ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

FRÉDÉRIQUE PETIT

Théorème du support pour les diffusions réfléchies de type Ventcell

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 2 (1996), p. 135-210

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_2_135_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 2, 1996, p. 135-210 *Probabilités et Statistiques*

Théorème du support pour les diffusions réfléchies de type Ventcell

par

Frédérique PETIT

Université Pierre-et-Marie-Curie, Laboratoire de Probabilités,
tour 46-56, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex, France.

RÉSUMÉ. – Cet article décrit le support de la loi d'un processus de diffusion de type Ventcell, comme étant l'adhérence, pour la norme de la convergence uniforme, des solutions des équations déterministes classiquement associées. Au passage, nous montrons l'existence et l'unicité de ces dernières. Ceci généralise les résultats de Stroock et Varadhan dans le cas sans bord, et ceux de Doss et Priouret dans le cas où il n'y a pas de termes martingales sur le bord.

ABSTRACT. – This paper describes the support of the law of a diffusion process with boundary condition, as the closure, for the norm of the uniform convergence, of the solutions of the deterministic systems usually associated to this kind of problem. This generalizes the results of Stroock and Varadhan when there is no boundary, and those of Doss and Priouret in the case of an ordinary reflected diffusion.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Patrick Cattiaux, Halim Doss et Thierry Jeulin pour leurs nombreux conseils judicieux en ce qui concerne ce papier.

0. INTRODUCTION

Soit D un ouvert régulier de $\mathbb{R}^{p+1}$, et x_t le processus à valeurs dans $\overline{D}$, solution du système d'équations différentielles stochastiques de réflexion :

$$(0.1) \quad \begin{cases} dx_t = \mathbf{1}_D(x_t)\,\beta(x_t)\,dt + \mathbf{1}_D(x_t)\,\sigma_i(x_t) \circ dw_t^i \\ \qquad\qquad + \mathbf{1}_{\partial D}(x_t)\,\nu(x_t)\,da_t + \mathbf{1}_{\partial D}(x_t)\,\mu_j(x_t) \circ dM_t^j \\ x_0 = x \in \overline{D}, \quad a_t = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s)\,da_s, \quad \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s)\,ds = 0 \end{cases}$$

où les coefficients sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornés à dérivées bornées, le signe $\circ$ indiquant que les différentielles stochastiques sont prises au sens de Stratonovitch. On sait la convention habituelle de sommation pour des indices répétés en haut et en bas $(1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq m)$. Lorsque la frontière est non caractéristique, et que le champ ν est transversal à ∂D, il est classique que ce système admet une solution unique en loi, a_t étant alors le temps local de x_t au bord (*cf.* § III). On se propose d'étudier le support de la loi du processus $(x_t,\ a_t)_{0 \leq t \leq T}$, généralisant ainsi les résultats de Stroock-Varadhan [14] dans le cas sans bord, et de Doss-Priouret [9] portant sur les diffusions réfléchies sans termes martingales sur le bord. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME. – *Pour tout $H = (h,\ \gamma)$ de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux de* $[0;\ T]$ dans $\mathbb{R}^{d+m}$, *on désigne par $(x_\cdot^{H,\,x},\ a_\cdot^{H,\,x})$ la solution du système différentiel* *déterministe de réflexion suivant* (cf. § I-2-A) *où* $\dot{h}$ *et* $\dot{\gamma}$ *sont les dérivées de* h *et* γ :

$$(0.2) \quad \begin{cases} dx_t^{H,x} = \mathbf{1}_D(x_t^{H,x})(\beta(x_t^{H,x}) + \sigma_i(x_t^{H,x})\dot{h}_t^i)\,dt \\ \qquad + \mathbf{1}_{\partial D}(x_t^{H,x})\,(\nu(x_t^{H,x}) + \mu_j(x_t^{H,x})\dot{\gamma}_t^j)\,da_t^{H,x} \\ x_0^{H,x} = x \in \overline{D}, \qquad a_t^{H,x} = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\,da_s^{H,x}, \\ \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\,ds = 0 \end{cases}$$

Si $\mathbb{P}_x$ *désigne la loi du couple issu de* $x\,(x_t,\,a_t)_{0\le t\le T}$ *sur* $C^0([0;\,T];\,\overline{D}\times\mathbb{R}_+)$ *muni de la norme de la convergence uniforme, on a :*

$$\operatorname{supp}\mathbb{P}_x = \text{adhérence}\,((x_t^{H,x},\,a_t^{H,x})_{0\le t\le T}\,, \\ H\,C^2 \text{ par morceaux de } [0;\,T] \text{ dans } \mathbb{R}^{d+m}).$$

Ce résultat donne en particulier une interprétation simple des termes martingales M^j qui apparaissent comme des termes de réflexion aléatoires « indépendants » en un certain sens des w^i. Comme dans [9] ou [14], la démonstration se fait en deux parties, chacune traitant de l'une des inclusions. Dans leur article, Doss et Priouret utilisent un principe de contraction dû à Anderson et Orey [1] qui leur permet d'écrire $x_.$ et $a_.$ comme images par des applications lipschitziennes d'un processus de diffusion ordinaire. Ce procédé est inapplicable dans notre cas à cause des termes martingales sur le bord. Ici, la méthode consiste donc à attaquer directement le problème comme dans [14], mais avec deux échelles de temps, les contrôles des termes gérés par le temps local étant bien sûr les plus délicats.

La première partie de cet article présente le résultat d'approximation dans le cas où D est un demi-espace, comme souvent pour les diffusions réfléchies; la coordonnée réfléchie est alors un mouvement brownien réfléchi indépendant des mouvements browniens qui interviennent dans les autres coordonnées du processus. On choisit l'approximation dyadique classique pour la partie diffusion dans D; mais il faut en choisir une autre pour la partie martingale au bord. Les contrôles sont obtenus principalement grâce aux lemmes 1.0.3 et 1.0.5 (contrôles des accroissements du temps local d'un mouvement brownien et de son approximation); les lemmes 1.1.3 et

1.1.4 permettent de majorer les intégrales de Stieljes dues au temps local et à son approximation. En outre, nous montrons dans cette partie l'existence et l'unicité des solutions du système déterministe (0.2) par un argument de point fixe (§ I-2-A). La seconde partie traite de l'autre inclusion, là aussi dans le cas particulier du demi-espace pour lequel on prouve que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon) > 0$, si $\|x\|_T = \sup_{t \leq T} \|x_t\|$. Les majorations essentielles sont obtenues grâce au théorème 2.1.5 et aux lemmes techniques 2.2.2 à 2.2.9, en particulier 7 à 9, où l'on étudie des processus « nouveaux » où se mélangent les deux échelles de temps. Dans la troisième partie, on ramène le cas général au cas particulier à l'aide de bonnes cartes locales et d'une transformation de Girsanov (lemme 1.2.4).

I. CAS D'UN DEMI-ESPACE : UNE PREMIÈRE INCLUSION

1. Étude d'un cas particulier

A. Présentation du problème et de la méthode. – Nous commençons par traiter le cas du demi-espace $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$. On se donne $X_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p;\ \mathbb{R}^p)$, $V_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^p;\ \mathbb{R}^p)$, $X_1 \in C_b^\infty[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p;\ \mathbb{M}(\mathbb{R}^p;\ \mathbb{R}^d)]$, $V_1 \in C_b^\infty[\mathbb{R}^p;\ \mathbb{M}(\mathbb{R}^p;\ \mathbb{R}^m)]$, où $\mathbb{M}(\mathbb{R}^k;\ \mathbb{R}^j)$ désigne l'espace des matrices réelles à k lignes et j colonnes. On suppose alors que le système se met sous la forme :

$$(1.1)\quad \begin{cases} dz_t = dB_t + da_t \\ dy_t = X_0(x_t)\,dt + X_1(x_t) \circ dw_t + V_0(y_t)\,da_t + V_1(y_t) \circ dw^*_{a_t} \end{cases}$$

où $x_t = (z_t,\ y_t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$, et où B, w et w^* sont des mouvements browniens à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$.

On étudie ce cas car les composantes $z_.$ et $y_.$ peuvent être construites séparément. On construit d'abord $(z_.,\ a_.)$, solution de l'équation de réflexion :

$$(1.2)\quad \begin{cases} z_t = z_0 + B_t + a_t \\ z_t \geq 0, \quad a_. \text{ ne croît que sur les zéros de } z_.. \end{cases}$$

On sait alors ([6], p. 117 et 118) que :

$$(1.3)\quad a_t = \sup_{s \leq t}\,(-(z_0 + B_s) \vee 0)$$

Puis $z_.$ et $a_.$ étant connus on résout l'équation donnant y. Ceci permet de conditionner par rapport à la tribu engendrée par B (indépendant de $(w,\ w^*)$).

Choisissons ensuite de bonnes approximations de B, w et w^*. Pour B et w, on prend l'approximation dyadique classique :

$$B_t^n = \int_0^t \dot{B}_s^n\, ds \qquad \text{où} \quad \dot{B}_s^n = 2^n\,(B_{(i+1)/2^n} - B_{i/2^n}),$$

$$\text{si} \quad s \in [i/2^n;\ (i+1)/2^n[$$

$$w_t^n = \int_0^t \dot{h}_s^n\, ds \qquad \text{où} \quad \dot{h}_s^n = 2^n\,(w_{(i+1)/2^n} - w_{i/2^n}),$$

$$\text{si} \quad s \in [i/2^n;\ (i+1)/2^n[$$

L'apparition du temps local $a_.$ nous empêche de prendre le même genre d'approximation pour w_a^*. Soit $(z_.^n,\ a_.^n)$ la solution du problème de réflexion :

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} z_t^n = z_0^n + B_t^n + a_t^n & \text{où} \quad (z_0^n) \text{ est donné} \\ z_t^n \geq 0, \quad a_t^n \text{ ne croît que sur les zéros de } z_.^n \end{cases}$$

Comme précédemment, a_t^n est donné par :

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} a_t^n = \sup\limits_{s \leq t} (-(z_0^n + B_s^n) \vee 0) \\ (= \sup\limits_{\substack{s \leq t \\ s \text{ dyadique} \\ \text{d'ordre } n}} (-(z_0^n + B_s^n) \vee 0) \text{ si } t \text{ est dyadique}) \end{cases}$$

puisque B^n est affine par morceaux.

On choisit d'approcher w^* par : $\int_0^t \dot{\gamma}_s^n\, da_s^n$ où, si $s \in [i/2^n;\ (i+1)/2^n[$,

$$\dot{\gamma}_s^n = \frac{w^*[a^n((i+1)/2^n)] - w^*[a^n(i/2^n)]}{a^n((i+1)/2^n) - a^n(i/2^n)}\, \mathbf{1}_{\{a^n_{(i+1)/2^n} - a^n_{i/2^n} > 0\}}$$

et où, par convention, $\dot{\gamma}_s^n = 0$ si l'indicatrice est nulle.

Pour simplifier, on utilisera les notations suivantes :

$$\Delta^n a_i^n = a^n((i+1)/2^n) - a^n(i/2^n)$$

$$\Delta^n B_i = B((i+1)/2^n) - B(i/2^n)$$

$$\Delta^n w_i^* = w^*[a^n((i+1)/2^n)] - w^*[a^n(i/2^n)]$$

$$\Delta^n w_i = w((i+1)/2^n) - w(i/2^n).$$

Ainsi, $\Delta^n a_i^n$ représente l'accroissement de l'approximation du temps local durant un intervalle de temps dyadique. Enfin, $z_\cdot^n$ et $a_\cdot^n$ étant construits, on résout l'équation du problème déterministe :

$$(1.6) \qquad \begin{cases} y_t^n = y_0^n + \displaystyle\int_0^t (X_0(x_s^n) + X_1(x_s^n)\,\dot{h}_s^n)\,ds \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t (V_0(y_s^n) + V_1(y_s^n)\,\dot{\gamma}_s^n)\,da_s^n \\ x_\cdot^n = (z_\cdot^n,\, y_\cdot^n) \quad \text{où } (y_0^n) \text{ est donné} \end{cases}$$

THÉORÈME 1. – *Supposons qu'il existe* $q > 1$ *tel que* $\sup_n \mathbb{E}(\|x_0^n\|^{2q}) < \infty$, *et qu'il existe deux constantes* c_1 *et* c_2 *strictement positives telles que* $\lim_{n\to\infty} \exp(c_1\,n^{c_2})\,\mathbb{E}(\|x_0 - x_0^n\|^2) = 0$. *Alors, le processus* $(x_t^n,\, a_t^n)_{0\le t\le T}$ *tend vers* $(x_t,\, a_t)_{0\le t\le T}$ *dans* $\mathbb{L}^2$ *uniformément sur* $[0;\, T]$, *et il existe des contantes* k_1 *et* k_2 *strictement positives telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} \exp(k_1\,n^{k_2})\,\mathbb{E}(\|x - x^n\|_T^2) = 0.$$

La preuve de ce théorème se fait en trois étapes. On notera :

$$g_\omega^n(t) = \mathbb{E}(\sup_{0\le s\le t} \|x_s - x_s^n\|^2/\sigma(B_s(\omega);\, s\ge 0)) = \mathbb{E}_\omega(\sup_{0\le s\le t} \|x_s - x_s^n\|^2)$$

Première étape. – On cherche à obtenir une inégalité du type :

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} g_\omega^n(T) &\le c_T\,(1 + a_T^2)\,\mathbb{E}_\omega(\|x_0 - x_0^n\|^2) \\ &\quad + c_T\,(1+T)\int_0^T g_\omega^n(s)\,ds \\ &\quad + c_T\,(1+a_T)\int_0^T g_\omega^n(s)\,da_s \\ &\quad + (1 + g_\omega^n(T)) \times (|z_0 - z_0^n|^2 + X_n(T;\,\omega)) \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_\omega$ désigne l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(../\sigma(B_s(\omega);\, s\ge 0))$, où $T \mapsto c_T$, $T \mapsto X_n(T;\,\omega)$ sont des applications positives croissantes, et où $X_n(T;\,\omega)$ est la notation générique d'une variable vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

(1.8) (X_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ ssi il existe $\varepsilon > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, tels que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^{1+\varepsilon}\exp(k_1\,n^{k_2})) = 0$.

Deuxième étape. – On montre que pour tout $r > 1$, $\sup_n \mathbb{E}\left(g_{\cdot}^n(T)^r\right) < \infty$, prouvant ainsi que la famille des $(g_{\cdot}^n(T))_{n>0}$ est équi-intégrable. On montre que chacun des termes qui apparaissent dans l'équation (1.13) donnant $(y_t - y_t^n)$ est équi-intégrable. Pour cela, on utilise : la bornitude des coefficients; les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy; le fait que le temps local a_T est dans tous les $\mathbb{L}^p$; le lemme 1.0.4 pour majorer $\mathbb{E}\left((a_T^n)^2\right)$; le fait que toute famille de variables aléatoires qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$ est équi-intégrable; les inégalités (1.18) à (1.31), ainsi que le lemme 1.1.5 pour obtenir des majorations par des variables vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

Troisième étape. – Les deux résultats précédents étant montrés, on arrête le processus lorsque le temps local devient trop grand. On note :

$$\forall\, \alpha > 1, \quad \tau_\alpha = \inf(t;\ a_t > \alpha), \qquad h_\alpha^n(t;\ \omega) = g_\omega^n(t \wedge \tau_\alpha)$$

En stoppant l'équation (1.7), la positivité des variables $g_\omega^n(s)$ et la croissance des applications $t \mapsto c_t$ et $t \mapsto X_n(T;\ \omega)$, entraînent :

$$\begin{aligned}
&\forall\, t \leq T,\\
&h_\alpha^n(t;\ \omega) \leq 2\, c_T\, \alpha^2\, \mathbb{E}_\omega\left(\|x_0 - x_0^n\|^2\right)\\
&\qquad + k_T \int_0^t h_\alpha^n(s;\ \omega)\, ds + k_T\, \alpha \int_0^t h_\alpha^n(s;\ \omega)\, da_{s\wedge\tau_\alpha}\\
&\qquad + (1 + g_\omega^n(T))\left(|z_0 - z_0^n|^2 + X_n(T;\ \omega)\right)
\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet de déduire de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}
(1.9)\qquad h_\alpha^n(T;\ \omega) &\leq c'_T \exp\left(k_T\, \alpha^2\right)\left(\mathbb{E}_\omega\left(\|x_0 - x_0^n\|^2\right)\right.\\
&\qquad \left. +\ (1 + g_\omega^n(T))\left(|z_0 - z_0^n|^2 + X_n(T;\ \omega)\right)\right)
\end{aligned}$$

Fixons maintenant $\alpha = n^{\beta/4}$, où $\beta = \inf(c_2,\ k_2) > 0$ (*cf.* (1.8)). Prenons l'espérance dans (1.9), et appliquons l'inégalité de Hölder avec $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{1+\varepsilon} = 1$ (*cf.* (1.8) pour ε) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(h_{n^{\beta/4}}^n(T;\ .)\right) &\leq c'_T \exp\left(k_T\, n^{\beta/2}\right)\\
&\qquad \times \left(\mathbb{E}\left(\|x_0 - x_0^n\|^2\right) + \mathbb{E}\left(g_{\cdot}^n(T)\, |z_0 - z_0^n|^2\right)\right.\\
&\qquad \left. + \mathbb{E}\left(X_n^{1+\varepsilon}\right)^{1/(1+\varepsilon)}\left(1 + \mathbb{E}\left(g_{\cdot}^n(T)^r\right)^{1/r}\right)\right)
\end{aligned}$$

Les résultats des étapes 1 et 2, et les hypothèses du théorème 1 entraînent l'existence de constantes $c_0(T) > 0$ et $c_1(T) > 0$ telles que :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\|x_0 - x_0^n\|^2\right) + \mathbb{E}\left(X_n^{1+\varepsilon}\right)^{1/(1+\varepsilon)}\left(1 + \mathbb{E}\left(g_.^n(T)^r\right)^{1/r}\right)\\ &\leq c_0 \exp\left(-c_1 n^\beta\right)\end{aligned}$$

On montre que $\left(|z_0 - z_0^n|^{2b} \exp\left(\frac{c_1}{2} n^{c_2}\right)\right)$ tend vers zéro dans $\mathbb{L}^1$ si $b = \dfrac{q+1}{2} > 1$ (*cf.* les hypothèses pour la définition de q). À l'aide de l'équi-intégrabilité des $g_.^n$ (*cf.* la deuxième étape), on en déduit l'existence de constantes K_i telles que :

$$\mathbb{E}\left[g_.^n(T)\,|z_0 - z_0^n|^2\right] \leq K_0 \exp\left(-K_1 n^\beta\right) \qquad (K_i > 0).$$

En résumé, il existe des constantes $c_T > 0$, $k_T > 0$, telles que :

$$\mathbb{E}\left[h_{n^{\beta/4}}^n(T;\,.)\right] \leq k_T \exp\left(-c_T n^\beta\right) \tag{1.10}$$

On en déduit que : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{L}^1\left(h_{n^{\beta/4}}^n(T;\,\omega)\right) = 0$.

Quitte à extraire une sous suite, on peut alors supposer que la convergence a lieu aussi presque sûrement. Comme a_T est fini presque sûrement, pour presque tout ω, il existe N_ω tel que : $\forall n \geq N_\omega$, $g_\omega^n(T) = h_{n^{\beta/4}}^n(T;\,\omega)$. On en déduit $\lim_{n\to\infty} \mathrm{ps}\, g_\omega^n(T) = 0$, puis la convergence dans $\mathbb{L}^1$ grâce à l'équi-intégrabilité des $(g_\omega^n(T))_{n\geq 0}$ (*cf.* l'étape deux). Plus précisément, grâce à la majoration (1.10), à l'étape deux, et au fait que le temps local a_T est la valeur absolue d'une variable gaussienne, on peut majorer $\mathbb{E}\left[g_.^n(T)\right]$ par $\left(k_T \exp\left(-c_T n^{\beta/2}\right)\right)$, ([13]), de sorte qu'il existe des constantes β_1, $\beta_2 > 0$, telles que :

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\beta_1 n^{\beta_2}\right) \mathbb{E}\left[g_.^n(T)\right] = 0.$$

Le théorème 1 est ainsi démontré. Il reste à étudier l'étape 1 et quelques points nécessaires à l'étape 2.

B. Étape zéro : quelques calculs préliminaires. – Nous commençons par un lemme qui fournit des contrôles des accroissements d'un mouvement brownien ([8], p. 1282 à 1295) :

LEMME 1.0.1. – *Soit W un mouvement brownien. Notons*

$$\nu_T^W(h) = \sup_{\substack{0\leq s<t\leq T\\ 0\leq t-s\leq h}} \|W_t - W_s\|$$

Alors : $\forall\,\delta > 0,\ \exists\,K_\delta > 0,\ \forall\,h \in [0;\ 1],\ \forall\,T > 0,$

$$\mathbb{E}\,[\nu_T^W\,(h)^{4\,(1+\delta)}] \le K_\delta\,T^\delta\,h^{2+\delta}.$$

On en déduit, en utilisant les propriétés de scaling du mouvement brownien ([13]), que :

LEMME 1.0.2. – *Soit W un mouvement brownien, et A un processus croissant indépendant de W. Alors,* $\forall\,\delta > 0,\ \exists\,K_\delta > 0$:

$$\mathbb{E}\,[\sup_{0\le i\le N-1} \|W_{A_{i+1}} - W_{A_i}\|^{4\,(1+\delta)}] \le K_\delta\,\mathbb{E}\,[A_N^\delta \sup_{0\le i\le N-1} (A_{i+1} - A_i)^{2+\delta}].$$

Nous énonçons maintenant un lemme qui permet de contrôler les accroissements du temps local ou de son approximation, par ceux du mouvement brownien. Nous renvoyons à [13] pour la preuve qui repose sur l'utilisation des équations de réflexion (1.3) et (1.5) :

LEMME 1.0.3. – *Soit :* $Z_T^n = \sup\,(a_{(i+1)/2^n} - a_{i/2^n};\ 0 \le i \le [2^n\,T] - 1)$, *(où $[t]$ désigne la partie entière de t), le maximum des accroissements du temps local du mouvement brownien B entre deux instants dyadiques consécutifs avant le temps T, et* $Y_T^n = \sup\,(a_{(i+1)/2^n}^n - a_{i/2^n}^n;\ 0 \le i \le [2^n\,T] - 1)$, *la même quantité, mais pour a^n, l'approximation du temps local. Alors :* $Z_T^n \le \nu_T^B\,(2^{-n})$, *et* $Y_T^n \le \nu_T^B\,(2^{-n})$.

On déduit alors des lemmes 1.0.2 et 1.0.3 que : $\forall\,\delta > 0,\ \exists\,K_\delta,\ \forall\,n \in \mathbb{N},\ \forall\,T > 0,$

$$\text{(1.11)}\qquad \begin{aligned}&\mathbb{E}\,[\nu_{a_T^n}^{w^*}\,(Y_T^n)^{4\,(1+\delta)} / \sigma\,(B_s\,(\omega);\ 0 \le s \le T)]\\ &\quad \le K_\delta\,a_T^n\,(\omega)^\delta\,\nu_T^B\,(2^{-n})^{2+\delta}.\end{aligned}$$

$$\text{(1.12)}\qquad \begin{aligned}&\mathbb{E}\,[\nu_{a_T}^{w^*}\,(Z_T^n)^{4\,(1+\delta)} / \sigma\,(B_s\,(\omega);\ 0 \le s \le T)]\\ &\quad \le K_\delta\,a_T\,(\omega)^\delta\,\nu_T^B\,(2^{-n})^{2+\delta}.\end{aligned}$$

Le lemme qui suit maintenant justifie l'appellation « d'approximation du temps local » pour a^n, grâce au lemme 1.0.1.

LEMME 1.0.4. – $\|a - a^n\|_T \le |z_0 - z_0^n| + \nu_{T+1}^B\,(2^{-n})$.

Preuve. – Reprenons les notations de [9], p. 328. L'application ξ définie sur $C^0\,([0;\ T];\ \mathbb{R})$ par $(\xi\omega)\,(t) = \sup_{0\le s\le t} (-\omega\,(s) \vee 0)$ est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que :

$$\sup_{0\le t\le T} |(\xi\omega)\,(t) - (\xi\omega')\,(t)| \le \sup_{0\le t\le T} |\omega\,(t) - \omega'\,(t)|.$$

Or $(z_., a_.)$ et $(z^n_., a^n_.)$ sont solutions des problèmes de réflexion (1.3) et (1.5). On obtient donc :

$$||a - a^n||_T \leq ||(z_0 + B) - (z_0^n + B^n)||_T \leq |z_0 - z_0^n| + \nu_{T+1}^B (2^{-n}). \quad \square$$

Voici maintenant le lemme clé de cette première partie :

LEMME 1.0.5. – $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists c_k > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left[\left\{\sum_{i=0}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\right\}^k\right] \leq c_k N^{k/2}.$$

Preuve. – 1) Estimation de $\mathbb{P}(\Delta^n a_i^n > 0)$. L'expression (1.6) de a^n donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Delta^n a_i^n > 0 &= \mathbb{P}_0 [z_0^n + B_{(i+1)/2^n} < 0; \\ &\qquad \forall k = 1, 2, \ldots, i, B_{(i+1)/2^n} - B_{k/2^n} < 0] \\ &\leq \mathbb{P}_0 [B_{(i+1)/2^n} < 0; \\ &\qquad \forall k = 1, 2, \ldots, i, B_{(i+1)/2^n} - B_{k/2^n} < 0] \\ &\quad \text{car } z_0^n \geq 0 \\ &= \mathbb{P}_0 [B_{i+1} < 0; \\ &\qquad \forall k = 1, 2, \ldots, i, B_{i+1} - B_k < 0] \quad \text{par scaling} \\ &= \mathbb{P}_0 [\tilde{B}_{i+1} < 0, \tilde{B}_1 < 0, \ldots, \tilde{B}_i < 0] \\ &\qquad \text{où } \tilde{B}_s = B_{i+1} - B_{(i+1)-s} \\ &= \mathbb{P}_0 [B_1 > 0, B_2 > 0, \ldots, B_{i+1} > 0] \\ &= \mathbb{P}_0 [\tau \geq i+2] \quad \text{où } \tau = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, B_n \in]-\infty; 0]\}\end{aligned}$$

La martingale à temps discret $B_n = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{i+1} - B_i)$ s'écrit comme somme de variables indépendantes équidistribuées. Elle vérifie donc les hypothèses des théorèmes 8.4.2 et 8.4.3 de [7], p. 258 à 260, qui entraînent :

$$\mathbb{E}(r^\tau) = 1 - \exp\left(-\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} r^n \mathbb{P}(B_n < 0)\right)$$

Soit :

$$\sum_{n\geq 0} r^{n+1} \mathbb{P}(\tau = n+1) = 1 - \exp(-\sum_{n\geq 1} r^n/(2n)) = 1 - \sqrt{1-r}.$$

On identifie avec le développement en série entière du terme de droite; on a :

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \frac{n\,(2n-2)\,!}{(n\,!)^2\,2^{2n-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,n^{-3/2}.$$

Il existe alors une constante K telle que $\forall\, n \geq 1$, $\mathbb{P}(\tau = n) \leq K\, n^{-3/2}$. On en déduit l'existence d'une constante universelle C telle que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Delta^n a_i^n > 0) &\leq \sum_{i+2} \mathbb{P}(\tau = n) \leq K \sum_{i+2} n^{-3/2}\\ &\leq K \int_{i+1}^{+\infty} x^{-3/2}\,dx \leq C/\sqrt{i+1}.\end{aligned}$$

2) Estimation de $\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\right]$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\right] \leq c \sum_{i=0}^{N} 1/\sqrt{i+1} \leq c \int_0^{N+1} x^{-1/2}\,dx \leq c' N^{1/2}.$$

3) Majoration de $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\right)^k\right]$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\right)^k\right]\\ &\quad = \mathbb{E}\Big[\sum_{i_1\, i_2 \ldots i_k} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_{i_1}^n > 0\}}\, \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_{i_2}^n > 0\}} \cdots \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_{i_k}^n > 0\}}\Big]\end{aligned}$$

Dans la somme multiple, on utilise le fait que les accroissements du mouvement brownien sont indépendants. Ainsi, si $i < j$, on obtient si l'on conditionne par rapport à $\sigma(B_s;\ s \leq 2^{-n}(i+1))$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\, \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_j^n > 0\}}\right]\\ &\quad = \mathbb{P}_0 \begin{pmatrix} & z_0^n + B_{(i+1)/2^n} < 0; \\ \forall\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, i, & B_{(i+1)/2^n} - B_{k/2^n} < 0 \\ \forall\, p = i+1,\, \ldots,\, j, & B_{(j+1)/2^n} - B_{p/2^n} < 0 \end{pmatrix}\\ &\quad = \mathbb{P}\,(\Delta^n a_i^n > 0)\, \mathbb{P}_0\,[B_{j-p+1} < 0,\ p = i+1,\, \ldots,\, j]\\ &\quad = \mathbb{P}\,(\Delta^n a_i^n > 0)\, \mathbb{P}_0\,[B_1 > 0,\ B_2 > 0,\ \ldots,\ B_{j-i} > 0]\\ &\quad \leq \frac{C}{\sqrt{i+1}}\, \frac{C}{\sqrt{j-i}}\end{aligned}$$

On peut alors majorer par exemple pour $k = 2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_j^n > 0\}}\right) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}\left(\Delta^n a_i^n > 0\right) + \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{N} \mathbb{P}\left(\Delta^n a_i^n > 0,\, \Delta^n a_j^n > 0\right) \\
&\quad \leq c_1 N^{1/2} + 2\, C^2 \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)^{-1/2} \sum_{j=1}^{N-i} j^{-1/2} \\
&\quad \leq c_1 N^{1/2} + 4\, C^2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{N-i}}{\sqrt{i+1}} \\
&\quad \leq c_1 N^{1/2} + 4\, C^2 N^{1/2}\, 2\, N^{1/2} \leq c_2 N. \quad \square
\end{aligned}$$

Les lemmes 1.0.1 et 1.0.5 permettent alors de prouver que certaines variables (que l'on rencontrera dans les calculs), vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Nous renvoyons à [13] pour les démonstrations précises.

LEMME 1.0.6. – *Soit* $\alpha > 0$, $q \geq 1$, $p \in [1;\ 4/3]$. *Les variables suivantes vérifient la propriété* $\mathcal{P}$:

1) $(a_T^n)^\alpha\, \nu_T^B\, (2^{-n})^{(1+q)/2q}\, 2^{-n(1+p)/2p} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)^2$;

2) $(a_T^n)^\alpha\, \nu_T^B\, (2^{-n})^{5/2+1/2q}\, 2^{-n(1+p)/2p} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)^2$;

3) $(a_T^n)^\alpha\, \nu_T^B\, (2^{-n})^{5/2} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)^2$;

4) $(a_T^n)^\alpha\, \nu_T^B\, (2^{-n})^{3/2} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)$;

5) $(a_T^n)^\alpha\, \nu_T^B\, (2^{-n})^{(1+q)/q}\, 2^{-n(1+p)/2p} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)^2$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

C. Première étape : obtention d'une inégalité de type Gronwall. – On ne s'intéressera qu'au terme $\|y - y^n\|_T$ parce que $x_t = (z_t;\ y_t)$, et que l'on peut majorer aisément $\|z - z^n\|_T$ grâce à (1.2), (1.4), et au lemme 1.0.4. On a :

$$\begin{aligned}|z_t - z_t^n| &\leq |z_0 - z_0^n| + |B_t - B_t^n| + |a_t - a_t^n| \\ &\leq 2\,|z_0 - z_0^n| + 2\,\nu_{T+1}^B\,(2^{-n})\end{aligned}$$

D'où :

$$\|z - z^n\|_T \leq 2\,|z_0 - z_0^n| + 2\,\nu_{T+1}^B\,(2^{-n})$$

En reprenant les équations (1.1) et (1.6) que l'on écrit à l'aide de l'intégrale d'Itô et non plus de Stratonovitch, on obtient :

$$\begin{aligned}(1.13)\quad y_t - y_t^n = y_0 - y_0^n &+ \int_0^t (X_0\,(x_s) - X_0\,(x_s^n))\,ds \\ &+ \int_0^t (X_1\,(x_s) - X_1\,(x_s^n))\,dw_s \\ &+ \int_0^t X_1\,(x_s^n)\,(dw_s - \dot{h}_s^n\,ds) + \frac{1}{2}\int_0^t (X_1'\,X_1)\,(x_s)\,ds \\ &+ \int_0^t V_0\,(y_s)\,da_s - \int_0^t V_0\,(y_s^n)\,da_s^n \\ &+ \int_0^t V_1\,(y_s)\,dw_{a_s}^* - \int_0^t V_1\,(y_s^n)\,\dot{\gamma}_s^n\,da_s^n \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (V_1'\,V_1)\,(y_s)\,da_s\end{aligned}$$

où, si X est un champ de matrices de classe $\mathcal{C}_b^\infty$, on note $(X'\,X)\,(z,\,y)$ le vecteur dont la j-ième composante est donnée par :

$$(X'\,X)^j\,(z,\,y) = \sum_{k,\,q}\left(\frac{\partial X^{jq}}{\partial y_k}\,X^{kq}\right)(z,\,y).$$

On va traiter séparément chacun des termes de (1.13), en commençant par les plus simples.

LEMME 1.1.1 :

$$\mathbb{E}_\omega\left[\sup_{t\leq T}\left\|\int_0^t\left(X_0\left(x_s\right)-X_0\left(x_s^n\right)\right)ds\right\|^2\right]\leq c\,T\int_0^T g_\omega^n\left(s\right)ds$$

$$\mathbb{E}_\omega\left[\sup_{t\leq T}\left\|\int_0^t\left(X_1\left(x_s\right)-X_1\left(x_s^n\right)\right)dw_s\right\|^2\right]\leq c\int_0^T g_\omega^n\left(s\right)ds.$$

Preuve. – La première inégalité découle du caractère lipschitzien de X_0 qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à dérivées bornées. La deuxième est presque identique si l'on utilise les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy. □

Étudions maintenant le processus :

$$A_t^{(1)}=\int_0^t\left(V_0\left(y_s\right)da_s-V_0\left(y_s^n\right)da_s^n\right.$$

LEMME 1.1.2. – *On a l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{E}_\omega\left[\|A^{(1)}\|_T^2\right]\leq c\,a_T\int_0^T g_s^n\left(s\right)da_s$$
$$+\,c_T\left(1+a_T^2+g_\omega^n\left(T\right)\right)\left(|z_0-z_0^n|^2+\nu_{T+1}^B\left(2^{-n}\right)^2\right).$$

Preuve. – On découpe $A^{(1)}$ en somme de deux termes :

$$A_t^{(1,1)}=\int_0^t\left(V_0\left(y_s\right)-V_0\left(y_s^n\right)\right)da_s^n$$

$$A_t^{(1,2)}=\int_0^t V_0\left(y_s\right)dN_s^n\qquad \text{où}\quad N_s^n=a_s-a_s^n$$

Cas du terme $A^{(1,1)}$: comme V_0 est lipchitzien,

$$\|A^{(1,1)}\|_T\leq c\int_0^t\|y-y^n\|_s\,da_s^n,$$

d'où

$$\mathbb{E}_\omega\left[\|A^{(1,1)}\|_T^2\right]$$
$$\leq c\,\mathbb{E}_\omega\left[\left(\int_0^T\|y-y^n\|_s\,da_s\right)^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\left(\|y-y^n\|_s\,dN_s^n\right)^2\right]$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}(1.14)\qquad & \mathbb{E}_\omega\,[\|A^{(1,1)}\|_T^2] \\ & \leq c\,a_T \int_0^T g_\omega^n(s)\,da_s \\ & \quad + c\,\mathbb{E}_\omega\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t \|y-y^n\|_s\,dN_s^n\right)^2\right]\end{aligned}$$

On majore le dernier terme de (1.14) à l'aide du lemme qui suit, puisque la fonction $s \mapsto \|y - y^n\|_s$ est positive croissante, et que $N^n_.$ est un processus nul en zéro à variations bornées. □

LEMME 1.1.3. – *Soit g une fonction positive croissante, et V un processus à variations bornées nul en zéro. Alors :*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t g(s)\,dV_s\right| \leq 2\,g(T)\,\|V\|_T.$$

Preuve. – Comme g est croissante, elle est à variations bornées, et l'on peut effectuer une intégration par parties (dg_s est positive) :

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s)\,dV_s &= g(t)\,V_t + \int_0^t (-V_s)\,dg_s \\ &\leq g(t)\,V_t + \int_0^t \|-V\|_t\,dg_s \quad (dg_s \geq 0) \\ &= g(t)\,V_t + \|V\|_t\,g(t) \leq 2\,g(t)\,\|V\|_t.\end{aligned}$$

En changeant V en $(-V)$, on obtient l'autre inégalité, ce qui permet de passer à la valeur absolue. □

Conséquence. – On reporte les résultats du lemme 1.1.3 dans l'inégalité (1.14). On obtient alors la majoration suivante pour $A^{(1,1)}$:

$$\mathbb{E}_\omega\,[\|A^{(1,1)}\|_T^2] \leq c\,a_T \int_0^T g_\omega^n(s)\,da_s + c\,\|N^n\|_T^2\,\mathbb{E}_\omega\,[\|y-y^n\|_T^2]$$

ce qui donne en utilisant le lemme 1.0.4 :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\omega\,[\|A^{(1,1)}\|_T^2] \\ &\quad \leq c\,a_T \int_0^T g_\omega^n(s)\,da_s + c\,g_\omega^n(T)\,(|z_0 - z_0^n|^2 + \nu_{T+1}^B\,(2^{-n})^2).\end{aligned}$$

Pour finir la preuve du lemme 1.1.2, nous utilisons le lemme suivant, qui se démontre à l'aide d'une intégration par parties et des inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy (*cf.* [13]) :

LEMME 1.1.4. – *Soit f une fonction bornée de classe C^∞ à dérivées bornées, et N un processus réel, à variations bornées, et nul en zéro. Alors :*

$$\mathbb{E}_\omega\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t f(y_s)\,dN_s\right\|^2\right] \le c_T\,(1+a_T^2(\omega))\,\mathbb{E}_\omega\,[\|N\|_T^2].$$

Appliquons ce résultat à chaque coordonnée de V_0. On obtient :

$$(1.15)\qquad \begin{aligned}&\mathbb{E}_\omega\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t V_0(y_s)\,dN_s^n\right\|^2\right]\\ &\le c_T\,(1+a_T^2(\omega))\,\mathbb{E}_\omega\,[\|N^n\|_T^2]\\ &\le c_T\,(1+a_T^2(\omega))\,(|z_0-z_0^n|+\nu_{T+1}^B(2^{-n}))\end{aligned}$$

grâce au lemme 1.0.4.

Les inégalités (1.14) et (1.15), donnent alors le résultat du lemme 1.1.2.

Étudions maintenant le terme

$$A_t^{(3)} = \int_0^t X_1(x_s^n)\,[dw_s - \dot h_s^n\,ds] + \frac{1}{2}\int_0^t (X_1'\,X_1)(x_s)\,ds.$$

La démonstration est calquée sur celle du cas classique (*i.e.* sans bord) : on effectue de nombreuses intégrations par parties; les termes nouveaux qui apparaissent et qui font intervenir les accroissements de l'approximation du temps local seront contrôlés à l'aide des lemmes de l'étape zéro. On a d'abord besoin d'étudier l'accroissement du processus d'approximation sur les intervalles de temps dyadiques.

LEMME 1.1.5. – *Posons : $\alpha_n(t) = 2^{-n}k$ si $t\in[k\,2^{-n};\ (k+1)\,2^{-n}[$. Alors :*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T}\|x_t^n - x_{\alpha_n(t)}^n\|^2]\\ &\le c_T\,\{\nu_{T+1}^B(2^{-n})^2 + a_T(\omega)^{1/4}\,\nu_{T+1}^B(2^{-n})^{3/4} + 2^{-3n/4}\}.\end{aligned}$$

Preuve. – On majore séparément les termes $\|z_t^n - z_{\alpha_n(t)}^n\|$ et $\|y_t^n - y_{\alpha_n(t)}^n\|$ grâce à (1.4) et au lemme 1.0.3. La majoration des espérances s'obtient alors à l'aide du lemme 1.0.1, de l'inégalité de Hölder, et de l'inégalité (1.11) avec $\delta = 1$. □

Pour majorer $A^{(3)}$, on le découpe ainsi : $A_t^{(3)} = A_t^{(3,0)} + A_t^{(3,1)} + A_t^{(3,2)}$.

$$A_t^{(3,0)} = \int_0^t [X_1(x_s) - X_1(x_s^n)]\, dw_s,$$

dont le cas a été traité au lemme 1.1.1.

$$\begin{aligned} A_t^{(3,1)} &= \int_0^t [X_1(x_s^n) - X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)]\, dw_s \\ &+ \int_{\alpha_n(t)}^t X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)\, dw_s - \int_{\alpha_n(t)}^t X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)\, \dot{h}_s^n\, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t [X_1' X_1(x_s^n) - X_1' X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)]\, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\alpha_n(t)}^t X_1' X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)\, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t^{(3,2)} &= \int_0^{\alpha_n(t)} X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)\, dw_s \\ &- \int_0^{\alpha_n(t)} X_1(x_s^n)\, \dot{h}_s^n\, ds + \frac{1}{2}\int_0^{\alpha_n(t)} X_1' X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)\, ds. \end{aligned}$$

LEMME 1.1.6 :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\omega\, [\|A_t^{(3,1)}\|_T^2] \\ &\quad\leq c_T\, \{\nu_{T+1}^B (2^{-n})^2 + a_T(\omega)^{1/4}\, \nu_{T+1}^B (2^{-n})^{3/4} + 2^{-3n/4}\}. \end{aligned}$$

Preuve. – En utilisant le caractère lipschitzien des coefficients, on a :

$$\begin{aligned} \|A^{(3,1)}\|_T^2 \leq c_T \Bigg\{ &\sup_{0\leq t\leq T} \left\| \int_0^t [X_1(x_s^n) - X_1(x_{\alpha_n(s)}^n)]\, dw_s \right\|_T^2 \\ &+ \sup_{0\leq t\leq T} \|w_t - w_{\alpha_n(t)}\|^2 \\ &+ \nu_{T+1}^w (2^{-n})^2 + \|x_\cdot^n - x_{\alpha_n(\cdot)}^n\|_T^2 + 2^{-2n} \Bigg\}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat cherché à l'aide des lemmes 1.0.1 et 1.1.5, et des inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy. On montre grâce au lemme 1.0.1 que la variable majorante vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (a_T est dans tous les $\mathbb{L}^p$!). □

Pour le terme $A^{(3,2)}$, commençons par le réécrire en intégrant par parties chaque expression du type $[2^{-n}(i+1)-s]\, X_1(x_s^n)$ entre $2^{-n}\, i$ et $2^{-n}(i+1)$. On a :

$$A_t^{(3,2)} = \sum_{j=0}^{3} r_j^n(t) + \bar{r}_1^n(t) + \bar{r}_2^n(t),$$

où l'on à posé,

$$(1.16)\quad \begin{cases} r_0^n(t) = 2^{-(n+1)} \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n t]-1} (X_1' X_1)(x_{i/2^n}^n) \\ r_1^n(t) = -2^n \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} ((i+1)\,2^{-n} - s) \\ \qquad \times \{\partial_y X_1(x_s^n)\, X_0(x_s^n)\, \Delta^n w_i\, ds \\ \qquad\quad + \partial_y X_1(x_s^n)\, V_0(y_s^n)\, \Delta^n w_i\, da_s^n\} \\ r_2^n(t) = -2^{2n} \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} ((i+1)\,2^{-n} - s) \\ \qquad \partial_y X_1(x_s^n)\, [X_1(x_s^n)\, \Delta^n w_i]\, \Delta^n w_i\, ds \end{cases}$$

$$(1.17)\quad \begin{cases} r_3^n(t) = -2^n \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} ((i+1)\,2^{-n} - s) \\ \partial_y X_1(x_s^n)\, [V_1(y_s^n)\, \Delta^n w_i^*]\, \Delta^n w_i\, \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}\, (\Delta^n a_i^n)^{-1}\, da_s^n \\ \bar{r}_1^n(t) = -2^n \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} ((i+1)\,2^{-n} - s) \\ \qquad \times \partial_z X_1(x_s^n)\, \Delta^n w_i\, da_s^n \\ \bar{r}_2^n(t) = -2^n \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} ((i+1)\,2^{-n} - s) \\ \qquad \times \partial_z X_1(x_s^n)\, \Delta^n w_i\, dB_s^n. \end{cases}$$

LEMME 1.1.7 :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\omega\, [\|r_1^n\|_T^2 + \|\bar{r}_1^n\|_T^2 + \|r_3^n\|_T^2] \\ &\quad \le c_T \Bigg\{ 2^{-3n/4}\, (1 + a_T^n(\omega)^2) + a_T^n(\omega)^\alpha \\ &\qquad \times 2^{-(1+p)\,n/2p}\, \nu_T^B\, (2^{-n})^{(1+q)/2q} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)^2 \Bigg\} \end{aligned}$$

où $\alpha > 0$, $p = 4/3$, $q = 2$. La variable majorante vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Preuve. – On obtient les majorations grâce à l'inégalité de Hölder, au lemme 1.0.1 $\left(\text{avec } \delta = 1 \text{ pour } \mathbb{E}_\omega \, [\, \|r_1^n\|_T^2 + \|\bar{r}_1^n\|_T^2], \text{ et } \delta = \frac{1}{3} \text{ pour } \mathbb{E}_\omega \, [\, \|r_3^n\|_T^2]\right)$, et à l'inégalité (1.11) avec $\delta = 1$. □

Pour l'étude de $(r_0^n + r_2^n)$, on doit, comme dans le cas classique, faire intervenir une martingale auxiliaire que contrôle le lemme qui suit, et dont la preuve est analogue à celle du cas classique ([9], lemme 8, p. 337) :

LEMME 1.1.8. – *Soit*

$$M_t^n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[2^n\, t]-1} \partial_y \, X_1 \, (x_{i/2^n}^n) \, [X_1 \, (x_{i/2^n}^n) \, \Delta^n \, w_i] \, \Delta^n \, w_i - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_n \, (t)} (X_1 \, X_1') \, (x_{\alpha_n \, (s)}^n) \, ds.$$

A ω fixé, $(M_t^n)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de carré intégrable, et : $\mathbb{E}_\omega \, [\, \sup_{0 \leq t \leq T} \|M_t^n\|^2] \leq c_T \, 2^{-n/2}$, de sorte que cette variable vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

On réécrit alors le terme $r_2^n \, (t)$ (*cf.* (1.16)) en intégrant par parties la quantité

$$\frac{1}{2} \, [2^{-n} \, (i + 1) - s]^2 \; \partial_y \, X_1 \, (x_s^n) \, [X_1 \, (x_s^n) \, \Delta^n \, w_i]$$

entre $2^{-n} \, i$ et $2^{-n} \, (i + 1)$. On a :

$$r_0^n \, (t) + r_2^n \, (t) = -M_t^n + \bar{r}_3^n \, (t) + r_4^n \, (t) + r_5^n \, (t) + r_6^n \, (t),$$

où l'on a posé,

$$\begin{aligned} r_6^n \, (t) = {} & -2^{2n-1} \sum_{i=0}^{[2^n\, t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n} \, (i + 1) - s]^2 \\ & \times \{\partial_z \, (\partial_y X_1 \, (x_s^n) \, [X_1 \, (x_s^n) \, \Delta^n \, w_i]) \, \Delta^n \, w_i \\ & \qquad + \partial_y \, (\partial_y \, X_1 \, (x_s^n) \, [X_1 \, (x_s^n) \, \Delta^n \, w_i]) \, (V_0 \, (y_s^n) \, \Delta^n \, w_i)\} \; da_s^n \\ & - 2^{2n-1} \sum_{i=0}^{[2^n\, t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n} \, (i + 1) - s]^2 \\ & \times \partial_y \, (\partial_y X_1 \, (x_s^n) \, [X_1 \, (x_s^n) \, \Delta^n \, w_i]) \, X_0 \, (x_s^n) \, \Delta^n \, w_i \, ds \end{aligned}$$

$$r_5^n(t) = -2^{2n-1} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n}(i+1) - s]^2$$
$$\times (\Delta^n a_i^n)^{-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}}$$
$$\times \partial_y [\partial_y X_1(x_s^n)[X_1(x_s^n)\Delta^n w_i]] V_1(y_s^n) \Delta^n w_i^* \Delta^n w_i \, da_s^n$$

$$r_4^n(t) = -2^{3n-1} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n}(i+1) - s]^2$$
$$\times \partial_y (\partial_y X_1(x_s^n)[X_1(x_s^n)\Delta^n w_i])(X_1(x_s^n)\Delta^n w_i)\Delta^n w_i \, ds$$

$$\bar{r}_3^n(t) = -2^{3n-1} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n}(i+1) - s]^2$$
$$\times \partial_z [\partial_y X_1(x_s^n)[X_1(x_s^n)\Delta^n w_i]] \Delta^n w_i \Delta^n B_i \, ds.$$

LEMME 1.1.9 :

$$\mathbb{E}_\omega [\,||r_6^n||_T^2] \leq c_T \, 2^{-3n/2} (1 + a_T^n(\omega)^2)$$

$$\mathbb{E}_\omega [\,||r_4^n||_T^2] \leq c_T \, 2^{-n/2}$$

$$\mathbb{E}_\omega [\,||\bar{r}_3^n||_T^2] \leq c_T \, 2^{n/2} \, \nu_T^B \, (2^{-n})^2$$

$$\mathbb{E}_\omega [\,||r_5^n||_T^2]$$
$$\leq c_T \, 2^{-3n/2} \, a_T^n(\omega)^\alpha \, \nu_{T+1}^B \, (2^{-n})^{(q+1)/2q} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n > 0\}} \right)^2$$

où $\alpha > 0$, $q > 1$. *Les variables majorantes vérifient la propriété* $\mathcal{P}$.

Preuve. – Les majorations de $||r_4^n||_T^2$, $||\bar{r}_3^n||_T^2$, et $||r_6^n||_T^2$ sont similaires à celles du lemme 1.1.7. Pour montrer que $\mathbb{E}_\omega [||\bar{r}_5^n||_T^2]$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, on utilise le lemme 1.0.6 (1) avec $p = \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{4}{3}$. $\square$

Avec les lemmes 1.1.8 et 1.1.9, on contrôle $r_2^n + r_0^n$ à l'aide d'une variable vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Il reste à contrôler $\bar{r}_2^n$ (1.17) pour majorer $A^{(3,2)}$.

LEMME 1.1.10. – $\mathbb{E}_\omega [\,||\bar{r}_2^n||_T^2]$ *est majoré par une variable vérifiant la propriété* $\mathcal{P}$.

Preuve. – Intégrons par parties entre les instants $2^{-n}\, i$ et $2^{-n}\,(i+1)$, la quantité $\frac{1}{2}\,[2^{-n}\,(i+1)\,-\,s]^2\,\partial_z\,X_1\,(x_s^n)\,\Delta^n\,w_i$. On peut alors écrire $\bar{r}_2^n = \sum_{j=4}^{8} \bar{r}_j^n$, où l'on pose :

$$\bar{r}_4^n\,(t) = -2^{3n-1} \sum_{i=0}^{[2^n\,t]-1} (\Delta^n\,B_i)^2 \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n}\,(i+1)-s]^2 \times \partial_z\,[\partial_z X_1\,(x_s^n)]\,\Delta^n\,w_i\,ds$$

$$\bar{r}_5^n\,(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[2^n\,t]-1} \partial_z X_1\,(x_{i/2^n}^n)\,(\Delta^n\,w_i)\,(\Delta^n\,B_i)$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_6^n\,(t) = -2^{2n-1} \sum_{i=0}^{[2^n\,t]-1} \Delta^n\,B_i \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} & [2^{-n}\,(i+1)-s]^2 \\ & \times \{\partial_z\,(\partial_z X_1\,(x_s^n)) + \partial_y\,(\partial_z X_1\,(x_s^n))\,X_0\,(x_s^n) \\ & + \partial_y\,(\partial_z X_1\,(x_s^n))\,V_0\,(y_s^n)\}\,\Delta^n\,w_i\,da_s^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_7^n\,(t) = -2^{2n-1} \sum_{i=0}^{[2^n\,t]-1} & \Delta^n\,B_i\,(\Delta^n\,a_i^n)^{-1}\,\mathbf{1}_{\{\Delta^n\,a_i^n>0\}} \\ & \times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} [2^{-n}\,(i+1)-s]^2 \\ & \times \partial_y\,(\partial_z X_1\,(x_s^n))\,(V_1\,(y_s^n)\,\Delta^n\,w_i^*)\,\Delta^n\,w_i\,da_s^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_8^n\,(t) = -2^{3n-1} \sum_{i=0}^{[2^n\,t]-1} \Delta^n\,B_i \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} & [2^{-n}\,(i+1)-s]^2 \\ & \times \partial_y\,(\partial_z X_1\,(x_s^n))\,(X_1\,(x_s^n)\,\Delta^n\,w_i)\,\Delta^n\,w_i\,ds.\end{aligned}$$

On obtient alors les inégalités suivantes :

$$\|\bar{r}_4^n\|_T \le c\;\nu_T^B\;(2^{-n})^2\;\nu_T^w\;(2^{-n})^2\;2^n\,T$$

$$\|\bar{r}_6^n\|_T \le c\;a_T^n\,(\omega)\;\nu_T^B\;(2^{-n})\;\nu_T^w\;(2^{-n})$$

$$\|\bar{r}_7^n\|_T \leq c\,\nu_T^B\,(2^{-n})\,\nu_T^w\,(2^{-n})\,\nu_{a_T^n}^{w^*}\,(Y_T^n)\left(\sum_{i=0}^{[2^n\,T]-1}\mathbf{1}_{\{\Delta^n\,a_i^n>0\}}\right)$$

$$\|\bar{r}_8^n\|_T \leq c\,\nu_T^w\,(2^{-n})^2\,\nu_T^B\,(2^{-n})\,2^n\,T.$$

Grâce aux lemmes 1.0.1 et 1.0.3, à l'inégalité de Hölder et à l'indépendance des mouvements browniens B, w, et w^*, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\omega\,&[\|\bar{r}_4^n\|_T^2 + \|\bar{r}_6^n\|_T^2 + \|\bar{r}_7^n\|_T^2 + \|\bar{r}_8^n\|_T^2]\\ &\leq c_T\left\{2^{5n/4}\,\nu_T^B\,(2^{-n})^4 + (1 + a_T^n\,(\omega)^2)\,2^{n/2}\,\nu_T^B\,(2^{-n})^2\right.\\ &\quad + (a_T^n\,(\omega))^\alpha\,2^{-(p+1)\,n/2p}\\ &\quad\left.\times\,\nu_T^B\,(2^{-n})^{5/2+1/2q}\left(\sum_{i=0}^{[2^n\,T]-1}\mathbf{1}_{\{\Delta^n\,a_i^n>0\}}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

où $p > 1$ et $q > 1$. Grâce aux lemmes 1.0.1, 1.0.4 et 1.0.6 (2), on sait que la variable majorante vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Quant au terme $\bar{r}_5^n\,(t)$, il suffit de remarquer qu'il s'écrit :

$$\bar{r}_5^n\,(t) = -2^{-(n+1)}\int_0^{\alpha_n\,(t)}\dot{B}_s^n\,\partial_z\,X_1\,(x_{\alpha_n\,(s)}^n)\,dw_s,$$

et d'utiliser les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\omega\,[\,\|\bar{r}_5^n\,(t)\|_T^2] &\leq \mathbb{E}_\omega\left[\frac{1}{2}\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t 2^{-n}\,\dot{B}_s^n\,\partial_z\,X_1\,(x_{\alpha_n\,(s)}^n)\,dw_s\right\|^2\right]\\ &\leq c_T\,\nu_T^B\,(2^{-n})^2.\quad\square\end{aligned}$$

On déduit alors des lemmes 1.1.5 à 1.1.10 :

LEMME 1.1.11. – *Il existe une variable $X_n\,(T;\,\omega)$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ telle que :*

$$\mathbb{E}_\omega\,[\,\|A^{(3)}\|_T^2] \leq X_n\,(T;\,\omega) + c_T\int_0^T g_\omega^n\,(s)\,ds.$$

Il reste maintenant à contrôler le terme :

$$\begin{aligned}A_t^{(4)} &= \int_0^t V_1(y_s)\,dw_{a_s}^* - \int_0^t V_1(y_s^n)\,\dot\gamma_s^n\,da_s^n + \frac{1}{2}\int_0^t (V_1' V_1)(y_s)\,da_s \\ &= \int_0^t (V_1(y_s) - V_1(y_s^n))\,dw_{a_s}^* + \int_0^t (V_1(y_s^n) - V_1(y_{\alpha_n(s)}^n))\,dw_{a_s}^* \\ &\quad + \int_{\alpha_n(t)}^t V_1(y_{\alpha_n(s)}^n)\,dw_{a_s}^* - \int_{\alpha_n(t)}^t V_1(y_s^n)\,\dot\gamma_s^n\,da_s^n \\ &\quad + \left\{\int_0^{\alpha_n(t)} V_1(y_{\alpha_n(s)}^n)\,dw_{a_s}^*\right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{\alpha_n(t)} V_1(y_s^n)\,\dot\gamma_s^n\,da_s^n + \frac{1}{2}\int_0^t (V_1' V_1)(y_s)\,da_s\right\}\end{aligned}$$

$A^{(4)}$ est l'analogue de $A^{(3)}$, avec pour échelle de temps celle du temps local.

LEMME 1.1.12. – *Il existe une variable positive $X_n(T;\,\omega)$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ telle que :*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|A_t^{(4)}\|^2] \\ &\le X_n(T;\,\omega) + c\,g_\omega^n(T)\,\{\nu_T^B\,(2^{-n})^2 + |z_0 - z_0^n|^2\} \\ &\quad + c\,(a_T+1)\int_0^T g_\omega^n(s)\,da_s.\end{aligned}$$

Preuve. – Réécrivons le terme :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\alpha_n(t)} V_1(y_{\alpha_n(s)}^n)\,dw_{a_s}^* - \int_0^{\alpha_n(t)} V_1(y_s^n)\,\dot\gamma_s^n\,da_s^n \\ &= \sum_{i=0}^{[2^n t]-1}\left\{V_1(y_{i/2^n}^n)\,(w^*(a_{(i+1)/2^n}) - w^*(a_{i/2^n}))\right. \\ &\qquad \left. - \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (\Delta^n a_i^n)^{-1}\,\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\,V_1(y_s^n)\,\Delta^n w_i^*\,da_s^n\right\}.\end{aligned}$$

Après intégration par parties du terme sous l'intégrale, on a :

$$
\begin{aligned}
= \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \Bigg\{ & V_1 (y^n_{i/2^n}) \, [(w^* (a_{(i+1)/2^n}) - w^* (a_{i/2^n})) \\
& \qquad - (w^* (a^n_{(i+1)/2^n}) - w^* (a^n_{i/2^n}))] \\
& + (\Delta^n a^n_i)^{-1} \, \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}} \\
& \times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a^n_{(i+1)/2^n} - a^n_s) \, (\nabla V_1 (y^n_s) \, dy^n_s) \, \Delta^n w^*_i \Bigg\}
\end{aligned}
$$

où $(\nabla V (y) \, \vec{u}) \, \vec{w}$ représente le vecteur dont la j-ième composante vaut : $\sum_{p,\, q} \frac{\partial V^{jp}}{\partial y_q} (y) \, \vec{u}^q \, \vec{w}^p$. Posons alors :

$$
\begin{aligned}
(1.18) \qquad H^n_1 (t) = \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} & \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}} \, (\Delta^n a^n_i)^{-1} \\
& \times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a^n_{(i+1)/2^n} - a^n_s) \\
& \times \{\nabla V_1 (y^n_s) \, [X_0 (x^n_s) + 2^n X_1 (x^n_s) \, \Delta^n w_i]\} \, \Delta^n w^*_i \, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1.19) \quad H^n_2 (t) = \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} & \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}} \, (\Delta^n a^n_i)^{-1} \\
& \times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a^n_{(i+1)/2^n} - a^n_s) \, [\nabla V_1 (y^n_s) \, V_0 (y^n_s)] \, \Delta^n w^*_i \, da^n_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1.20) \qquad H^n_3 (t) = \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} & \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}} \, (\Delta^n a^n_i)^{-1} \\
& \times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a^n_{(i+1)/2^n} - a^n_s) \\
& \times [\nabla V_1 (y^n_s) \, (V_1 (y^n_s) \, \Delta^n w^*_i)] \, \Delta^n w^*_i da^n_s .
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$\int_0^{\alpha_n(t)} V_1(y^n_{\alpha_n(s)})\, dw^*_{a_s} - \int_0^{\alpha_n(t)} V_1(y^n_s)\, \dot{\gamma}^n_s\, da^n_s$$
$$= \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} V_1(y^n_{i/2^n}) \left[(w^*(a_{(i+1)/2^n}) - w^*(a_{i/2^n})) \right.$$
$$\left. - (w^*(a^n_{(i+1)/2^n}) - w^*(a^n_{i/2^n})) \right] - \sum_{i=1}^{3} H^n_i(t).$$

LEMME 1.1.13. – *Il existe des constantes* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *et* $C_T > 0$ *telles que :*

$$(1.21)\quad \mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|H^n_1(t) + H^n_2(t)\|^2_T]$$
$$\le c_T \left\{ a^n_T(\omega)^\alpha\, \nu^B_T(2^{-n})^{3/4} + a^n_T(\omega)^\beta\, 2^{-(q+1)n/2q} \right.$$
$$\left. \times\, \nu^B_T(2^{-n})^{(p+1)/2p} \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}} \right)^2 \right\}$$

où $p > 1$ *et* $q > 1$ *sont choisis comme dans le lemme* 1.0.6, *pour que la variable majorante vérifie la propriété* $\mathcal{P}$.

Preuve. – En reprenant (1.18) et (1.19), on obtient les majorations suivantes :

$$\sup_{0\le t\le T} \|H^n_1(t)\| \le c\,\nu^{w^*}_{a^n_T}(Y^n_T)\,(2^{-n} + \nu^w_T(2^{-n})) \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}} \right)$$

$$\sup_{0\le t\le T} \|H^n_2(t)\| \le c\,\nu^{w^*}_{a^n_T}(Y^n_T) \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a^n_i > 0\}}\,(\Delta^n a^n_i) \right)$$
$$\le C\, a^n_T\, \nu^{w^*}_{a^n_T}(Y^n_T).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder $\left(\text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ pour } p > 1 \text{ et } q > 1\right)$, le lemme 1.0.1 et l'inégalité (1.11) avec $\delta = 1$ d'une part, et $\delta = p - 1 > 0$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T}\|H_1^n(t)+H_2^n(t)\|_T^2]\\
&\le c\,\mathbb{E}_\omega\left[\nu_{a_T^n}^{w^*}(Y_T^n)^2\left\{a_T^n(\omega)^2+(2^{-2n}+\nu_T^w(2^{-n})^2)\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\times\left(\sum_{i=0}^{[2^nT]-1}\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\right)^2\right\}\right]\\
&\le c\left\{a_T^n(\omega)^2\,\mathbb{E}_\omega\,[\nu_{a_T^n}^{w^*}(Y_T^n)^8]^{1/4}\right.\\
&\qquad+\left(\sum_{i=0}^{[2^nT]-1}\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\right)^2(2^{-2n}+\mathbb{E}_\omega\,[\nu_T^w(2^{-n})^{4q}]^{1/2q})\\
&\qquad\left.\times\,\mathbb{E}_\omega\,[\nu_{a_T^n}^{w^*}(Y_T^n)^{4p}]^{1/2p}\right\}\\
&\le C\left\{a_T^n(\omega)^\alpha\,\nu_T^B(2^{-n})^{3/4}+\left(\sum_{i=0}^{[2^nT]-1}\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.\times\,\nu_T^B(2^{-n})^{(p+1)/2p}a_T^n(\omega)^\beta\,2^{-(q+1)\,n/2q}\right\}.
\end{aligned}$$

Les lemmes 1.0.1 et 1.0.6 permettent alors de conclure. □

LEMME 1.1.14. – *Il existe un processus $R^n(t)$ tel que :*

$$\text{(i)}\quad H_3^n(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{[2^nt]-1}\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\,\nabla V_1(y_{i/2^n}^n)\,[V_1(y_{i/2^n}^n)\,\Delta^n w_i^*]\,(\Delta^n w_i^*)+R^n(t)$$

(ii) $\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T}\|R^n(t)\|^2]\le X_n(T;\,\omega)$ *où* $X_n(T;\,\omega)$ *est une variable positive croissante en* T *qui vérifie la propriété* $\mathcal{P}$.

Preuve. – On intègre par parties

$$-\frac{1}{2}\,(a_{(i+1)/2^n}^n-a_s^n)^2\,\nabla V_1(y_s^n)\,[V_1(y_s^n)\,\Delta^n w_i^*]$$

entre $i\,2^{-n}$ et $(i+1)\,2^{-n}$. En reportant dans l'expression (1.36) de $H_3^n\,(t)$, on obtient le (i) si l'on pose $R^n\,(t) = \sum_{i=1}^{3} R_i^n\,(t)$, où :

$$(1.22)\qquad R_1^n\,(t) = 1/2 \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n\, a_i^n > 0\}}\,(\Delta^n\, a_i^n)^{-2}$$

$$\times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a_{(i+1)/2^n}^n - a_s^n)^2$$

$$\times\, \partial_y\,(\nabla\, V_1\,(y_s^n)\,[V_1\,(y_s^n)\,\Delta^n\, w_i^*])\,(X_0\,(x_s^n) + 2^n\, X_1\,(x_s^n)\,\Delta^n\, w_i)\,\Delta^n\, w_i^*\, ds$$

$$(1.23)\qquad R_2^n\,(t) = 1/2 \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n\, a_i^n > 0\}}\,(\Delta^n\, a_i^n)^{-2}$$

$$\times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a_{(i+1)/2^n}^n - a_s^n)^2$$

$$\times\, \{\partial_y\,(\nabla\, V_1\,(y_s^n)\,[V_1\,(y_s^n)\,\Delta^n\, w_i^*])\, V_0\,(y_s^n)\}\,\Delta^n\, w_i^*\, da_s^n$$

$$(1.24)\qquad R_3^n\,(t) = 1/2 \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n\, a_i^n > 0\}}\,(\Delta^n\, a_i^n)^{-3}$$

$$\times \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (a_{(i+1)/2^n}^n - a_s^n)^2$$

$$\times\, \partial_y\,(\nabla\, V_1\,(y_s^n)\,[V_1\,(y_s^n)\,\Delta^n\, w_i^*]\,(V_1\,(y_s^n)\,\Delta^n\, w_i^*))\,\Delta^n\, w_i^*\, da_s^n$$

L'expression (1.22) de R_1^n donne la majoration suivante à l'aide de (1.11) :

$$(1.25)\qquad \mathbb{E}_\omega\,[\,\|R_1^n\|_T^2] \le c_T \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n\, a_i^n > 0\}}\right)^2 2^{-n(p+1)/2p}$$

$$\times\, \nu_T^B\,(2^{-n})^{(q+1)/q}\, a_T^n\,(\omega)^\alpha$$

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, avec $1 < p < \dfrac{4}{3}$. D'après le lemme 1.0.6. 5), la variable majorante vérifie la propriété $\mathcal{P}$. (En fait, on peut prendre $p = q = 2$.)

Pour le terme R_2^n, la définition (1.23) donne à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (1.11) avec $\delta = 1$:

$$\mathbb{E}_\omega \, [\sup_{0 \leq t \leq T} \|R_2^n (t)\|^2] \leq c \, a_T^n (\omega)^\alpha \, \nu_T^B \, (2^{-n})^{3/2}. \tag{1.26}$$

La variable majorante vérifie la propriété $\mathcal{P}$ grâce au lemme 1.0.1. De même, (1.24) et (1.11) avec $\delta = \frac{1}{2}$ donnent :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|R_3^n (t)\| \leq c \, \nu_{a_T^n}^{w^*} (Y_T^n)^3 \left(\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n \, a_i^n > 0\}} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_\omega \, [\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|R_3^n (t)\|^2] \\ \leq c \, a_T^n (\omega)^\alpha \, \nu_T^B \, (2^{-n})^{5/2} \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n T]-1} \mathbf{1}_{\{\Delta^n \, a_i^n > 0\}} \right)^2 \end{array} \right. \tag{1.27}$$

La variable majorante vérifie la propriété $\mathcal{P}$ grâce au lemme 1.0.6.

En réunissant les inégalités (1.25), (1.26) et (1.27), on obtient le résultat du lemme 1.1.14. □

Notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \; S^n (t) = \displaystyle\int_0^t (V_1' \, V_1) \, (y_s) \, da_s - \int_0^{\alpha_n (t)} (V_1' \, V_1) \, (y_{\alpha_n (s)}^n) \, da_s^n \\ 2) \; T^n (t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^n \, t]-1} V_1 \, (y_{i/2^n}^n) \, [(w^* \, (a_{(i+1)/2^n}) - w^* \, (a_{i/2^n})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - (w^* \, (a_{(i+1)/2^n}^n) - w^* \, (a_{i/2^n}^n))] \\ 3) \; O^n (t) = \displaystyle\frac{1}{2} \int_0^{\alpha_n (t)} (V_1' \, V_1) \, (y_{\alpha_n (s)}^n) \, da_s^n \\ \qquad\qquad - \displaystyle\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[2^n \, t]-1} \nabla \, V_1 \, (y_{i/2^n}^n) \, [V_1 \, (y_{i/2^n}^n) \, \Delta^n \, w_i^*] \, \Delta^n \, w_i^* \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Avec ces notations, on écrit :

$$\int_0^{\alpha_n (t)} V_1 \, (y_{\alpha_n (s)}^n) \, dw_{a_s}^* - \int_0^{\alpha_n (t)} V_1 \, (y_s) \, \dot{\gamma}_s^n \, da_s^n + \frac{1}{2} \int_0^t (V_1' V_1) \, (y_s) \, da_s$$
$$= T^n (t) - H_1^n (t) - H_2^n (t) - R^n (t) + O^n (t) + \frac{1}{2} S^n (t)$$

LEMME 1.1.15. – *A ω fixé,* $(O^n(t))_{0 \leq t \leq T}$ [cf. (1.28) 3)] *est une martingale de carré intégrable telle que :*

$$\mathbb{E}_\omega \, [\sup_{0 \leq t \leq T} \|O^n(t)\|^2] \leq X_n(T;\, \omega)$$

où $X_n(T;\, \omega)$ est une variable qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Preuve. – En effet, $O^n(t)$ est constante sur chaque intervalle de temps dyadique, et a pour j-ième composante :

$$O^n(t)^{(j)} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_n(t)} \sum_{q,\, k} \frac{\partial V_1^{jq}}{\partial y_k} (y^n_{\alpha_n(s)})\, V_1^{kq}(y^n_{\alpha_n(s)})\, da^n_s$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} (\nabla V_1(y^n_{i/2^n})\, [V_1(y^n_{i/2^n})\, \Delta^n w_i^*]\, \Delta^n w_i^*)^j$$

$$O^n((i+1)/2^n)^{(j)} - O^n(i/2^n)^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{q,\, k} \left(\frac{\partial V_1^{jq}}{\partial y_k} V_1^{kq} \right) (y^n_{i/2^n})\, \Delta^n a^n_i$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{kqr} \left(\frac{\partial V_1^{jq}}{\partial y_k} V_1^{qr} \right) (y^n_{i/2^n})\, (\Delta^n w_i^*)^{(k)}\, (\Delta^n w_i^*)^{(r)}$$

Si $t \in [i/2^n;\, (i+1)/2^n[$, on pose :

$$Y_t^{rkj} = \sum_q \left(\frac{\partial V_1^{jq}}{\partial y_k} V_1^{qr} \right) (y^n_{i/2^n})\, (\Delta^n w_i^*)^{(r)}$$

et

$$Z_t^{kj} = (w^*(a^n_t) - w^*(a^n_{(i/2^n)}))^{(k)}$$

$$Y^{rkj}_{(i+1)/2^n} Z^{kj}_{i/2^n} = 0 + \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (Y_s^{rkj}\, dZ_s^{kj} + Z_s^{kj}\, dY_s^{rkj})$$
$$+ \mathbf{1}_{\{r=k\}}\, \Delta^n a^n_i \sum_q \left(\frac{\partial V_1^{jq}}{\partial y_k} V_1^{qr} \right) (y^n_{i/2^n})$$

$$O^n((i+1)/2^n)^{(j)} - O^n(i/2^n)^{(j)}$$
$$= 1/2 \sum_{r,\, k} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} (Y_s^{rkj}\, dZ_s^{kj} + Z_s^{kj}\, dY_s^{rkj})$$

On déduit alors les propriétés de martingale de l'écriture ci-dessus. D'autre part, en utilisant l'inégalité de Doob sur chaque coordonnée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|O^n(t)\|^2] &\le c\,\mathbb{E}_\omega\,[\|O^n(T)\|^2] \\
&\le c \sum_{i=0}^{[2^nT]} \mathbb{E}_\omega\,[\|O^n((i+1)/2^n) - O^n(i/2^n)\|^2] \\
&\le c' \sum_{i=0}^{[2^nT]} \mathbb{E}_\omega\,[\mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\,(\nu^{w^*}_{a^n_T}\,(Y^n_T)^4 + (Y^n_T)^2)] \\
&\le C \left(\sum_{i=0}^{[2^nT]} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\right) \mathbb{E}_\omega\,[\nu^{w^*}_{a^n_T}\,(Y^n_T)^4 + \nu^B_T\,(2^{-n})^2] \\
&\quad (cf.\ \text{lemme } 1.0.3) \\
&\le c_T \left(\sum_{i=0}^{[2^nT]} \mathbf{1}_{\{\Delta^n a_i^n>0\}}\right) \{a^n_T\,(\omega)^\alpha\,\nu^B_T\,(2^{-n})^{3/2} + 2^{-3n/4}\} \\
&=: X_n\,(T;\,\omega)
\end{aligned}$$

avec l'inégalité de Hölder, (1.11) et le lemme 1.0.1 ($\delta = 1$). D'après les lemmes 1.0.5 et 1.0.6, la variable $X_n\,(T;\,\omega)$ possède la propriété $\mathcal{P}$. □

LEMME 1.1.16 :

(i) $\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|T^n(t)\|^2] \le c\,\|a - a^n\|_T \le C\,\{|z_0 - z_0^n| + \nu^B_{T+1}\,(2^{-n})\}$

(ii) $$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|S^n(t)\|^2] \\
&\le c\left\{a_T^2\,[2^{-3n/4} + a_T^{1/4}\,\nu^B_{T+1}\,(2^{-n})^{3/4}] + (1 + a_T^2 + g^n_\omega\,(T))\right. \\
&\qquad \left.\times\ (|z_0 - z_0^n|^2 + \nu^B_{T+1}\,(2^{-n})^2) + a_T \int_0^T g^n_\omega\,(s)\,da_s\right\}
\end{aligned}$$

Preuve. – (i) Posons : $U_t^n = w^*_{a_t} - w^*_{a_t^n}$. Ainsi, en reprenant l'expression (1.28) de $T^n(t)$, ce terme s'écrit : $T^n(t) = \int_0^{\alpha_n(t)} V_1\,(y^n_{\alpha_n(s)})\,dU^n_s$.

Les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy entraînent alors :

$$\mathbb{E}_\omega \,[\sup_{0\le t\le T} \|T^n(t)\|^2] \le c\,\mathbb{E}_\omega \left[\int_0^T d\,\langle U^n\rangle_s\right].$$

Or : $\mathbb{E}_\omega\,[\langle U^n\rangle_T] = a_T + a_T^n - 2\,(a_T \wedge a_T^n) = |a_T - a_T^n|$.

Le lemme 1.0.4 complète la preuve de (i).

(ii) Reprenons l'expression (1.28) de S^n :

$$\begin{aligned} S^n(t) = &\int_0^{\alpha_n(t)} [(V_1' V_1)(y_s^n) - (V_1' V_1)(y_{\alpha_n(s)}^n)]\,da_s^n \\ &+ \int_0^t [(V_1' V_1)(y_s) - (V_1' V_1)(y_s^n)]\,da_s^n \\ &+ \int_{\alpha_n(t)}^t (V_1' V_1)(y_s^n)\,da_s^n + \int_0^t (V_1' V_1)(y_s)\,dN_s^n \\ &(\text{rappel : } N^n = a - a^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{0\le t\le T} \|S^n(t)\| \le c \Bigg\{ &a_T^n \sup_{0\le t\le T} \|y_t^n - y_{\alpha_n(t)}^n\| \\ &+ \sup_{0\le t\le T} \int_0^t \|y_s - y_s^n\|\,da_s^n + Y_T^n \\ &+ \sup_{0\le t\le T} \left\| \int_0^t (V_1' V_1)(y_s)\,dN_s^n \right\| \Bigg\} \end{aligned}$$

$$(1.29)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T} \|S^n(t)\|^2 \\ &\qquad \le c \Bigg\{ (a_T^n)^2\,\|x_\cdot^n - x_{\alpha_n(\cdot)}^n\|_T^2 + \left(\int_0^T \|x - x^n\|\,da_s^n\right)^2 \\ &\qquad + \nu_T^B\,(2^{-n})^2 + \sup_{0\le t\le T} \left\| \int_0^t (V_1' V_1)(y_s)\,dN_s^n \right\|^2 \Bigg\} \\ &\text{grâce au lemme 1.0.3.} \end{aligned} \right.$$

Comme la fonction $s \mapsto \|x - x^n\|_s$ est croissante positive, le lemme 1.1.3

donne :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|x - x^n\| \, da_s^n &= \int_0^T \|x - x^n\| \, da_s - \int_0^T \|x - x^n\|_s \, dN_s^n \\ &\leq \int_0^T \|x - x^n\| \, da_s + 2 \|x - x^n\|_T \, \|N^n\|_T \\ &\leq \int_0^T \|x - x^n\|_s \, da_s \\ &\quad + 2 \left[\nu_{T+1}^B (2^{-n}) + |z_0 - z_0^n|\right] \|x - x^n\|_T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\omega \left[\left(\int_0^T \|x - x^n\|_s \, da_s^n \right)^2 \right] \\ &\quad \leq c \left\{ a_T \int_0^T g_\omega^n (s) \, da_s + g_\omega^n (T) \left[\nu_{T+1}^B (2^{-n})^2 + |z_0 - z_0^n|^2\right] \right\}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.1.4, on a alors :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\omega \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t (V_1' V_1)(y_s) \, dN_s^n \right\|^2 \right] \\ &\quad \leq c_T \left(1 + a_T^2 (\omega)\right) \mathbb{E}_\omega \left[\|N^n\|_T^2\right] \\ &\quad \leq c_T \left(1 + a_T^2 (\omega)\right) \left\{|z_0 - z_0^n|^2 + \nu_{T+1}^B (2^{-n})^2\right\}\end{aligned}$$

En regroupant ces inégalités et les majorations du lemme 1.1.5 dans (1.29), on obtient l'inégalité (ii) cherchée. □

Conséquence des lemmes 1.1.13 *à* 1.1.16. – Il existe une variable $X_n (T;\, \omega)$ croissante en T ayant la propriété $\mathcal{P}$ telle que :

$$\begin{aligned}(1.30)\quad &\mathbb{E}_\omega \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^{\alpha_n (t)} V_1 \left(y_{\alpha_n (s)}^n\right) dw_{a_s}^* \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \int_0^{\alpha_n (t)} V_1 (y_s) \, \dot{\gamma}_s^n \, da_s^n + \frac{1}{2} \int_0^t (V_1' V_1)(y_s) \, da_s \right\|^2 \right] \\ &\quad \leq X_n (T;\, \omega) + c \, g_\omega^n (T) \left(|z_0 - z_0^n|^2 + \nu_{T+1}^B (2^{-n})^2\right) \\ &\qquad + c \, a_T \int_0^T g_\omega^n (s) \, da_s\end{aligned}$$

LEMME 1.1.17. – *Soit :*

$$\overline{H}_t = \int_0^t [V_1(y_s) - V_1(y_s^n)]\, dw^*_{a_s} + \int_0^t [V_1(y_s^n) - V_1(y^n_{\alpha_n(s)})]\, dw^*_{a_s}$$
$$+ \int_{\alpha_n(t)}^t V_1(y^n_{\alpha_n(s)})\, dw^*_{a_s} - \int_{\alpha_n(t)}^t V_1(y_s^n)\, \dot{\gamma}_s^n\, da_s^n$$

Il existe une variable $X_n(T;\,\omega)$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ telle que :

$$\text{(1.31)} \qquad \mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|\overline{H}_t\|^2] \le c\left\{X_n(T;\,\omega) + \int_0^T g_\omega^n(s)\, da_s\right\}.$$

Preuve :

$$\mathbb{E}_\omega\,[\sup_{0\le t\le T} \|\overline{H}_t\|^2] \le c\left\{\mathbb{E}_\omega\left[a_T\,\|y^n - y^n_{\alpha_n}\|_T^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^T \|y - y^n\|_s^2\, da_s + \nu^{w^*}_{a_T}(Z_T^n)^2 + \nu^{w^*}_{a_T^n}(Y_T^n)^2\right]\right\}$$
$$\le C\left\{a_T\,\mathbb{E}_\omega\,[\|x^n - x^n_{\alpha_n}\|_T^2] + \int_0^T g_\omega^n(s)\, da_s\right.$$
$$\left. + (a_T^\alpha(\omega) + (a_T^n(\omega))^\alpha)\, \nu_T^B\,(2^{-n})^{3/4}\right\}$$

grâce aux inégalités (1.11) et (1.12). Le lemme 1.1.5 donne le résultat. □

Fin du lemme 1.1.12. – C'est une conséquence des inégalités (1.30) et (1.31). □

Conséquence. – On regroupe les résultats des lemmes précédents dans l'équation (1.13) donnant $(y_t - y_t^n)$. On obtient alors l'inégalité (1.7) du type voulu.

2. Cas du demi-espace avec terme de dérive

Considérons l'espace $\mathcal{W} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\, \overline{D}\times\mathbb{R}_+)$ muni de ses tribus canoniques et de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour tout $x \in \overline{D}$, soit $\mathbb{P}_x$ la loi, sur l'espace $\mathcal{W}$, du couple $(x^x,\, a^x)$ solution du problème (0.1). Pour toute fonction $H = (h,\, \gamma)$ de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, soit $(x^{H,\,x}_{\cdot},\, a^{H,\,x}_{\cdot})$ la solution du problème déterministe suivant dont nous allons montrer l'existence et l'unicité :

$$
(1.32)\quad \begin{cases} x_t^{H,x} = x + \int_0^t [\beta(x_s^{H,x}) + \sigma_i(x_s^{H,x})\dot{h}_s^i]\, \mathbf{1}_D(x_s^{H,s})\, ds \\ \qquad + \int_0^t [\nu(x_s^{H,x}) + \mu_j(x_s^{H,x})\,\dot{\gamma}_s^j]\, \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\, da_s^{H,x} \\ a_0^{H,x} = 0 \qquad a_t^{H,x} = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\, da_s^{H,x} \\ 0 = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\, ds. \end{cases}
$$

A. Existence et unicité d'une solution au problème déterministe. – Remarquons tout d'abord que nous pouvons enlever les indicatrices, et chercher à construire alors une solution au système :

$$
S_{\beta,\sigma,h,x} \begin{cases} dz_t = \left(\beta_1(x_t) + \sum_{i=1}^d \sigma_i^1(x_t)\,\dot{h}_t^i\right) dt + da_t \\ x_0 = x \\ dy_t = \left(\beta_2(x_t) + \sum_{i=1}^d \sigma_i^2(x_t)\,\dot{h}_t^i\right) dt \\ \qquad + \left(\nu(y_t) + \sum_j \mu_j(y_t)\,\dot{\gamma}_t^j\right) da_t \end{cases}
$$

où $x_t = (z_t, y_t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$, $H = (h, \gamma) \in \mathcal{C}^2([0; T])$.

Parallèlement, considérons le système :

$$
S_{k,x} \begin{cases} dz_t = \dot{k}_t\, dt + da_t \qquad x_0 = x \\ dy_t = \left(\beta_2(x_t) + \sum_{i=1}^d \sigma_i^2(x_t)\,\dot{h}_t^i\right) dt + \left(\nu(y_t) + \sum_j \mu_j(y_t)\,\dot{\gamma}_t^j\right) da_t \end{cases}
$$

dont nous savons construire une unique solution notée $(x^{k,x}, a^{k,x})$, la première coordonnée étant donnée par une équation de réflexion (*cf.* § I.1). Nous remarquons alors que l'unicité des solutions du système $S_{k,x}$ permet d'affirmer que $\left(x_\cdot^{k,x}, a_\cdot^{k,x}\right)$ est aussi solution du système $S_{\beta,\sigma,h,x}$ lorsque β, σ, h et k sont liés par la relation :

$$
(\mathcal{R}) \quad \dot{k}_t = \beta_1(x_t^{k,x}) + \sum_{i=1}^d \sigma_i^1(x_t^{k,x})\,\dot{h}_t^i
$$

Afin de construire une solution au système $S_{\beta,\sigma,h,x}$ sur l'intervalle de temps $[0; T]$, nous procédons de la façon suivante; nous mettons en évidence un $T_0\,(\leq T)$ ne dépendant que des données (T est fixé), pour lequel l'application ϕ décrite ci-dessous est contractante :

$$\begin{cases} E \xrightarrow{\phi} E \\ (\dot{k}_t)_{0\leq t\leq T_0} \to \left(\beta_1\,(x_t^{k,\,x}) + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^1\,(x_t^{k,\,x})\,\dot{h}_t^i\right)_{0\leq t\leq T_0} \end{cases}$$

où $E = \{f;\ f \in \mathcal{C}^0\,([0;\,T_0];\,\mathbb{R}),\ \|f\|_{T_0} = \sup_{t\in[0;\,T_0]} |f\,(t)| \leq c\}$, la constante c vérifiant l'inégalité $\|\beta_1\|_\infty + \sum_{i=1}^{d} \|\sigma_i^1\|_\infty\,\|\dot{h}^i\|_T \leq c$, de sorte que ϕ est bien une application à valeurs dans E, qui lui-même est un fermé de l'espace de Banach $(\mathcal{C}^0\,(0;\,T_0];\,\mathbb{R}),\ \|\quad\|_{T_0})$. Nous pouvons donc appliquer le théorème du point fixe, et en déduire l'existence d'une fonction k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\,T_0]$, telle que la relation $\mathcal{R}$ soit vérifiée. D'après la remarque précédente, $(x^{k,\,x},\ a^{k,\,x})$, solution du système $S_{k,\,x}$, est solution de $S_{\beta,\,\sigma,\,h,\,x}$ sur $[0;\,T_0]$; on réitère alors le procédé sur $[T_0;\,2\,T_0]$ en partant du point $x_{T_0}^k$, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une solution sur $[0;\,T]$. Nous en montrons l'unicité à la fin de ce paragraphe.

Soient k et k', deux éléments de E. Pour simplifier, nous notons $(x_.,\ a_.)$ et $(x'_.,\ a'_.)$ au lieu de $(x_.^{k,\,x},\ a_.^{k,\,x})$ et $(x_.^{k',\,x},\ a_.^{k',\,x})$ les solutions des systèmes $S_{k,\,x}$ et $S_{k',\,x}$. Par définition de ϕ :

$$\text{(1.33)}\qquad \begin{aligned} &\|\phi\,(\dot{k}) - \phi\,(\dot{k}')\|_{T_0} \\ &\quad\leq \left(\|\nabla\,\beta_1\|_\infty + \sum_{i=1}^{d} \|\nabla\,\sigma_i^1\|_\infty\,\|\dot{h}^i\|_T\right)\|x_. - x'_.\|_{T_0} \end{aligned}$$

Majoration sur les premières composantes. – Comme $z_.$ et $z'_.$ sont donnés par des équations de réflexion, nous avons :

$$a_t = \sup_{s\leq t}\,[-(z_0 + k_s) \vee 0] \qquad a'_t = \sup_{s\leq t}\,[-(z_0 + k'_s) \vee 0],$$

ce qui entraîne, en utilisant le caractère lipschitzien de l'application ξ de [9], (p. 328),

$$\text{(1.34)}\qquad |a_t - a'_t| \leq \|k - k'\|_t \leq t\,\|\dot{k} - \dot{k}'\|_t$$

et $a_{T_0} \leq \|k\|_{T_0} \leq T_0\,\|\dot{k}\|_{T_0}$ car $z_0 \geq 0$,

$$\text{(1.35)}\qquad a_{T_0} \leq T_0\,c \quad \text{car } \dot{k} \in E.$$

On en déduit :

$$(1.36)\qquad \forall t \leq T_0, \quad \|z_. - z'_.\|_t \leq 2T_0 \|\dot{k} - \dot{k}'\|_{T_0}$$

Majoration des autres composantes. – La régularité des coefficients β_2, σ_i^2, ν et μ_j permet d'écrire pour $t \leq T_0$:

$$\begin{aligned}\|y_t - y'_t\| \leq & \int_0^t \left(\|\nabla\beta_2\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|\nabla\sigma_i^2\|_\infty \|\dot{h}^i\|_T\right) \|x_. - x'_.\|_s \, ds \\ & + \int_0^t (\|\nabla\nu\|_\infty + \sum_j \|\nabla\mu_j\|_\infty \|\dot{\gamma}^j\|_T) \|y_. - y'_.\|_s \, da_s \\ & + \sup_{s\leq t} \left\| \int_0^s \{\nu(y'_u)) + \sum_j \mu_j(y'_u)\dot{\gamma}_u^j\} \, d(a_u - a'_u) \right\|\end{aligned}$$

Appliquons alors le lemme qui suit (dont la preuve est semblable à celle du lemme 1.1.4), à la fonction $f(s, y) = \nu(y) + \sum_j \mu_j(y)\dot{\gamma}_s^j$ et au processus $N_t = a_t - a'_t$.

LEMME 1.1.18. – *Soit $f \in C_b^1([0; T] \times \mathbb{R}^p)$, et N un processus à variations bornées nul en zéro. Alors, il existe une constante c_T ne dépendant que de T, $\|f\|_T$, et de $\|\nabla f\|_T$ telle que :*

$$\forall t \leq T, \quad \sup_{s\leq t} \left\| \int_0^s f(u, y'_u) \, dN_u \right\| \leq c_T \|N\|_t (1 + t + a_t)$$

Si

$$M_T = \sup\left(\|\nabla\beta_2\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|\nabla\sigma_i^2\|_\infty \|\dot{h}^i\|_T; \|\nabla\nu\|_\infty + \sum_j \|\nabla\mu_j\|_\infty \|\dot{\gamma}^j\|_T\right),$$

on a pour tout $t \leq T_0 \leq T$, compte tenu de (1.34) :

$$\begin{aligned}\|y_. - y'_.\|_t \leq M_T & \int_0^t \|x_. - x'_.\|_s (ds + da_s) \\ & + c_T(1 + t + a_t)\|a - a'\|_t\end{aligned}$$

$$(1.37)\qquad \begin{aligned}\|y - y'\|_t \leq M_T & \int_0^t \|x - x'\|_s (ds + da_s) \\ & + c_T(1 + T_0 + a_{T_0}) T_0 \|\dot{k} - \dot{k}'\|_{T_0}\end{aligned}$$

En regroupant les inégalités (1.36) et (1.37), on obtient :

$$\begin{aligned}\forall t \leq T_0, \quad \|x_. - x'_.\|_t \leq & M_T \int_0^t \|x_. - x'_.\|_s (ds + da_s) \\ & + K_T (1 + T_0 + a_{T_0}) T_0 \|\dot{k} - \dot{k}'\|_{T_0},\end{aligned}$$

soit en utilisant le lemme de Gronwall puis l'inégalité (1.35),

$$\begin{aligned}\|x_. - x'_.\|_{T_0} \leq & \; K_T (1 + T + c\,T) \exp (M (T + c\,T)) T_0 \|\dot{k} - \dot{k}'\|_{T_0} \\ & \equiv \lambda_T T_0 \|\dot{k} - \dot{k}'\|_{T_0}\end{aligned}$$

En reportant dans (1.33) :

$$\|\phi(\dot{k}) - \phi(\dot{k}')\|_{T_0} \leq C_T T_0 \|\dot{k} - \dot{k}'\|_{T_0}$$

$$\text{où} \quad C_T \equiv \left(\|\nabla \beta_1\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|\nabla \sigma_i^1\|_\infty \|\dot{h}^i\|_T \right) \lambda_T.$$

Il suffit alors de prendre $T_0 < 1/C_T$.

Remarque. – A $\dot{h}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a fait correspondre $\dot{k}$ de classe $\mathcal{C}^0$ tel que la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée. Comme k est de classe $\mathcal{C}^1$, $a_t^{k,x} = \sup_{s \leq t} [-(z_0 + k_s) \vee 0]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de même donc que $x^{k,x}$ puis que $\dot{k}$. Ainsi, la fonction k est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

Démontrons maintenant l'unicité des solutions du système $S_{\beta,\sigma,h,x}$, en supposant qu'il en existe deux notées $(x_., a_.)$ et $(x'_., a'_.)$. En reprenant (1.37), les mêmes techniques que ci-dessus montrent que pour $t \leq T_0 \leq T$:

$$\|y_. - y'_.\|_t \leq M_T \int_0^t \|x - x'\|_s (ds + da_s) + c_T (1 + t + tc) \|a - a'\|_{T_0}$$

Cette fois, les équations de réflexion donnent,

$$\|a_. - a'_.\|_t \leq \int_0^t \left(\|\nabla \beta_1\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|\nabla \sigma_i^1\|_\infty \|\dot{h}^i\|_T \right) \|x_. - x'_.\|_s \, ds$$

d'où : $\displaystyle \|z_. - z'_.\|_t \leq 2 \int_0^t \left(\|\nabla \beta_1\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|\nabla \sigma_1^1\|_\infty \|\dot{h}^i\|_T \right) \|x_. - x'_.\|_s \, ds$

En regroupant ces majorations, on obtient :

$$\forall t \leq T_0, \quad \|x_. - x'_.\|_t \leq K_T \int_0^t \|x_. - x'_.\|_s (ds + da_s)$$
$$+ c_T (1 + T + T C_T) K_T \int_0^t \|x_. - x'_.\|_s ds,$$

soit en appliquant le lemme de Gronwall, $\|x_. - x'_.\|_{T_0} \leq 0$. La solution est unique sur chaque intervalle de temps de longueur T_0, donc sur $[0; T]$.

B. Première inclusion pour le théorème du support.

THÉORÈME 2. – $\operatorname{supp} \mathbb{P}_x \subset \overline{\{(x_t^{H,x}, a_t^{H,x})_{0 \leq t \leq T};\ H \in \mathcal{C}^2 \textit{ par morceaux}\}}$.

Il suffit de mettre en évidence une suite (H_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux telle que pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x [\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon] = 0$$
$$(\text{où l'on note } x_.^n = x_.^{H_n, x},\ a_.^n = a_.^{H_n, x})$$

LEMME 1.2.4. – *On considère dans le demi-espace, le système :*

$$(1.38) \qquad \begin{cases} dz_t = b(x_t)\, dt + dB_t + da_t \\ dy_t = X_0(x_t)\, dt + X_1(x_t) \circ dw_t \\ \qquad + V_0(y_t)\, da_t + V_1(y_t) \circ dw_{a_t}^* \\ x_t = (z_t, y_t) \quad x_0 = x \in \overline{D} \quad D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^p \end{cases}$$

où, à la différence du I, l'équation donnant z_t contient un terme de dérive. Alors il existe une suite (H_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux telles que les solutions $(x_.^n, a_.^n)$ des systèmes déterministes associés vérifient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} [\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon] \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

Preuve. – Si l'on effectue une transformation de Girsanov avec

$$M_t^b = \exp - \int_0^t b(x_s)\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t b(x_s)^2\, ds, \qquad \mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = M_t^b\, \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t},$$

alors $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t b(x_s)\, ds$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, et, w et w^* restent aussi des $\mathbb{Q}$-mouvements browniens. Le système (1.38) s'écrit alors :

$$\begin{cases} dz_t = d\tilde{B}_t + da_t \\ dy_t = X_0(x_t)\, dt + X_1(x_t) \circ dw_t + V_0(y_t)\, da_t + V_1(y_t) \circ dw_{a_t}^* \end{cases}$$

Les résultats de la première partie (théorème 1), donnent l'existence de processus $(x^n_\cdot = (z^n_\cdot, y^n_\cdot), a^n_\cdot)$ et de fonctions $\tilde{H}^n_t = \left(\int_0^t \dot{\tilde{B}}^n_s\, ds, \int_0^t \dot{h}^n_s\, ds, \int_0^t \dot{\gamma}^n_s\, da^n_s\right)$ de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, tels que :

$$dz^n_t = \dot{\tilde{B}}^n_t\, dt + da^n_t$$

$$dy^n_t = [X_0(x^n_t) + X_1(x^n_t)\, \dot{h}^n_t]\, dt + [V_0(y^n_t) + V_1(y^n_t)\, \dot{\gamma}^n_t]\, da^n_t$$

(1.39) $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{Q}\left(\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon\right) = 0$

$\left(\text{la convergence a lieu dans } \mathbb{L}^2\right)$.

Posons $H^n_t = \left(\int_0^t [\dot{\tilde{B}}^n_s - b(x^n_s)]\, ds, \int_0^t \dot{h}^n_s\, ds, \int_0^t \dot{\gamma}^n_s\, da^n_s\right)$. L'unicité des solutions implique que $(z^n_\cdot, y^n_\cdot, a^n_\cdot)$ est la solution du système déterministe associé à $H^n_\cdot$.

Montrons la convergence en probabilité sous $\mathbb{P}$. Soit $\varepsilon > 0$; grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon\right] \\
&\quad \leq \mathbb{Q}\left[\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon\right]^{1/2} \mathbb{P}\left[1/M^b_T\right]^{1/2} \\
&\quad = \mathbb{Q}\left[\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon\right]^{1/2} \\
&\qquad \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[M^{-b}_T \times \exp \int_0^T b^2(x_s)\, ds\right]^{1/2} \\
&\quad \leq \exp\left(\frac{T}{2}\|b\|^2_\infty\right) \mathbb{Q}\left[\|x - x^n\|_T + \|a - a^n\|_T > \varepsilon\right]^{1/2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[M^{-b}_T\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Comme b est borné, (M^{-b}_t) est une martingale uniformément intégrable, de sorte que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M^{-b}_T) = 1$. Alors (1.39) permet de conclure. □

II. DEUXIÈME INCLUSION DANS LE CAS PARTICULIER DU DEMI-ESPACE

L'inclusion

$$\operatorname{supp}(\mathbb{P}_x) \supseteq \overline{\{(x^{H,x}_t, a^{H,x}_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ par morceaux})}$$

sera prouvée si pour tout H de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, on montre que pour $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}_x\left[\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T \leq \varepsilon\right] > 0$. Dans ce paragraphe, on étudie d'abord le cas particulier où $(x_., a_.)$ est la solution du système :

$$(2.1)\quad \begin{cases} dz_t = d(x_t)\,dt + dB_t + da_t & a_t = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s)\,da_s \\ dy_t = X_0(x_t)\,dt + X_1(x_t)\circ dw_t + V_0(y_t)\,da_t + V_1(y_t)\circ dw^*_{a_t} \\ x_t \ = (z_t, y_t) \qquad x_0 = (z_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \end{cases}$$

où B, w et w^* sont des mouvements browniens indépendants à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$.

Grâce à une transformation de Girsanov, on montre qu'il suffit de prouver

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad 0 = \lim_{\delta\downarrow 0} \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t f(x_s)\,dK_s\right\| \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta, \right.$$
$$\left. \|w\|_T \leq \delta, \quad \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$

(où α et $c_T(\varphi_0)$ sont des constantes à préciser ultérieurement), où K désigne l'un quelconque des processus $\int_0^t w^i_s \circ dw^j_s$, $\int_0^t w^{*i}_{a_s} \circ dw^{*j}_{a_s}$, $\int_0^t w^{*i}_{a_s} \circ dw^j_s$, $\int_0^t w^j_s \circ dw^{*i}_{a_s}$. Le premier est celui obtenu dans le cas classique; le second est du même type à un changement de temps près (*cf.* [9]). Les deux derniers processus sont nouveaux, et font apparaître le terme croisé $w^{*i}_{a_t} w^j_t$ à cause duquel on est obligé de conditionner différemment par rapport à w et à w^*. Les processus w^*_a et w nous obligent à travailler avec deux échelles de temps différentes et les propriétés d'intégrabilité du temps local $(\mathbb{E}(\exp a^p_T) < +\infty$ si et seulement si $0 < p < 2)$ fourniront la condition $\alpha\ \in]1; 2[$.

Soit $(x_t = (z_t, y_t), a_t)$ la solution du système de réflexion (2.1), et $(x^H_t = (z^H_t, y^H_t), a^H_t)$ celle du système déterministe associé :

$$(2.2)\quad \begin{cases} dz^H_t = [d(x^H_t) + \dot{b}_t]\,dt + da^H_t \qquad a^H_t = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x^H_s)\,da^H_s \\ dy^H_t = [X_0(x^H_t) + X_1(x^H_t)\,\dot{h}_t]\,dt + [V_0(y^H_t) + V_1(y^H_t)\,\dot{\gamma}_t]\,da^H_t \\ x^H_0 = (\varphi_0, \psi_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \qquad H = (b, h, \gamma) \in \mathcal{C}^2 \end{cases}$$

THÉORÈME 3 :

$$\operatorname{supp}(\mathbb{P}_x) \supset \overline{((x_t^{H,x},\, a_t^{H,x})_{0 \le t \le T};\ H \in \mathcal{C}^2 \text{ par morceaux})}$$

1. *Réduction du problème* :

Notons :

$$(2.3) \qquad \begin{cases} Z_t^B = \exp\left(\int_0^t \dot{b}_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \dot{b}_s^2\, ds\right) \\ Z_t^w = \exp\left(\int_0^t \langle \dot{h}_s,\, dw_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{h}_s\|^2\, ds\right) \\ Z_t^* = \exp\left(\int_0^t \langle \dot{\gamma}_{a_s^{-1}},\, dw_{a_s}^*\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{\gamma}_{a_s^{-1}}\|^2\, ds\right) \end{cases}$$

et $\mathbb{Q}$ la probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_T} = Z_T^B\, Z_T^w\, Z_{a_T}^*\, \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$. Sous $\mathbb{Q}$, $\tilde{B}_t = B_t - b_t$, $\tilde{w}_t = w_t - h_t$, $\tilde{w}_t^* = w_t^* - \int_0^t \dot{\gamma}_{a_s^{-1}}\, ds$ sont trois mouvements browniens indépendants (les crochets ne changent pas).

LEMME 2.1.1. – *Majoration de* $\|a - a^H\|_T$

$$\|a - a^H\|_T \le |z_0 - \varphi_0| + \|\tilde{B}\|_T + \|\nabla d\|_\infty \int_0^T \|x - x^H\|_t\, dt$$

Preuve. – La démonstration est calquée sur celle du lemme 1.0.4 car $(z_\cdot,\, a_\cdot)$ et $(z_\cdot^H,\, a_\cdot^H)$ sont obtenus comme solutions de problèmes de réflexion (*cf.* [6]) :

$$(2.4) \qquad a_t = \sup_{s \le t}\left(-\left(z_0 + \tilde{B}_s + b_s + \int_0^s d(x_u)\, du\right) \vee 0\right)$$

$$(2.5) \qquad a_t^H = \sup_{s \le t}\left(-\left(\varphi_0 + b_s + \int_0^s d(x_u^H)\, du\right) \vee 0\right).$$

Les caractères lipschitziens de d qui est de classe $\mathcal{C}_b^\infty$ et de l'application ξ de [9], p. 328, permettent de conclure. □

LEMME 2.1.2. – *Pour tout $T > 0$, il existe une constante $k_T(\varphi_0)$ ne dépendant que de T, de φ_0 et des coefficients, telle que* :

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} \|x - x^H\|_T \le & k_T(\varphi_0)\,(\|U'\|_T + \|U\|_T + \|x_0 - x_0^H\| \\ & + \|\tilde{B}\|_T) \exp[k_T(\varphi_0)\, a_T] \end{aligned}$$

où $U_t = \int_0^t X_1(x_s) \circ d\tilde{w}_s \;\; U'_t = \int_0^t V_1(y_s) \circ d\tilde{w}^*_{a_s}$.

Preuve. – Pour cela on va chercher une inégalité du type :

$$f(t) \le \lambda + \mu \int_0^t f(s)\, dg(s) \quad \text{où } f(t) = \|x - x^H\|_t.$$

Le lemme de Gronwall donnera alors $f(t) \le \lambda \exp \mu\, g(t)$.

1) *Majoration de* $\|z - z^H\|_T$. Soit $t \le T$. En utilisant le lemme 2.1.1, on a :

$$\|z - z^H\|_T \le 2\,|z_0 - \varphi_0| + 2\,\|\tilde{B}\|_T + 2\,\|\nabla d\|_\infty \int_0^T \|x - x^H\|_s\, ds.$$

2) *Majoration de* $\|y - y^H\|_T$. Soit $t \le T$. Posons :

$$U_t = \int_0^t X_1(x_s) \circ d\tilde{w}_s \qquad U'_t = \int_0^t V_1(y_s) \circ d\tilde{w}^*_{a_s}$$

$$H_T^{(1)} = \int_0^t ([X_0(x_s) - X_0(x_s^H)] + [X_1(x_s) - X_1(x_s^H)]\,\dot{h}_s)\, ds$$
$$+ \int_0^t ([V_0(y_s) - V_0(y_s^H)] + [V_1(y_s) - V_1(y_s^H)]\,\dot{\gamma}_s)\, da_s$$

$$H_t^{(2)} = \int_0^t [V_0(y_s^H) + V_1(y_s^H)\,\dot{\gamma}_s]\, d(a_s - a_s^H)$$

On a donc :

$$y_t - y_t^H = U_t + U'_t + H_t^{(1)} + H_t^{(2)} + y_0 - y_0^H. \tag{2.7}$$

$$\|H^{(1)}\|_T \le C_T(X_0, X_1, h) \int_0^T \|x - x^H\|_s\, ds$$
$$+ C_T(V_0, V_1, \gamma) \int_0^T \|y - y^H\|_s\, da_s$$

$$\|H^{(1)}\|_T \le C_T(X_0, X_1, h, \gamma, V_0, V_1) \int_0^T \|x - x^H\|_s\,(ds + da_s). \tag{2.8}$$

On pose $f(s, y) = V_0(y) + V_1(y)\,\dot{\gamma}_s$; f est donc de classe $\mathcal{C}_b^\infty$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^p$ et :

$$H_t^{(2)} = \int_0^t f(s, y_s^H)\, d(a_s - a_s^H).$$

Effectuons une intégration par parties sur $H_t^{(2)}$. En notant

$$(2.9) \qquad \begin{cases} \hat{X}_0(s,x) = X_0(x) + X_1(x)\,\dot{h}_s \\ \hat{V}_0(s,y) = V_0(y) + V_1(y)\,\dot{\gamma}_s \end{cases}.$$

On obtient :

$$H_t^{(2)} = (a_t - a_t^H)\, f(t, y_t^H) - \int_0^t (a_s - a_s^H)\, \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_s^H)\, ds$$
$$- \int_0^t (a_s - a_s^H)\, \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}_y}\, f(s, y_s^H) \,|\, \hat{X}_0(s, x_s^H)\rangle\, ds$$
$$- \int_0^t (a_s - a_s^H)\, \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}_y}\, f(s, y_s^H) \,|\, \hat{V}_0(s, y_s^H)\rangle\, da_s^H$$
$$\|H^{(2)}\|_T \leq C_T(X_0, X_1, V_0, V_1, h, \gamma)\, \|a - a^H\|_T\, (1 + a_T^H).$$

En reprenant l'expression (2.5) de a^H, on peut majorer ainsi a_T^H :

$$\|H^{(2)}\|_T \leq C_T(X_0, X_1, V_0, V_1, h, \gamma)\, \|a - a^H\|_T\, (1 + \varphi_0 + \|b\|_T + T\, \|d\|_\infty)$$

On posera : $c_T(\varphi_0) = 1 + \varphi_0 + \|b\|_T + T\,\|d\|_\infty$.

À l'aide du lemme 2.1.1, on obtient :

$$(2.10) \quad \|H^{(2)}\|_T \leq C_T(\varphi_0) \times \left(|z_0 - \varphi_0| + \|\tilde{B}\|_T + \|\nabla d\|_\infty \int_0^T \|x - x^H\|_t\, dt \right)$$

On réunit les inégalités (2.8) et (2.10) dans l'égalité (2.7) donnant $(y_t - y_t^H)$:

$$\|y - y^H\|_T \leq \|U'\|_T + \|U\|_T + C_T(\varphi_0)\, C_T \times \left(\|x_0 - x_0^H\| + \|\tilde{B}\|_T + \int_0^T \|x - x^H\|_t\, (dt + da_t) \right).$$

D'où le résultat pour $\|x - x^H\|_T$. $\square$

LEMME 2.1.3. – *Supposons que pour tout* $\varepsilon > 0$ *on ait* :

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{Q}\left(|z_0 - \varphi_0| > \varepsilon / \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\, \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\, \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right) = 0\,(a)$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{Q}\left(\|U \text{ ou } U'\|_T > \varepsilon / \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\, \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\, \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right) = 0\,(b)$$

Alors : $\forall \varepsilon \in]0, 1]$, $\mathbb{P}[\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\| < \varepsilon] > 0$.

Preuve. – 1) Sur l'ensemble $\{\|\tilde{B}\|_T \leq \delta\}$, on a, d'après (2.4) :

$$a_T \leq |z_0 - \varphi_0| + \varphi_0 + \delta + \|b\|_T + T\,\|d\|_\infty, \quad \text{soit si } \delta \leq 1,$$

$$(2.11) \quad \begin{cases} a_T \leq 1 + \varphi_0 + \|b\|_T + T\,\|d\|_\infty = c_T(\varphi_0) \\ \text{sur} \quad \{\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \varepsilon - \delta\} \quad (\text{avec } \varepsilon \leq 1). \end{cases}$$

2) $Z_T^B\, Z_T^w\, Z_{a_T}^*$ est borné sur

$$\Omega_\delta = \left(\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w_a^*\|_T \leq \delta^\alpha,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2}\right).$$

$$\int_0^t \dot{b}_s\, dB_s = \dot{b}_t\, B_t - \int_0^t B_s\, \ddot{b}_s\, ds \qquad \text{où} \quad B_t = \tilde{B}_t + b_t$$

$$\int_0^t \langle \dot{h}_s,\, dw_s\rangle = \langle \dot{h}_t,\, w_t\rangle - \int_0^t \langle w_s,\, \ddot{h}_s\rangle\, ds \qquad w_t = \tilde{w}_t + h_t$$

$$\int_0^{a_t} \langle \dot{\gamma}_{a_s^{-1}},\, dw_s^*\rangle = \int_0^t \langle \dot{\gamma}_s,\, dw_{a_s}^*\rangle = \langle \dot{\gamma}_t,\, w_{a_t}^*\rangle - \int_0^t \langle w_{a_s}^*,\, \ddot{\gamma}_s\rangle\, ds$$

$$\text{où} \quad w_t^* = \tilde{w}_t^* + \int_0^t \dot{\gamma}_{a_s^{-1}}\, ds$$

Cette écriture permet d'obtenir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} Z_T^B\, Z_T^w\, Z_{a_T}^*\, \mathbf{1}_{\Omega_\delta} \leq \exp\,[&(\delta + \|b\|_T)\,(\|\dot{b}\|_T + T\,\|\ddot{b}\|_T) \\ &+ (\delta + \|h\|_T)\,(\|\dot{h}\|_T + T\,\|\ddot{h}\|_T) \\ &+ (\delta^\alpha + \|\dot{\gamma}\|_T\, c_T(\varphi_0))\,(\|\dot{\gamma}\|_T + T\,\|\ddot{\gamma}\|_T)]. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_T(b, h, \gamma; \varphi_0)$ telle que :

$$(2.12) \qquad \forall \delta \in]0; 1], \quad Z_T^B\, Z_T^w\, Z_{a_T}^*\, \mathbf{1}_{\Omega_\delta} \leq C_T(b, h, \gamma; \varphi_0)^{-1}\, \mathbf{1}_{\Omega_\delta}.$$

On peut d'ailleurs montrer une minoration du même type, ce qui donne l'équivalence des hypothèses du lemme 2.1.3 et du théorème 3.

3) Minoration de $\mathbb{P}[\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon]$. On suppose que $0 < \delta < \varepsilon \leq 1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\,[\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon] \\
&\quad \geq \mathbb{P}\,[\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon,\ |z_0 - \varphi_0| < \varepsilon - \delta, \\
&\qquad \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}_a^*\|_T \leq \delta^\alpha] \\
&\quad = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{Z_T^B\, Z_T^w\, Z_{a_T}^*}\,\mathbf{1}_{\Omega_\delta},\ \|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon\right) \\
&\quad \geq C_T\,(b,\ \gamma,\ h;\ \varphi_0) \\
&\qquad \times \mathbb{Q}\,[\mathbf{1}_{\Omega_\delta},\ \|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon] \quad \text{d'après (2.16)} \\
&\quad \geq C_T\,(b,\ \gamma,\ h;\ \varphi_0) \\
&\qquad \times\ \mathbb{Q}\,[\mathbf{1}_{\Omega_\delta},\ \|x - x^H\|_T\,(1 + T\,\|\nabla d\|_\infty) \\
&\qquad + |z_0 - \varphi_0| + \|\tilde{B}\|_T < \varepsilon] \quad \text{d'après le lemme 2.1.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq C_T\,(b,\ \gamma,\ h;\ \varphi_0) \\
&\quad \times\ \mathbb{Q}\begin{bmatrix} \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}_a^*\|_T \leq \delta^\alpha,\ a_T \leq c_T\,(\varphi_0) \\ \|x - x^H\|_T\,(1 + T\,\|\nabla\, d\|_\infty) + |z_0 - \varphi_0| < \varepsilon - \delta \end{bmatrix} \\
&\quad \text{d'après (2.11)} \\
&\geq C_T\,(b,\ \gamma,\ h;\ \varphi_0) \\
&\quad \times\ \mathbb{Q}\begin{bmatrix} \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T\,(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha,\ a_T \leq c_T\,(\varphi_0) \\ |z_0 - \varphi_0| + (1 + T\,\|\nabla\, d\|_\infty)\,e^{c_T\,(\varphi_0)\,k_T\,(\varphi_0)}\,k_T\,(\varphi_0) \\ \times\{\|U\|_T + \|U'\|_T + |z_0 - \varphi_0| + \delta\} < \varepsilon - \delta \end{bmatrix} \\
&\quad \text{d'après le lemme 2.1.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_T\,(b,\ \gamma,\ h;\ \varphi_0)\,\mathbb{Q}\,(\|\tilde{B}\|^T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|^T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T\,(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha) \\
&\times \mathbb{Q}\,(|z_0 - \varphi_0| + \overline{k}_T\,(\varphi_0)\,(\delta + \|U\|_T + \|U'\|_T + |z_0 - \varphi_0|) < \varepsilon - \delta \\
&\qquad /\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{c_T\,(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha)
\end{aligned}$$

avec
$$\alpha_T\,(\varphi_0) = \sup\,(1,\ \overline{k}_T\,(\varphi_0))$$
et
$$\overline{k}_T\,(\varphi_0) = k_T\,(\varphi_0)\,(1 + T\,\|\nabla\, d\|_\infty)\,\exp\,(c_T\,(\varphi_0)\,k_T\,(\varphi_0))$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(1 - \mathbb{Q}\left(\delta + \|U\|_T + \|U'\|_T + |z_0 - \varphi_0| > \frac{\varepsilon - \delta}{\alpha_T\,(\varphi_0)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. /\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{c_T\,(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right)\right) \\
&\quad \times C_T\,(b,\ \gamma,\ h;\ \varphi_0) \times \mathbb{Q}\,(\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{c_T\,(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha)
\end{aligned}$$

Pour δ assez petit on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon\right] \\
&\quad \geq \Bigg\{1 - \mathbb{Q}\left[|z_0 - \varphi_0| > \frac{\varepsilon}{2\,\alpha_T(\varphi_0)} / \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\right. \\
&\qquad\qquad \left. \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] \\
&\qquad - \mathbb{Q}\left[\|U\|_T + \|U'\|_T > \frac{\varepsilon}{2\,\alpha_T(\varphi_0)} / \|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\right. \\
&\qquad \left. \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]\Bigg\} \\
&\qquad \times C_T(b,\, \gamma,\, h;\, \varphi_0) \times \mathbb{Q}\left[\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]
\end{aligned}$$

Par hypothèse le membre de droite est strictement positif pour δ assez petit. On obtient alors le résultat souhaité à l'aide du lemme qui suit. □

L'indépendance sous $\mathbb{Q}$, des mouvements browniens $\tilde{B}$, $\tilde{w}$ et $\tilde{w}^*$ entraîne :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}\left(\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right) \\
&\quad = \mathbb{Q}\left(\|\tilde{B}\|_T \leq \delta\right) \mathbb{Q}\left(\|\tilde{w}\|_T \leq \delta\right) \mathbb{Q}\left(\|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right) \\
&\quad \overset{\delta \downarrow 0}{\sim} k_1 \exp - \left(T\,k_2\,\delta^{-2} + k_3\,c_T(\varphi_0)\,\delta^{-2\,\alpha}\right)
\end{aligned}$$

en vertu du lemme suivant ([10], chap. VI, lemme 8.1, p. 432). Cette quantité est alors strictement positive pour δ assez petit.

LEMME 2.1.4. – *Soit W un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Alors il existe des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que :*

$$\mathbb{Q}\left[\|W\|_T \leq \delta\right] \overset{\delta \downarrow 0}{\sim} c_1 \exp\, - T\, c_2\, \delta^{-2}$$

Nous avons ramené le problème à l'étude des processus $U_t^{(1)} = \int_0^t X_1(x_s) \circ d\tilde{w}_s$ et $U_t^{(2)} = \int_0^t V_1(y_s) \circ d\tilde{w}^*_{a_s}$, c'est-à-dire à celle de $\int_0^t f(x_s) \circ d\tilde{w}_s^i$ et de $\int_0^t f(y_s) \circ d\tilde{w}_{a_s}^{*i}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^k;\, \mathbb{R})$ $(k = p,\, p+1)$, car les coordonnées de $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ sont sommes de termes de ces types. Pour simplifier, on note désormais B, w, w^*, au lieu de $\tilde{B}$, $\tilde{w}$, $\tilde{w}^*$, et $\mathbb{P}$ au lieu de $\mathbb{Q}$. On suppose donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P} \left[|z_0 - \varphi_0| > \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta, \right.$$
$$\left. \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right] = 0.$$

Alors :

$$\begin{cases} dz_t = dB_t + \dot{b}_t\, dt + d(x_t)\, dt + da_t \\ dy_t = \hat{X}_0(t,\, x_t)\, dt + X_1(x_t) \circ dw_t + \hat{V}_0(t,\, y_t)\, da_t + V_1(y_t) \circ dw_{a_t} \end{cases}$$

où B, w, w^* sont des $\mathbb{P}$-mouvements browniens indépendants.

Posons :

$$\hat{d}(t,\, x) = \dot{b}_t + d(x) \tag{2.13}$$

Avec les notations (2.9) et (2.13) :

$$\begin{cases} dz_t^H = \hat{d}(t,\, x_t^H)\, dt + da_t^H \\ dy_t^H = \hat{X}_0(t,\, x_t^H)\, dt + \hat{V}_0(t,\, y_t^H)\, da_t^H \end{cases}$$

THÉORÈME 2.1.5. – *On suppose que* : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}\left(|z_0 - \varphi_0| \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta, \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right) = 0.$$

Soient $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1}; \mathbb{R})$ *et* $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$. *Il existe des processus* $U^{(1)}$ *et* $U^{(2)}$ *vérifiant* : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}(\|U^{(j)}\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,$ $\|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha) = 0$, *et tels que* :

$$\int_0^t f(x_s) \circ dw_s^i = U_t^{(1)} - \int_0^t w_s^i \frac{\partial f}{\partial z}(x_s)\, dB_s$$
$$- \int_0^t w_s^i \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}_y}\, f(x_s) | X_1(x_s) \circ dw_s + V_1(y_s) \circ dw_{a_s}^* \rangle$$

$$\int_0^t g(y_s) \circ dw_{a_s}^{*i}$$
$$= U_t^{(2)} - \int_0^t w_{a_s}^{*i} \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(y_s) | X_1(x_s) \circ dw_s + V_1(y_s) \circ dw_{a_s}^* \rangle$$

Preuve. – On effectue une intégration par parties sur chacun des deux termes étudiés. On obtient alors les majorations suivantes :

$$\|U^{(1)}\|_T \leq C_T(1 + a_T)\, \|w\|_T, \quad \text{et} \quad \|U^{(2)}\|_T \leq C_T(1 + a_T)\, \|w_a^*\|_T,$$

qui permettent d'obtenir le résultat. □

2. *Cas du demi-espace (fin).*

Le lemme 2.1.5 précédent montre qu'il suffit de prouver que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}_b^\infty$, et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}\left(\left\| \int_0^\cdot f(x_s)\, dK_s \right\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta, \right.$$
$$\left. \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right) = 0$$

où K désigne l'un quelconque des processus suivants :

$$(2.14)\qquad \begin{cases} \xi_t^{ij} = \displaystyle\int_0^t w_s^i \circ dw_s^j \\ \quad \text{(y compris pour } j = 0 \text{ si on note } B = w^0) \\ \qquad\qquad \text{voir les lemmes 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4.} \\ \zeta_t^{ij} = \displaystyle\int_0^t w_{a_s}^{*i} \circ dw_{a_s}^{*j} \quad cf. \text{ les lemmes 2.2.5 et 2.2.6.} \\ \lambda_t^{ij} = \displaystyle\int_0^t w_{a_s}^{*i} \circ dw_s^j \quad cf. \text{ les lemmes 2.2.7 et 2.2.8.} \\ \mu_t^{ij} = \displaystyle\int_0^t w_s^j \circ dw_{a_s}^{*j} \quad cf. \text{ les lemmes 2.2.7 et 2.2.9.} \end{cases}$$

La partie suivante va donc être consacrée à l'obtention de ce résultat. Assez technique, elle repose sur le théorème suivant dû à Knight ([10], chap. II, théorème 7.3, p. 86) :

THÉORÈME. – *Soient $M^1, \ldots, M^d$, des martingales locales de carré intégrable telles que $\forall\, i \neq j$ $\langle M^i, M^j \rangle = 0$ et $\lim\limits_{t \nearrow +\infty} \langle M^i, M^j \rangle_t = +\infty$.*

Soit $\tau_t^i = \inf\{s, \langle M^i \rangle_s > t\}$ $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Alors, si $\mathcal{W}_t^i = M_{\tau_t^i}^i$, $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^1, \ldots, \mathcal{W}^d)$ est un mouvement brownien d-dimensionnel.

Rappel : Soit W un mouvement brownien réel :

$$(2.15)\qquad \mathbb{P}\left[\|W\|_T \geq a\right] \leq \frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}\, a} \exp - \frac{a^2}{2T}.$$

LEMME 2.2.1. – *Soit $\theta_t^{ij} = \displaystyle\int_0^t W_s^i \circ dW_s^j$ où W est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^k$.*

1) *si* $i = j$, $\mathbb{P}(\|\theta^{ii}\|_T \geq \varepsilon / \|W\|_T \leq \delta) = 0$ *pour* δ *assez petit.*

2) *si* $i \neq j\,(M > 1/4)$

$$\sup_{\delta \in]0;\,1]} \mathbb{P}(\|\theta^{ij}\|_T \geq M\,\delta / \|W\|_T \leq \delta) \leq \sqrt{\frac{2\,T}{\pi}}\,\frac{1}{M - 1/4}\,e^{-2\,(M-1/4)^2/T}$$

et

$$\forall \delta \in]0;\,(1 \wedge 4\,\varepsilon)[,\quad \mathbb{P}(\|\theta^{ij}\|_T \geq \varepsilon / \|W\|_T \leq \delta) \leq \sqrt{\frac{2\,T}{\pi}}\,\frac{1}{\varepsilon/\delta - 1/4}\,e^{-2\,(\varepsilon/\delta - 1/4)^2/T}.$$

Preuve. – [10], chapitre VI, lemme 8.2 et corollaire p. 433, 434. □

Étude du terme classique. – On appelle ainsi le terme $\int_0^t f(x_s)\,d\xi_s^{ij}$ car il est de la forme de ceux qui apparaissent dans le cas sans bord. Néanmoins, nous étudions ce terme car x_s contient des informations dues au temps local et aux martingales du bord.

Nous dirons que le processus R_t vérifie la propriété $\mathcal{M}(\beta)$ pour $\beta > 0$, ssi: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall T > 0$, $\exists\, k_i(T,\,\varphi_0) > 0$ $(i = 1, 2)$, $\exists\, \delta_0 > 0$, $\forall\, \delta \in]0;\,\delta_0]$,

$$\mathbb{P}\left[\|R\|_T \geq \varepsilon,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] \leq k_1(T,\,\varphi_0)\exp(-k_2(T,\,\varphi_0)\,\delta^{-\beta})$$

En outre, la propriété sera dite forte si les constantes $k_i(T,\,\varphi_0)$ ne dépendent pas du point initial φ_0.

LEMME 2.2.2. – *Soit* $f \in C_b^\infty$. *Il existe des fonctions bornées de classe* C_b^∞, $(g_p)_{p \geq 0}$ *et* $(h_q)_{q \geq 1}$, *et un processus* $F^{(1)}$ *vérifiant la propriété* $\mathcal{M}(2)$ *tels que :*

$$\int_0^t f(x_s)\,d\xi_s^{ij} = F_t^{(1)} + \int_0^t g_0(x_s)\,\xi_s^{ij}\,dB_s + \sum_{p \geq 1} \int_0^t g_p(x_s)\,\xi_s^{ij}\,dw_s^p + \sum_{q \geq 1} \int_0^t h_q(x_s)\,\xi_s^{ij}\,dw_{a_s}^{*q}$$

Preuve. – Pour la preuve de ce lemme et du suivant, nous renvoyons à [13]. Les outils employés sont l'intégration par parties et les lemmes 2.2.2 et 2.2.1. □

LEMME 2.2.3. – *Soient f et g des fonctions de classe* $\mathcal{C}_b^\infty$.

Alors, $\int_0^t f(x_s)\,\xi_s^{ij}\,dw_s^p$ *et* $\int_0^t g(x_s)\,\xi_s^{ij}\,dw_{a_s}^{*q}$ *sont sommes d'un nombre fini de termes du type* $\int_0^t h(x_s)\,\xi_s^{ij}\,w_s^p\,dw_s^r$, $\int_0^t h(x_s)\,\xi_s^{ij}\,w_s^p\,dw_{a_s}^{*k}$, $\int_0^t h(x_s)\,w_s^p\,w_s^i\,dw_s^j$, $\int_0^t h(x_s)\,\xi_s^{ij}\,w_{a_s}^{*q}\,dw_{a_s}^{*k}$ *ou* $\int_0^t h(x_s)\,w_{a_s}^{*q}\,w_s^i\,dw_s^j$, *où les fonctions h sont bornées de classe* $\mathcal{C}_b^\infty$ *(car elles ne font intervenir que f, g et leurs dérivées premières et secondes), et d'un processus* K_t *qui vérifie la propriété* $\mathcal{M}(2)$.

Pour conclure sur l'étude du terme classique, il reste à prouver le lemme qui suit (les majorations exponentielles obtenues [13] font apparaître la condition $\alpha < 2$) :

LEMME 2.2.4. – *Tout processus de l'un des types suivants, où f est une fonction de classe* $\mathcal{C}_b^\infty$, *vérifie une propriété* $\mathcal{M}(\gamma)$, *éventuellement forte* :

$$\int_0^t \xi_s^{ij}\,w_s^p\,f(x_s)\,dw_s^r,\qquad \int_0^t \xi_s^{ij}\,w_s^p\,f(x_s)\,dw_{a_s}^{*k},\qquad \int_0^t w_s^i\,w_s^p\,f(x_s)\,dw_s^j,$$

$$\int_0^t \xi_s^{ij}\,w_{a_s}^{*k}\,f(x_s)\,dw_s^r,\qquad \int_0^t \xi_s^{ij}\,w_{a_s}^{*k}\,f(x_s)\,dw_{a_s}^{*q},\qquad \int_0^t w_s^i\,w_{a_s}^{*k}\,f(x_s)\,dw_s^j.$$

Conséquence. – Supposons alors que :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall T>0,$$
$$\lim_{\delta\to 0}\mathbb{P}\left[|z_0-\varphi_0|\geq\varepsilon/\|B\|_T\leq\delta,\ \|w\|_T\leq\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\leq\delta^\alpha\right]=0.$$

Si S désigne l'un quelconque des processus intervenant au lemme 2.2.4 :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall T>0,$$
$$\lim_{\delta\to 0}\mathbb{P}\left[\|S\|_T\geq\varepsilon/\|B\|_T\leq\delta,\ \|w\|_T\leq\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\leq\delta^\alpha\right]=0.$$

Preuve du lemme 2.2.4. – On écrit chaque terme comme un mouvement brownien changé de temps à l'aide du théorème de Knight, et si besoin est, on découpe en trois ensembles :

$\left\{|z_0 - \varphi_0| \geq \frac{1}{2}\right\}$: on utilise l'hypothèse;

$\{\|\xi^{ij}\|_T \geq M\,\delta\}$: on sait conclure à l'aide du lemme 2.2.1;

$\left\{|z_0 - \varphi_0| \geq \frac{1}{2},\ \|\xi^{ij}\|_T \leq M\,\delta\right\}$: pour δ assez petit, on peut contrôler le temps local a_T [par $c_T(\varphi_0)$], ainsi que le crochet du processus; un choix judicieux de M permet de conclure.

Traitons par exemple le cas où $S_t = \int_0^t \xi_s^{ij}\, w_s^p\, f(x_s)\, dw_{a_s}^{*k}$, qui met en évidence les contraintes sur α ($\alpha < 2$).

$$\langle S \rangle_t = \int_0^t (\xi_s^{ij}\, w_s^p\, f(x_s))^2\, da_s \leq a_T\, \|f\|_\infty^2\, \|w\|_T^2\, \|\xi^{ij}\|_T^2 \qquad \forall\, t \leq T$$

D'après le théorème de Knight, il existe un mouvement brownien $\mathcal{W}$ indépendant de w ($\langle S,\, w\rangle_t = 0$) tel que $S_t = \mathcal{W}_{\langle S \rangle_t}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\|S\|_T \geq \varepsilon,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] \\
&\quad \leq \mathbb{P}\left[\|\xi^{ij}\|_T \geq M\,\delta / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] \\
&\qquad + \mathbb{P}\Bigg[|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2},\ \|\xi^{ij}\|_T \leq M\,\delta,\ \|\mathcal{W}_{\langle S \rangle}\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta, \\
&\qquad\qquad \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\Bigg] \\
&\quad \leq \mathbb{P}\left[\|\xi^{ij}\|_T \geq M\,\delta / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] \\
&\qquad + \mathbb{P}\left[\|\mathcal{W}\|_{C_T(\varphi_0)\, \|f\|_\infty^2\, M^2 \delta^4} \geq \varepsilon\right] \\
&\qquad .\ \mathbb{P}\left[\|B\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]^{-1}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.1.4 et le rappel (2.15)

$$\begin{aligned}
&\quad \leq \mathbb{P}\left[\|\xi^{ij}\|_T \geq M\,\delta / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] \\
&\qquad + k_1(T;\ \varphi_0)\, M\, \delta^2\, \varepsilon^{-1} \exp\left(-\varepsilon^2\, k_2(T;\ \varphi_0)\, M^{-2}\, \delta^{-4}\right) \\
&\qquad \times \exp\left(k\, T\, \delta^{-2}\right) \exp\left(k_3(T;\ \varphi_0)\, \delta^{-2\,\alpha}\right)
\end{aligned}$$

On choisit alors $M = \delta^{-\beta}$ où $\beta \in\,]0;\, 2 - \alpha[$; M tend vers l'infini quand δ tend vers zéro. Il en est de même du premier terme de gauche grâce au lemme 2.2.1. □

Conséquence. – On réunit les résultats des lemmes 2.2.2, 2.2.3, et 2.2.4. On a :

$$(2.16) \qquad \forall f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1};\mathbb{R}), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0,$$
$$\exists k_i(T, \varphi_0) > 0 \,(i = 1, 2), \quad \exists \delta_0 > 0, \quad \forall \delta \in]0; \delta_0],$$
$$\mathbb{P}\left[\left\| \int_0^\cdot f(x_s)\, d\xi_s^{ij} \right\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq C\,\mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \geq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$+ k_1(T, \varphi_0) \exp(-k_2(T, \varphi_0)\, \delta^{-1})$$

Étudions maintenant le terme $\int_0^t f(x_s)\, d\zeta_s^{ij}$ [*cf.* (2.14)] qui ressemble beaucoup au précédent, car : $\zeta_t^{ij} = \int_0^t w_{a_s}^{*i} \circ dw_{a_s}^{*j} = \int_0^{a_t} w_s^{*i} \circ dw_s^{*j}$. Il faut donc commencer par l'analogue du lemme 2.2.1 pour ζ^{ij}.

LEMME 2.2.5. – 1) *Si* $i = j$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall \delta \in]0; \delta_0]$,

$$\mathbb{P}\left[\|\zeta^{ii}\|_T \geq \varepsilon,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\right.$$
$$\left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right] = 0.$$

2) *si* $i \neq j$:

$$\sup_{\delta \in]0;1/2]} \mathbb{P}\left[\|\zeta^{ij}\|_T \geq M\,\delta^\alpha,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\right.$$
$$\left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq k_1(T, \varphi_0)\, M^{-1} \exp - k_2(T, \varphi_0)\, M^2$$

et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall \delta \in]0; \delta_0]$,

$$\mathbb{P}\left[\|\zeta^{ij}\|_T \geq \varepsilon, |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq k_0(T, \varphi_0)\, \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon^2\, k_1(T, \varphi_0)\, \delta^{-2\alpha})$$

Preuve. – On utilise le lemme 2.2.1 appliqué au mouvement brownien w^*. De plus, pour $\delta \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$, on sait que sur l'ensemble $\left\{|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2}\right\}$, le temps local vérifie : $a_T \leq c_T(\varphi_0)$ [*cf.* (2.4)]. Démontrons par exemple la deuxième inégalité :

$$\mathbb{P}\left[\|\zeta^{ij}\|_T \geq M\,\delta^\alpha,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\right.$$

$$\left.\|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$

$$\leq \mathbb{P}\left[\left\|\int_0^\cdot w_s^{*i} \circ dw_s^{*j}\right\|_{C_T(\varphi_0)} \geq M\,\delta^\alpha / \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$

par indépendance de w, w^*, et B. Le lemme 2.2.1 donne alors le résultat. □

LEMME 2.2.6. – *Soient f, g et h dans $C_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1}; \mathbb{R})$.*

$$(1)\quad \int_0^t f(x_s)\,d\zeta_s^{ij} = R_t^{(1)} - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(x_s)\,\zeta_s^{ij}\,dB_s$$

$$- \int_0^t \zeta_s^{ij}\langle \overrightarrow{\operatorname{grad}_y}\ f(x_s)|X_1(x_s)\,dw_s + V_1(y_s)\,dw_{a_s}^*\rangle$$

où $R^{(1)}$ vérifie la propriété $\mathcal{M}(2\,\alpha)$.

2) *Il existe un processus $R^{(2)}$ vérifiant la propriété $\mathcal{M}(2\,\alpha)$, et des fonctions de classe C_b^∞ notées $(G_q)_{q\geq 1}$ et $(H_r)_{r\geq 0}$ tels que :*

$$\int_0^t g(x_s)\,\zeta_s^{ij}\,dw_s^k = R_t^{(2)} + \sum_{q\geq 1}\int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_s^k\,G_q(x_s)\,dw_{a_s}^{*q}$$

$$+ \sum_{r\geq 0}\int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_s^k\,H_r(x_s)\,dw_s^r$$

$$- \int_0^t \zeta_s^{ij}\,g(x_s)\,dw_s^k - \int_0^t w_s^k\,w_{a_s}^{*i}\,g(x_s)\,dw_{a_s}^{*j}$$

3) *Tout processus de l'un des types suivants vérifie la propriété $\mathcal{M}(\alpha - 1)$, ce qui justifie la condition $\alpha > 1$:*

$$\int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_s^k\,h(x_s)\,dw_{a_s}^{*q}, \qquad \int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_s^k\,h(x_s)\,dw_s^r\ (r \geq 0),$$

$$\int_0^t w_s^k\,w_{a_s}^{*i}\,h(x_s)\,dw_{a_s}^{*j}, \qquad \int_0^t \zeta_s^{ij}\,h(x_s)\,dw_s^k.$$

4) *Il existe des fonctions de classe* $\mathcal{C}_b^\infty$ *notées* $(g_r)_{r\geq 0}$ *et* $(h_1)_{1\geq 1}$, *et un processus* $R^{(3)}$ *vérifiant la propriété* $\mathcal{M}(2\,\alpha)$, *tels que* :

$$\int_0^t g(x_s)\,\zeta_s^{ij}\,dw_{a_s}^{*k} = R_t^{(3)} + \sum_{l\geq 1}\int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_{a_s}^{*k}\,h_l(x_s)\,dw_{a_q}^{*l}$$
$$+\sum_{r\geq 0}\int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_{a_s}^{*k}\,g_r(x_s)\,dw_s^r - \int_0^t w_{a_s}^{*k}\,w_{a_s}^{*i}\,g(x_s)\,dw_{a_s}^{*j}$$

5) *Tout processus de l'un des types suivants vérifie la propriété* $\mathcal{M}(\alpha)$:

$$\int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_{a_s}^{*k}\,g(x_s)\,dw_s^q\,(q\geq 0),\qquad \int_0^t \zeta_s^{ij}\,w_{a_s}^{*k}\,g(x_s)\,dw_{a_s}^{*q},$$
$$\int_0^t w_{a_s}^{*i}\,w_{a_s}^{*k}\,g(x_s)\,dw_{a_s}^{*j}.$$

Conséquence :

$$\tag{2.17} \forall f\in\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1};\mathbb{R}),\quad \forall\varepsilon>0,\quad \forall T>0,$$
$$\exists\,k_i(T,\varphi_0)>0\quad(i=1,2),\quad \exists\,\delta_0>0,\quad \forall\delta\in]0;\delta_0],$$
$$\mathbb{P}\left[\left\|\int_0^\cdot f(x_s)\,d\zeta_s^{ij}\right\|_T \geq \varepsilon/\|B\|_T\leq\delta,\right.$$
$$\left.\|w\|_T\leq\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\leq\delta^\alpha\right]$$
$$\leq\mathbb{P}\left[|z_0-\varphi_0|\geq\frac{1}{2}\Big/\ \|B\|_T\leq\delta,\right.$$
$$\left.\|w\|_T\leq\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\leq\delta^\alpha\right]$$
$$+k_1(T,\varphi_0)\exp\left(-k_2(T,\varphi_0)\,\delta^{1-\alpha}\right)$$

Preuve du lemme 2.2.6. – 1) On écrit la formule d'Itô pour $f(x_t)\,\zeta_t^{ij}$; la propriété de $R^{(1)}$ est donnée par une application du lemme 2.2.5.

2) Ici, on applique la formule d'Itô à $\zeta_t^{ij}\,w_t^k\,g(x_t)$.

3) On écrit chaque terme comme un mouvement brownien changé de temps à l'aide du théorème de Knight, et on procède comme au lemme 2.2.4. Traitons par exemple le cas de $D_t=\int_0^t h(x_s)\,\zeta_s^{ij}\,dw_s^k$, qui justifie cette fois

la contrainte $\alpha > 1$. Il existe donc un mouvement brownien V indépendant de w^* tel que $D_t = V_{\rho(t)}$, $\langle D, w^* \rangle_t = 0$, et $\rho(t) = \langle D, D \rangle_t$. Alors $\rho(t)$ est majoré par $\|h\|_\infty^2 \, \|\zeta^{ij}\|_t^2 \, t$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left\| \int_0^{\cdot} h(x_s)\, \zeta_s^{ij}\, dw_s^k \right\|_T \geq \varepsilon,\ |z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\right.\\
&\qquad \left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right]\\
&\quad \leq \mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2},\ \|\zeta^{i,j}\|_T \geq M\,\delta^\alpha / \|B\|_T \leq \delta, \right.\\
&\qquad\qquad \left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right]\\
&\qquad + \mathbb{P}\left[\|V\|_{T M^2 \delta^{2\alpha} \|h\|_\infty^2} \geq \varepsilon \right] \mathbb{P}\left[\|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta \right]^{-1}\\
&\quad \leq k_1(T)\, M^{-1} \exp(-k_2(T)\, M^2) + c_1(T)\, M\\
&\qquad \times \exp(-c_2(T)\, M^{-2}\, \delta^{-2\alpha}) \exp(c_3(T)\, \delta^{-2})
\end{aligned}$$

Avec $M = \delta^{-\beta}$ où $0 < \beta < \alpha - 1$, par exemple $\beta = \dfrac{\alpha - 1}{2}$, on peut majorer la quantité ci-dessus par : $k_0(T) \exp(-c_0(T)\, \delta^{1-\alpha})$.

4) On écrit la formule d'Itô pour $g(x_t)\, \zeta_t^{ij}\, w_{a_t}^{*k}$.

5) On procède comme au lemme 2.2.4. □

Maintenant, nous nous intéressons aux termes croisés [*cf.* (2.14)].

LEMME 2.2.7. – $\lambda_t^{ij} = \int_0^t w_{a_s}^{*i} \circ dw_s^j$, $\mu_t^{ij} = \int_0^t w_s^j \circ dw_{a_s}^{*i}$. *Fixons* $\alpha \in]1; 2[$, $\beta \in]0; \alpha - 1]$, $T > 0$, $\varepsilon > 0$.

1) $\exists M_0$, $\exists K$, $\forall \delta \in]0; 1/2]$,

$$(2.18)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq 1/2,\ \|\lambda^{ij}\|_T \geq M\,\delta^\beta / \|B\|_T \leq \delta, \right.\\
&\qquad \left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right] \leq \frac{K}{M} \exp\left(-\frac{M^2}{4T} \right)\\
&\mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq 1/2,\ \|\mu^{ij}\|_T \geq M\,\delta^\beta / \|B\|_T \leq \delta, \right.\\
&\qquad \left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right] \leq \frac{K}{M} \exp\left(-\frac{M^2}{16T} \right)
\end{aligned}\right.$$

2) $\exists K$, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall \delta \in]0; \delta_0]$,

$$(2.19)\quad \begin{cases} \mathbb{P}\,[|z_0-\varphi_0|\le 1/2,\ \|\lambda^{ij}\|_T\ge \varepsilon/\|B\|_T\le\delta, \\ \qquad \|w\|_T\le\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\le\delta^\alpha]\le \dfrac{K}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{4\,T\,\delta^{2\,\alpha}}\right) \\ \mathbb{P}\,[|z_0-\varphi_0|\le 1/2,\ \|\mu^{ij}\|_T\ge \varepsilon/\|B\|_T\le\delta, \\ \qquad \|w\|_T\le\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\le\delta^\alpha]\le \dfrac{K}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{16\,T\,\delta^{2\,\alpha}}\right) \end{cases}$$

Preuve. – 1) D'après le théorème de Knight, il existe un mouvement brownien V indépendant de w^* ($\langle\lambda^{ij};\,w^*\rangle_t=0$) tel que $\lambda_t^{ij}=V_{\langle\lambda^{ij}\rangle_t}$ et $\langle\lambda^{ij}\rangle_T\le T\,\|w_a^*\|_T^2$. Comme pour $\delta\le\dfrac{1}{2}$, le temps local vérifie $a_T\le c_T\,(\varphi_0)$ sur l'ensemble $\left\{|z_0-\varphi_0|\le\dfrac{1}{2},\ \|B\|_T\le\delta\right\}$ [*cf.* (2.11)], le lemme 2.1.4, (2.15) et l'indépendance de V et w^* donnent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|z_0-\varphi_0|\le\frac{1}{2},\ \|\lambda^{ij}\|_T\ge M\,\delta^\beta/\|B\|_T\le\delta,\ \|w\|_T\le\delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\le\delta^\alpha\right]&\\ \le \mathbb{P}\,[\|V\|_{T\,\delta^{2\,\alpha}}\ge M\,\delta^\beta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)}\le\delta^\alpha]&\\ \times\mathbb{P}\,[\|B\|_T\le\delta,\ \|w\|_T\le\delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)}\le\delta^\alpha]^{-1}&\\ \le c\,\frac{\sqrt{T}}{M}\,\delta^{\alpha-\beta}\exp\left(-\frac{M^2\,\delta^{2\,(\beta-\alpha)}}{2\,T}\right)\exp\frac{c\,T}{\delta^2}&\end{aligned}$$

Choisissons M tel que $M/2\ge 2\,T\,\sqrt{c}$. Alors, comme $\alpha-\beta-1\ge 0$, on a :

$$-c\,T+\frac{M^2}{2\,T\,\delta^{2\,(\alpha-\beta-1)}}\ge -c\,T+\frac{M^2}{2\,T}\ge\frac{M^2}{4\,T}\quad (0<\delta\le 1)$$

On majore alors par :

$$C\,\frac{\sqrt{T}}{M}\exp\left(-\frac{M^2}{4\,T\,\delta^2}\right)\le C'\,\frac{\sqrt{T}}{M}\exp\left(-\frac{M^2}{4\,T}\right)\qquad(\delta^2\le 1)$$

Pour montrer l'inégalité sur μ_t^{ij}, remarquons que : $\lambda_t^{ij}+\mu_t^{ij}=w_{a_t}^{*i}\,w_t^j$.

$$\mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2},\ \|\mu^{ij}\|_T \geq M\,\delta^\beta / \|B\|_T \leq \delta,\right.$$
$$\left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2},\ \|\lambda^{ij}\|_T \geq \frac{M\,\delta^\beta}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\right.$$
$$\left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$+\ \mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2},\ \|w_a^{*i}\, w^j\|_T \geq \frac{M\,\delta^\beta}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\right.$$
$$\left. \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq K\,\frac{\sqrt{T}}{M/2}\exp\left(-\frac{(M/2)^2}{4\,T\,\delta^2}\right)$$
$$+\ \mathbb{P}\left[\delta^{\alpha+1-\beta} \geq \frac{M}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$

Le membre de droite est nul pour M assez grand puisque $\alpha + 1 - \beta \geq 0$.

2) On reprend l'écriture de $\lambda_t^{ij} = V_{\langle\lambda^{ij}\rangle_t}$. Comme pour la démonstration de (2.18), on peut écrire :

$$\mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \leq \frac{1}{2},\ \|\lambda^{ij}\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[\|V\|_{T\,\delta^{2\alpha}} \geq \varepsilon,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\times \mathbb{P}\left[\|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]^{-1}$$
$$\leq C\,\frac{\sqrt{T}\,\delta^\alpha}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\,T\,\delta^{2\,\alpha}}\right)\exp\left(\frac{c\,T}{\delta^2}\right)$$
$$\leq \frac{c\,(T)}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\,T\,\delta^{2\,\alpha}}\right)$$

pour δ assez petit $(2\,\alpha > 2)$. On procède comme au 1) pour l'inégalité concernant μ^{ij}. □

LEMME 2.2.8. – *Soient f, g et h dans* $C_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1}; \mathbb{R})$, *et* $k \geq 0$ *(on note* $w^0 = B$*)* :

1) $$\int_0^t f(x_s)\, d\lambda_s^{ij} = K_t^{(1)} - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(x_s)\, \lambda_s^{ij}\, dB_s$$
$$- \int_0^t \lambda_s^{ij} \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}_y}\, f(x_s) | X_1(x_s)\, dw_s + V_1(y_s)\, dw^*_{a_s} \rangle$$

où $K^{(1)}$ vérifie la propriété $\mathcal{M}(2\alpha)$.

2) $$\int_0^t g(x_s)\, \lambda_s^{ij}\, dw_s^k$$
$$= K_t^{(2)} - \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}_y}\, g(x_s) | X_1(x_s)\, dw_s + V_1(y_s)\, dw^*_{a_s} \rangle$$
$$- \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k \frac{\partial g}{\partial z}(x_s)\, dB_s - \int_0^t w_s^k\, w^{*i}_{a_s}\, g(x_s)\, dw_s^j$$

où $K^{(2)}$ vérifie la propriété $\mathcal{M}(2\alpha)$.

3) *Les processus*

$$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k\, h(x_s)\, dw_s^p\ (k \geq 0,\ p \geq 0),$$

et

$$\int_0^t w_s^k\, w^{*i}_{a_s}\, h(x_s)\, dw_s^j\ (k \geq 0,\ j \geq 1)$$

vérifient une propriété $\mathcal{M}(\beta)$ forte, avec β quelconque dans $]0;\ \alpha - 1[$ pour le premier, et égal à $2(\alpha + 1)$ pour le second.

4) $$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k\, h(x_s)\, dw^{*p}_{a_s} = K_t^{(3)} - \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k\, w^{*p}_{a_s}$$
$$\times \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}_y}\, h(x_s) | X_1(x_s)\, dw_s + V_1(y_s)\, dw^*_{a_s} \rangle$$
$$- \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k\, w^{*p}_{a_s} \frac{\partial h}{\partial z}(x_s)\, dB_s - \int_0^t w^{*i}_{a_s}\, w_s^k\, w^{*p}_{a_s}\, h(x_s)\, dw_s^j$$
$$- \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w^{*p}_{a_s}\, h(x_s)\, dw_s^k$$

où $K^{(3)}$ vérifie la propriété $\mathcal{M}(2\alpha)$.

5) *Chacun des processus suivants vérifie la propriété* $\mathcal{M}(2(\alpha-1))$:

$$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k\, w_{a_s}^{*p}\, h(x_s)\, dw_s^q \; (p \geq 1,\ k \geq 0,\ q \geq 0),$$

$$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_s^k\, w_{a_s}^{*p}\, h(x_s)\, dw_{a_s}^{*q} \; (k \geq 0)$$

$$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_{a_s}^{*p}\, h(x_s)\, dw_s^k \; (k \geq 0),$$

$$\int_0^t w_{a_s}^{*i}\, w_s^k\, w_{a_s}^{*p}\, h(x_s)\, dw_s^j \; (k \geq 0,\ j \geq 1).$$

6) $$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, g(x_s)\, dw_{a_s}^{*k} = K_t^{(4)} - \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_{a_s}^{*k}$$
$$\times \langle \overrightarrow{\operatorname{grad}_y}\, g(x_s) | X_1(x_s) | X_1(x_s)\, dw_s + V_1(y_s)\, dw_{a_s}^* \rangle$$
$$- \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_{a_s}^{*k}\, \frac{\partial g}{\partial z}(x_s)\, dB_s - \int_0^t w_{a_s}^{*i}\, w_{a_s}^{*k}\, g(x_s)\, dw_s^j$$

où $K^{(4)}$ *vérifie la propriété* $\mathcal{M}(2\alpha)$.

7) *Chacun des processus suivants vérifie la propriété* $\mathcal{M}(\alpha-1)$:

$$\int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_{a_s}^{*k}\, g(x_s)\, dw_s^p \; (p \geq 0), \qquad \int_0^t \lambda_s^{ij}\, w_{a_s}^{*k}\, w_{a_s}^{*k}\, g(x_s)\, dw_{a_s}^{*p},$$
$$\int_0^t w_{a_s}^{*i}\, w_{a_s}^{*k}\, g(x_s)\, dw_s^j.$$

Conséquence :

(2.20) $$\forall f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1};\mathbb{R}), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0,$$
$$\exists\, k_i(T,\varphi_0) > 0 \quad (i=1,2), \quad \exists\, \delta_0 > 0, \quad \forall \delta \in]0;\delta_0],$$
$$\mathbb{P}\left[\left\| \int_0^\cdot f(x_s)\, d\lambda_s^{ij} \right\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \geq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$+ k_1(T,\varphi_0)\exp(-k_2(T,\varphi_0)\,\delta^{1-\alpha})$$

Preuve du lemme 2.2.8. – 1, 2, 4, 6 : On procède comme au lemme 2.2.3. On effectue une intégration par parties sur le terme étudié. On laisse de côté les intégrales stochastiques en dw, dw^* et dB. On regroupe les autres termes sous le nom de $H^{(n)}\,(1 \le n \le 4)$. On majore $H^{(n)}$ en tenant compte du fait que le temps local vérifie $a_T \le c_T(\varphi_0)$ sur l'ensemble $\left\{ |z_0 - \varphi_0| \le \frac{1}{2} \right\}$ si $\delta \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ (*cf.* (2.11)). La propriété cherchée pour $H^{(n)}$ découle alors du lemme 2.2.7 (*cf.* 2.19)).

3, 5, 7 : On procède comme au lemme 2.2.4. Grâce au théorème de Knight, on écrit chaque terme sous la forme d'un mouvement brownien changé de temps $V_{\rho(t)}$. On découpe en deux ensembles : sur $\left\{ \|\lambda^{ij}\|_T \ge M\,\delta^\beta,\ |z_0 - \varphi_0| \le \frac{1}{2} \right\}$, on effectue les majorations avec le lemme 2.2.7 (*cf.* (2.18)), et on choisit judicieusement M sous la forme $\delta^{-\gamma}\,(\gamma > 0)$; sur $\left\{ \|\lambda^{ij}\|_T \le M\,\delta^\beta, |z_0-\varphi_0| \le \frac{1}{2} \right\}$, on majore le processus croissant $\rho(t)$, et on termine à l'aide de (2.15) et du lemme 2.1.4. □

Il reste maintenant à étudier les termes relatifs au dernier terme croisé : $\mu_t^{ij} = \int_0^t w_s^j \circ dw_{a_s}^{*i}\ (i,\, j \ge 1)$. La preuve du lemme qui suit est analogue à celle du lemme 2.2.8, en remplaçant λ^{ij} par μ^{ij} (*cf.* [13]).

LEMME 2.2.9. – *Soient f et g dans $C_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1}; \mathbb{R})$, et $k \ge 0$:*

1)
$$\int_0^t f(x_s)\,d\mu_s^{ij} = Y_t^{(1)} - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(x_s)\,\mu_s^{ij}\,dB_s - \int_0^t \mu_s^{ij}\,\langle\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\ f(x_s) | X_1(x_s)\,dw_s + V_1(y_s)\,dw_{a_s}^*\,\rangle$$

où $Y^{(1)}$ vérifie la propriété $\mathcal{M}(2\,\alpha)$.

2)
$$\int_0^t g(x_s)\,\mu_s^{ij}\,dw_s^k = Y_t^{(2)} - \int_0^t \mu_s^{ij}\,w_s^k \times \langle\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\ g(x_s) | X_1(x_s)\,dw_s + V_1(y_s)\,dw_{a_s}^*\,\rangle - \int_0^t \mu_s^{ij}\,w_s^k\,\frac{\partial g}{\partial z}(x_s)\,dB_s - \int_0^t w_s^k\,w_s^j\,g(x_s)\,dw_{a_s}^{*i}$$

où $Y^{(2)}$ vérifie la propriété $\mathcal{M}(2\,\alpha)$.

3) *Chacun des processus du type suivant vérifie la propriété $\mathcal{M}(\alpha - 1)$:*

$$\int_0^t \mu_s^{ij}\,w_s^k\,g(x_s)\,dw_s^p \quad (k \ge 0,\ p \ge 0),$$

$$\int_0^t w_s^k\,w_s^j\,g(x_s)\,dw_{a_s}^{*i} \quad (k \ge 0,\ j \ge 1).$$

$$
\begin{aligned}
4)\quad U_t \equiv \int_0^t \mu_s^{ij}\, w_s^k\, g(x_s)\, dw_{a_s}^{*_p} = Y_t^{(3)} &- \int_0^t \mu_s^{ij}\, w_s^k\, w_{a_s}^{*_p} \frac{\partial g}{\partial z}(x_s)\, dB_s \\
&- \int_0^t w_s^k\, w_s^j\, w_{a_s}^{*_p}\, g(x)\, dw_{a_s}^{*_i} - \int_0^t \mu_s^{ij}\, w_s^k\, w_{a_s}^{*_p} \\
&\times \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\, g(x_s) | X_1(x_s)\, dw_s + V_1(y_s)\, dw_{a_s}^{*} \rangle \\
&- \int_0^t \mu_s^{ij}\, w_{a_s}^{*_p}\, g(x_s)\, dw_s^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_t &= \int_0^t \mu_s^{ij}\, g(x_s)\, dw_{a_s}^{*_k} \\
&= Y_t^{(4)} - \int_0^t w_s^j\, w_{a_s}^{*_k}\, g(x_x)\, dw_{a_s}^{*_i} - \int_0^t \mu_s^{ij}\, w_{a_s}^{*_k} \frac{\partial g}{\partial z}(x_x)\, dB_s \\
&- \int_0^t \mu_s^{ij}\, w_{a_s}^{*_k} \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\, g(x_s) | X_1(x_s)\, dw_s + V_1(y_s)\, dw_{a_s}^{*} \rangle
\end{aligned}
$$

L'étude des termes ci-dessus montre que U et V vérifient la propriété $\mathcal{M}(\alpha - 1)$.

Conséquence :

$$
(2.21)\qquad
\begin{gathered}
\forall f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1};\, \mathbb{R}), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0, \\
\exists k_i(T,\, \varphi_0) > 0\ (i = 1,\, 2), \quad \exists \delta_0 > 0, \quad \forall \delta \in]0;\, \delta_0],
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\left\| \int_0^{\cdot} f(x_s)\, d\mu_s^{ij} \right\|_T \geq \varepsilon / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right] \\
\leq \mathbb{P}\left[|z_0 - \varphi_0| \geq \frac{1}{2} / \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha \right] \\
+ k_1(T,\, \varphi_0) \exp(-k_2(T,\, \varphi_0)\, \delta^{1-\alpha})
\end{aligned}
$$

Conséquence. – Si l'on reprend (2.16), (2.17), (2.20) et (2.21), on a prouvé le résultat annoncé lors de la définition (2.14) des processus ξ^{ij}, ζ^{ij}, λ^{ij}, μ^{ij}. Plus précisément, si K désigne l'un quelconque de ces processus :

$$
\forall f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{p+1};\, \mathbb{R}), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0,
$$

$$
\exists k_i(T,\, \varphi_0) > 0\,(i = 1,\, 2), \quad \exists \delta_0 > 0, \quad \forall \delta \in]0;\, \delta_0],
$$

$$\mathbb{P}\left[\left\|\int_0^{\cdot} f(x_s)\,dK_s^{ij}\right\|_T \geq \varepsilon/\|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[|z_0-\varphi_0| \geq \frac{1}{2} \Big/ \|B\|_T \leq \delta,\ \|w\|_T \leq \delta,\ \|w^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha\right]$$
$$+ k_1(T,\varphi_0)\exp(-k_2(T,\varphi_0)\,\delta^{1-\alpha})$$

En fait, l'inégalité (2.6) sur $\|x-x^H\|_T$, et l'équivalence des probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ (*cf.* (2.3) pour la définition de $\mathbb{Q}$) montrent que l'on a prouvé :

PROPOSITION 2.2.10. – *Fixons H de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux. Si l'on suppose que :*

$$\forall\varepsilon>0,\quad \lim_{\delta\to 0}\mathbb{P}[\,|z_0-\varphi_0| > \varepsilon/\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,$$
$$\|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha] = 0.$$

Alors,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \lim_{\delta\to 0}\mathbb{P}[\,\|x-x^H\|_T + \|a-a^H\|_T > \varepsilon/\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,$$
$$\|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha] = 0.$$

Conséquence. – Ceci termine la preuve du théorème pour le cas particulier du demi-espace. En effet, puisque l'hypothèse sur les points de départ devient triviale avec $z_0=\varphi_0$ on obtient grâce à la proposition 2.2.10

$$\mathbb{P}[\,\|x-x^H\|_T + \|a-a^H\|_T < \varepsilon]$$
$$= 1-\mathbb{P}[\,\|x-x^H\|_T + \|a-a^H\|_T \geq \varepsilon,$$
$$\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha]$$
$$-\mathbb{P}[\,\|x-x^H\|_T + \|a-a^H\|_T \geq \varepsilon$$
$$\text{et non}\,(\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha)]$$
$$\geq -\mathbb{P}[\,\|x-x^H\|_T + \|a-a^H\|_T > \varepsilon,$$
$$\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha]$$
$$+\mathbb{P}[\,\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha]$$
$$= \{1-\mathbb{P}[\,\|x-x^H\|_T + \|a-a^H\|_T \geq \varepsilon/\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,$$
$$\|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{C_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha]\}$$
$$\times\,\mathbb{P}[\,\|\tilde{B}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}\|_T \leq \delta,\ \|\tilde{w}^*\|_{c_T(\varphi_0)} \leq \delta^\alpha]$$

Le terme entre accolades tend vers 1 d'après la proposition 2.2.10, alors que le second terme est strictement positif en vertu de (2.11) et de la conséquence du lemme 2.1.4. On a donc : $\mathbb{P}\,[\,\|x - x^H\|_T + \|a - a^H\|_T < \varepsilon] > 0$, ce qui prouve l'inclusion du théorème 3. □

III. CAS GÉNÉRAL

Soit D un ouvert régulier de $\mathbb{R}^{p+1}$, défini par $D = \{\, x \in \mathbb{R}^{p+1},\ \psi\,(x) > 0\,\}$ où ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}_b^\infty$ ($\partial D = \{\, x \in \mathbb{R}^{p+1};\ \psi\,(x) > 0\,\}$). On suppose que pour tout $x \in \partial D$, $|\nabla\,\psi\,(x)| = 1$, de sorte que $\nabla\,\psi\,(x) = \vec{n}\,(x)$ est la normale unitaire intérieure à la surface en $x \in \partial D$.

Considérons alors des champs de vecteurs β, σ_i, ν, μ_j définis sur $\mathbb{R}^{p+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{p+1}$, de classe $\mathcal{C}_b^\infty$, et posons :

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \sigma_i^2 + \beta, \qquad L = \frac{1}{2} \sum_j \mu_j^2 + \nu$$

(les carrés sont pris au sens de l'action des champs de vecteurs.)

On fait en outre les hypothèses suivantes :

(Hi) $\forall x \in \partial D$, $(\mu_j\,\psi)\,(x) = 0$ (*i.e.* $\langle\,\vec{\mu}_j,\ \vec{n}\,\rangle = 0$).

(Hii) $\forall x \in \partial D$, $(\nu\psi)\,(x) \geq c > 0$ (ν est transversal à ∂D).

(Hiii) $\forall x \in \partial D$, $\sum_i (\sigma_i\,\psi)^2\,(x) = \sum_i (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{n})^2\,(x) \geq c > 0$ (la frontière est uniformément non caractéristique).

Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. – *Il existe une unique solution au système :*

$$(3.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx_t = \beta\,(x_t)\,\mathbf{1}_D\,(x_t)\,dt + \mathbf{1}_D\,(x_t)\,\sigma_i\,(x_t) \circ dw_t^i \\ \qquad\quad + \mathbf{1}_{\partial D}\,(x_t)\,\nu\,(x_t)\,da_t \\ \qquad\quad + \mathbf{1}_{\partial D}\,(x_t)\,\mu_j\,(x_t) \circ dM_t^j \\ x_0 = x \\ a_t = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}\,(x_s)\,da_s \qquad 0 = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}\,(x_s)\,ds \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'il existe un système de processus stochastiques $(x,\ a,\ w,\ M)$ *définis sur un espace probabilisé* $(\Omega,\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ (\mathbb{P}_x)_{x \in \bar{D}})$ *tel que :*

1) $x_.$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté continu à valeurs dans* $\bar{D}$,

2) $a_.$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté continu croissant nul en zéro,*

3) *w et M sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales continues telles que*

$$\langle w^i,\, w^j \rangle_t = \delta_{ij}\, t, \qquad \langle M^i,\, M^j \rangle_t = \delta_{ij}\, a_t, \qquad \langle w^i,\, M^j \rangle_t = 0$$

4) *Le système* (3.1) ci-dessus est vérifié.

La loi de $(x_.)$ sous $\mathbb{P}_x$ est unique et fortement markovienne. On l'appelle alors une $(A,\, L)$-diffusion.

Remarque : normalisation du temps local. – On a un degré de liberté dans la définition de l'opérateur L. En effet, si c est une fonction strictement minorée sur le bord (*i.e.* $\exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in \partial D,\ c(x) \geq \alpha$), le processus $(x_t,\, \tilde{a}_t,\, w_t,\, \tilde{M}_t)$ où $\tilde{a}_t = \int_0^t c(x_s)\, \mathbf{1}_{\partial D}(x_s)\, da_s$ et $\tilde{M}_t = \int_0^t \sqrt{c(x_s)}\, \mathbf{1}_{\partial D}(x_s) \circ dM_s$, induit une $\left(A,\, \frac{1}{c} L\right)$-diffusion.

LEMME 3.2. – *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \partial D$, on peut trouver un difféomorphisme F_x tel que $(\mathcal{B}(x;\, \varepsilon_0) \cap \bar{D};\, F_x)$ soit une carte locale dans laquelle l'opérateur $A' = \frac{1}{2} \sum_i (F_x{}^* \sigma_i)^2 + (F_x{}^* \beta)$ s'écrive*

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + b \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \bar{X}_i^2 + \bar{X}_0$$

$$\textit{où} \quad \bar{X}_i = \sum_{j \geq 1} X_i^j \frac{\partial}{\partial x_j},\ (F^* Y)(y) = (dF \cdot Y)(F^{-1}(y))$$

et $L' = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \bar{V}_i^2 + \bar{V}_0$ *où* $\bar{V}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ V_i \end{bmatrix} = F_x{}^* \mu_i,\ i \geq 1,\ \bar{V}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ V_0 \end{bmatrix}$ *après avoir choisi $(F_x{}^* \nu)^1 = 1$ en normalisant le temps local grâce à la remarque précédente.*

De plus, il existe des constantes finies $M(k)$ telles que :

$$\sup_{x \in \partial D} \left(\|F_x\|_{C_b^k\,(\bar{\mathcal{B}}(x;\,\varepsilon_0) \cap \bar{D})} \vee \|F_x^{-1}\|_{C_b^k\,(\bar{\mathcal{B}}(x;\,\varepsilon_0) \cap \bar{D})} \right) \leq M(k).$$

Preuve. – Rappelons brièvement la construction d'un tel difféomorphisme local décrite par P. Cattiaux dans [3], théorème 4.5 et dans [4] pages 321 et 322 ([3], lemme 5.18, pour l'existence du ε_0 qui permet les majorations annoncées et [13] pour de plus amples détails).

1) Grâce à l'application ψ qui définit le bord de D, on se ramène au cas où D est un demi-espace avec un difféomorphisme G_0. Ceci fait disparaître la partie martingale au bord sur la première composante du système (3.1).

2) Changement de coordonnées. Si σ_i' désigne le nouveau coefficient σ_i du système, l'hypothèse (Hiii) permet de trouver un voisinage U_0 de $G_0(x_0)$ et une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(\star) \qquad \sum_{i\geq 1} (\sigma_i' f)^2 = 1 \quad \text{sur } U_0, \qquad \text{et} \qquad f = 0 \quad \text{sur } \partial U_0,$$

telle que l'application $(y_0, y_1, \ldots, y_p) \overset{G_1}{\to} (f(y_0, y_1, \ldots, y_p); y_1; \ldots; y_p)$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $G_0(x_0)$. On se ramène ainsi à la recherche d'une solution d'un système de réflexion dont l'équation de la première composante est de la forme :

$$\begin{cases} dZ_t = \mathbf{1}_{z_t>0}\, b(X_t)\, dt + \mathbf{1}_{z_t>0} \sum_{i\geq 1} (G_1^* \sigma_i')^0 (X_t) \circ dw_t^i \\ \qquad\qquad + \mathbf{1}_{z_t=0}\, V_0^1 (X_t)\, da_t \\ X_t = (Z_t, Y_t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \\ \text{(H'ii) } V_0^1 \text{ est strictement minoré sur } \partial U_0 \\ ((G_1^* \sigma_i')^0)_{i\geq 1} \text{ est un vecteur de norme } 1. \end{cases}$$

3) Rotation sur les browniens. On effectue alors une rotation sur les mouvements browniens w^i (on obtient un nouveau mouvement brownien toujours noté w^i) de sorte que $(x_., \mathbb{P}_x)$ est solution locale de (3.1) au voisinage de x_0 ssi $((G_1 \circ G_0)(x_.), \mathbb{P}_{G_0(x)})$ est solution locale au voisinage de $G_0(x_0)$ d'un système de réflexion du type :

$$\begin{cases} dZ_t = b(X_t)\, dt + dw_t^1 + V_0^1 (0, Y_t)\, da_t \\ dY_t = \alpha_0 (X_t)\, dt + \sum_{i\geq 1} \alpha_i (X_t) \circ dw_t^i \\ \qquad\qquad + S_0 (Y_t)\, da_t + \sum_{j\geq 1} S_j (Y_t) \circ dM_t^j \end{cases}$$

(on peut enlever les indicatrices car :

$$0 = \int_0^t \mathbf{1}_{z_s=0}\, ds, \; a_t = \int_0^t \mathbf{1}_{z_s=0}\, da_s \Bigg).$$

4) Changement de coordonnées. Soient enfin p solutions indépendantes $g_1, \ldots, g_p$, de l'équation aux dérivées partielles :

$$1 \times \frac{\partial g_i}{\partial z} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_1^k \frac{\partial g_i}{\partial y_k} = 0$$

$$g_i ((G_1 \circ G_0)(x_0)) = X_0^{(i)}$$

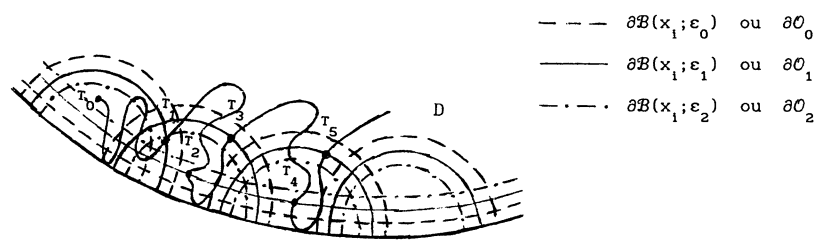
$$\text{si } (G_1 \circ G_0)(x_0) = (X_0^{(0)}, X_0^{(1)}, \ldots, X_0^{(p)}) = X_0.$$

Ce sont les intégrales premières du système différentiel :
$dy_k = \alpha_1^k (y_0, y_1, \ldots, y_p)\, dy_0$, $1 \leq k \leq p$ ([2], théorème 4.2.2, p. 165 et 166).
Soit alors :

$$(y_0, y_1, \ldots, y_p) \overset{G_2}{\to} (y_0; g_1 (y_0, y_1, \ldots, y_p); \ldots; g_p (y_0, y_1, \ldots, y_p)).$$

Par construction, si $G = G_2 \circ G_1 \circ G_0$, $(G(x_.), \mathbb{P}_{G_0(x)})$ est la solution locale au voisinage de $G_0(x_0)$ d'un système de réflexion du type (1.38) étudié au paragraphe I, la condition de stricte minoration de V_0^1 sur le bord nous permettant de supposer ce coefficient égal à 1 en choisissant une bonne normalisation du temps local (*cf.* la remarque faite plus haut à ce sujet). $\square$

Pour construire la (A, L)-diffusion, il nous faut construire des solutions locales grâce au lemme 3.2, puis procéder à des recollements en loi. On fixe ε_0 comme dans le lemme précédent, et on recouvre ∂D par un nombre localement fini (fini si D est relativement compact), de bonnes cartes $\mathcal{B}(x_i; \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, auxquelles on ajoute $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_0 \subset \bar{\mathcal{O}}_0 \subset D$ (avec $\mathcal{O}_{i+1} = \{x;\, d(x;\, \mathcal{O}_i) < \varepsilon_3\}$), ε_3, ε_2, et ε_1 étant choisis de sorte que tout point de $\partial\mathcal{B}(x_i; \varepsilon_1)$ ou de $\partial\mathcal{O}_1$ soit dans $\mathcal{O}_2$ ou dans une boule $\mathcal{B}(x_j; \varepsilon_2)$ (*cf.* la méthode dite de « localisation » qui utilise des ouverts de sécurité).



On note $(U_n)_n$ la famille des cartes $\mathcal{B}(x_i; \varepsilon_2)$ ou $\mathcal{O}_2$, et $(V_n)_n$ celle des cartes $\mathcal{B}(x_i; \varepsilon_1)$ ou $\mathcal{O}_1$ (avec le même indice pour les deux cartes qui se correspondent). Soit $x_0 \in \bar{D}$; il existe n_0 tel que $x_0 \in U_{n_0}$; on sait construire une unique solution jusqu'au premier temps de sortie T_1 de V_{n_0} grâce au lemme 3.2 et au paragraphe 1 (si $U_{n_0} = \mathcal{O}_2$, on est dans le cas d'un système classique sans réflexion tant que l'on n'a pas atteint la frontière) ; soit S_1 le premier instant de sortie de U_{n_0}. Il existe alors n_1 tel que $x_{T_1} \in U_{n_1}$; on construit une solution jusqu'au premier temps de sortie T_2 de la carte V_{n_1} (S_2 est le premier temps de sortie de U_{n_1}), et ainsi de suite. On obtient ainsi une unique solution au problème sur $\mathcal{F}_{t \wedge T_N}$, l'unicité provenant de celle des solutions locales. Le caractère fortement markovien des solutions locales entraîne : $\mathbb{P}(T_n \leq t) = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t,\ \mathbb{E}(T_n \leq t / \mathcal{F}_{T_{n-1}}))$. Les estimations classiques sur les temps de sortie ([3], Partie I, (1.6)) donnent alors si $\eta = \inf(\varepsilon_3;\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2) > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n \leq t/\mathcal{F}_{T_{n-1}}) &\leq \mathbb{E}(\|x_. - x_{S_n}\|_{S_n}^{T_n} > \eta / \mathcal{F}_{T_{n-1}}) \\ &\leq C\,\frac{\sqrt{t}}{\eta}\exp\left(-\frac{M\,\eta^2}{t}\right) \leq q < 1 \quad \text{pour } t \leq t_0.\end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T_n \leq t)$ converge pour $t \leq t_0$ (chaque terme est majoré par q^n) ; d'après le lemme de Borel-Cantelli, seul un nombre presque sûrement fini de cartes locales sont visitées sur $[0;\ t]$. En découpant l'intervalle de temps $[0;\ T]$ en un nombre fini d'intervalles de longueur t_0, on obtient le même résultat. La construction de la $(A,\ L)$-diffusion est achevée.

On notera $\omega = (\omega_1,\ T_1/\omega_2,\ T_2/\ \ldots\ /\omega_n,\ T_n/\ \ldots)$, où les T_i sont les temps de sortie successifs des cartes, $\mathbb{P}$ coïncidant sur $[T_i;\ T_{i+1}]$ avec la loi image de la solution locale, issue de x_{T_i}, sur la carte à laquelle x_{T_i} appartient, prise jusqu'en son premier temps de sortie.

Considérons maintenant l'équation déterministe associée au problème (3.1) pour une fonction $H = (h,\ \gamma)$ de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux :

$$\text{(3.2)} \quad \begin{cases} x_t^{H,x} = x + \displaystyle\int_0^t (\beta(x_s^{H,x}) + \sum_{i=1}^d \sigma_i(x_s^{H,x})\,\dot{h}_s^i)\,\mathbf{1}_D(x_s^{H,x})\,ds \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\,(\nu(x_s^{H,x}) + \sum_j \mu_j(x_s^{H,x}))\,\dot{\gamma}_s^j)\,da_s^{H,x} \\ a_t^{H,x} = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\,da_s^{H,x} \qquad 0 = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(x_s^{H,x})\,ds. \end{cases}$$

Pour construire la solution du système (3.2), on se ramène localement, grâce à l'application ψ, au cas d'un demi-espace, c'est-à-dire à un système du type (1.32) (après une bonne normalisation du temps local), système dont nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions au paragraphe I2A. On construit ainsi une unique solution jusqu'au premier temps de sortie de la carte locale, et on recommence. Le phénomène d'oscillation, qui ne se produit pas dans le cas stochastique, ne se produit pas plus dans le cas déterministe, le temps nécessaire pour franchir une distance de ε étant au moins de l'ordre de $K\,\varepsilon$; le nombre de cartes locales visitées durant l'intervalle de temps $[0;\ T]$ est alors fini. De proche en proche, on peut construire ainsi une unique solution.

THÉORÈME 4 :

$$\operatorname{supp} \mathbb{P}_x \subset \overline{((x_t^{H,x},\, a_t^{H,x})_{0 \le t \le T},\, H\, C^2 \textit{ par morceaux de } [0;\, T] \textit{ dans } \mathbb{R}^{d+m})}$$

Comme dans le cas particulier du paragraphe I, cette inclusion sera prouvée si l'on met en évidence une suite de fonctions H^n de classe C^2 par morceaux telle que pour $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_x (\|x_. - x_.^n\|_T + \|a_. - a_.^n\|_T > \varepsilon) = 0,$$

(où l'on note $x_.^n = x^{H^n,x}$, $a_.^n = a^{H^n,x}$).

Preuve. – On effectue un recouvrement de D comme cela a été décrit lors de la construction de la $(A,\, L)$-diffusion, en choisissant les ε_k de sorte que $\max(\varepsilon_3,\, \varepsilon_0 - \varepsilon_1) < \varepsilon$. On note toujours $(T_n)_{n \ge 0}\, (T_0 = 0)$, la suite des temps de sortie successifs des cartes locales $U_i = \mathcal{B}(x_i;\, \varepsilon_1)$ ou $\mathcal{O}_1$, et F_i les difféomorphismes du lemme 3.2 qui leur correspondent. Soit $\alpha > 0$. Comme la série $\sum_n \mathbb{P}(T_n < T)$ converge, il existe N tel que $\mathbb{P}(T_N < T) < \alpha$. Soit $((\bar{x}_.^i,\, \bar{a}_.^i),\, \mathbb{P}_y^i)$ la solution locale au problème de demi-espace auquel ramène F_i avant normalisation du temps local. Alors, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, $(F_i^{-1}(\bar{x}_.^i),\, \bar{a}_.^i + \bar{a}_{T_i}^{i-1},\, \mathbb{P}^i_{F_i^{-1}(y)})$ est solution locale du problème sur U_i. Si l'on pose : $\tilde{a}_t^i \equiv \int_{T_i}^t (F_i{}^* \nu)^1 (\bar{x}_s^i)\, \mathbf{1}_{\{\bar{z}_s^i = 0\}}\, d\bar{a}_s^i$, $(\bar{x}_.^i,\, \tilde{a}_.^i)$ est solution d'un problème de demi-espace du type (1.38). Ainsi, d'après le lemme 1.2.4 et le théorème 1, on sait trouver des fonctions $\bar{H}^{n,i}$ de classe C^2 par morceaux telles que (avec des notations évidentes) si : $\lim_{n \to +\infty} \exp(C\, n^c)\, \mathbb{E}^i (\|\bar{x}_0^i - \bar{x}_0^{n,i}\|^2) = 0$, alors $(\bar{x}^{n,i},\, \tilde{a}^{n,i})$ tend dans $\mathbb{L}^2$ uniformément sur $[0;\, T]$ vers $(\bar{x}_.^i,\, \tilde{a}_.^i)$ et vérifie $\lim_{n \to +\infty} \exp(K\, n^k)$ $\mathbb{P}^i (\|\bar{x}_.^i - \bar{x}_.^{n,i}\|_T^2) = 0$. (On peut toujours prolonger le difféomorphisme F_i de sorte que $(\bar{x}_.^i,\, \tilde{a}_.^i)$ peut être défini au-delà du premier temps de sortie de $F_i(U_i)$.) Posons alors : $\bar{a}_t^{n,i} \equiv \int_T^t \{ (F_i{}^* \nu)^1 (\bar{x}_s^{n,i}) \}^{-1}\, \mathbf{1}_{\{\bar{z}_s^{n,i} = 0\}}\, d\tilde{a}_s^{n,i}$. On effectue une rotation sur les $\bar{H}^{n,i}$, rotation analogue à celle décrite au lemme 3.2 pour la construction de la $(A,\, L)$-diffusion. On obtient ainsi des fonctions $H^{n,i}$ pour lesquelles $(F_i^{-1}(\bar{x}_.^{n,i}),\, \bar{a}_.^i + \bar{a}_{T_i}^{n,i-1})$ définit la solution cherchée entre les instants T_i et T_{i+1}. Ceci définit les processus $x_.^n$ et $a_.^n$ cherchés sur $[T_i;\, T_{i+1}]\, (\bar{a}_0^{n,0} \equiv 0)$.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x [\, \|x_. - x_.^n\|_T + \|a_. - a_.^n\|_T > \varepsilon] \\ &\quad \le \mathbb{P}_x [T_N \le T] + \mathbb{P}_x [T < T_N,\, \|x_. - x_.^n\|_T + \|a_. - a_.^n\|_T > \varepsilon] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \alpha + \mathbb{P}_x\,[T_N > T,\, \exists\,(i,\, j) \in \{0,\, \dots,\, N-1\},\\ &\qquad\qquad \|x_. - x^n_.\|_{T\wedge T_i}^{T\wedge T_{i+1}} > \varepsilon/2,\ \|a_. - a^n_.\|_{T\wedge T_j}^{T\wedge T_{j+1}} > \varepsilon/2]\\ &\leq \alpha + 2\sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}_x\,[\|x_. - x^n_.\|_{T\wedge T_i}^{T\wedge T_{i+1}} + \|a_. - a^n_.\|_{T\wedge T_i}^{T\wedge T_{i+1}} > \varepsilon/2].\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur i, que chacun des termes de la somme ci-dessus tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ceci entraînera alors : $\forall\,\alpha > 0,\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \mathbb{P}_x\,[\|x_. - x^n_.\|_T + \|a_. - a^n_.\|_T > \varepsilon] \leq \alpha$, d'où le résultat.

rang $i = 0$: les processus sont issus du même point.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_x\,[\,\|x_. - x^n_.\|_{T\wedge T_1} + \|a_. - a^n_.\|_{T\wedge T_1} < \eta/2] \qquad (\text{pour}\ \eta \leq \varepsilon)\\ &\quad = \mathbb{P}^1_{F_1(x)}\,[\,\|F_1^{-1}(\bar{x}^1_.) - F_1^{-1}(\bar{x}^{n,1}_.)\|_{T\wedge T_1} + \|\bar{a}^1_. - \bar{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} < \eta/2]\\ &\quad \geq \mathbb{P}^1_{F_1(x)}\,[\,\|F_1^{-1}(\bar{x}^1_.) - F_1^{-1}(\bar{x}^{n,1}_.)\|_T + \|\bar{a}^1_. - \bar{a}^{n,1}_.\|_T < \eta/2]\\ &\quad \geq \mathbb{P}^1_{F_1(x)}\,[\,\|\bar{x}^1_. - \bar{x}^{n,1}_.\|_T + \|\bar{a}^1_. - \bar{a}^{n,1}_.\|_T < \eta/2\,M]\end{aligned}$$

car les F_i et F_i^{-1} sont uniformément majorés par $M > 1$ dans les $C^1(\mathcal{B}(x_j;\ \varepsilon_0))$ (*cf.* lemme 3.2). Or : $\bar{a}^1_t - \bar{a}^{n,1}_t = \int_0^t f(\bar{y}^1_s)\,d\tilde{a}^1_s - \int_0^t f(\bar{y}^{n,1}_s)\,d\tilde{a}^{n,1}_s$, où $f(y) \equiv \{(F_1{}^*\nu)^1(y,\ 0)\}^{-1}$ est une fonction bornée en raison de l'hypothèse de stricte minoration de ν sur le bord (hypothèse (Hii)). Ainsi, le processus $\bar{a}^1_t - \bar{a}^{n,1}_t$ est du même type que le processus $A^{(1)}$ étudié aux lemmes 1.1.2 et 1.1.4. En reprenant les preuves de ces lemmes, on montre que :

$$\begin{aligned}\|\bar{a}^1_. - \bar{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} &\leq c\int_0^{T\wedge T_1} \|\bar{y}^1_. - \bar{y}^{n,1}_.\|_s\,d\tilde{a}^{n,1}_s\\ &\quad + c_T\|\tilde{a}^1_. - \tilde{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1}(1 + \tilde{a}^1_{T\wedge T_1}) + K^n + L^n\end{aligned}$$

où :

$$K^n \equiv \sup_{0\leq t\leq T\wedge T_1}\left\|\int_0^t N^n_s\,\langle\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f(y_s)|X_1(x_s)\,dw_s\,\rangle\right\| \qquad N^n_t \equiv \tilde{a}^1_t - \tilde{a}^{n,1}_t$$

$$L^n \equiv \sup_{0\leq t\leq T\wedge T_1}\left\|\int_0^t N^n_s\,\langle\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f(y_s)|V_1(y_s)\,d\bar{w}_s\,\rangle\right\| \qquad \bar{w}_t = w^*(\tilde{a}^1_t)$$

Ainsi,

$$\{\,\|\bar{x}^1_. - \bar{x}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} + \|\bar{a}^1_. - \bar{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} > \alpha\,\}$$

$$\subseteq \left\{\,\|\bar{x}^1_. - \bar{x}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} + \|\tilde{a}^1_. - \tilde{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{\|\bar{a}^1_. - \bar{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$\subseteq \left\{K^n > \frac{\alpha}{8}\right\} \cup \left\{L^n > \frac{\alpha}{8}\right\} \cup \left\{c\int_0^{T\wedge T_1} \|\bar{y}^1_. - \bar{y}^{n,1}_.\|_s d\tilde{a}^{n,1}_s > \frac{\alpha}{8}\right\}$$

$$\cup \left\{c_T\|\tilde{a}^1_. - \tilde{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1}\,(1+\tilde{a}^1_{T\wedge T_1}) > \frac{\alpha}{8}\right\}$$

L'étude faite dans le cas du demi-espace entraîne que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\,\|\bar{x}^1_. - \bar{x}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} + \|\tilde{a}^1_. - \tilde{a}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1} > \frac{\alpha}{2}\right] = 0,$$

et que les termes K^n et L^n tendent vers zéro dans $\mathbb{L}^2$ donc en probabilité. En outre :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}&\left[\int_0^{T\wedge T_1} \|\bar{y}^1_. - \bar{y}^{n,1}_.\|_s \, d\tilde{a}^{n,1}_s > \beta\right] \\
&\leq \beta^{-1}\,\mathbb{E}\,[\,\|\bar{y}^1_. - \bar{y}^{n,1}_.\|_{T\wedge T_1}\,\tilde{a}^{n,1}_{T\wedge T_1}] \\
&\leq \beta^{-1}\,\mathbb{E}\,[\,\|\bar{y}^1_. - \bar{y}^{n,1}_.\|^2_{T\wedge T_1}\,]^{1/2}\,\mathbb{E}\,[(\tilde{a}^{n,1}_{T\wedge T_1})^2]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers zéro car les $\tilde{a}^{n,1}_{T\wedge T_1}$ sont bornés dans $\mathbb{L}^2$ car ils convergent. On procède de même pour le dernier terme.

On peut ainsi montrer la convergence pour les couples $(\bar{x}^{n,i}, \bar{a}^{n,i})$ et non plus seulement $(\tilde{x}^{n,i}, \tilde{a}^{n,i})$, c'est-à-dire que :

$$\forall\,\eta > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}^i\,[\,\|\bar{x}^i_. - \bar{x}^{n,i}_.\|^{T\wedge T_{i+1}}_{T\wedge T_i} + \|\bar{a}^i_. - \bar{a}^{n,i}_.\|^{T\wedge T_{i+1}}_{T\wedge T_i} < \eta] = 1.$$

On suppose vrai le résultat au rang $(r-1)$; montrons-le au rang r :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,&[\,\|\bar{x}^r_. - \bar{x}^{n,r}_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} + \|\bar{a}^r_. - \bar{a}^{n,r}_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} < \eta/4\,M] \\
&\leq \mathbb{P}\,[\,\|F_r^{-1}(\bar{x}^r_.) - F_r^{-1}(\bar{x}^{n,r}_.)\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} \\
&\qquad + \|\bar{a}^r_. - \bar{a}^{n,r}_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} < \eta/4,\ |a_{T\wedge T_r} - a^n_{T\wedge T_r}| < \eta/4] \\
&\quad + \mathbb{P}\,[\,|a_{T\wedge T_r} - a^n_{T\wedge T_r}| \geq \eta/4] \\
&\leq \mathbb{P}\,[\,\|x_. - x^n_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} + \|a_. - a^n_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} < \eta/2] \\
&\quad + \mathbb{P}\,[\,\|x_. - x^n_.\|^{T\wedge T_r}_{T\wedge T_{r-1}} + \|a_. - a^n_.\|^{T\wedge T_r}_{T\wedge T_{r-1}} \geq \eta/4]
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le membre de droite du dernier terme tend vers zéro $\left(\text{car } \frac{\eta}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$, tandis que

$$\mathbb{E}\,[\,\|\bar{x}^r_. - \bar{x}^{n,\,r}_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} + \|\bar{a}^r_. - \bar{a}^{n,\,r}_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} < \eta/4\,M]$$

tend vers 1. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,[\,\|x_. - x^n_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} + \|a_. - a^n_.\|^{T\wedge T_{r+1}}_{T\wedge T_r} < \eta/2] = 0$$

pour tout $\eta \leq \varepsilon$. $\square$

Remarque. – Nous avons implicitement supposé dans cette démonstration D relativement compact, pour ne pas avoir à vérifier l'hypothèse du théorème 1 du type : $\exists\, q > 1,\ \sup_n \mathbb{E}\,[\,\|\bar{x}^{n,\,i}_{T\wedge T_i}\|^q\,] < +\infty$. Dans le cas où D n'est pas compact, on procède de la même façon en considérant d'abord $K_R = \bar{D} \cap \bar{\mathcal{B}}(0;\, R)$, puisqu'on ne visite qu'un nombre presque sûrement fini de cartes locales.

THÉORÈME 5 :

$$\overline{((x^{H,\,x}_t,\ a^{H,\,x}_t)_{0\leq t\leq T},\ H\ \mathcal{C}^2 \text{ par morceaux de } [0;\, T] \text{ dans } \mathbb{R}^{d+m})} \subset \operatorname{supp} \mathbb{P}_x$$

Preuve. – Soit H une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, et $(x^{H,\,x}_.,\ a^{H,\,x}_.)_{0\leq t\leq T}$ la solution issue de x, du problème de type (3.2) qui lui est associée. Sur $[0;\, T]$, la trajectoire déterministe $x^{H,\,x}_.$ ne visite qu'un nombre fini de cartes locales (les cartes locales définies lors de la construction de la $(A,\, L)$-diffusion). Appelons $T_1, \ldots, T_N$, les temps de sortie des cartes $\mathcal{B}(x_i;\, \varepsilon_2)$ ou $\mathcal{O}_2$ de $x^{H,\,x}_.$ entre les instants 0 et T, et posons en outre $T_0 = 0$, et $T_{N+1} = T$.

On veut prouver que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}_x\,[\,\|x_. - x^H_.\|_T + \|a_. - a^H_.\|_T < \varepsilon] > 0 \qquad (x^H_. = x^{H,\,x}_.,\ a^H_. = a^{H,\,x}_.).$$

Il suffit de prouver le résultat pour ε petit, par exemple

$$\varepsilon < (1 \wedge \varepsilon_3 \wedge (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)).$$

Sur l'ensemble $\{\,\|x_. - x^H_.\|_T + \|a_. - a^H_.\|_T < \varepsilon\}$, les trajectoires déterministe et stochastique se trouvent dans la même carte locale V_i de type $\mathcal{B}(x_j;\, \varepsilon_1)$ ou $\mathcal{O}_1$, entre les instants T_i et T_{i+1}. On note F_i le difféomorphisme donné par le lemme 3.2 sur la carte V_i. Soit $(\bar{x}^i_.,\ \bar{a}^i_.)_{T_i\leq t\leq T_{i+1}}$ la solution issue de $F_i\,(x_{T_i})$ au problème associé à F_i avant normalisation du temps local (donc avec $(F_i{}^*\,\nu)$ pour coefficient). Soit $(\bar{x}^{\bar{H}^i}_.,\ \bar{a}^{\bar{H}^i}_.)_{T_i\leq t\leq T_{i+1}}$ la solution, issue de $F_i\,(x^H_{T_i})$ du problème déterministe lui correspondant pour des $\bar{H}^i$ obtenus sur $[T_i;\, T_{i+1}]$ par la rotation analogue à celle décrite pour la construction de la $(A,\ L)$-diffusion au lemme 3.2. Par unicité des solutions locales, $(x_.,\ a_.)_{T_i \leq t \leq T_{i+1}}$ et $(F_i^{-1}(\bar{x}_.^i),\ \bar{a}_.^i + a_{T_i})_{T_i \leq t \leq T_{i+1}}$ ont même loi conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$. Effectuons alors la normalisation du temps local décrite au lemme 3.2. Soit $\tilde{a}_t^i \equiv \int_{T_i}^t (F_i{}^* \nu)^1 (\bar{x}_s^i)\, \mathbf{1}_{\{\bar{z}_s^i = 0\}}\, d\bar{a}_s^i$, et $\tilde{a}_t^{\bar{H}^i} \equiv \int_{T_i}^t (F_i{}^* \nu)^1 (\bar{x}_s^{\bar{H}^i})\, \mathbf{1}_{\{\bar{z}_s^{\bar{H}^i} = 0\}}\, d\bar{a}_s^{\bar{H}^i}$. On a des expressions analogues exprimant $\bar{a}_t^i$ et $\bar{a}_t^{\bar{H}^i}$ en fonction de $\tilde{a}_t^i$ et de $\tilde{a}_t^{\bar{H}^i}$ (rappelons que le champ ν est strictement minoré sur le bord). Alors $(\bar{x}_.^i,\ \tilde{a}_.^i)_{T_i \leq t \leq T_{i+1}}$ est solution d'un système pour lequel l'opérateur L est de la forme $\dfrac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \bar{V}_i^2 + \bar{V}_0$ avec $\bar{V}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ V_0 \end{bmatrix}$. Le processus $(\bar{x}_.^{\bar{H}_i},\ \tilde{a}_.^{\bar{H}_i})_{T_i \leq t \leq T_{i+1}}$ est le processus déterministe associé à $(\bar{x}_.^i,\ \tilde{a}_.^i)_{T_i \leq t \leq T_{i+1}}$. C'est donc sur ces processus que l'on sait effectuer les estimations du paragraphe II.

Comme les T_i sont en nombre fini, de même que les points $F_i(x_{T_i}^H)$ qui sont déterministes, et que les fonctions $\bar{H}^i$, étant de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, peuvent être bornées indépendamment de i, on peut remplacer les constantes du type $k_T(\varphi_0)$ (*i.e.* ici $k(T_i,\ T_{i+1},\ F_i(x_{T_i}^H))$) par des constantes ne dépendant que de T et des données, donc indépendantes de i.

Montrons qu'il existe $\delta_N > 0$, tel que pour tout $\eta > 0$ assez petit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \left[\, \|x_. - x_.^H\|_{T_N}^T + \|a_. - a_.^H\|_{T_N}^T < \eta / \mathcal{F}_{T_N} \right] \mathbf{1}_{\{\|x_. - x_.^H\|_T + \|a_. - a_.^H\|_T < \eta\}} \\
&\quad \geq \mathbf{1}_{\left\{\|x_. - x_.^H\|_{T_N} + \|a_. - a_.^H\|_{T_N} < \frac{\eta}{\beta}\right\}}\, h_N(\delta)
\end{aligned}$$

où $\beta > 2$, et $h_N(\delta) > 0$ pour tout $\delta \in]0;\ \delta_N]$. En réitérant le procédé, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'opérations, et que $x_.$ et x^H sont issus du même point x (ce qui entraîne $\forall\, A > 0,\ \mathbf{1}_{\left\{\|x_. - x_.^H\|_{T_0} + \|a_. - a_.^H\|_{T_0} < A\right\}} = 1$), on obtient l'existence de δ, tel que :

– $0 < \delta < \inf(\delta_i)$,

– $\mathbb{P}_x \left[\, \|x_. - x_.^H\|_T + \|a_. - a_.^H\|_T < \varepsilon \right] \geq h_0(\delta)\, h_1(\delta) \ldots h_N(\delta) > 0$.

Pour cela, nous appliquons les résultats du paragraphe II aux couples du type $(\bar{x},\ \tilde{a})$. L'étude faite dans ce paragraphe nous donne :

$$\begin{aligned}
&\|\bar{x}_.^i - \bar{x}_.^{\bar{H}^i}\|_{T_i}^{T_{i+1}} + \|\, \tilde{a}_.^i - \tilde{a}_.^{\bar{H}^i}\|_{T_i}^{T_{i+1}} \\
&\quad \leq k_T \left\{ \|U_.^{\prime i}\|_{T_i}^{T_{i+1}} + \|U_.^i\|_{T_i}^{T_{i+1}} + \|\tilde{B}_.^{(i)}\|_{T_i}^{T_{i+1}} + \|\bar{x}_{T_i}^i - \bar{x}_{T_i}^{\bar{H}^i}\| \right\} \\
&\qquad \times \exp\left(c_T\, \|\tilde{B}_.^{(i)}\|_{T_i}^{T_{i+1}}\right)
\end{aligned}$$

où : $-\tilde{B}_.^{(i)}$, $\tilde{w}_.^{(i)}$, et $\tilde{w}_.^{*(i)}$, sont les analogues $\tilde{B}_.$, $\tilde{w}_.$, et de $\tilde{w}_.^*$ pour le problème de demi-espace associé à $(F_i,\ V_i)$;

– $U'^i_.$ et $U^i_.$ sont des processus vérifiant :

$$\exists\,\beta > 0, \quad \forall\,\eta > 0, \quad \exists\, M_T > 0, \quad \exists\, K_T > 0, \quad \exists\,\delta\,(\eta) > 0,$$
$$\forall\, i \quad , \forall\,\delta \in]0;\ \delta\,(\eta)],$$

$$\mathbb{P}\left[\, \|U'^i_.\|_{T_i}^{T_{i+1}} + \|U^i_.\|_{T_i}^{T_{i+1}} > \eta,\ \|\bar{x}^i_{T_i} - \bar{x}^{\bar{H}^i}_{T_i}\| < \frac{1}{2} \right.$$
$$\left. \Big/\ \|\tilde{B}^{(i)}_.\|_{T_i}^{T_{i+1}} < \delta,\ \|\tilde{w}^{(i)}_.\|_{T_i}^{T_{i+1}} < \delta,\ \|\tilde{w}^{*(i)}_.\|_{T_i}^{T_{i+1}} < \delta^\alpha \right]$$
$$\leq M_T \exp\left(-K_T\,\delta^{-\beta}\right)$$

Alors, pour $\gamma > 0$ assez petit :

$$\mathbb{E}^N_{F_N\,(x_{T_N})}\left[\, \|\bar{x}^N_. - \bar{x}^{\bar{H}^N}_.\|_{T_N}^T + \|\tilde{a}^N_. - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_.\|_{T_N}^T < \gamma \right]$$
$$\geq \mathbb{E}^N_{F_N\,(x_{T_N})}\left[\, \|\bar{x}^N_. - \bar{x}^{\bar{H}^N}_.\|_{T_N}^T + \|\tilde{a}^N_. - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_.\|_{T_N}^T < \gamma, \right.$$
$$\left. \|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \frac{\gamma}{2\,k_T} \right]$$

(on peut toujours imposer $k_T > 1/2$).

Choisissons δ assez petit pour que : $\dfrac{\gamma}{k_T}\exp\left(-\delta\, c_T\right) - \delta - \dfrac{\gamma}{2\,k_T} \geq \dfrac{\gamma}{4\,k_T}$.

$$\mathbb{E}^N_{F_N\,(x_{T_N})}\left[\, \|\bar{x}^N_. - \bar{x}^{\bar{H}^N}_.\|_{T_N}^T + \|\tilde{a}^N_. - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_.\|_{T_N}^T < \gamma,\ \|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \gamma \right]$$
$$\geq \mathbb{E}^N_{F_N\,(x_{T_N})}\left(\|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \gamma,\ \|\tilde{B}^{(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta,\ \|U'^N_.\|_{T_N}^T \right.$$
$$\left. + \|U^N_.\|_{T_N}^T < \frac{\gamma}{k_T}\exp\left(-\delta\, c_T\right) - \delta - \frac{\gamma}{2\,k_T} \right)$$
$$\geq \mathbb{E}^N_{F_N\,(x_{T_N})}\left(\|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \gamma,\ \|U'^N_.\|_{T_N}^T + \|U^N_.\|_{T_N}^T < \frac{\gamma}{4\,k_T}, \right.$$
$$\left. \|\tilde{B}^{(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta,\ \|\tilde{w}^{(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta,\ \|\tilde{w}^{*(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta^\alpha \right)$$
$$\geq \mathbb{E}^N_{F_N\,(x_{T_N})}\left(\|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \gamma,\ \|\tilde{B}^{(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta, \right.$$
$$\left. \|\tilde{w}^{(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta,\ \|\tilde{w}^{*(N)}_.\|_{T_N}^T < \delta^\alpha \right)$$

$$- \mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})} \left(\|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \gamma, \|U'^N_{\cdot}\|^T_{T_N} + \|U^N_{\cdot}\|^T_{T_N} \geq \frac{\gamma}{4\,k_T}, \right.$$
$$\left. \|\tilde{B}^{(N)}_{\cdot}\|^T_{T_N} < \delta, \|\tilde{w}^{(N)}_{\cdot}\|^T_{T_N} < \delta, \|\tilde{w}^{*(N)}_{\cdot}\|^T_{T_N} < \delta^\alpha \right)$$
$$\geq \mathbf{1}_{\{\|\bar{x}^N_{T_N} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{T_N}\| < \gamma\}} \, h_N(\delta)$$

d'après les majorations précédentes avec $h_N(\delta) > 0$ pour $\delta \in]0;\, \delta_N]$.

En effectuant le même travail sur l'intervalle $[T_i; T_{i+1}]$ au lieu de $[T_N; T]$, on obtient l'existence de réels $\delta_i > 0$ tels que pour $\gamma > 0$ assez petit :

$$\text{(3.3)} \quad \mathbb{E}^i_{F_i(x_{T_i})} [\, \|\bar{x}^i_{\cdot} - \bar{x}^{\bar{H}^i}_{\cdot}\|^{T_{i+1}}_{T_i} + \|\tilde{a}^i_{\cdot} - \tilde{a}^{\bar{H}^i}_{\cdot}\|^{T_{i+1}}_{T_i} < \gamma]$$
$$\geq h_i(\delta)\, \mathbf{1}_{\{\|\bar{x}^i_{T_i} - \bar{x}^{\bar{H}^i}_{T_i}\| < \gamma\}}$$
$$\geq h_i(\delta)\, \mathbf{1}_{\left\{\|x_{T_i} - x^{\bar{H}^i}_{T_i}\| < \frac{\gamma}{M}\right\}} \quad \text{où } h_i(\delta) > 0 \text{ pour tout } \delta \in]0;\, \delta_i].$$

Étudions maintenant ce qui se passe pour les temps locaux $\bar{a}^i_t$ et $\bar{a}^{\bar{H}^i}_t$. On constate alors que par définition de $\tilde{a}^i_t$ et de $\tilde{a}^{\bar{H}^i}_t$, leur différence est un terme du type $H^{(1)} + H^{(2)}$ étudié dans la preuve du lemme 2.1.2. Comme le champ ν est transversal à ∂D (condition de stricte minoration (Hii)), si l'on reprend le même type de majoration que celle effectuée au lemme 2.1.2, on obtient :

$$\text{(3.4)} \qquad \|\bar{a}^i_{\cdot} - \bar{a}^{\bar{H}^i}_{\cdot}\|^{T_{i+1}}_{T_i} \leq c \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\bar{x}^i_{\cdot} - \bar{x}^{\bar{H}^i}_{\cdot}\|_s d\tilde{a}^i_s$$
$$+ C\|\tilde{a}^i_{\cdot} - \tilde{a}^{\bar{H}^i}_{\cdot}\|^{T_{i+1}}_{T_i} \quad (1 + \tilde{a}^{\bar{H}^i}_{T_{i+1}}),$$

et le terme $C(1 + \tilde{a}^{\bar{H}^i}_{T_{i+1}})$ est lui-même majoré par une constante K indépendante de i (on pourra supposer $C > 1$, de sorte que $\tilde{a}^{\bar{H}^i}_{T_{i+1}} \leq K$).

On a alors :

$$\mathbb{E}_x [\, \|x_{\cdot} - x^H_{\cdot}\|^T_{T_N} + \|a_{\cdot} - a_{\cdot}\|^T_{T_N} < \varepsilon / \mathcal{F}_{T_N}]\, \mathbf{1}_{\{\|x_{\cdot} - x^H_{\cdot}\|_{T_N} + \|a_{\cdot} - a^H_{\cdot}\|_{T_N} < \varepsilon\}}$$
$$= \mathbf{1}_{\{\|x_{\cdot} - x^H_{\cdot}\|_{T_N} + \|a_{\cdot} - a^H_{\cdot}\|_{T_N} < \varepsilon\}}$$
$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})} [\, \|F_N^{-1}(\bar{x}^N_{\cdot}) - F_N^{-1}(\bar{x}^{\bar{H}^N}_{\cdot})\|^T_{T_N} + \|a_{T_N} + \bar{a}^N_{\cdot} - a^H_{T_N} - \bar{a}^{\bar{H}^N}_{\cdot}\|^T_{T_N} < \varepsilon]$$
$$\geq \mathbf{1}_{\{\|x_{\cdot} - x^H_{\cdot}\|_{T_N} + \|a_{\cdot} - a^H_{\cdot}\|_{T_N} < \varepsilon\}}$$
$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})} [\, M\|\bar{x}^N_{\cdot} - \bar{x}^{\bar{H}^N}_{\cdot}\|^T_{T_N} + \|a_{T_N} - a^H_{T_N}\| + \|\bar{a}^N_{\cdot} - \bar{a}^{\bar{H}^N}_{\cdot}\|^T_{T_N} < \varepsilon]$$

où la constante $M > 1$ peut être choisie assez grande.

$$\geq \mathbf{1}_{\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \varepsilon\}} \mathbf{1}_{\{\|a_{T_N} - a_{T_N}^H\| < \varepsilon/2\}}$$

$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})}\left[M\|\bar{x}^N_\cdot - \bar{x}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} + \|\bar{a}^N_\cdot - \bar{a}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\geq \mathbf{1}_{\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \varepsilon/2\}}$$

$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})}\left[\|\bar{x}^N_\cdot - \bar{x}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N}(M + c(\tilde{a}^N_T - \tilde{a}^N_{T_N})) + K\|\tilde{a}^N_\cdot - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

d'après (3.4). Or,

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{a}^N_T - \tilde{a}^N_{T_N} &\leq (\tilde{a}^N_T - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_T) + (\tilde{a}^{\bar{H}^N}_T - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_{T_N}) + (\tilde{a}^{\bar{H}^N}_{T_N} - \tilde{a}^N_{T_N}) \\ &\leq (\tilde{a}^N_T - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_T) + K + (\tilde{a}^{\bar{H}^N}_{T_N} - \tilde{a}^N_{T_N}) \leq K + 2\|\tilde{a}^N_\cdot - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}_x\left[\,\|x_\cdot - x^H_\cdot\|^T_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot\|^T_{T_N} < \varepsilon/\mathcal{F}_{T_N}\right]\mathbf{1}_{\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \varepsilon\}}$$

$$\geq \mathbf{1}_{\left\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right\}}$$

$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})}\left[\,\|\bar{x}^N_\cdot - \bar{x}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N}(M + cK + 2\|\tilde{a}^N_\cdot - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_T\|^T_{T_N})\right.$$

$$\left. + K\|\tilde{a}^N_\cdot - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$= \mathbf{1}_{\left\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right\}}$$

$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})}\left[\left(M + cK + \frac{\varepsilon}{2K}\right)\|\bar{x}^N_\cdot - \bar{x}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} + K\|\tilde{a}^N_\cdot - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\geq \mathbf{1}_{\left\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right\}}$$

$$\mathbb{E}^N_{F_N(x_{T_N})}\left[\,\|\bar{x}^N_\cdot - \bar{x}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} + \|\tilde{a}^N_\cdot - \tilde{a}^{\bar{H}^N}_\cdot\|^T_{T_N} < \frac{\varepsilon}{\alpha}\right] \quad \text{où } \alpha > 2$$

$$\geq \mathbf{1}_{\left\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \frac{\varepsilon}{2}\right\}} h_N(\delta)\, \mathbf{1}_{\left\{\|x_{T_N} - x^{H^N}_{T_N}\| < \frac{\varepsilon}{\alpha M}\right\}}$$

d'après (3.3)

$$\geq \mathbf{1}_{\left\{\|x_\cdot - x_\cdot^H\|_{T_N} + \|a_\cdot - a_\cdot^H\|_{T_N} < \frac{\varepsilon}{\alpha M}\right\}} h_N(\delta),$$ ce qui termine la preuve. □

RÉFÉRENCES

[1] ANDERSON et ORAY, Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary, *Nagoya Math. J.*, Vol. **60**, 1976, p. 189-216.

[2] H. CARTAN, Calcul différentiel, Hermann, Paris, 1967.

[3] P. CATTIAUX, Calcul stochastique et opérateurs dégénérés du second ordre; I Résolvantes, théorème de Hörmander et applications; *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Vol. **114**, n°4, 1990, p. 421-462; II Problèmes de Dirichlet, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Vol. **115**, n°1, 1991, p. 81-122.

[4] P. CATTIAUX, Régularité au bord pour les densités conditionnelles d'une diffusion réfléchie hypoelliptique, *Stochastics*, Vol. **20**, 1987, p. 309-340.

[5] P. CATTIAUX, Diffusions avec une condition frontière de type Wentzell, régularité du semi-groupe associé, conditionnement et filtrage, *Informes de Matematica*, Série A-017, *Publication IMPA*, 1983.

[6] M. CHALEYAT-MAUREL et N. EL KAROUI, Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$; cas continu, *S.M.F. Astérisque*, Vol. **52-53**, 1978, p. 117-144.

[7] K. L. CHUNG, A course in probability theory, Harcourt, *Brace and World Inc.*, 1968, p. 258-260.

[8] J. M. C. CLARK, The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, *Annals of Mathematical Statistics*, 1970, p. 41-4.

[9] H. DOSS et P. PRIOURET, Support d'un processus de réflexion, *Zeit. Für. Wahr.*, Vol. **61**, 1982, p. 327-345.

[10] N. IKEDA et S. WATANABE, Stochastic differential equations and diffusion processes, North Holland, 1981.

[11] N. EL KAROUI, Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré et à une condition frontière, *Thèse*, Université Paris-VI, 1971.

[12] P.-L. LIONS, Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Pitman Advanced Publishing Program*, 1982.

[13] F. PETIT, Théorème du support pour les diffusions réfléchies de type Ventcell, *Thèse de Doctorat de l'Université Paris-VII*, 2e partie, février 1992.

[14] D. W. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle. Proceedings Sixth Berkeley Symposium Math. Statistic. Probability III, University California Press Berkeley, 1972, p. 333-359.

(Manuscrit reçu le 26 avril 1993;
révisé le 15 juillet 1993.)