ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MUSTAPHA MOURRAGUI

Comportement hydrodynamique et entropie relative des processus de sauts, de naissances et de morts

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 3 (1996), p. 361-385

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_3_361_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 3, 1996, p. 361-385 *Probabilités et Statistiques*

Comportement hydrodynamique et entropie relative des processus de sauts, de naissances et de morts

par

Mustapha MOURRAGUI

Université de Rouen,
U.F.R des Sciences, U.R.A. C.N.R.S. 1378 Mathématiques,
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex,
email mourrag@univ-rouen.fr

A la mémoire de Claude KIPNIS

RÉSUMÉ. – Nous étudions la limite hydrodynamique de processus de sauts, de naissances et de morts qui décrivent l'évolution de particules indistinguables sur le tore. Dans ces systèmes, les particules sautent indépendamment les unes des autres, elles sont créées et détruites selon des taux non linéaires. En utilisant la méthode d'entropie relative nous démontrons que sous certaines conditions sur les taux de naissance et de mort, et par passage à la limite, nos systèmes évoluent selon des équations de réaction-diffusion non linéaires.

Mots clés : Limite hydrodynamique, Entropie relative, Systèmes de particules, Équations de réaction-diffusion.

ABSTRACT. – We study the hydrodynamic limit for jump, birth and death processes which describe the evolution of indistinguishable particles, evolving on the torus. In these systems the particles jump independently, and births and deaths occur with nonlinear rates. Using the relative entropy method, we prove that under certain conditions on the birth and death rates, our systems evolve according to nonlinear reaction-diffusion equations.

Key words: Hydrodynamic limit, Relative entropy, Particle systems, Reaction-diffusion equations.

Classification A.M.S. : 60 K 35 - 82 C 22.

INTRODUCTION

La notion de limite hydrodynamique a fait l'objet de nombreuses approches, et a suscité un intérêt considérable dans l'étude des systèmes à une infinité de particules. Récemment une étude systématique regroupant les résultats existants pour une classe très large de systèmes de particules, a été fournie dans [3] par De Masi et Presutti, et dans [10] par Spohn. La motivation originale de ces recherches provient d'une branche de la mécanique statistique qui a pour but de déterminer l'équation régissant l'évolution d'un fluide à partir d'une dynamique microscopique aléatoire. En vertu du grand nombre de particules qu'il contient, la description de l'évolution d'un fluide doit se faire à travers un ensemble de variables macroscopiques qui le caractérise. Au niveau microscopique, les particules évoluent sur un espace discret de sites; après renormalisation en espace et en temps, les mesures empiriques de répartition de particules donnent par passage à la limite dite hydrodynamique une équation aux dérivées partielles, équation qui décrit l'évolution spatiale et temporelle des variables macroscopiques.

Nous étudions dans cet article le comportement hydrodynamique de systèmes ne possédant pas de loi de conservation. On se place sur le tore discrétisé $T_N = \{0, \cdots, N-1\} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ avec paramètre de renormalisation $\varepsilon = 1/N$, c'est-à-dire, qu'à tout point microscopique $i \in T_N$, nous associons le point macroscopique $i/N \in S_N = \{i/N,\ i \in T_N\}$. Au niveau microscopique, les particules évoluent sur T_N selon des marches aléatoires symétriques indépendantes, et sujettes à naissances et morts : nous fixons $p \in \mathbb{N}$, en chaque site i, l particules ($l \leq p$) peuvent être créées avec un taux de naissance $b_l(\eta(i))$ ou une particule peut mourir avec un taux $d(\eta(i))$, où $(b_l(.))_{1 \leq l \leq p}$ et $d(.)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant $b_l(0) = d(0) = 0$, et $\eta(i)$ désigne le nombre de particules présentes au site i. Notre but est de démontrer que lorsque la marche aléatoire s'effectue à vitesse N^2, les mesures empiriques de répartition de particules, définies sur un intervalle de temps $[0, T]$ fixé, par

$$\alpha_s^N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \eta_s(i) \delta_{i/N},$$

convergent vers les densités $\rho(s, .)$, solutions d'une équation de réaction-diffusion non linéaire

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho & = \frac{1}{2} \Delta \rho + F(\rho), \\ \rho(0, .) & = m(.), \end{cases}$$

où $m(.)$ désigne le profil de densité initial, $\eta_s(i)$ le nombre de particules présentes au site i à l'instant s, $\delta_{i/N}$ la masse de Dirac au point i/N et $F(.)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ces processus de sauts, de naissances et de morts font l'objet d'une étude dans [7], où la limite hydrodynamique est obtenue sous des conditions sur les taux de naissance et de mort par trois méthodes différentes . La première méthode, introduite par Kipnis, Olla et Varadhan [5], nécessite d'établir une inégalité surexponentielle pour un processus auxiliaire avec mesure réversible dont on contrôle la densité de probabilité. La nécessité de mesures réversibles impose de se limiter dans ce cas aux processus où plusieurs naissances ne peuvent être simultanées; un résumé de ce travail a été fourni dans [8]. Dans le cas général où plusieurs naissances sont possibles, la limite hydrodynamique est obtenue par la méthode de Guo, Papanicolaou et Varadhan [4], grâce au contrôle de la croissance d'entropie du processus par rapport aux mesures de Poisson de paramètre constant. La troisième méthode a été introduite par H-T Yau [13] pour le modèle de Ginzburg-Landau, et consiste à ramener (grâce à une inégalité entropique) l'étude de la limite hydrodynamique à celle de l'entropie relative; cette étude fait l'objet de cet article et permet d'obtenir la limite hydrodynamique sous des conditions plus faibles.

Signalons qu'un cas particulier de ces processus a été étudié par la méthode de dualité, dans [3] : le processus considéré donne naissance à une seule particule à la fois et les taux de naissance et de mort sont des polynômes. L'équation hydrodynamique est alors donnée par l'équation (E) avec $F = F_+ - F_-$, où F_+ et F_- sont deux polynômes vérifiant degré $(F_+) <$ degré (F_-); les taux de naissance et de mort vérifient également cette propriété.

Après avoir décrit (paragraphe 1) nos résultats, nous étudierons dans le paragraphe 2, la variation de l'entropie : nous considérons la famille de mesures produits de Poisson de paramètres constants, réversibles pour les marches aléatoires indépendantes [1], qui régissent les sauts de notre système. Bien que ces mesures ne soient pas invariantes pour notre processus, nous contrôlons, sous des conditions sur les taux des naissance et de mort, la croissance de l'entropie du processus par rapport à ces mesures. Ceci nous permet d'obtenir un résultat analogue à celui de [4], qui consiste à remplacer les moyennes des taux de naissance et de mort (tronqués) dans une boîte macroscopique, par l'intégrale de ces taux par rapport à la mesure produit de Poisson de paramètre le nombre moyen de particules dans cette boîte. Ce résultat est ensuite utilisé dans le paragraphe 3 pour étudier l'entropie relative : nous prouvons que l'entropie du processus par rapport aux profils qui sont solutions régulières de l'équation (E) [9], est $o(N)$. Une inégalité entropique permet alors de revenir à notre processus pour obtenir la limite hydrodynamique.

1. NOTATIONS ET RÉSULTATS

Formellement le processus $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Feller, décrit par le générateur défini sur $\mathcal{C}_b(E_N)$, l'ensemble des fonctions continues bornées de $E_N = \mathbb{N}^{T_N}$ dans $\mathbb{R}$, par

$$(\Omega_p^N f)(\eta) = N^2(\mathcal{L}_0^N f)(\eta) + (\mathcal{L}_p^N f)(\eta),$$

où $f \in \mathcal{C}_b(E_N)$, $\eta \in E_N$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_0^N f)(\eta) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \eta(i)\left[f(\eta^{i,i+1}) + f(\eta^{i,i-1}) - 2f(\eta)\right] ,\\ (\mathcal{L}_p^N f)(\eta) &= \sum_{l=1}^{p}\left\{\sum_{i=0}^{N-1} b_l(\eta(i))\left[f(\eta^{i,+l}) - f(\eta)\right]\right\}\\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} d(\eta(i))\left[f(\eta^{i,-}) - f(\eta)\right]\end{aligned}$$

et pour tous $\eta \in E_N$, $(i,j) \in T_N^2$,

$$\eta^{i,+l}(k) = \begin{cases}\eta(i)+l & \text{si } k=i\\ \eta(k) & \text{si } k\neq i\end{cases} , \qquad \eta^{i,-}(k) = \begin{cases}\eta(i)-1 & \text{si } k=i\\ \eta(k) & \text{si } k\neq i\end{cases}$$

et

$$\eta^{i,j}(k) = \left(\eta^{i,-}\right)^{j,+1}(k) \ \text{ si } \eta(i) > 0.$$

Nous notons S_t^N le semi-groupe associé, nous désignons par P_N^μ la loi du processus lorsque μ^N est la mesure initiale sur E_N et E_N^μ l'espérance associée. Pour $t \in [0,T]$, $\eta_t(i)$ désigne le nombre de particules présentes au site i à l'instant t.

L'opérateur de translations τ_l est défini par $(\tau_l\eta)(i) = \eta(i+l)$ sur T_N et par $(\tau_l f)(\eta) = f(\tau_l\eta)$ sur l'espace des fonctions.

Pour un profil de densité $\rho(.)$, fonction définie sur le tore S, nous introduisons la mesure produit de Poisson de paramètre variable $\rho(.)$ de marginales

$$\nu_{\rho(.)}^N\{\eta(i) = k\} = \frac{(\rho(i/N))^k}{k!}e^{-\rho(i/N)} \qquad \text{pour } i \in T_N \text{ et } k \in \mathbb{N},$$

pour tout $a > 0$, ν_a^N désigne la mesure produit de Poisson de paramètre constant a ; nous définissons l'entropie d'une mesure μ^N sur $E_N = \mathbb{N}^{T_N}$ par rapport à un profil $\rho(.)$ par

$$H[\mu^N/\nu^N_{\rho(.)}] = \int \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{d}\mu^N}{\mathrm{d}\nu^N_{\rho(.)}}(\eta)\right)\mathrm{d}\mu^N(\eta).$$

En général si α^N et β^N sont deux mesures de probabilité sur E_N, l'entropie $H[\beta^N/\alpha^N]$ de β^N par rapport à α^N est définie sous une forme variationnelle ([12]), dont on déduit une inégalité dite entropique : pour toute fonction U continue bornée

$$\int U(\eta)\mathrm{d}\beta^N(\eta) \leq \mathrm{Log}\int \exp\left(U(\eta)\right)\mathrm{d}\alpha^N(\eta) + H[\beta^N/\alpha^N]\,. \qquad (1.1)$$

Si f^N est la densité de probabilité de μ^N par rapport à ν_1^N, nous désignons par f_t^N la densité de $\mu_t^N = S_t^N \mu^N$ par rapport à ν_1^N.

Si h est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ intégrable par rapport à ν_a^N, nous notons

$$\tilde{h}(a) = \int h(\eta(0))\mathrm{d}\nu_a^N(\eta).$$

Notre objectif est d'établir le comportement limite des mesures empiriques de répartition de particules, définies pour $s \in [0, T]$ par

$$\alpha_s^N = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \eta_s(i)\delta_{i/N} \in M^+,$$

où M^+ est l'espace des mesures positives sur le tore S muni de la topologie de la convergence faible, et $\delta_{i/N}$ la masse de Dirac au point i/N.

THÉORÈME 1.1. – *Nous faisons les hypothèses*

A1 – *Pour tout* $1 \leq l \leq p$,

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{\varphi_l(k)}{d(k)} = 0, \qquad \limsup_{k\to+\infty} \frac{b_l(k+1)}{(k+1)b_l(k)} = 0$$

et

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{d(k+1)}{(k+1)d(k)} = 0,$$

où $\varphi_l(k) = k(k-1)\cdots(k-l+1)b_l(k-l)1_{\{k\geq l\}}$.

A2 – *Il existe une fonction $m(.) \in \mathcal{C}(S)$ positive telle que*

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H[\mu^N / \nu^N_{m(.)}] = 0.$$

Alors, pour toute fonction $G(.)$ continue sur S, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $t \in [0,T]$,

$$\limsup_{N\to+\infty} \mu^N S_t^N \left\{ \eta : \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \eta(i) G\big(i/N\big) - \int_S G(\theta)\lambda(t,\theta)\mathrm{d}\theta \right| > \delta \right\} = 0, \tag{1.2}$$

où $\lambda(t,\mathrm{d}\theta) = \lambda(t,\theta)\mathrm{d}\theta$ est l'unique solution de l'équation (E), avec condition initiale

$$\lambda(0,\mathrm{d}\theta) = m(\mathrm{d}\theta),$$

et pour tout $a > 0$, $F(a) = \sum_{l=1}^{p} l\widetilde{b_l}(a) - \widetilde{d}(a)$.

Notre démarche consiste à ramener la démonstration de (1.2) à celle de l'entropie relative : nous considérons une solution $\lambda(.,.)$ régulière de l'équation (E) sous les conditions du théorème 1.1, et nous étudions à tout instant $t \in [0,T]$ l'entropie de la mesure $\mu_t^N = S_t^N \mu^N$ par rapport au profil $\lambda(t,.) + \varepsilon$, qui est strictement positif.

PROPOSITION 1.2. – *Sous les hypothèses du théorème 1.1, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H[\mu_t^N / \nu^N_{\lambda(t,.)+\varepsilon}] = 0.$$

Nous prouvons ensuite (annexe) que pour tout profil de densité $\rho(.)$ et pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Log}\left(\nu^N_{\rho(.)} \left\{ \eta : \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \eta(i) G\big(i/N\big) - \int_S G(\theta)\rho(\theta)\mathrm{d}\theta \right| > \delta \right\} \right) < 0. \tag{1.3}$$

L'inégalité suivante [12], valable pour tout ensemble mesurable

$$\mu_t^N\left\{A_{N,t}^{G,\delta}\right\} \leq \frac{\frac{1}{N}\mathrm{Log}(2) + \frac{1}{N}H[\mu_t^N/\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N]}{\frac{1}{N}\mathrm{Log}\left[1 + \frac{1}{\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N\left\{A_{N,t}^{G,\delta}\right\}}\right]},$$

où

$$A_{N,t}^{G,\delta} = \left\{\eta : \quad \left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\eta(i)G(i/N) - \int_S G(\theta)\lambda(t,\theta)\mathrm{d}\theta\right| > \delta\right\},$$

permet alors de revenir à notre processus pour obtenir (1.2).

2. ÉTUDE DE L'ENTROPIE

Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante, étape essentielle pour la démonstration de la proposition 1.2.

PROPOSITION 2.1. – *Soit h une fonction définie sur $\mathbb{N}$ bornée; sous l'hypothèse* **A1**,

$$\limsup_{k\to 0}\limsup_{N\to\infty} E_N^{\mu}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^T V_k(\eta_s(i))\mathrm{d}s\right\} = 0,$$

où

$$V_k(\eta(i)) = \left|\frac{1}{2k+1}\sum_{|i-j|\leq k} h(\eta(j)) - \tilde{h}(\eta^k(i))\right|$$

et

$$\eta^k(i) = \frac{1}{2k+1}\sum_{|i-j|\leq k}\eta(j).$$

Les méthodes que nous utilisons sont presque les mêmes que celles de [4]. Les deux lemmes qui suivent visent à contrôler la variation de l'entropie ainsi que la forme de Dirichlet de la marche aléatoire, définie pour toute fonction f positive par

$$\begin{aligned} D_0[f] &= -\int\sqrt{f(\eta)}\left(\mathcal{L}_0^N\sqrt{f}\right)(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{\substack{(i,j)\in T_N^2\\ |j-i|=1}}\int\eta(i)\left[\sqrt{f(\eta^{i,j})} - \sqrt{f(\eta)}\right]^2\mathrm{d}\nu_1^N(\eta).\end{aligned}$$

Nous renvoyons le lecteur à [12] pour une étude détaillée de l'entropie.

LEMME 2.2. – *Sous l'hypothèse* **A1**, *il existe une constante* C_1' *positive telle que pour tous* $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$H\left[\mu_t^N/\nu_1^N\right] \leq H\left[\mu_s^N/\nu_1^N\right] + (t-s)C_1'N.$$

Démonstration. – D'après la formule variationnelle de l'entropie [12],

$$\begin{aligned}
&H[\mu_t^N/\nu_1^N] \\
&= \sup_{U\in C_b(E_N)} \left[\int S_t^N U(\eta)\mathrm{d}\mu^N(\eta) - \mathrm{Log}\int \exp\left(U(\eta)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\right] \\
&\leq \sup_{U\in C_b(E_N)} \left[\int S_{t-s}^N U(\eta)\mathrm{d}\mu_s^N(\eta) - \mathrm{Log}\int \exp\left(S_{t-s}^N U(\eta)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\right] \\
&\quad + \sup_{U\in C_b(E_N)} \left[\mathrm{Log}\int \exp\left(S_{t-s}^N U(\eta)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\mathrm{Log}\int \exp\left(U(\eta)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\right] \\
&\leq \sup_{U\in C_b(E_N)} \left[\int U(\eta)\mathrm{d}\mu_s^N(\eta) - \mathrm{Log}\int \exp\left(U(\eta)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\right] \\
&\quad + \sup_{\substack{U\in C_b(E_N)\\ U>0}} \left[\mathrm{Log}\left(\frac{\int S_{t-s}^N U(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)}{\int U(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)}\right)\right],
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Jensen. Par ailleurs, pour toute fonction $U \in C_b(E_N)$,

$$\begin{aligned}
&\int \left(\Omega_p^N U\right)(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int \left[\sum_{l=1}^{p} \Big(\eta(i)(\eta(i)-1)\cdots(\eta(i)-l+1)b_l(\eta(i)-l) - b_l(\eta(i))\Big)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{d(\eta(i)+1)}{\eta(i)+1} - d(\eta(i))\right] U(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\,;
\end{aligned}$$

il résulte alors de l'hypothèse **A1** que si U est positive, il existe une constante $C_1' > 0$, telle que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int S_t^N U(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) &= \int \left(\Omega_p^N S_t^N U\right)(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\
&\leq C_1'N \int S_t^N U(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'appliquer le lemme de Gronwall pour obtenir le résultat. □

LEMME 2.3. – *Sous l'hypothèse* **A1**, *pour tout* $t \in]0,T]$,

$$N^2 D_0[\bar{f}_t^N] \leq \frac{1}{t} H[\mu^N/\nu_1^N] + C_1' N,$$

où $\bar{f}_t^N = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f_s^N \mathrm{d}s.$

Démonstration

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H[\mu_t^N/\nu_1^N] \\
&\quad = \int f_t^N(\eta)\big(\Omega_p^N \mathrm{Log} f_t^N\big)(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\
&\quad = -\frac{N^2}{4} \sum_{\substack{(i,j)\in T_N^2 \\ |i-j|=1}} \int \eta(i)\left[f_t^N(\eta^{i,j}) - f_t^N(\eta)\right] \mathrm{Log} \frac{f_t^N(\eta^{i,j})}{f_t^N(\eta)} \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\
&\quad\quad + \sum_{l=1}^{p} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \int b_l(\eta(i)) f_t^N(\eta) \mathrm{Log} \frac{f_t^N(\eta^{i,l+})}{f_t^N(\eta)} \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \right\} \\
&\quad\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \int d(\eta(i)) f_t^N(\eta) \mathrm{Log} \frac{f_t^N(\eta^{i,-})}{f_t^N(\eta)} \mathrm{d}\nu_1^N(\eta).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$(x-y)\mathrm{Log}\frac{x}{y} \geq \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \qquad \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,$$

pour le premier terme du membre de droite, puis

$$x \mathrm{Log}\frac{y}{x} \leq y - x, \qquad \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \tag{2.2}$$

sur les deux derniers termes, nous obtenons par (2.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H[\mu_t^N/\nu_1^N] \leq &- \frac{N^2}{4} \sum_{\substack{(i,j)\in T_N^2 \\ |i-j|=1}} \int \eta(i) \left[\sqrt{f_t^N(\eta^{i,j})} - \sqrt{f_t^N(\eta)}\right]^2 \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\
&+ \int \big(\mathcal{L}_p^N f_t^N\big)(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\
&\leq - N^2 D_0[f_t^N] + C_1' N .
\end{aligned}$$

Enfin par la convexité de la fonction $D_0[.]$,

$$D_0[\bar{f}_t^N] \leq \frac{1}{t}\int_0^t D_0[f_s^N]\mathrm{d}s \leq \frac{1}{tN^2} H[\mu^N/\nu_1^N] + \frac{C_1'}{N}. \qquad \square$$

Démonstration de la proposition 2.1.

Première étape.

Par le théorème de Fubini

$$E_N^{\mu}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^T V_k(\eta_s(i))\mathrm{d}s\right\}$$
$$= T\int\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} V_k(\eta(i))\overline{f}_T^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta). \qquad (2.3)$$

Comme d'après l'inégalité entropique (1.1), la convexité de l'entropie, le lemme 2.2 et l'hypothèse **A2**, il existe une constante C_T positive telle que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int \eta(i)\bar{f}_T^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)$$
$$\leq \frac{1}{N}\mathrm{Log}\int \exp\left(\sum_{i=0}^{N-1}\eta(i)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) + \frac{1}{N}H[\bar{f}_T^N] \leq C_T,$$

le lemme 2.3 et l'hypothèse **A2**, permettent de majorer l'expression (2.3) par

$$\sup_{f^N\in B_{N,C}}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int V_k(\eta(i))f^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta),$$

où

$$B_{N,C} = \left\{f^N :\ f^N \geq 0,\ \int f^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) = 1, D_0[f^N] \leq \frac{C}{N}\,,\right.$$
$$\left.\sum_{i=0}^{N-1}\int \eta(i)f^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \leq CN\right\}.$$

En outre, puisque ν_1^N est invariante par translation, nous avons

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int V_k(\eta(i))f^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)$$
$$= \int V_k(\eta(0))\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i f^N(\eta)\right)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta),$$

donc par la convexité de $D_0[.]$, l'invariance par translation de $D_0[.]$ et de $\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i f^N(\eta)$, il suffit de montrer que pour tout $C > 0$,

$$\limsup_{k\to+\infty} \limsup_{N\to\infty} \sup_{f^N \in A_{N,C}} \int V_k(\eta(0)) f^N(\eta) \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) = 0, \tag{2.4}$$

où $A_{N,C} = B_{N,C} \ \cap \{f^N : f^N \text{ invariante par translation}\}$.

Deuxième étape.

Nous souhaitons nous ramener (lorsque N tend vers $+\infty$), au sup sur des densités de probabilités de formes de Dirichlet égales à zéro. Comme $V_k(\eta(0))$ ne dépend que des coordonnées dans la boîte $B_{0,k} = \{j,\ |j| \leq k\}$, nous projetons les mesures de probabilités $f^N \nu_1^N$ sur $\mathbb{N}^{B_{0,k}} = E_k$,

$$f_k^N(\xi) = \int f^N(\eta) 1_{\{\eta_{B_{0,k}} = \xi\}} \mathrm{d}\nu_N^{B_{0,k}^c}(\eta_{B_{0,k}^c}),$$

où $\nu_N^{B_{0,k}}$ est la projection sur $\mathbb{N}^{B_{0,k}}$ de la mesure ν_1^N et $\eta_{B_{0,k}} = \{\eta(j)\ ,\ j \in B_{0,k}\}$, ce qui nous donne

$$\int V_k(\eta(0)) f^N(\eta) \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) = \int V_k(\eta(0)) f_k^N(\eta) \mathrm{d}\nu_N^{B_{0,k}}(\eta_{B_{0,k}}), \tag{2.5}$$

puis nous introduisons une nouvelle forme de Dirichlet, définie pour les fonctions g^k sur E_k,

$$\begin{aligned} D_k[g^k] =& \frac{1}{4} \sum_{j,j+1 \in B_{0,k}} \int \xi(j) \Big(\sqrt{g^k(\xi^{j,j+1})} - \sqrt{g^k(\xi)} \Big)^2 \mathrm{d}\nu_N^{B_{0,k}}(\xi) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j,j+1 \in B_{0,k}} \int \xi(j+1) \Big(\sqrt{g^k(\xi^{j+1,j})} - \sqrt{g^k(\xi)} \Big)^2 \mathrm{d}\nu_N^{B_{0,k}}(\xi), \end{aligned}$$

qui va nous permettre de supprimer N dans l'intégrale de (2.4) et de ne travailler qu'avec des fonctions f^k sur E_k vérifiant $D_k[f^k] = 0$. En effet, si pour tous $i \in T_N$ et f fonction mesurable positive, nous notons

$$\begin{aligned} D_{i,i+1}[f] =& \frac{1}{4} \int \eta(i) \Big(\sqrt{f(\eta^{i,i+1})} - \sqrt{f(\eta)} \Big)^2 \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\ &+ \frac{1}{4} \int \eta(i+1) \Big(\sqrt{f(\eta^{i+1,i})} - \sqrt{f(\eta)} \Big)^2 \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \end{aligned}$$

la forme de Dirichlet associée au générateur

$$(L_{i,i+1} f)(\eta) = \frac{1}{2} \eta(i) \big[f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta) \big] + \frac{1}{2} \eta(i+1) \big[f(\eta^{i+1,i}) - f(\eta) \big],$$

nous avons $D_0[f] = \sum_{i=0}^{N-1} D_{i,i+1}[f]$; si de plus f^N est invariante par translation tous les termes $D_{i+k,i+1+k}[f^N]$ sont égaux pour tout $k \in T_N$ et grâce à la convexité de $D_{i,j}[.]$,

$$D_k[f_k^N] \leq \sum_{j,j+1 \in B_{0,k}} D_{j,j+1}[f^N] = \frac{2k}{N} D_0[f^N],$$

nous obtenons donc par (2.5),

$$\sup_{f^N \in A_{N,C}} \int V_k(\eta(0)) f^N(\eta) \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \leq \sup_{g^k \in A_{N,C}^k} \int V_k(\eta(0)) g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta),$$

où $\nu_1^{B_{0,k}}$ est la mesure produit de Poisson de paramètre 1 sur $B_{0,k}$ et

$$A_{N,C}^k = \Bigg\{ g^k : \ g^k \geq 0, \ \int g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta) = 1,$$
$$D_k[g^k] \leq \frac{2k}{N^2} C, \ \sum_{|j| \leq k} \int \eta(j) g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta) \leq C(2k+1) \Bigg\}.$$

D'autre part, la fonction de la variable g définie sur E_k, par $\int V_k(\eta(0)) g(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta)$ est continue pour la topologie de la convergence faible, car h est bornée. Puisque les ensembles $A_{N,C}^k$ sont compacts et $D_k[.]$ est s.c.i, nous avons

$$\limsup_{N \to +\infty} \sup_{g^k \in A_{N,C}^k} \int V_k(\eta(0)) g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta)$$
$$\leq \sup_{g^k \in A_0^k} \int V_k(\eta(0)) g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta),$$

où

$$A_0^k = \Bigg\{ g^k : \ g^k \geq 0, \int g^k \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}} = 1, \ D_k(g^k) = 0,$$
$$\sum_{|j| \leq k} \int \eta(j) g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta) \leq C(2k+1) \Bigg\}.$$

Il suffit alors de montrer que

$$\limsup_{k \to \infty} \sup_{g^k \in A_0^k} \int V_k(\eta(0)) g^k(\eta) \mathrm{d}\nu_1^{B_{0,k}}(\eta) = 0. \tag{2.6}$$

Troisième étape.

Remarquons que $D_k[g^k] = 0$ est équivalent à $g^k(\eta^{i,i+1}) = g^k(\eta^{i,i-1}) = g^k(\eta)$ pour tout $i \in B_{0,k}$; ceci implique que la mesure $g^k \nu_N^{B_{0,k}}$ est uniforme sur chaque hyperplan $\{\eta : \eta^k(0) = u\}$. Cette mesure s'écrit comme combinaison convexe de mesures produit de Poisson conditionnées sur l'ensemble de configurations ayant un nombre donné de particules que nous notons $m_u^{B_{0,k}} = \nu_\lambda^{B_{0,k}}\left[./\eta^k(0) = u\right]$, car elles ne dépendent pas de λ. De là il s'en suit que le membre de gauche de (2.6) est majoré par

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{u \geq 0} \int V_k(\eta(0)) \mathrm{d}m_u^{B_{0,k}}(\eta).$$

Cette dernière limite est égale à zéro, d'après le théorème 5.1 de [2]. $\square$

3. ENTROPIE RELATIVE

Démonstration de la proposition 1.2.

Pour alléger cette démonstration, nous décomposons ses calculs en lemmes successifs que nous démontrons dans l'annexe.

Soit $\lambda(.,.)$ une solution régulière de l'équation (E) et $\Psi_t^{N,\varepsilon}$ la densité de probabilité de la mesure $\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N$ par rapport à ν_1^N,

$$\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta) = \exp\left(\sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{Log}(\lambda(t, i/N) + \varepsilon)\eta(i) + \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \lambda(t, i/N) - \varepsilon)\right),$$

l'opérateur adjoint $\left(\Omega_p^N\right)^*$ de Ω_p^N par rapport à ν_1^N est donné pour tout $U \in \mathcal{C}_b(E_N)$ par

$$\begin{aligned}\left(\left(\Omega_p^N\right)^* U\right)(\eta) &= N^2(\mathcal{L}_0^N U)(\eta) \\ &+ \sum_{l=1}^{p} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{\varphi_l(\eta(i))U(\eta^{i,l-}) - b_l(\eta(i))U(\eta)\right\} \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left\{\phi(\eta(i))U(\eta^{i,+}) - d(\eta(i))U(\eta)\right\},\end{aligned}$$

où pour $1 \leq l \leq p$,

$$\eta^{i,l-}(k) = \begin{cases} \eta(i) - l & \text{si } k = i \text{ et } \eta(i) \geq l \\ \eta(k) & \text{sinon ,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi(\eta(i)) = \frac{d(\eta(i)+1)}{\eta(i)+1}.$$

LEMME 3.1. – *Pour tout* $t \in]0,T]$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H\big[\mu_t^N/\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N\big]$$
$$\leq \int \frac{1}{\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)}\left[\Big(\big(\Omega_p^N\big)^*\Psi_t^{N,\varepsilon}\Big)(\eta) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)\right] f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta). \quad (3.1)$$

Pour toute fonction h définie sur $\mathbb{N}$ bornée et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit
$$(\Gamma h)(a,b) = \Big(\tilde{h}(a) - \tilde{h}(b)\Big) - \tilde{h}'(b)(a-b).$$

LEMME 3.2. – *Soient* $\rho(.) \in \mathcal{C}(S)$ *et* $J(.)$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *bornée, pour tout* $\gamma > 0$ *et pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int J\big(\rho(i/N)\big) \times (\Gamma h)\big(\eta^k(i), \rho(i/N)\big) f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)$$
$$\leq \frac{1}{\gamma(2k+1)}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Log}\bigg(\int \exp\Big(\gamma(2k+1)J\big(\rho(i/N)\big)$$
$$\times (\Gamma h)\big(\eta^k(i), \rho(i/N)\big)\Big)\mathrm{d}\nu_{\rho(.)}^N(\eta)\bigg)$$
$$+ \frac{1}{\gamma N}H[\mu_t^N/\nu_{\rho(.)}^N] + O\big((2k+1)/N\big).$$

LEMME 3.3. – *Soit* $h(.)$ *une fonction définie sur* $\mathbb{N}$ *bornée,* $\rho(.) \in \mathcal{C}(S)$ *et* $J(.)$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *bornée ; il existe* $\gamma_0 > 0$ *tel que, pour tout* $\gamma \leq \gamma_0$,

$$\limsup_{k\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{(2k+1)}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Log}\bigg(\int \exp\Big(\gamma(2k+1)J\big(\rho(i/N)\big)$$
$$\times (\Gamma h)\big(\eta^k(i), \rho(i/N)\big)\Big)\mathrm{d}\nu_{\rho(.)}^N(\eta)\bigg) \leq 0.$$

LEMME 3.4. – *Soient* $h(.)$ *une fonction définie sur* $\mathbb{N}$ *bornée et* $\rho(.) \in \mathcal{C}(S)$; *pour tout* $t \in [0,T]$, *il existe* $\gamma_1 > 0$ *tel que, pour tout* $\gamma \leq \gamma_1$,

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N\gamma}\mathrm{Log}\bigg(\int \exp\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\gamma\tilde{h}\big(\rho(i/N)\big)$$
$$\times\big(\eta(i) - \rho(i/N)\big)\Big)\mathrm{d}\nu_{\rho(.)}^N(\eta)\bigg) \leq 0.$$

Démonstration de la proposition 1.2. – Elle consiste, à trouver une fonction $A^t_{N,\varepsilon}$ qui tend vers zéro lorsque N tend vers $+\infty$, puis ε vers zéro, vérifiant

$$\frac{1}{N}H\left[\mu_t^N/\nu^N_{\lambda(t,.)+\varepsilon}\right] \leq A^t_{N,\varepsilon} + \frac{C}{N}\int_0^t H\left[\mu_s^N/\nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}\right]\mathrm{d}s, \tag{3.2}$$

et d'utiliser ensuite le lemme de Gronwall pour conclure.

Pour tous $t \in [0,T]$, $\varepsilon > 0$ et $i,k \in T_N$ posons

$$\lambda_t^\varepsilon(i) = \lambda(t,i/N) + \varepsilon,$$
$$\Lambda_t^\varepsilon(i) = \left(\frac{\eta(i)}{\lambda_t^\varepsilon(i)} - 1\right) \quad \text{et} \quad \Lambda_t^{\varepsilon,k}(i) = \left(\frac{\eta^k(i)}{\lambda_t^\varepsilon(i)} - 1\right).$$

Pour $\eta \in E_N$, les expressions $\frac{1}{\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)}\left(\left(\Omega_p^N\right)^*\Psi_t^{N,\varepsilon}\right)(\eta)$ et $\frac{1}{\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)$ valent respectivement

$$\begin{aligned}&\frac{N^2}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(\lambda\big(t,(i+1)/N\big) + \lambda\big(t,(i-1)/N\big) - 2\lambda\big(t,i/N\big)\Big)\Lambda_t^\varepsilon(i)\\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{\varphi_l(\eta(i))}{\left(\lambda_t^\varepsilon(i)\right)^l} - b_l(\eta(i))\right) + \lambda_t^\varepsilon(i)\phi(\eta(i)) - d(\eta(i))\right)\end{aligned} \tag{3.3}$$

et

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lambda\big(t,i/N\big) + \sum_{l=1}^{p} l\widetilde{b_l}\big(\lambda\big(t,i/N\big)\big) - \tilde{d}\big(\lambda\big(t,i/N\big)\big)\right]\Lambda_t^\varepsilon(i), \tag{3.4}$$

car $\lambda(.,.)$ est solution régulière de l'équation (E). Appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 dans l'expression (3.3), puis remplaçons le membre de gauche de (3.1) intégré entre 0 et t par les valeurs obtenues de (3.3) et (3.4), il vient

$$\frac{1}{N}H\left[\mu_t^N/\nu^N_{\lambda(t,.)+\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{N}H\left[\mu^N/\nu^N_{m(.)+\varepsilon}\right] + B^t_{N,\varepsilon} + D^t_{N,\varepsilon} + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{3.5}$$

où

$$B_{N,\varepsilon}^t = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{l=1}^{p}\int_0^t \left(\int \left[\frac{\varphi_l(\eta(i))}{(\lambda_s^\varepsilon(i))^l} - b_l(\eta(i)) - l\widetilde{b_l}(\lambda(s,i/N))\Lambda_s^\varepsilon(i)\right] \mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\right) \mathrm{d}s,$$

$$D_{N,\varepsilon}^t = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \left(\int \left[\lambda_s^\varepsilon(i)\phi(\eta(i)) - d(\eta(i)) + \widetilde{d}(\lambda(s,i/N))\Lambda_s^\varepsilon(i)\right] \mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\right) \mathrm{d}s.$$

Nous évaluons ces deux quantités à l'aide de la proposition 2.1 ; celle-ci n'est valable que pour des fonctions bornées, donc nous procédons par la méthode de troncature.

1) La quantité $B_{N,\varepsilon}^t$ étant constituée de p termes identiques, il suffit d'en évaluer un. Si pour $1 \le l \le p$, nous notons

$$\varphi_{l_M}(r) = \varphi_l(r)1_{\{r\le M+l\}} \quad , \quad \bar{\varphi}_{l_M}(r) = \varphi_l(r) - \varphi_{l_M}(r)$$
$$b_{l_M}(r) = b_l(r)1_{\{r\le M\}} \quad , \quad \bar{b}_{l_M}(r) = b_l(r) - b_{l_M}(r),$$

nous avons

$$\begin{aligned} B_{N,\varepsilon}^t(l) &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \left(\int \left[\frac{\varphi_l(\eta(i))}{(\lambda_s^\varepsilon(i))^l} - b_l(\eta(i)) - l\widetilde{b_l}(\lambda(s,i/N))\Lambda_s^\varepsilon(i)\right] \mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \left(\int \left[\frac{\varphi_{l_M}(\eta(i))}{(\lambda_s^\varepsilon(i))^l} - b_{l_M}(\eta(i)) - l\widetilde{b_{l_M}}(\lambda_s^\varepsilon(i))\Lambda_s^\varepsilon(i)\right] \mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\right) \mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \left(\int l(\widetilde{b_{l_M}}(\lambda_s^\varepsilon(i)) - \widetilde{b_l}(\lambda(s,i/N)))\Lambda_s^\varepsilon(i)\mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\right) \mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \left(\int \left[\frac{\bar{\varphi}_{l_M}(\eta(i))}{(\lambda_s^\varepsilon(i))^l} - \bar{b}_{l_M}(\eta(i))\right] \mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\right) \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

nous utilisons la proposition 2.1 pour le premier terme, l'inégalité entropique (1.1) sur le second et nous supprimons la partie négative dans le dernier terme ; nous obtenons pour tout $\gamma > 0$,

$$B_{N,\varepsilon}^t(l) \le \tilde{B}_{N,k,\varepsilon}^t(l) + F_{N,\gamma}^t(l) + R_{M,N}^t(l) + r_N^t(k,M,l) + \frac{1}{N\gamma}\int_0^t H[\mu_s^N/\nu_{\lambda(s,.)+\varepsilon}^N]\mathrm{d}s, \quad (3.6)$$

où

$$\tilde{B}^t_{N,k,\varepsilon}(l) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t\left(\int\left[\frac{\widetilde{\varphi_{l_M}}(\eta^k(i))}{(\lambda^\varepsilon_s(i))^l} - \widetilde{b_{l_M}}(\eta^k(i)) - l\widetilde{b_{l_M}}(\lambda^\varepsilon_s(i))\Lambda^{\varepsilon,k}_s(i)\right]\mathrm{d}\mu^N_s(\eta)\right)\mathrm{d}s,$$

$$F^t_{N,\gamma}(l) = \frac{1}{N\gamma}\int_0^t \mathrm{Log}\left(\int\exp\left(\gamma l\sum_{i=0}^{N-1}(\widetilde{b_{l_M}}(\lambda^\varepsilon_s(i)) - \widetilde{b_l}(\lambda(s,i/N)))\Lambda^\varepsilon_s(i)\right)\mathrm{d}\nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}(\eta)\right)\mathrm{d}s,$$

$$R^t_{M,N}(l) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t\left(\int\frac{\bar{\varphi}_{l_M}(\eta(i))}{(\lambda^\varepsilon_s(i))^l}\mathrm{d}\mu^N_s(\eta)\right)\mathrm{d}s$$

et $r^t_N(k,M,l)$ est tel que, pour tout $M > l$,

$$\limsup_{k\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty} r^t_N(k,M,l) = 0.$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 3.4, par lequel il existe une constante positive γ_1 telle que, pour tout $\gamma \le \gamma_1$

$$\limsup_{k\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty} F^t_{M,N}(\gamma) = 0. \tag{3.7}$$

Pour déterminer la limite de $R^t_{M,N}(l)$, nous employons un argument de martingale. En remarquant que d'après l'hypothèse **A1**, pour tout $0 < \varrho \le 1$ et $1 \le l \le p$, il existe $n_0 > 0$ tel que, pour $n \ge n_0$

$$\varphi_l(n) \le \frac{\varrho}{2p}d(n) \quad \text{et} \quad b_l(n) \le \frac{\varrho}{2p(p+1)}d(n),$$

on peut trouver une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(n) - \sum_{l=1}^{p} l b_l(n) + C \ge 0\,;$$

nous utilisons ensuite la martingale centrée,

$$\begin{aligned} M^N_t &= \sum_{i=0}^{N-1}\eta_t(i) - \sum_{i=0}^{N-1}\eta_0(i) - \int_0^t \Omega^N_p\left(\sum_{i=0}^{N-1}\eta_s(i)\right)\mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\eta_t(i) - \sum_{i=0}^{N-1}\eta_0(i) + \sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t\left(d(\eta_s(i)) - \sum_{l=1}^{p} l b_l(\eta_s(i))\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

puis, par l'inégalité (1.1) et le lemme 2.2, nous obtenons pour M assez grand, et ϱ petit,

$$\begin{aligned} R^t_{M,N}(l) \leq & \varrho \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \Big(\int \Big[d(\eta(i)) - \sum_{l=1}^{p} l b_l(\eta(i)) + C \Big] \mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\Big)\mathrm{d}s. \\ \leq & t\varrho \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(C - \int \eta(i) f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta) + \int \eta(i) f^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\Big) \\ \leq & \varrho C'_t, \end{aligned}$$

où C'_t est une constante positive ; par conséquent

$$\limsup_{M\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty} R^t_{M,N}(l) = 0. \tag{3.8}$$

Par ailleurs, en tenant compte de l'égalité $\widetilde{\varphi_{l_M}}(a) = a^l \widetilde{b_{l_M}}(a)$, nous démontrons que pour tout $(a,\lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{\lambda^l}(\Gamma\varphi_l)(a,\lambda) - (\Gamma b_l)(a,\lambda) = \frac{\widetilde{\varphi}_l(a)}{\lambda^l} - \widetilde{b}_l(a) - l\widetilde{b}_l(\lambda)\Big(\frac{a}{\lambda} - 1\Big),$$

où la fonction Γ est définie dans le lemme 3.2. Nous pouvons donc remplacer $\tilde{B}^t_{N,\varepsilon}(l)$ par

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \Big(\int \Big[\frac{1}{(\lambda_s^\varepsilon(i))^l}(\Gamma\varphi_{l_M})(\eta^k(i),\lambda_s^\varepsilon(i))\Big]\mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\Big)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^t \Big(\int \Big[-(\Gamma b_{l_M})(\eta^k(i),\lambda_s^\varepsilon(i))\Big]\mathrm{d}\mu_s^N(\eta)\Big)\mathrm{d}s.$$

La quantité $\lambda(s,.) + \varepsilon$ étant minorée par le lemme 3.2 nous majorons cette dernière expression par

$$\frac{1}{N}\int_0^t \frac{1}{\gamma(2k+1)}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Log}\Big(\int \exp\Big(\frac{\gamma(2k+1)}{(\lambda_s^\varepsilon(i))^l}(\Gamma\varphi_{l_M})$$
$$\times(\eta^k(i),\lambda_s^\varepsilon(i))\Big)\mathrm{d}\nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}(\eta)\Big)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{N}\int_0^t \frac{1}{\gamma(2k+1)}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Log}\Big(\int \exp\Big(\gamma(2k+1)(-\Gamma b_M)$$
$$\times(\eta^k(i),\lambda_s^\varepsilon(i))\Big)\mathrm{d}\nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}(\eta)\Big)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{2}{N\gamma}\int_0^t H[\mu_s^N/\nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}]\mathrm{d}s + O((2k+1)/N)\,;$$

d'après le lemme 3.3, il existe $\gamma_2 > 0$ tel que, pour tout $\gamma < \gamma_2$ la limite des deux premiers termes de cette dernière quantité est négative, lorsque N tend vers $+\infty$, puis k vers $+\infty$. Il résulte alors de (3.6), (3.7) et (3.8) que pour tout $\gamma < \gamma_0 = \gamma_1 \wedge \gamma_2$, il existe une fonction $A^t_{N,k,\varepsilon}(\gamma, l)$ qui tend vers une quantité négative lorsque N puis k tendent vers $+\infty$ et vérifiant

$$B^t_{N,\varepsilon}(l) \leq A^t_{N,k,\varepsilon}(\gamma, l) + \frac{3}{N\gamma}\int_0^t H[\mu^N_s / \nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}]\mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

2) On évalue le terme $D^t_{N,\varepsilon}$ de la même manière que **1)**, la seule différence se situe dans l'étape qui consiste à introduire la fonction Γ (c'est-à-dire dans l'estimation de $\tilde{B}^t_{N,k,\varepsilon}$) ; pour cela il faut utiliser l'égalité $\widetilde{\phi_{_M}}(a) = \frac{1}{a}\widetilde{d_{_M}}(a)$ qui nous donne, pour tout $(a, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*_+$,

$$\lambda\big(\Gamma\phi\big)(a,\lambda) - \big(\Gamma d\big)(a,\lambda) = \lambda\widetilde{\phi}(a) - \widetilde{d}(a) + \widetilde{d}(\lambda)(\frac{a}{\lambda} - 1),$$

nous obtenons comme pour $B^t_{N,\varepsilon}$, l'existence d'une fonction $C^t_{N,k,\varepsilon}(\gamma)$, vérifiant pour γ assez petit

$$D^t_{N,\varepsilon} \leq C^t_{N,k,\varepsilon}(\gamma) + \frac{3}{N\gamma}\int_0^t H[\mu^N_s / \nu^N_{\lambda(s,.)+\varepsilon}]\mathrm{d}s \tag{3.10}$$

et

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to+\infty}\ \limsup_{N\to+\infty} C^t_{N,k,\varepsilon}(\gamma) = 0.$$

3) En remarquant que d'après l'inégalité entropique (1.1),

$$\begin{aligned} H\big[\mu^N / \nu^N_{m(.)+\varepsilon}\big] =& H\big[\mu^N / \nu^N_{m(.)}\big] + \int \mathrm{Log}\Big(\frac{\mathrm{d}\nu^N_{m(.)}}{\mathrm{d}\nu^N_{m(.)+\varepsilon}}(\eta)\Big)\mathrm{d}\mu^N(\eta) \\ \leq& 2H\big[\mu^N / \nu^N_{m(.)}\big] + \mathrm{Log}\int\Big(\frac{\mathrm{d}\nu^N_{m(.)}}{\mathrm{d}\nu^N_{m(.)+\varepsilon}}(\eta)\Big)\mathrm{d}\nu^N_{m(.)}, \end{aligned}$$

nous vérifions facilement par l'hypothèse **A2** que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H\big[\mu^N / \nu^N_{m(.)+\varepsilon}\big] = 0.$$

D'autre part, d'après (3.5), (3.6) et (3.10), si pour γ assez petit, on pose

$$A^t_{N,k,\varepsilon} = \frac{1}{N}H\big[\mu^N / \nu^N_{m(.)+\varepsilon}\big] + \sum_{l=1}^{p} A^t_{N,k,\varepsilon}(l) + C^t_{N,k,\varepsilon},$$

on obtient l'inégalité (3.4) ; il suffit enfin d'utiliser le lemme de Gronwall pour achever la démonstration de la proposition.

ANNEXE

Démonstration du lemme 3.1

Pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$H[\mu_t^N/\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N] = H[\mu_t^N/\nu_1^N] - \int \mathrm{Log}\Big(\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)\Big) f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)$$

ceci implique

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H[\mu_t^N/\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N] = &\int f_t^N(\eta)\big(\Omega_p^N \mathrm{Log} f_t^N\big)(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\\ &- \int \Big(\Omega_p^N \mathrm{Log}\Psi_t^{N,\varepsilon}\Big)(\eta) f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\\ &- \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)\right)\frac{f_t^N(\eta)}{\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)}\mathrm{d}\nu_1^N(\eta),\end{aligned}$$

où le second terme est obtenu comme dans la démonstration du lemme 2.2. En utilisant ensuite la linéarité de Ω_p^N et l'inégalité (2.2), il vient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H[\mu_t^N/\nu_{\lambda(t,.)+\varepsilon}^N] \le &\int \left(\Omega_p^N \frac{f_t^N}{\Psi_t^{N,\varepsilon}}\right)(\eta)\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\\ &- \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)\right)\frac{f_t^N(\eta)}{\Psi_t^{N,\varepsilon}(\eta)}\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\end{aligned}$$

le résultat découle alors de la définition de $\big(\Omega_p^N\big)^*$. □

Démonstration du lemme 3.2

Soit $1 \le k \le N$, en décomposant T_N en boites de taille $2k+1$, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int J\big(\rho(i/N)\big)(\Gamma h)\big(\eta^k(i),\rho(i/N)\big) f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{|j|\le k}\sum_{r=0}^{N_k-1}\int J\big(\rho\big((j+r(2k+1))/N\big)\big)\\ &\qquad\times\Big[(\Gamma h)\big(\eta^k(j+r(2k+1)),\rho\big((j+r(2k+1))/N\big)\big)\Big] f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta)\\ &\quad+\frac{1}{N}\sum_{i=(2k+1)\cdot N_k-k}^{N-k-1}\\ &\qquad\int J\big(\rho(i/N)\big)(\Gamma h)\big(\eta^k(i),\rho(i/N)\big) f_t^N(\eta)\mathrm{d}\nu_1^N(\eta),\end{aligned}\tag{5.1}$$

où N_k désigne la partie entière de $\frac{N}{2k+1}$. Comme les fonctions J, ρ , et h sont bornées, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que pour tout $i \in T_N$,

$$J\big(\rho(i/N)\big)(\Gamma h)\big(\eta^k(i), \rho(i/N)\big) \leq K_1 + K_2\eta^k(i), \tag{5.2}$$

par l'inégalité entropique (1.1), pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{i=(2k+1)\cdot N_k - k}^{N-k-1} \int J\big(\rho(i/N)\big)(\Gamma h)\big(\eta^k(i), \rho(i/N)\big) f_t^N(\eta) \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) \\ &\leq \frac{1}{Na}(2k+1)\big[aK_1 + \| \rho \|_\infty \big(\exp(aK_2) - 1\big)\big] \\ &\qquad\qquad + \frac{(2k+1)}{aN} H[\mu_t^N / \nu_{\rho(.)}^N], \end{aligned} \tag{5.3}$$

compte tenu des hypothèses **A1**, **A2** et du lemme 2.1, il existe une constante K_3 positive telle que $H[\mu_t^N / \nu_{\rho(.)}^N] \leq K_3 N$; il ne reste plus qu'à passer à la limite quand N puis a tendent vers $+\infty$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} &\sum_{i=(2k+1)\cdot N_k - k}^{N-k-1} \\ &\times \int J\big(\rho(i/N)\big)(\Gamma h)\big(\eta^k(i), \rho(i/N)\big) f_t^N(\eta) \mathrm{d}\nu_1^N(\eta) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité entropique (1.1) puis l'inégalité de Hölder permettent de majorer le premier terme du second membre de (5.1) par

$$\begin{aligned} \frac{1}{N\gamma} \frac{1}{2k+1} \sum_{|j| \leq k} \mathrm{Log}\Bigg(\int \exp\Bigg(\gamma(2k+1) &\sum_{r=0}^{N_k - 1} J\big(\rho\big((j+r(2k+1))/N\big)\big) \\ &\times \Big[(\Gamma h)\big(\eta^k(j+r(2k+1)), \rho\big((j+r(2k+1))/N\big)\big)\Big]\Bigg) \mathrm{d}\nu_{\rho(.)}^N(\eta)\Bigg) \\ + \frac{1}{\gamma N} H[\mu_t^N / \nu_{\rho(.)}^N], \end{aligned}$$

nous pouvons maintenant utiliser le fait que $\nu_{\rho(.)}^N$ est une mesure produit, cette dernière expression est égale à

$$\frac{1}{N\gamma}\frac{1}{2k+1}\sum_{|j|\le k}\sum_{r=0}^{N_k-1}\mathrm{Log}\bigg(\int \exp\Big(\gamma(2k+1)J\big(\rho\big((j+r(2k+1))/N\big)\\ \times\Big[(\Gamma h)\big(\eta^k(j+r(2k+1)),\rho\big((j+r(2k+1))/N\big)\big)\Big]\Big)\mathrm{d}\nu^N_{\rho(.)}(\eta)\bigg)\\ +\frac{1}{\gamma N}H[\mu_t^N/\nu^N_{\rho(.)}],$$

nous utilisons finalement le même argument que (5.2) et (5.3) pour obtenir le résultat. □

Démonstration du lemme 3.3

D'abord, pour tout $\gamma > 0$,

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Log}\bigg(\int\exp\Big(\gamma(2k+1)J\big(\rho(i/N)\big)\\ \times(\Gamma h)\big(\eta^k(i),\rho(i/N)\big)\Big)\mathrm{d}\nu^N_{\rho(.)}(\eta)\bigg)\\ =\frac{1}{(2k+1)}\int_S\bigg(\mathrm{Log}\bigg(\int\exp\Big(\gamma(2k+1)J\big(\rho(x)\big)\\ \times(\Gamma h)\big(\eta^k(0),\rho(x)\big)\Big)\mathrm{d}\nu^{B_{0,k}}_{\rho(x)}(\eta)\bigg)\bigg)\mathrm{d}x,$$

où pour tout $x\in S$, $\nu^{B_{0,k}}_{\rho(x)}$ est la mesure produit de Poisson sur $E_k=\mathbb{N}^{B_{0,k}}$, de paramètre constant $\rho(x)$. Sous $\nu^{B_{0,k}}_{\rho(x)}$, les variables aléatoires $\big(\eta(i)\big)_{i\in B_{0,k}}$ sont indépendantes identiquement distribuées; d'après le théorème de Cramèr ([11] théorème 3.8), la suite $\big(\eta^k(0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait au principe de grandes déviations de fonctionnelle d'action $I(.)$, définie pour $y>0$ par

$$I(y)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\bigg[\theta y-\mathrm{Log}\int\exp\big(\theta\eta(0)\big)\mathrm{d}\nu^{B_{0,k}}_{\rho(x)}(\eta)\bigg]\\ =\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\big[\theta y-\rho(x)\big(e^\theta-1\big)\big]=y\mathrm{Log}\bigg(\frac{y}{\rho(x)}\bigg)+\big(\rho(x)-y\big).$$

Nous appliquons le théorème de Varadhan [12] et nous obtenons

$$\limsup_{k\to+\infty}\frac{1}{2k+1}\int_S \mathrm{Log}\Big(\int \exp\Big((2k+1)\gamma J(\rho(x))\times(\Gamma h)(\eta^k(0),\rho(x))\Big)\mathrm{d}\nu_{\rho(x)}^{B_{0,k}}(\eta)\Big)\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_S \sup_{y\in\mathbb{R}_+}\Big\{\gamma J(\rho(x))(\Gamma h)(y,(\rho(x)) - y\mathrm{Log}\Big(\frac{y}{\rho(x)}\Big) - (\rho(x)-y)\Big\}\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_S \sup_{y\in\mathbb{R}_+}\Big\{\gamma\,\|J\|_\infty\,|(\Gamma h)(y,(\rho(x))| - y\mathrm{Log}\Big(\frac{y}{\rho(x)}\Big) - (\rho(x)-y)\Big\}\mathrm{d}x,$$

finalement, pour γ assez petit, cette dernière quantité est égale à zéro. □

Démonstration du lemme 3.4

Nous démontrons, que sous $\nu_{\rho(.)}^N$ la suite $\alpha^N = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\eta(i)\delta_{i/N}$ satisfait au principe de grandes déviations de fonctionnelle d'action

$$\mathcal{I}(\sigma)=\begin{cases}\int_S\Big(g(\theta)\mathrm{Log}\frac{g(\theta)}{\rho(\theta)}+(\rho(\theta)-g(\theta))\Big)\mathrm{d}\theta & \text{si } \sigma=g(\theta)\mathrm{d}\theta\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

D'après le théorème de Varadhan, pour tout $\varrho>0$,

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N\gamma}\mathrm{Log}\Big(\int\exp\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\gamma\tilde{h}(\rho(i/N))\,(\eta(i)-\rho(i/N))\Big)\mathrm{d}\nu_{\rho(.)}^N(\eta)\Big)$$
$$\leq\frac{1}{\gamma}\sup_{g(\theta)\mathrm{d}\theta}\Big\{\int_S\Big(\gamma\tilde{h}(\rho(\theta))(g(\theta)-\rho(\theta))-\varrho - g(\theta)\log\Big(\frac{g(\theta)}{\rho(\theta)}\Big)-(\rho(\theta)-g(\theta))\Big)\mathrm{d}\theta\Big\}+\frac{\varrho}{\gamma},$$

on vérifie ensuite que pour γ assez petit cette dernière quantité est majorée par $\frac{\varrho}{\gamma}$, il suffit alors de faire tendre ϱ vers 0. □

Démonstration de (1.3).

Il suffit de démontrer ce résultat sans valeur absolue. Par l'inégalité de Tchebycheff exponentielle, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\mathrm{Log}\Big(\nu^N_{\rho(.)}\Big\{\eta:\quad \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\eta(i)G(i/N) - \int_S G(\theta)\rho(\theta)\mathrm{d}\theta > \delta\Big\}\Big)\\
&\quad\le -a\delta + \frac{1}{N}\mathrm{Log}\Big(\int \exp\Big(a\delta\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\eta(i)G(i/N)\\
&\qquad\qquad - \int_S G(\theta)\rho(\theta)\mathrm{d}\theta\Big)\Big)\mathrm{d}\nu^N_{\rho(.)}(\eta)\Big)\\
&\quad\le -a\delta + \sup_{g(\theta)\mathrm{d}\theta}\Big\{\int_S\Big(aG(\theta)(g(\theta)-\rho(\theta))\\
&\qquad\qquad - g(\theta)\mathrm{Log}\Big(\frac{g(\theta)}{\rho(\theta)}\Big) - (\rho(\theta)-g(\theta))\Big)\mathrm{d}\theta\Big\},
\end{aligned}$$

par le théorème de Varadhan. Pour a assez petit cette dernière quantité est négative. □

Cet article est dédié à la mémoire de Claude Kipnis qui a dirigé ma thèse dont ce travail fait partie. C'était un grand privilège de travailler à son contact et de pouvoir profiter de l'étendue de ses connaissances.

Je tiens également à remercier Ellen Saada, Claudio Landim ainsi que Olivier Benois pour leurs aides et leurs encouragements.

RÉFÉRENCES

[1] E. D. ANDJEL, Invariant measures for the Zero range process, *Ann. Probab.*, Vol. **10**, 1982, pp. 525-547.

[2] P. DIACONIS and D. FREEDMAN, A dozen de Finetti-style results in search of a theory, *Ann. Inst. Henri. Poincaré*, Vol. **23**, 1987, pp. 397-423.

[3] A. DE MASI and E. PRESUTTI, Mathematical methods for hydrodynamic limits, *Lecture Notes in Math.*, Vol. **1501**, Springer Verlag, 1991.

[4] M. Z. GUO, G. PAPANICOLAOU and S. R. S. VARADHAN, Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **118**, 1988, pp. 31-59.

[5] C. KIPNIS, S. OLLA and S. R. S. VARADHAN, Hydrodynamics and Large Deviations for Simple Exclusion Processes, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **XLII**, 1989, pp. 115-137.

[6] T. M. LIGGETT, *Interacting Particle Systems*, Springer Verlag, 1985.

[7] M. MOURRAGUI, *Thèse Université de Rouen*, 1993.

[8] M. MOURRAGUI, Limite hydrodynamique des processus de sauts, de naissances et de morts, *C. R. Acad. Sci.*, Vol. **316**, 1993.

[9] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer, Berlin, 1982.

[10] H. SPOHN, Large scale dynamics of interacting particles, *Texts and monographs in physics*, Springer Verlag, 1991.
[11] D. W. STROOCK, An introduction to the theory of large deviations, *Springer*, Berlin, 1984.
[12] S. R. S. VARADHAN, Large deviations and applications, *Regional conference series in applied mathematics*, Philadelphia, society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. **48**, 1984.
[13] H.-T. YAU, Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau Models, *Letters in Mathematical Physics*, Vol. **22**, 1991, pp. 63-80.

(Manuscrit reçu le 3 janvier 1994.)