de (18) et (19). □

COROLLAIRE 9. – *Supposons les hypothèses de la proposition 5, ainsi que $L > 0$ et $Z_t > 0$. Alors $\mathbb{P}_L$ est réversible si et seulement si c'est une mesure de Gibbs de spécification*

$$b_t = Z_t \circ \varepsilon_t^- \ / \ Z_t \circ \varepsilon_t^+. \tag{20}$$

Démonstration. – D'après la proposition 6, $\mathbb{P}_L$ est réversible si et seulement si $D_t(LZ_t)$ est nul $|\mu|$ presque partout, donc si et seulement si le membre de droite de (20) est égal à $\exp D_t \log L$; il suffit alors d'appliquer le corollaire 8. $\square$

Lorsque $Z_t > 0$, l'existence d'une mesure réversible équivalente à $\mathbb{P}$ impose donc sur Z_t une propriété de compatibilité qui se déduit de (13); on peut l'écrire

$$D_s D_t \log(Z_t/Z_s) = 0 \qquad \lambda^- \otimes \lambda^- \otimes \mathbb{P} \text{ p.p.} \tag{21}$$

Étudions maintenant un cas où on peut appliquer les propriétés du processus λ_u^+ à l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante; ce problème a déjà été abordé dans [11] lorsque Z est borné; ici nous supposons le taux de mortalité borné, mais comme nous le verrons au §6, il peut être intéressant de considérer des taux de natalité à croissance linéaire.

PROPOSITION 7. – *Supposons que λ^- est finie et que*

$$Z_t \geq c > 0, \qquad Z_t \circ \varepsilon_t^+ \leq C, \qquad \int Z_t d\lambda(t) \geq c\lambda^+(T) - C. \tag{22}$$

Alors le processus de Markov (λ_u^+) admet une unique probabilité invariante et celle-ci est équivalente à $\mathbb{P}$; de plus, elle est réversible si et seulement si Z_t vérifie (21).

Démonstration. – Remarquons que (22) implique (16), donc le processus λ_u^+ peut être construit sur un espace $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$. En identifiant T à $[0,1]$, on peut mettre sur l'espace $P_k(T)$ des parties à k éléments de T la topologie déduite de celle sur T^k; on met alors sur Ω la topologie dont les composantes connexes sont les $P_k(T)$. C'est un espace polonais et une partie de Ω est relativement compacte si et seulement si elle est incluse dans un nombre fini de $P_k(T)$, c'est-à-dire si $\omega(T)$ est borné. Une famille de probabilités sur Ω est donc étroitement relativement compacte si et seulement si la famille des lois de $\lambda^+(T)$ est tendue. L'hypothèse sur $\int Z_t d\lambda(t)$ de (22) implique que

$$\frac{d}{du}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\lambda_u^+(T)\right] \leq C - c\widetilde{\mathbb{E}}\left[\lambda_u^+(T)\right], \tag{23}$$

donc les lois de $\lambda_u^+(T)$, $u \geq 0$ sont tendues; la suite de probabilités

$$A \mapsto \frac{1}{n}\int_0^n \widetilde{\mathbb{P}}[\lambda_u^+ \in A]du$$

est donc tendue sur Ω, et tout point adhérent est une probabilité invariante. D'autre part, (22) fournit les estimations

$$\int Z_t d\lambda^+(t) \geq c\lambda^+(T), \qquad \int Z_t d\lambda^-(t) \leq C(1 + \lambda^+(T))$$

sur les taux de mortalité et de natalité, d'où on déduit

$$\widetilde{\mathbb{P}}\big[\lambda^{+}_{u+du}(T) = \lambda^{+}_{u}(T) - 1 \;\big|\; \lambda^{+}_{u}\big] \geq c\lambda^{+}_{u}(T)du,$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\big[\lambda^{+}_{u+du}(T) = \lambda^{+}_{u}(T) + 1 \;\big|\; \lambda^{+}_{u}\big] \leq C(1 + \lambda^{+}_{u}(T))du.$$

Ces estimations, jointes à (23) qui implique que l'ensemble $\{\omega;\ \omega(T) \leq 2C/c\}$ est récurrent, permettent de montrer que l'état vide $\omega = 0$ est récurrent. On en déduit l'unicité de la probabilité invariante $\mathbb{P}_i$; en notant $\widetilde{\mathbb{P}}_0$ la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ avec condition initiale $\lambda^{+}_0 = 0$, $\mathbb{P}_i$ est donnée (§XIX.46 de [4]) par

$$\mathbb{P}_i[A] = \widetilde{\mathbb{E}}_0 \int_0^U 1_A(\lambda^{+}_u)du, \tag{24}$$

où U est le premier instant où le temps passé en $\omega = 0$ dépasse un temps exponentiel indépendant dont la moyenne est choisie de façon à ce que $\mathbb{P}_i$ soit une probabilité. La construction de la proposition 4 montre que λ^{+}_u est une chaîne de Markov changée de temps et les résultats de §3 montrent que si la loi de λ^{+}_0 est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors la loi de λ^{+}_u reste absolument continue, donc d'après (24), $\mathbb{P}_i \ll \mathbb{P}$. Il s'agit maintenant de montrer que la densité L est $\mathbb{P}$ presque sûrement strictement positive. On a $\mathbb{P}_i[\{0\}] > 0$ donc $L(0) > 0$; pour conclure, il suffit donc de montrer que pour tout $k \geq 1$ et toute partie A de T^k de $(\lambda^-)^{\otimes k}$ mesure non nulle,

$$\mathbb{P}_i\left\{\omega;\ \exists(a_1, \ldots, a_k) \in A,\ \omega = \sum_{j=1}^{k} \delta_{a_j}\right\} > 0.$$

Cette propriété se démontre par récurrence sur k en utilisant la minoration du taux de natalité par une constante; il existe une partie A' de T^{k-1} de mesure non nulle telle que

$$\lambda^-\{t \in T; A' \times \{t\} \subset A\} > 0,$$

et par hypothèse de récurrence la probabilité pour que λ^{+}_u visite avant U un état dans lequel ses particules forment un élément de A' est strictement positive; conditionnellement à cet événement, la probabilité pour que l'état suivant visité par λ^{+}_u forme un élément de A est strictement positive, ce qui permet de conclure en utilisant (24). Il nous reste à vérifier le critère sur la réversibilité de $\mathbb{P}_i$; les corollaires 8 et 9 montrent que la condition de compatibilité (21) est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure réversible; cette mesure doit alors être $\mathbb{P}_i$ par unicité de la probabilité invariante. □

Remarque 1. – Lorsque Z_t vérifie la relation de compatibilité (21), nous savons que la probabilité invariante est une mesure de Gibbs dont la spécification est donnée par (20), donc les résultats de §4 (formule (11)) permettent d'exprimer la densité L au moyen de

$$L(\omega_n) = L(0) \prod_{k=1}^{n} \Big(Z_{t_k}(\omega_{k-1}) \ / \ Z_{t_k}(\omega_k) \Big)$$

pour $\omega_n = \sum_1^n \delta_{t_k}$. Cependant, dans le cas général, lorsque $\mathbb{P}_i$ n'est plus réversible, une expression explicite de L est nettement plus délicate à obtenir, car la seule expression que nous ayons pour $\mathbb{P}_i$ est (24). Une technique particulière est utilisable lorsque λ_u^+ vérifie une propriété de branchement (*voir* §6).

Remarque 2. – Même si $\mathbb{P}_i$ est inconnue, nous pouvons essayer d'écrire une formule d'isométrie sous $\mathbb{P}_i$ analogue au théorème 1; supposons pour simplifier que $Z_t \circ \varepsilon_t^+ = 1$; soit Y_t est un processus $\mathcal{I}$ mesurable borné et essayons d'exprimer l'espérance de $\int Y_t d\lambda^+(t)$ en fonction de l'espérance d'une intégrale par rapport à λ^-. Une propriété de l'espace de Fock (démontrée dans [18] pour le processus de Wiener) montre que Y_t peut se décomposer en $Y_t = Y_t^1 + Y_t^2$, où $Y_t^1 = D_t F$ pour une variable F, et $\int Y_t^2 d\lambda(t) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i \int Y_t d\lambda^+(t) &= \mathbb{E}_i \left[\int Z_t D_t F d\lambda^+(t) + \int Y_t^2 d\lambda^+(t) \right] \\
&= \mathbb{E}_i \left[\int Z_t D_t F d\lambda^-(t) + \int Y_t^2 d\lambda^-(t) \right] \\
&= \mathbb{E}_i \int \left(Z_t Y_t^1 + Y_t^2 \right) d\lambda^-(t)
\end{aligned}$$

où, dans la première ligne, on a utilisé $Z_t \circ \varepsilon_t^+ = 1$, et où, pour passer de la première à la deuxième ligne, on a utilisé

$$\mathbb{E}_i \int Z_t D_t F d\lambda(t) = \mathbb{E}_i \left[\mathcal{A} F \right] = 0$$

d'après la condition d'invariance de $\mathbb{P}_i$.

Remarque 3. – Sur l'espace de Wiener, les processus de Markov conduisant aux mesures de Gibbs du §4 sont ceux de générateur

$$\mathcal{A}F = \mathcal{A}_0 F - \int D_t F \, b_t d\lambda^-(t)$$

où $\mathcal{A}_0$ est l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck (opérateur de nombre sur l'espace de Fock); la mesure réversible doit alors satisfaire $b_t = D_t \log L$. Si b_t est borné et satisfait la relation de compatibilité $D_s b_t = D_t b_s$, la formule de Clark-Ocone permet de trouver une solution à cette équation. Nous ne connaissons cependant pas de référence sur ce sujet.

Remarque 4. – Nous avons considéré dans ce travail des systèmes de particules immobiles en interaction, l'interaction intervenant dans la naissance et la mort des particules. On pourrait envisager une généralisation à des particules en mouvement. Dans le cas sans interaction, de tels systèmes ont été considérés par exemple dans [26], [29]; leur comportement dépend évidemment du mouvement d'une particule isolée. De façon plus générale, on peut assimiler un système de particules en évolution à une mesure ponctuelle, chaque point étant une trajectoire à valeurs dans T à durée de vie éventuellement finie; le cas sans interaction consiste alors à mettre sur cet espace une mesure de Poisson dont l'intensité est une mesure de Kuznetsov (pour la définition des mesures de Kuznetsov, voir le §XIX de [4]). Cependant, dès qu'on veut ajouter une interaction, plusieurs possibilités s'offrent; on peut par exemple, comme ici, considérer des lois absolument continues par rapport à la loi d'un système sans interaction; mais certains types d'interaction, comme les processus de branchement ne peuvent pas être atteints par ce moyen.

6. UN CAS PARTICULIER

Sous les hypothèses de la proposition 7, nous désirons obtenir, dans un cas non réversible, une expression un peu plus calculable que (24) pour la probabilité invariante $\mathbb{P}_i$. Plus précisément, nous allons considérer le cas particulier où λ_u^+ est un processus de branchement avec immigration, et nous allons voir que le calcul chaotique permet de ramener le calcul des moments de λ_u^+ sous $\mathbb{P}_i$ à la résolution d'un système d'équations en cascade. Ces processus de branchement avec immigration peuvent être vus comme l'analogue des systèmes d'équations bilinéaires conduits par un processus de Wiener.

Supposons que

$$Z_t \circ \varepsilon_t^+ = \phi_1(t), \qquad Z_t \circ \varepsilon_t^- = \phi_2(t) + \int \phi_3(s,t) d\lambda^+(s)$$

pour des fonctions déterministes positives ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3; dans cette situation, une particule située en t a un temps de vie exponentiel de paramètre $\phi_1(t)$, et pendant sa durée de vie, elle donne naissance à d'autres particules avec taux $\phi_3(t,.)$; de plus des naissances spontanées (ou arrivées d'immigrants) ont lieu avec le taux ϕ_2; nous supposons que ϕ_1 et ϕ_2 sont compris entre deux constantes strictement positives, que ϕ_3 est borné et que

$$\phi_4(t) := \phi_1(t) - \int \phi_3(t,s) d\lambda^-(s) \geq c > 0, \tag{25}$$

ce qui permet de vérifier les hypothèses de la proposition 7. Écrivons $\mathcal{A}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}F &= \int \phi_1(t) D_t F d\lambda^+(t) - \int \phi_2(t) D_t F d\lambda^-(t) \\
&\quad - \iint \phi_3(s,t) D_t F d\lambda^+(s) d\lambda^-(t) \\
&= \int \phi_1(t) D_t F d\lambda(t) + \int \big(\phi_1(t) - \phi_2(t)\big) D_t F d\lambda^-(t) \\
&\quad - \iint \phi_3(s,t)(D_t F \circ \varepsilon_s^-) d\lambda^-(t) d\lambda(s) \\
&\quad - \iint \phi_3(s,t) D_s D_t F d\lambda^-(t) d\lambda(s) \\
&\quad - \iint \phi_3(s,t) D_t F d\lambda^-(t) d\lambda^-(s) \\
&\quad - \iint \phi_3(s,t) D_s D_t F d\lambda^-(t) d\lambda^-(s).
\end{aligned}$$

Si on écrit F avec sa décomposition chaotique

$$F = \int \psi(A) d\lambda(A),$$

alors, pour ψ borné à support borné, les opérateurs d'annihilation, de création et de nombre peuvent se mettre sous la forme

$$\int \phi(t) D_t F d\lambda^-(t) = \iint \phi(t) \psi\big(A \cup \{t\}\big) d\lambda^-(t) d\lambda(A),$$

$$\int \phi(t)(F \circ \varepsilon_t^-) d\lambda(t) = \int \sum_{t \in A} \phi(t)\psi(A \setminus \{t\}) d\lambda(A),$$

$$\int \phi(t) D_t F d\lambda(t) = \int \sum_{t \in A} \phi(t)\psi(A) d\lambda(A).$$

On en déduit que

$$\mathcal{A}F = \int \mathcal{H}\psi(A) d\lambda(A)$$

pour un opérateur $\mathcal{H}$ sur $P(T)$ défini par

$$\mathcal{H}\psi(A) = \sum_{t \in A} \Big(\psi(A)\phi_1(t) - \int \psi(A \cup \{s\} \setminus \{t\}) \phi_3(t,s) d\lambda^-(s) \Big) + \mathcal{H}_0\psi(A)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0\psi(A) = \int \Big(& \phi_1(t) - \phi_2(t) - \int \phi_3(s,t) d\lambda^-(s) \\ & - \sum_{s \in A} \phi_3(s,t) \Big) \psi(A \cup \{t\}) d\lambda^-(t) \\ & - \iint \phi_3(s,t) \psi(A \cup \{s,t\}) d\lambda^-(s) d\lambda^-(t). \end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{H}_0\psi(A)$ ne dépend des valeurs de ψ que sur les parties de cardinal $|A| + 1$, $|A| + 2$; d'autre part, l'opérateur

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_0 - \mathcal{H})\psi = & \sum_{t \in A} \int (\psi(A \cup \{s\} \setminus \{t\}) - \psi(A)) \phi_3(t,s) d\lambda^-(s) \\ & - \psi(A) \sum_{t \in A} \phi_4(t) \end{aligned}$$

est nul sur $P_0(T)$, et sur chaque $P_n(T)$, $n \geq 1$, c'est le générateur d'un processus pour lequel les n points évoluent de manière indépendante en se déplaçant de t à s avec taux $\phi_3(t,s)$ jusqu'à la mort du processus qui intervient avec un taux $\sum_{t \in A} \phi_4(t)$; d'après l'hypothèse (25) de minoration sur ϕ_4, le temps de mort est intégrable, donc pour tout γ borné sur $P_n(T)$, $n \geq 1$, l'équation

$$\gamma = (\mathcal{H} - \mathcal{H}_0)\psi \tag{26}$$

admet une unique solution bornée ψ sur $P_n(T)$.

On se fixe maintenant un γ borné sur $P(T)$ tel que $\gamma = 0$ sur $P_k(T)$, $k > n$, et on cherche une fonction ψ sur $P(T)$ qui est solution de

$$\gamma = \mathcal{H}\psi \qquad \text{sur} \quad \{|A| \geq 1\}. \tag{27}$$

Prenons $\psi = 0$ sur $P_k(T)$, $k > n$; l'équation (27) est alors satisfaite sur $P_k(T)$, $k > n$; de plus, $\mathcal{H}_0\psi$ est nul sur $P_n(T)$ donc l'équation (27) considérée sur $P_n(T)$ est du type (26) et peut être résolue; $\mathcal{H}_0\psi$ est alors connu sur $P_{n-1}(T)$, donc

$$\gamma - \mathcal{H}_0\psi = (\mathcal{H} - \mathcal{H}_0)\psi$$

peut être résolue sur $P_{n-1}(T)$ car elle est du type (26). En continuant ce procédé, on obtient un système qui se résout en cascade sur chaque $P_k(T)$. On ne peut résoudre l'équation sur $P_0(T) = \{\emptyset\}$, mais $\mathcal{H}\psi$ ne dépend pas de $\psi(\emptyset)$ et est donc entièrement déterminé. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i \int \gamma(A)d\lambda(A) &= \mathbb{E}_i \int \mathcal{H}\psi(A)d\lambda(A) + \gamma(\emptyset) - \mathcal{H}\psi(\emptyset) \\ &= \mathbb{E}_i\Big[\mathcal{A} \int \psi(A)d\lambda(A)\Big] + \gamma(\emptyset) - \mathcal{H}\psi(\emptyset) \\ &= \gamma(\emptyset) - \mathcal{H}\psi(\emptyset). \end{aligned}$$

On peut donc déterminer par ce procédé les moments de $\lambda^+(A)$ sous $\mathbb{P}_i$; les hypothèses impliquent que $\lambda^+(T)$ admet un moment exponentiel fini, donc ces moments caractérisent $\mathbb{P}_i$.

RÉFÉRENCES

[1] K. Bichteler, J. B. Gravereaux et J. Jacod, *Malliavin calculus for processes with jumps*, Stochastics Monographs, Vol. **2**, Gordon and Breach, 1987.

[2] R. Buckdahn, Anticipative Girsanov transformations, *Probab. Theory Rel. Fields*, Vol. **89**, 1991, 2, p. 211-238.

[3] E. A. Carlen et E. Pardoux, Differential calculus and integration by parts on Poisson space, dans : *Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics*, Kluwer, 1990.

[4] C. Dellacherie, B. Maisonneuve et P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel, Chapitres XVII à XXIV*, Hermann, 1992.

[5] A. Dermoune, P. Krée et L. Wu, Calcul stochastique non adapté par rapport à la mesure aléatoire de Poisson, dans : *Séminaire de Probabilités XXII*, Lect. Notes in Math. Vol. **1321**, Springer, 1988.

[6] R. Durrett, Ten lectures on particle systems, dans : *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXIII-1993*, Lect. Notes in Math., Vol. **1608**, Springer, 1995.

[7] R. J. Elliott et A. H. Tsoi, Integration by parts for Poisson processes, *J. Multivariate Anal.*, Vol. **44**, 1993, p. 179-190.

[8] O. Enchev et D. W. Stroock, Anticipative diffusion and related change of measures, *J. Functional Anal.*, Vol. **116**, 1993, p. 449-477.

[9] K. H. Fichtner et G. Winkler, Generalized Brownian motion, point processes and stochastic calculus for random fields, *Math. Nachr.*, Vol. **161**, 1993, p. 291-307.

[10] H. Föllmer, Random fields and diffusion processes, dans : *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV-XVII, 1985-87*, Lect. Notes in Math. Vol. **1362**, Springer, 1988.

[11] R. A. Holley et D. W. Stroock, Nearest neighbor birth and death processes on the real line, *Acta Mathematica*, Vol. **140**, 1978, p. 103-154.

[12] I. Karatzas, D. L. Ocone et J. Li, An extension of Clark's formula, *Stochastics Stoch. Rep.*, Vol. **37**, 1991, p. 127-131.

[13] T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer, 1985.

[14] Z. M. Ma et M. Röckner, *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Universitext, Springer, 1992.

[15] X. X. Nguyen et H. Zessin, Integral and differential characterizations of the Gibbs process, *Math. Nachr.*, Vol. **88**, 1979, p. 105-115.

[16] D. Nualart et J. Vives, Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space, dans : *Séminaire de Probabilités XXIV*, Lect. Notes in Math. Vol. **1426**, Springer, 1990.

[17] D. Nualart et J. Vives, A duality formula on the Poisson space and some applications, dans : *Proceedings of the Ascona Conference on Stochastic Analysis*, Progress in Probability, Vol. **36**, Birkhäuser, 1995.

[18] D. Nualart et M. Zakai, Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus, *Probab. Theory Rel. Fields*, Vol. **73**, 1986, p. 255-280.

[19] D. Ocone, Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functional of diffusion processes, *Stochastics*, Vol. **12**, 1984, p. 161-185.

[20] M. Perman, J. Pitman et M. Yor, Size-biased sampling of Poisson point processes and excursions, *Probab. Theory Rel. Fields*, Vol. **92**, 1992, p. 21-39.

[21] N. Privault, Calcul chaotique et variationnel pour le processus de Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, Vol. **316**, 1993, p. 597-600.

[22] N. Privault, Décompositions chaotiques sur l'espace de Poisson et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, Vol. **317**, 1993, p. 385-388.

[23] S. Roelly et H. Zessin, Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, Vol. **313**, 1991, p. 309-312.

[24] S. Roelly et H. Zessin, Une caractérisation des mesures de Gibbs sur $C(0,1)^{Z^d}$ par le calcul des variations stochastiques, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, Vol. **29**, 1993, 3, p. 327-338.

[25] J. Ruiz de Chavez, Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson, dans : *Séminaire de Probabilités XIX*, Lect. Notes in Math., Vol. **1123**, Springer, 1985.

[26] D. Surgailis, On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semigroups, *Probab. Math. Statistics*, Vol. **3**, 1984, 2, p. 217-239.

[27] A. S. Ustünel, Representation of the distributions on Wiener space and stochastic calculus of variations, *J. Functional Anal.*, Vol. **70**, 1987, p. 126-139.

[28] A. S. Ustünel et M. Zakai, Calcul de densité de Radon-Nikodym sur l'espace de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, Vol. **317**, 1993, p. 883-886.

[29] L. Wu, Construction de l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Poisson, dans : *Séminaire de Probabilités XXI*, Lect. Notes in Math. Vol. **1247**, Springer, 1987.

(Manuscrit reçu le 16 février 1994;
révisé le 7 mars 1995.)