ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC MALRIC

Propriétés d'échange et fins d'ensembles optionnels

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 3 (1996), p. 291-297

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_3_291_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 3, 1996, p. 291-297 *Probabilités et Statistiques*

Propriétés d'échange et fins d'ensembles optionnels

par

Marc MALRIC

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, Tour 56, 75252 Paris Cedex 05, France.

RÉSUMÉ. – Afin de caractériser la filtration brownienne, il conviendrait, en suivant les idées de M. Barlow [2], de déterminer la tribu $\mathcal{F}_{L+}$ du passé « germinatif » à l'instant L en fonction de la tribu $\mathcal{F}_L$ du passé à l'instant L.

Cette détermination pose essentiellement deux problèmes : l'échange entre supremum et intersection pour une suite décroissante de sous-tribus d'une part, et l'évaluation de la tribu-germe d'autre part. Cet article résoud, grâce au critère de V. Weiszäcker [5], le premier problème en toute généralité au prix d'une légère modification de la notion de tribu-germe.

ABSTRACT. – For the characterization of the Brownian filtration it would be convenient according to M. Barlow [2] to determine the σ-algebra $\mathcal{F}_{L+}$ of the "germinative" past at the instant L in terms of the σ-algebra $\mathcal{F}_L$ of the past at the instant L. In this determination, essentially two problems appear: on one hand the exchange between the supremum and the intersection of a decreasing sequence of σ-fields, on the other hand the evaluation of the germ σ-field. This paper, by means of V. Weiszäcker's criterium [5], solves completely the first problem, at the price of a slight modification of the notion of the germ σ-field.

INTRODUCTION

Ce court article est consacré à la démonstration du théorème (page 297) qui décrit ce qu'il faut ajouter à la tribu $\mathcal{F}_L$ pour obtenir la tribu $\mathcal{F}_{L+}$ lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration propre d'un processus markovien et L un temps honnête, c'est-à-dire une fin d'ensemble optionnel. La comparaison de $\mathcal{F}_{L+}$

et de $\mathcal{F}_L$ serait selon l'article de Barlow-Pitman-Yor, une des manières de caractériser la filtration brownienne. Rappelons que la tribu $\mathcal{F}_L$ est la tribu du passé jusqu'en l'instant L ; elle est engendrée par les v.a. H_L, $H_.$ parcourant l'ensemble des processus optionnels; tandis que $\mathcal{F}_{L^+}$ est la tribu du passé « germinatif » à l'instant L ; elle est engendrée par les v.a. K_L, $K_.$ parcourant l'ensemble des processus progressifs.

Par ailleurs, Millar [4] a défini la notion de tribu germe à l'instant $L : \mathcal{G}_L = \bigcap_{n \in N^*} \sigma\left(X_{L+u},\ 0 \leq u \leq \frac{1}{n}\right)$, et a identifié cette tribu lorsque L est un début d'excursion de X, un P.A.I. suffisamment régulier qui engendre la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Or, il est facile d'établir que

$$\mathcal{F}_{L^+} = \bigcap_{n \in N^*} (\mathcal{F}_L \vee \mathcal{G}_n^L),\ \mathcal{G}_n^L = \sigma\left(X_{L+u},\ 0 \leq u \leq \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, la comparaison des tribus $\mathcal{F}_L$ et $\mathcal{F}_{L^+}$ soulève-t-elle deux problèmes essentiels :

1°) le problème d'échange entre supremum et intersection dénombrable d'une suite décroissante de tribus ;

2°) la détermination effective de la tribu-germe.

H. von Weizsäcker [5] a donné un critère caractérisant complètement l'échange. Le but du présent article est de résoudre le problème d'échange. Le but est atteint en toute généralité au prix d'une légère modification de la notion de tribu-germe : afin que l'échange ait lieu, on doit insérer au « germe » la tribu $\sigma(L)$, modification qui apparaît finalement assez naturelle.

Bien sûr, reste toute la difficulté de déterminer cette tribu-germe dans le cas général.

Soit X un processus markovien continu à droite à valeurs réelles ou vectorielles, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de filtration propre $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ quasi continue à gauche.

On suppose de plus X continus dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i.e.*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^+ \lim_{t \to t_0} \|X_t - X_{t_0}\|_1 = 0.$$

Il en est en particulier ainsi lorsque les trajectoires de X sont continues, et que X est localement dans H^1 :

$$\forall t > 0, \qquad X_t^* = \operatorname{Sup}\{|X_s|,\ 0 \leq s \leq t\} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P\}.$$

Soit L une fin d'optionnel. Rappelons d'abord les définitions suivantes :

$\mathcal{F}_L$ (resp. $\mathcal{F}_{L^-}$, $\mathcal{F}_{L^+}$) désigne la tribu engendrée par les v.a. H_L où le processus H décrit la tribu optionnelle (resp. prévisible, progressive).

Rappelons ensuite le :

LEMME DE DESCRIPTION ([3]). – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

(i) $\mathcal{F}_{L+\frac{1}{n}} = \sigma\left(X_{u\wedge\left(L+\frac{1}{n}\right)},\ u > 0\right) \vee \sigma(L)$

(ii) $\mathcal{F}_{L^+} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\mathcal{F}_L \vee \sigma\left(X_{L+u},\ 0 \leq u \leq \frac{1}{n}\right)\right\}.$

On dit que la propriété d'échange a lieu pour $\mathcal{F}_{L^+}$ si

$$\mathcal{F}_{L^+} = \mathcal{F}_L \vee \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma\left(X_{L+u},\ 0 \leq u \leq \frac{1}{n}\right);$$

on appelle la tribu $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma\left(X_{L+u}, 0 \leq u \leq \frac{1}{n}\right)$ la tribu-germe à l'instant L.

On a montré ([3]), que tel est le cas, et on a su déterminer la tribu-germe, lorsque :

– $[L]$ est inclus dans une union dénombrable de graphes de t.a.,

– X est un MB^1 issu de 0, et L est le dernier zéro avant l'instant 1 de $\beta_.\ \mathcal{F}$-MB^1 avec délai, *i.e.* $\beta_t = \int_0^t H_s\, dX_s$ où H_s est $\mathcal{F}_{\varphi(s)}$-mesurable à valeurs ± 1 avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strictement croissante telle que $\forall x > 0 \quad \varphi(x) < x$.

Ou encore :

– $X_.$ est un MB^1 issu de 0, et L le dernier zéro avant l'instant 1 de $\beta_.\ \mathcal{F}$-MB^1 à intégrand localement constant à droite de son dernier zéro L *i.e.* $\beta_t = \int_0^t H_s\, dX_s$, où $H_\bullet$ est un processus prévisible à valeurs ± 1 localement constant à droite de L.

Rappelons aussi que Millar [4] a déterminé la tribu-germe, sans considérer le problème de l'échange, dans le cas où $X_.$ est un *P.A.I.* suffisamment régulier et L un début d'excursion de X hors de 0. Signalons encore ce résultat d'échange obtenu dans [3], théorème 3.2 :

Lorsque $X_.$ est fortement markovien, et que L est le dernier zéro de X avant l'instant 1 :

$$\mathcal{F}_{L^+} = \mathcal{F}_L \vee \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\sigma\left(X_{L+u},\ 0 \leq u \leq \frac{1}{n}\right) \vee \sigma(L)\right\}.$$

Nous dirons dans ce cas que l'échange affaibli a lieu pour $\mathcal{F}_{L^+}$, et appellerons la tribu $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{\sigma\left(X_{L+u},\, 0\leq u\leq \frac{1}{n}\right)\vee\sigma(L)\right\}$ la tribu-germe affaiblie à l'instant L.

C'est cette propriété que nous allons maintenant généraliser. Pour cela, l'argument essentiel sera une légère modification du lemme d'échange de Lindvall et de Rogers (*voir* [2], p. 239) :

LEMME 1. – *Soit* $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ *un espace probabilisé.*

Soit $\mathcal{C}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *et* $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$.

a) une condition suffisante pour que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n)=\mathcal{C}\vee(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n)\,[\mathrm{mod}\, P]$$

(c'est-à-dire aux ensembles négligeables près) est que :

(1) *pour tout* n, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}_1$ *sont conditionnellement indépendantes sachant* $\mathcal{D}_n$.

b) De plus, la condition (1) *est satisfaite dès que :*

(2) *pour tout* n, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}_1$ *sont conditionnellement indépendantes sachant* $\mathcal{E}_n$ *où* $\mathcal{E}_n$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{D}_n$.

Avant la démonstration du lemme, rappelons l'énoncé du lemme initial de Lindvall-Rogers : *lorsque* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}_1$ *sont indépendantes, l'échange a lieu.*

Démonstration du lemme. – On a toujours :

$$\mathcal{C}\vee(|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n).$$

Il s'agit de montrer l'inclusion inverse, aux ensembles négligeables près. Cela revient à montrer que : $E(H|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n)$ est $\mathcal{C}\vee(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n)$-mesurable lorsque H parcourt une famille totale $\mathcal{H}$ de $L^2(\Omega,\, \mathcal{C}\vee\mathcal{D}_1\, P)$.

On prendra pour $\mathcal{H}$ la famille des v.a. CD où C est $\mathcal{C}$-mesurable bornée et $D\,\mathcal{D}_1$-mesurable bornée.

On a : $E(CD|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n))=CE(D|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n)$ P-p.s.

Or d'après l'hypothèse (1) :

$$E(D|\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n)=E(D|\mathcal{D}_n)\quad \text{P-p.s.}$$

et donc $\lim_{n\to\infty}E(D|\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n)=\lim_{n\to\infty}E(D|\mathcal{D}_n)$ P-p.s., c'est-à-dire :

$$E\,(D|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n)) = E\,(D|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n) \quad \text{P-p.s.}$$

$$= E\,(D|\mathcal{C}\vee(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{D}_n)) \quad \text{P-p.s.}$$

Soit finalement

$$E\,(CD|\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n) = E\,(CD|\mathcal{C}\vee(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{D}_n)) \quad \text{P-p.s.}$$

On en déduit immédiatement l'assertion *a*).

Pour démontrer l'assertion *b*), on remarque que :

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_1$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{E}_n$, avec $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{D}_n$, alors elles le sont également sachant $\mathcal{D}_n$. En effet : pour toute D_n v.a. $\mathcal{D}_n$-mesurable bornée, on a

$$\begin{aligned} E\,(CD\,D_n) &= E\,\{\,E\,(C|\mathcal{E}_n)\,E\,(DD_n|\mathcal{E}_n)\,\} \\ &= E\,\{\,E\,(C|\mathcal{E}_n)\,E\,(D_n\,E|\mathcal{D}_n)|\mathcal{E}_n)\,\} \\ &= E\,\{\,CD_n\cdot E\,(D|\mathcal{D}_n)\,\}. \end{aligned}$$

Notons que le lemme équivaut à l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du critère de V. Weizsäcker lorsque $\mathcal{R}$ est triviale. (La possibilité d'introduire une sous-algèbre finie $\mathcal{R}$ ne semble pas autoriser le remplacement de la tribu-germe affaiblie par la tribu-germe.)

Dans la situation que nous considérons, nous choisissons :

$$\mathcal{C} = \mathcal{F}_L, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_n = \sigma\left(X_{L+u},\ 0 \le u \le \frac{1}{n}\right) \vee \sigma\,(L).$$

Nous supposons, dans un premier temps, que L ne rencontre pas les décimaux et reste borné. Pour simplifier l'exposé, on se ramène à $L \le 1$.

D'après la continuité de X dans L^1 :

$$\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,p_0 \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall\,(s,\,t) \in\ [0,\,1]^2, \\ &|s-t|\ < 10^{-p_0} \quad \Rightarrow \quad \|X_s - X_t\|_1\ < \varepsilon. \end{aligned}$$

On introduit la partition de Ω : $(A^k_{p_0})_{k\in\{0,\,1,\,\ldots,\,10^{-p_0}-1\}}$ où $A^k_{p_0} = [k\,10^{-p_0} \le L < (k+1)\,10^{-p_0}]$.

Grâce au théorème des classes monotones, on se limitera au cas où $h = F\,(X_{L+u_1},\,\ldots,\,X_{L+u_N})\,F$ est lipschitzienne, de constante 1 par souci de commodité.

On a : $E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}\,(h) = \sum_k 1_{A^k_{p_0}}\,E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}\,(h)$.

Introduisons :

$$\tilde{h}_k = F\left(X_{(L+u_1)\vee(k+1)\,10^{-p_0}}, \ldots, X_{(L+u_N)\vee 10^{-p_0}}\right), \qquad \tilde{h} = \sum 1_{A^k_{p_0}} \tilde{h}_k.$$

On déduit alors de la continuité de $X_.$ dans L^1, et du fait que l'espérance conditionnelle est contractante, que :

$$\|E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}(h) - E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}(\tilde{h})\|_1 < \varepsilon.$$

On introduit $\tilde{L}_k = (L \vee k\,10^{-p_0}) \wedge (k+1)\,10^{-p_0}$
puis

$$\tilde{\mathcal{C}}_k = \mathcal{F}_{\tilde{L}_k}, \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathcal{D}}^k_n = \sigma\left(X_{\tilde{L}_k+u}, 0 \le u \le \frac{1}{n}\right) \vee \sigma(\tilde{L}_k).$$

On a, puisque L évite les décimaux,

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 10^{-p_0}\}, \quad A^k_{p_0} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_n \cap \tilde{\mathcal{C}}_k \cap \tilde{\mathcal{D}}^k_n,$$

d'autre part, sur $A^k_{p_0}$, $L = \tilde{L}_k$.

D'où

$$E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}\{\tilde{h}_k 1_{A^k_{p_0}}\} = E^{\tilde{\mathcal{C}}_k\vee\tilde{\mathcal{D}}_n}\{\tilde{h}_k 1_{A^k_{p_0}}\}.$$

Ensuite, $\tilde{L}_k$ est une v.a. $\mathcal{F}_{(k+1)\,10^{-p_0}}$-mesurable.

D'après la propriété de Markov,

$$\mathcal{F}_{(k+1)\,10^{-p_0}} \qquad \text{et} \qquad \sigma\left(X_{(k+1)\,10^{-p_0}-v}, v \ge 0\right)$$

sont indépendantes, sachant $X_{(k+1)\,10^{-p_0}}$.

Aussi, introduisons

$$\tilde{\tilde{h}} = F\left(X_{(\tilde{L}_k+u_1)\vee(k+1)\,10^{-p_0}}, \ldots, X_{(\tilde{L}_k+u_N)\vee(k+1)10^{-p_0}}\right).$$

D'après la remarque précédente, $\tilde{\tilde{h}}_k$ est indépendante de

$$\tilde{\mathcal{C}}_k \vee \sigma(\tilde{L}_k) \vee \tilde{\mathcal{D}}^k_n = \tilde{\mathcal{C}}_k \vee \tilde{\mathcal{D}}^k_n \text{ sachant } \sigma(\tilde{L}_k) \vee \tilde{\mathcal{D}}^k_n = \tilde{\mathcal{D}}^k_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}\{\tilde{h}_h 1_{A^k_{p_0}}\} &= E^{\tilde{\mathcal{C}}_k\vee\tilde{\mathcal{D}}_n}\{\tilde{\tilde{h}}_k 1_{A^k_{p_0}}\} = E^{\tilde{\mathcal{D}}^k_n}\{\tilde{\tilde{h}}_k 1_{A^k_{p_0}}\} \\ &= E^{\mathcal{D}_n}\{\tilde{h}_k 1_{A^k_{p_0}}\}. \end{aligned}$$

Finalement : $\|E^{\mathcal{C}\vee\mathcal{D}_n}(h) - E^{\mathcal{D}_n}(\tilde{h})\|_1 < \varepsilon$.
Donc, selon le lemme, l'échange affaibli a lieu pour $\mathcal{F}_{L^+}$.

Il reste maintenant à étendre le résultat à toutes les fins d'optionnels. Tout d'abord, il est clair que l'on peut remplacer les décimaux dans la démonstration précédente par tout ensemble dénombrable partout dense dans $\bar{\mathbb{R}}^+$. Or étant donné une fin d'ensemble optionnel L, il existe toujours un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathbb{R}^+$ évité P.p.s. par L, ce qui nous débarrasse de la première restriction. Quant à la bornitude, on applique le résultat précédent à $L \wedge m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathcal{F}_{(L\wedge m)^+} = \mathcal{F}_{(L\wedge m)} \vee \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ \sigma\left(X_{(L\wedge m)+u},\ 0 \le u \le \frac{1}{n} \right) \vee \sigma(L) \right\}.$$

Puis on fait tendre m vers $+\infty$, et on obtient le :

THÉORÈME. – *$(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ étant la filtration propre quasi-continue à gauche de $X_.$ processus markovien continu dans L^1 et continu à droite, la propriété d'échange affaibli a lieu pour $\mathcal{F}_{L^+}$*

$$i.e. \qquad \mathcal{F}_{L^+} = \mathcal{F}_L \vee \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ \sigma\left(X_{L+u},\ 0 \le u \le \frac{1}{n} \right) \vee \sigma(L) \right\}.$$

RÉFÉRENCES

[1] J. AZÉMA et M. YOR, Sur les zéros des martigales continues, *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Maths*, 1526, Springer, 1992, p. 248-306.
[2] M. T. BARLOW, J. W. PITMAN et M. YOR, On Walsh's Brownian motions, *Séminaires de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Maths*, 1372, Springer, 1989, p. 275-293.
[3] M. MALRIC, Études des filtrations des martingales quadratiques de M. Yor, Études des conjectures de M. Yor et M. Barlow sur la filtration Brownienne, *Thèse de Doctorat*, soutenue le 16 octobre 1992 à l'Université Paris-VI.
[4] P. W. MILLAR, Germs σ-fields and the natural states space of a Markov process, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Gebiete*, vol. **39**, 1977, p. 85-101.
[5] H. von WEIZSÄCKER, Exchanging the order of taking suprema and countable intersection of sigma algebras, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **19**, 1983, p. 91-100.

*(Manuscrit reçu le 30 juin 1993;
version révisée reçue le 2 février 1994.)*