ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DIDIER PIAU

Martingales browniennes et conjecture de Sakai

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, nº 3 (1995), p. 429-452
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_3_429_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 31, n° 3, 1995, p. 429-452. *Probabilités et Statistiques*

Martingales browniennes et conjecture de Sakai

par

Didier PIAU

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
E.N.S.-Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07,
et Laboratoire de Probabilités,
Université Claude Bernard, Lyon-I, 43, boulevard du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne Cedex, France.
piau@jonas.univ-lyon1.fr

RÉSUMÉ. – Pour tout réel $p \geq 0$ tel que la fonction $x \mapsto \|x\|^p$ est sous-harmonique sur $\mathbf{R}^d$, M. Sakai a introduit en 1988 la constante $c_d(p)$ optimale dans une certaine inégalité isopérimétrique : $c_d(p)$ contrôle la valeur à l'origine du plus petit majorant harmonique de $\|x\|^p$ sur tous les domaines de $\mathbf{R}^d$de volume donné. Nous étudions ce problème par des méthodes probabilistes. Nous retrouvons la plupart des résultats de M. Sakai d'une façon plus simple et plus éclairante. Nous obtenons également des estimations explicites de $c_d(p)$ dans les cas laissés ouverts par M. Sakai. Enfin, nous étudions en détail le cas $d = 2$, $p = 4$ et nous montrons que $c_2(4) < 1,80$.

ABSTRACT. – For any real $p \geq 0$ such that the function $x \mapsto \|x\|^p$ is subharmonic in $\mathbf{R}^d$, M. Sakai introduced in 1988 the constant $c_d(p)$ optimal in a given isovolumetric inequality: $c_d(p)$ tells how large the value at the origin of the least harmonic majorant of $\|x\|^p$ can be on a domain of $\mathbf{R}^d$ of given volume. We use probabilistic tools to study this constant. We recover most of M. Sakai's results, proving them often in a simpler and more enlightening way. We obtain new estimates of $c_d(p)$ in the cases M. Sakai left open. We thoroughly study the case $d = 2$, $p = 4$ and we prove that $c_2(4) < 1.80$.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 31/95/03/$ 4.00/© Gauthier-Villars

0. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier par des méthodes probabilistes une conjecture due à M. Sakai [14] : on peut associer à tout domaine D de $\mathbf{R}^d$, $0 \in D$, le plus petit majorant harmonique h_p de la restriction de la fonction $||x||^p$ au domaine D. Si $r(D)$ désigne le rayon d'une boule (euclidienne) de même volume que D, M. Sakai note $c_d(p)$ la plus petite constante c vérifiant l'inégalité

$$h_p(0) \leq c^p \cdot r(D)^p$$

pour tous les domaines D de $\mathbf{R}^d$ contenant l'origine et il conjecture que pour tout $d \geq 1$ on a $c_d(d+2) = 1$.

Il est facile d'exprimer la fonction h_p comme le moment d'ordre p de la norme $||W_T||$ où W est un mouvement brownien de $\mathbf{R}^d$ et T est le premier instant de sortie de W hors du domaine D. Un problème probabiliste strictement équivalent consiste donc à majorer les moments de $||W_T||$ en fonction du volume du domaine.

Le plan de l'article est le suivant. Dans le paragraphe 1, nous exposons à titre de motivation une nouvelle démonstration probabiliste d'une inégalité remarquable d'analyse complexe découverte par H. Alexander, B. A. Taylor et J. L. Ullman [2] et relative à la norme H^2 d'une fonction holomorphe sur le disque unité du plan. Nous reprenons la généralisation de cette inégalité due à M. Sakai et nous donnons sa traduction brownienne. L'intérêt principal de la proposition 2 est d'affirmer que l'on peut se limiter à des domaines bornés pour définir $c_d(p)$; cette remarque nous permet par la suite de ne manipuler que des martingales uniformément intégrables et en particulier d'appliquer des théorèmes d'arrêt. Dans le paragraphe 2, nous rappelons quelques faits connus concernant le mouvement brownien et nous démontrons un résultat de symétrisation brownienne que nous utilisons aussitôt pour établir l'égalité $c_d(2) = 1$, satisfaite en toute dimension $d \geq 1$. Nous montrons cependant que les techniques de symétrisation ne sont pas réellement nécessaires si l'on veut seulement prouver que $c_d(2) = 1$: on peut par exemple faire appel à un théorème de monotonie dû à M.-Th. Kohler-Jobin [2] qui repose en dernier ressort sur une simple inégalité de convexité. Nous démontrons également dans ce paragraphe une inégalité isopérimétrique plus générale qui porte sur certaines fonctionnelles non polynômiales du mouvement brownien et nous retrouvons directement l'inégalité de Faber-Krahn. Le paragraphe 3 décrit les propriétés élémentaires des fonctions $c_d(\cdot)$ et en donne des preuves browniennes. Nous montrons de façon particulièrement simple, en utilisant de nouveau le résultat de symétrisation du mouvement brownien, que la constante de Sakai est finie en toute dimension et pour tout exposant. Le paragraphe 4 traite du cas $p \leq d$ et le paragraphe 5 donne des estimations de $c_d(4)$ par des techniques de martingales : nous envisageons notamment deux nouvelles approches, une méthode faisant intervenir la résolution probabiliste d'un problème biharmonique et une technique de double frontière.

Après avoir rédigé ce travail, nous avons appris que le théorème 6 de notre article avait déjà été obtenu par M. Aizenman et B. Simon et indépendamment par C. Bandle : dans [1], M. Aizenman et B. Simon le démontrent par une méthode identique à la nôtre (*voir* le théorème A.3.1) ; dans [3], C. Bandle démontre (*voir* le théorème 6) un résultat à partir duquel on peut retrouver le théorème 2.1 assez facilement (*voir* la remarque qui suit notre corollaire 7). Nous tenons à remercier J. Brossard pour nous avoir communiqué ces deux références et A. Goldman pour son aide durant la préparation de cet article.

1. LA CONJECTURE DE SAKAI

Ce paragraphe reprend les idées de [14] mais les parties browniennes, c'est-à-dire la preuve de l'inégalité d'Alexander, Taylor et Ullman au moyen du théorème d'arrêt et la proposition 2 qui traduit la conjecture de Sakai en termes de mouvement brownien, sont nouvelles.

Rappelons tout d'abord l'énoncé de l'inégalité d'Alexander, Taylor et Ullman. On se donne un nombre positif p et une fonction holomorphe f sur le disque unité U du plan complexe. La norme H^p de f est notée $||f||_p$ et elle est définie par

$$||f||_p = \left(\sup_{0<r<1} \int_0^1 |f(re^{2i\pi s})|^p \, ds \right)^{1/p}.$$

La classe de Hardy d'exposant p est l'espace H^p des fonctions holomorphes f sur U telles que $||f||_p$ est finie. H. Alexander, B. A. Taylor et J. L. Ullman [2] ont montré dans le cas $p = 2$ que toute fonction f appartenant à H^2 et telle que $f(0) = 0$ vérifie l'inégalité

$$||f||_2^2 \leq (1/\pi) \,\text{Aire}\, f(U). \tag{1}$$

Ceci améliore la majoration de $||f||_2^2$ par l'intégrale de Dirichlet de f qui est beaucoup plus facile à obtenir. L'intégrale de Dirichlet représente l'aire de $f(U)$ en comptant la multiplicité de f en chaque point de $f(U)$ alors que dans (1), on ne compte pas la multiplicité de f. On peut se reporter au livre de P. Duren [6] pour les propriétés classiques des espaces de Hardy.

S. Kobayashi [7] a donné une preuve originale de (1) en la reliant au plus petit majorant harmonique de $|z|^2$. Voici l'idée de sa preuve. Notons $D = f(U)$ et soit h la plus petite fonction sur-harmonique définie sur D telle que $h(z) \geq |z|^2$ pour tout $z \in D$. La fonction $z \mapsto |z|^2$ est sous-harmonique donc il est facile de voir que h est en fait harmonique. La fonction h est donc le plus petit majorant harmonique de $z \mapsto |z|^2$ sur D. La fonction $h \circ f$ est harmonique sur U (car h est harmonique et f est holomorphe) et elle majore $|f|^2$ donc

$$\int_0^1 |f(re^{2i\pi s})|^2 \, ds \leq \int_0^1 h \circ f(re^{2i\pi s}) \, ds = h \circ f(0) = h(0).$$

Or, on sait d'après [10] et [11] que l'inégalité

$$h(0) \leq (1/\pi) \,\text{Aire}\, D \tag{2}$$

est satisfaite pour tout domaine D, donc (1) suit.

On voit qu'une fonction f de H^2 vérifie l'inégalité (1) dès que le domaine $D = f(U)$ vérifie la propriété (2).

Cette remarque de S. Kobayashi suggère une démonstration simple de l'inégalité d'Alexander, Taylor et Ullman au moyen du célèbre théorème d'arrêt de Doob. Nous exposons à présent cette preuve inédite qui motive notre traduction probabiliste du problème de M. Sakai.

Démonstration. – Soit T le premier instant de sortie de U du mouvement brownien complexe $(W_t)_{t \geq 0}$ issu de l'origine et $D = f(U)$ l'image de U. On sait depuis Paul Lévy que $(f(W_t))_{0 \leq t < T}$ est une martingale brownienne continue et qu'il existe un mouvement brownien complexe $(V_t)_{t \geq 0}$ et un changement de temps $\tau(t)$ tels que $V_{\tau(t)} = f(W_t)$ pour tout $0 \leq t < T$. Comment utiliser ce fait ? Fixons un réel $r < 1$; le domaine $f(rU)$ est borné [si $f(U)$ est lui-même borné, on peut simplement fixer $r = 1$ et la suite du raisonnement fonctionne]. Introduisons les instants aléatoires

$$R = \inf\{t > 0, W_t \notin (rU)\} \qquad \text{et} \qquad S = \inf\{t > 0, V_t \notin f(rU)\}.$$

Alors R est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de W et on a $\tau(R) \leq S$ par construction. Une application simple de la formule d'Itô à la fonction $|f|^2$ donne

$$\int_0^1 |f(r\, e^{2i\pi s})|^2 \, ds = \mathbf{E}_0 |f(W_R)|^2 = 2\mathbf{E}_0 \int_0^R |f'(W_s)|^2 \, ds.$$

Le membre de droite vaut $2\mathbf{E}_0\tau(R)$ donc

$$\int_0^1 |f(r\, e^{2i\pi s})|^2\, ds \leq 2\mathbf{E}_0 S = \mathbf{E}_0|V_S|^2,$$

la dernière égalité provenant du théorème d'arrêt appliqué à la martingale $|V_t|^2 - 2t$ entre les instants 0 et S, ce qui ne pose pas de problème d'uniforme intégrabilité car le domaine $f(rU)$ est borné.

Il reste à évaluer la loi de $|V_S|$. On remarque que la fonction $x \mapsto \mathbf{P}_x(|V_S| > s)$ est toujours inférieure à 1, qu'elle est harmonique sur $D \cap B_s$ et qu'elle tend vers 0 quand x tend vers un point régulier quelconque de $\partial[f(rU)] \cap B_s$; cette portion du bord de $f(rU)$ coïncide avec le complémentaire de $f(rU) \cap B_s$ dans le bord $\partial[f(rU)]$ donc

$$\mathbf{P}_0(|V_S| > s) \leq \int_0^1 1(se^{2i\pi t} \in f(rU))\, dt.$$

En intégrant cette inégalité, il vient

$$\mathbf{E}_0|V_S|^2 \leq (1/\pi)\text{Aire } f(rU) \leq (1/\pi)\text{Aire } D,$$

ce qui termine notre démonstration. ∎

Anticipons un peu sur la suite. Le processus $(|V_t|^2 - 2t)_{t\geq 0}$ est une martingale et, si S désigne à présent le premier instant de sortie du mouvement brownien V_t hors de D, on a montré que S est presque sûrement fini et que

$$\mathbf{E}_0 S = (1/2)\mathbf{E}_0|V_S|^2 \leq (1/2\pi)\text{Aire } D,$$

c'est-à-dire que pour les domaines du plan qui sont des images de U par des applications holomorphes, par exemple les domaines simplement connexes, le temps de sortie moyen est maximal, pour une aire donnée, pour un disque. On va retrouver ce résultat isopérimétrique par la suite mais affranchi des hypothèses sur le domaine.

Nous décrivons maintenant la généralisation de (2) due à M. Sakai. L'idée est de considérer des domaines plutôt que des fonctions holomorphes. A présent, D est un domaine (= un ouvert connexe) de $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, de volume fini. Soit $r(D)$ le rayon équivalent de D c'est-à-dire le rayon d'une boule de même volume que D. Supposons que l'origine 0 appartient à D et soit $p \geq 0$ tel que $x \mapsto \|x\|^p$ est une fonction sous-harmonique. Notons alors h_p le plus petit majorant harmonique de $x \mapsto \|x\|^p$ sur D. Nous voulons déterminer la meilleure constante c telle que tout domaine D vérifie

$$h_p(0) \leq c^p\, r(D)^p. \tag{3}$$

DEFINITION 1 (Sakai). – *La constante de Sakai $c_d(p)$ est définie par*

$$c_d(p) = \sup \{h_p(0)^{1/p}; D \subset \mathbb{R}^d,\ 0 \in D,\ r(D) = 1\}.$$

Notons que $c_d(p)$ est définie quand $x \mapsto \|x\|^p$ est sous-harmonique, ce qui est le cas pour $p \geq 1$ si $d = 1$ et pour $p \geq 0$ si $d \geq 2$. La constante de Sakai est bien le plus petit réel c vérifiant (3) car les deux membres de (3) sont multipliés par a^p quand on remplace D par le domaine homothétique aD. De plus, quand D est une boule B_r centrée en l'origine, h_p est constante et est égale à r^p donc $c_d(p) \geq 1$.

Nous allons étudier les questions suivantes. Quand $c_d(p)$ est-elle finie ? Appelons *extrêmal* un domaine tel que $h_p(0)^{1/p}$ réalise la borne supérieure de la définition. La boule est extrêmale si $c_d(p) = 1$. Pour quelles valeurs de d et p cette situation se produit-elle, et dans ce cas, quels sont les autres domaines extrêmaux ? Enfin, peut-on évaluer $c_d(p)$ dans les cas où $c_d(p) > 1$?

Dressons la liste des résultats et conjectures de M. Sakai. En dimension $d = 1$, on peut calculer c_d explicitement : on obtient $c_d(p) = 1$ pour $p \leq 3$ et $c_d(p) > 1$ pour $p > 3$. En toute dimension, il est facile de montrer que la fonction c_d est croissante. M. Sakai démontre que $c_d(p)$ est finie en toute dimension d et pour tout exposant p et il donne des estimations de $c_d(p)$ quand p tend vers l'infini. Il prouve que $c_d(p) = 1$ pour $p \leq d$ et que $c_d(p) > 1$ pour $p > d + 2$. Il réussit également à montrer, par une preuve ardue et ingénieuse, que $c_d(p) = 1$ pour $p \leq d + 2^{1-d}$ et il détermine les domaines extrêmaux quand $c_d(p) = 1$. Enfin, M. Sakai énonce la

CONJECTURE (Sakai). – *En toute dimension $d \geq 1$, $c_d(d + 2) = 1$.*

Revenons en dimension $d = 2$ et traduisons les résultats de M. Sakai en termes de fonctions holomorphes. Le procédé utilisé par S. Kobayashi pour établir (1) permet de voir que toute fonction holomorphe f sur U vérifie l'inégalité

$$\|f\|_p^2 \leq c_2(p)^2 (1/\pi)\,\text{Aire}\ f(U).$$

Réciproquement, S. Kobayashi [8] a calculé directement la norme $\|f\|_4$ d'une fonction analytique injective f sur le disque unité U et il a montré que

$$\|f\|_4^2 \leq (1/\pi)\,\text{Aire}\ f(U).$$

D'après le théorème de l'invariance conforme de Riemann, tout domaine plan simplement connexe D est conformément équivalent au disque unité c'est-à-dire qu'il existe une application holomorphe injective f qui envoie

U sur D. Il est assez facile de montrer que $h_4(0)$ coïncide alors avec $\|f\|_4^4$ c'est-à-dire que la constante $c = 1$ vérifie l'inégalité (3) pour n'importe quel domaine simplement connexe. Nous dirons que la constante de Sakai restreinte aux domaines simplement connexes du plan vaut $c_2^s(4) = 1$. Jusqu'ici, le cas des domaines du plan qui ne sont pas simplement connexes reste ouvert.

Il nous reste pour terminer ce paragraphe à formuler le problème de M. Sakai en utilisant la distribution du lieu de sortie du domaine D par un mouvement brownien. Cette nouvelle description fournit un cadre naturel à ce problème et elle suggère des extensions. On peut trouver les résultats « browniens » classiques que nous utilisons ici dans le livre de S. Port et C. Stone [12]. Commençons par préciser quelques notations.

Notations. – Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard dans $\mathbf{R}^d$. La mesure de probabilité $\mathbf{P}_x$ est la mesure de Wiener partant d'un point x de $\mathbf{R}^d$ donné. Soit $T(A)$ le premier instant d'atteinte de A par le mouvement brownien c'est-à-dire

$$T(A) = \inf\{t > 0, W_t \in A\}$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$. Nous noterons par 1_A ou par $1\,(A)$ suivant les cas la fonction indicatrice de A et par $A^c = \mathbf{R}^d \backslash A$ le complémentaire de A. Ainsi, $T(A^c)$ est le premier instant de sortie de A par le mouvement brownien. T est une abréviation pour $T(D^c)$ qui est le premier instant de sortie de D par le mouvement brownien. Enfin, B_r ou $B(r)$ suivant les cas est la boule de rayon r centrée en l'origine et T_r ou $T(r)$ suivant les cas désigne $T(B_r^c)$. Il est bien connu que le temps d'arrêt T_r est presque sûrement fini et admet des moments de tous ordres pour tout $r > 0$, *voir* [12]. Un point x du bord ∂D est dit régulier si T est nul presque sûrement sous $\mathbf{P}_x$ c'est-à-dire si le mouvement brownien partant de x sort instantanément de D.

La constante de Sakai $c_d(p)$ est caractérisée par l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2. – *$c_d(p) = \sup\{(\mathbf{E}_0\|W_T\|^p)^{1/p}; D \subset \mathbf{R}^d, 0 \in D, D$ borné, $r(D) = 1\}$.*

Démonstration. – Notre démonstration utilise l'expression probabiliste de la solution d'un problème de Dirichlet classique (première étape). La partie intéressante du résultat, que nous utiliserons constamment par la suite, est d'affirmer que l'on peut se restreindre à des domaines bornés réguliers (deuxième étape). Nous notons $f(x) = \|x\|^p$; la fonction f est continue et sous-harmonique sur $\mathbf{R}^d$ tout entier.

Première étape. – Soit D un domaine borné et régulier. La solution du problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ sur } D, \quad u = f \text{ sur } \partial D$$

est $u_f(x) = \mathbf{E}_x f(W_T)$, *voir* [12]. La fonction $(f - u_f)$ est sous-harmonique sur D et nulle sur ∂D donc $u_f \geq f$ sur D et u_f est bien le plus petit majorant harmonique de f sur D.

Deuxième étape. – Soit $k(p)$ la borne supérieure de $\mathbf{E}_0 f(W_T)$ sur l'ensemble des domaines bornés réguliers. Si $k(p)$ est infinie, il n'y a rien à montrer. Supposons que $k(p)$ est finie. On doit montrer que $k(p)$ majore aussi $\mathbf{E}_0 f(W_T)$ quand D est un domaine non borné. Soit D un domaine tel que $r(D) = 1$. Il existe une suite croissante d'ouverts réguliers bornés D_n dont la réunion est D tout entier. Le rayon équivalent de chaque D_n est inférieur à 1 donc, en notant S_n le temps de sortie de D_n, on obtient

$$\mathbf{E}_0 f(W(S_n)) \leq k(p)\, r(D_n)^p \leq k(p).$$

Le temps de sortie T est la limite croissante des S_n, cette limite est finie presque sûrement donc le lemme de Fatou assure que l'on a

$$\mathbf{E}_0 f(W_T) \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbf{E}_0 f(W(S_n)) \leq k(p)$$

c'est-à-dire que $k(p)$ convient bien pour les domaines non bornés.

Montrons à présent que la fonction $u(x) = \mathbf{E}_x f(W_T)$ est bien le plus petit majorant harmonique de f même quand D n'est pas borné. Tout d'abord, u est évidemment harmonique car $u(0)$ est fini et u vérifie la propriété de la moyenne donc u est finie partout. Ensuite, u majore f sur D tout entier. En effet, si l'on définit une fonction u_n sur D en posant $u_n(x) = \mathbf{E}_x f(W(S_n))$ sur D_n et $u_n(x) = 0$ ailleurs, on obtient une suite u_n croissante et chaque u_n majore f sur D_n. Il nous suffit de vérifier que le processus $(f(W_{T \wedge t}))_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable pour tout point de départ du mouvement brownien pour déduire de ce qui précède que u_n converge en croissant vers u sur D tout entier et donc que u majore bien f sur D.

Il suffit par exemple de vérifier que $f(W_T)^{q/p} = \|W_T\|^q$ est intégrable pour un $q > p$. Ramenons-nous au cas d'un mouvement brownien partant de l'origine : si le mouvement brownien part de x, son lieu de sortie W_T suit la loi de $x + W'_{T'}$ pour un mouvement brownien $(W'_t)_{t \geq 0}$ partant de l'origine et pour T' désignant le temps de sortie de ce mouvement brownien hors du domaine $D' = D - x$. De plus, $\|x + w\|^q$ est inférieur à

$2^q(\|x\|^q + \|w\|^q)$ et le rayon équivalent de D' est égal à celui de D donc une nouvelle application du lemme de Fatou montre que l'on a toujours

$$\mathbf{E}_x f(W_T)^{q/p} = \mathbf{E}_0 \|x + W'_{T'}\|^q \leq 2^q(\|x\|^q + k(q)).$$

Finalement, le (ii) de notre proposition 11 montre (en ne manipulant que des domaines bornés) que $k(q)$ est fini, on a donc terminé.

Comparons enfin u à un majorant harmonique v quelconque de f sur D. Si x est un point de D, alors x est un point de D_n pour un certain n et on a

$$v(x) = \mathbf{E}_x v(W(S_n)) \geq \mathbf{E}_x f(W(S_n)) = u_n(x)$$

donc $v(x) \geq \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ ce qui montre que u est le plus petit majorant harmonique cherché. ∎

Remarque. – Soit D un domaine ne contenant pas forcément l'origine et soit x un point de D. Alors le domaine $D - x = \{y - x\,;\, y \in D\}$ contient l'origine et $r(D - x) = r(D)$. La constante de Sakai vérifie donc

$$c_d(p) = \sup\,\{(\mathbf{E}_x \|W_T - x\|^p)^{1/p}\,;\, x \in D,\, D \subset \mathbf{R}^d,\, r(D) = 1\}.$$

∎

2. LES OUTILS BROWNIENS

Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel, le processus $\|W_t\|^2 - d \cdot t$ est une martingale bien connue. On peut généraliser ce résultat en construisant pour tout entier n une martingale réelle qui est un polynôme en t et en $\|W_t\|^2$ homogène de degré n. Il suffit pour cela d'étendre la construction classique de la dimension 1 qui est basée sur les polynômes de Hermite et qui est exposée par exemple au chapitre IV.3 du livre de Revuz et Yor [13].

PROPOSITION 3. – *Pour* $0 \leq p \leq n$ *des entiers, posons*

$$m(n,p) = 2^p\, C_n^p\, \frac{\Gamma(n + (d/2))}{\Gamma(n + (d/2) - p)}$$

et

$$M_n(t) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, m(n,p)\, t^p\, \|W_t\|^{2n-2p}.$$

Alors M_n est une martingale et on a la relation

$$\|W_t\|^{2n} = \sum_{p=0}^{n} m(n,p)\, t^p\, M_{n-p}(t).$$

Nous omettons la preuve qui est une conséquence facile de la formule d'Itô. On trouve par exemple

$$M_1(t) = \|W_t\|^2 - d \cdot t$$

et

$$M_2(t) = \|W_t\|^4 - 2(d+2) \cdot t \cdot \|W_t\|^2 + d(d+2) \cdot t^2.$$

Nous allons utiliser de façon cruciale l'inégalité de réarrangement de H. Brascamp, E. Lieb et J. Luttinger [5]. Nous rappelons sans preuve ce résultat important puis nous l'appliquons au calcul de la constante de Sakai $c_d(p)$ quand $p = 2$.

DÉFINITION 4. – *Soit f une fonction mesurable positive et intégrable sur $\mathbf{R}^d$. On appelle* réarrangement *de f toute fonction f^* mesurable définie sur $\mathbf{R}^d$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

– $\|x\| = \|x'\| \Rightarrow f^*(x) = f^*(x')$; $\|x\| \geq \|x'\| \Rightarrow f^*(x) \leq f^*(x')$.

– *Pour tout $t > 0$, les ensembles $\{f \geq t\}$ et $\{f^* \geq t\}$ ont la même mesure de Lebesgue.*

Remarque. – Rappelons que f est intégrable et positive. Alors le réarrangement f^* existe et est essentiellement unique. Le deuxième point de la définition de f^* est équivalent au fait que, pour toute fonction g mesurable et positive telle que $g \circ f$ est intégrable, la fonction $g \circ f^*$ est également intégrable avec $\int g \circ f(x)\, dx = \int g \circ f^*(x)\, dx$.

Notations. – Quand D est un borélien de volume fini, le réarrangement de sa fonction indicatrice 1_D est la fonction indicatrice 1_B de la boule B centrée en l'origine et de même volume. On note D^* cette boule et T^* le temps de sortie du mouvement brownien hors de D^*.

L'inégalité de réarrangement que nous utilisons est donnée par le

THÉORÈME 5 (Brascamp, Lieb, Luttinger). – *Fixons des entiers $d \geq 1$, $k \geq 1$ et $n \geq 1$. Pour chaque $1 \leq i \leq k$, on fixe un vecteur a_i de $\mathbf{R}^n$, une fonction l_i définie sur $\mathbf{R}^{d \times n}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et donnée par $l_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum_p a_{ip} x_p$ et enfin une fonction mesurable f_i positive sur*

$\mathbf{R}^d$. *On a alors*

$$\int_{\mathbf{R}^{d\times n}} dx_1 \cdots dx_n \prod_{i=1}^{k} f_i(l_i(x_1, \cdots, x_n))$$
$$\leq \int_{\mathbf{R}^{d\times n}} dx_1 \cdots dx_n \prod_{i=1}^{k} f_i^*(l_i(x_1, \cdots, x_n)).$$

Une conséquence directe est le

THÉORÈME 6. – *Soit D un domaine de volume fini. Pour tout point x de D, T sous $\mathbf{P}_x$ est stochastiquement dominé par T^* sous $\mathbf{P}_0$:*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}_x(T > t) \leq \mathbf{P}_0(T^* > t).$$

Démonstration. – L'événement $\{T > t\} = \{\forall s \leq t,\, W_s \in D\}$ est inclus dans l'événement $\{\forall p \leq n,\, W_{t\cdot p/n} \in D\}$ pour tout entier $n \geq 1$. Évaluons la mesure de cette version discrétisée de $\{T > t\}$. Le noyau de transition du mouvement brownien pendant un temps s admet comme densité de x_1 à x_2 la fonction $p_s(x_1 - x_2)$ où p_s est radialement symétrique et décroissante (la fonction p_s est simplement la cloche de Gauss centrée habituelle). En posant $x_0 = x$, on obtient

$$\mathbf{P}_x(\forall p \leq n,\, W_{t\cdot p/n} \in D) = \int_{\mathbf{R}^{d\times n}} \prod_{p=1}^{n} dx_p \cdot 1(x_p \in D) \cdot p_{t/n}(x_p - x_{p-1}).$$

La fin de la preuve est directe et consiste simplement à utiliser le résultat de H. Brascamp *et al.* pour des fonctions f_i and l_i convenables.

Pour $f = 1(D)$ et $l(x_1, \cdots, x_n) = x_p$, le réarrangement est $f^* = 1(D^*)$.

Pour $f = p_{t/n}$ et $l(x_1, \cdots, x_n) = x_p - x_{p-1}$ avec $p \geq 2$, le réarrangement est $f^* = p_{t/n}$.

Pour $f(y) = p_{t/n}(y - x)$ et $l(x_1, \cdots, x_n) = x_1$, le réarrangement est $f^*(y) = p_{t/n}(y)$.

En notant maintenant $x_0 = 0$, on a montré

$$\mathbf{P}_x(\forall p \leq n,\, W_{t\cdot p/n} \in D) \leq \int_{\mathbf{R}^{d\times n}} \prod_{p=1}^{n} dx_p \cdot 1(x_p \in D^*) \cdot p_{t/n}(x_p - x_{p-1})$$
$$= \mathbf{P}_0(\forall p \leq n,\, W_{t\cdot p/n} \in D^*).$$

On termine en prenant la limite inférieure du membre de droite évalué sur les indices n puissances croissantes de 2 par exemple. Les trajectoires du processus $(\|W_s\|)_{s\geq 0}$ sont continues donc la limite décroissante de l'événement de droite est contenue dans $\{\forall s < t,\ \|W_s\| \leq r\}$ où r désigne le rayon équivalent de D, et la probabilité de cet événement vaut exactement

$$\mathbf{P}_0(T(\overline{B}_r^c) \geq t) = \mathbf{P}_0(T_r > t) = \mathbf{P}_0(T^* > t).$$

■

On en déduit par intégration en t et par invariance d'échelle du mouvement brownien le

COROLLAIRE 7. – *Pour tout domaine D de volume fini, tout point x de D et toute fonction f mesurable positive et croissante sur $\mathbf{R}^+$, on a :* $\mathbf{E}_x f(T) \leq \mathbf{E}_0 f(T^*)$. *On obtient en particulier une majoration des moments de T :* $\mathbf{E}_x T^n \leq r(D)^{2n}\mathbf{E}_0 T_1^n$.

On peut calculer par récurrence les moments $\mathbf{E}_0 T_1^n$ en appliquant le théorème d'arrêt de Doob aux martingales M_n considérées entre les instants 0 et T_1. Nous utiliserons les moments suivants :

$$\mathbf{E}_0 T_1 = \frac{1}{d}, \quad \mathbf{E}_0 T_1^2 = \frac{d+4}{d^2(d+2)},$$

$$\mathbf{E}_0 T_1^4 = \frac{d^4 + 26d^3 + 288d^2 + 1536d + 2304}{d^4(d+2)^2(d+4)(d+6)}.$$

Remarque 8. – Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, le théorème 2.1 de [3] permet de retrouver le théorème 6. C. Bandle démontre que si $u(x,t)$ désigne la solution du système

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Delta u(x,t) + h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) && \text{pour } x \in D,\ t > 0,\\ &u(x,t) = 0 && \text{pour } x \in \partial D,\ t \geq 0,\\ &u(x,0) = f(x) && \text{pour } x \in \overline{D},\end{aligned}$$

pour des fonctions f et h assez régulières et pour f s'annulant au bord ∂D de D, et si v est solution du même système où D^*,f^* et h^* remplacent D, f et h, alors on a

$$\sup_{x\in D} u(x,t) \leq \sup_{x\in D^*} v(x,t) = v(0,t)$$

pour tout $t \geq 0$. Ce résultat pour $h = 0$ et $f = 1$ est équivalent au théorème 6. L'idée consiste évidemment à appliquer le résultat de C. Bandle aux fonctions en plateau

$$f_a(x) = 1 - \left[(1 - a\,d(x,\partial D))^+\right]^2$$

avec $a > 0$ et à $h = 0$, ce qui fournit une solution $u_a \leq u$. De plus, $f_a \leq 1_D$ donc $f_a^* \leq 1(D^*)$ et $v_a \leq v$. On obtient ainsi $u_a(x,t) \leq v(0,t)$ pour tous $x \in D$, $t \geq 0$ et $a > 0$. Il reste à remarquer que f_a est supérieure à $1(D^a)$ où D^a est l'ouvert

$$D^a = \{x \in D\,;\, d(x, \partial D) > 1/a\}$$

pour démontrer l'encadrement

$$\mathbf{P}_x(T(D^a) > t) \leq u_a(x,t) \leq u(x,t) = \mathbf{P}_x(T(D) > t).$$

Si $T(D) > t$, on sait que $W_s \in D$ pour tout $s \leq t$. Les trajectoires du mouvement brownien sont continues donc les ensembles $\{W_s\,;\, 0 \leq s \leq t\}$ sont fermés et il existe un $a > 0$ tel que $W_s \in D^a$ pour tout $s \leq t$ c'est-à-dire que l'on a en fait $T(D^a) > t$. On a montré que $u_a(x,t)$ convergeait simplement vers $u(x,t)$ quand a tend vers l'infini et le théorème 6 s'en déduit. ■

Le théorème 6 donne immédiatement la valeur de la constante de Sakai pour $p = 2$ comme suit : appliquons le théorème d'arrêt de Doob à la martingale M_1 entre les instants 0 et T ; il vient

$$\mathbf{E}_0\|W_T\|^2 = \mathbf{E}_0(M_1(T) + d \cdot T) = \mathbf{E}_0(M_1(0) + d \cdot T) = \mathbf{E}_0(dT)$$

et on en déduit

$$c_d(2)^2 = \sup\,\{\mathbf{E}_0(dT)\,;\, r(D) = 1\} = \mathbf{E}_0(dT_1) = 1.$$

Remarque 9. – En fait, il n'est pas nécessaire de faire appel à l'inégalité de réarrangement dans toute sa généralité pour montrer le seul résultat utilisé dans la preuve de $c_d(2) = 1$ c'est-à-dire $\mathbf{E}_x T \leq \mathbf{E}_0 T^*$. Un théorème de M.-Th. Kohler-Jobin [9] fournit une autre démonstration. Nous rappelons maintenant sans démonstration ce résultat et nous montrons comment l'appliquer.

Soit u_a^D la solution du problème de Dirichlet $\Delta u + au + 1 = 0$ sur D et $u = 0$ sur ∂D. Notons

$$Q(D,a) = \int_D u_a^D(x)\,dx.$$

Le rayon a-équivalent $R(a)$ est le rayon d'une boule B telle que $Q(D,a) = Q(B,a)$. Cette notion de rayon a-équivalent est l'outil principal de M.-Th. Kohler-Jobin qui utilise le fait remarquable suivant : la fonction

$$a \mapsto R(a)$$

est une fonction décroissante sur son domaine de définition. Par ailleurs, $R(a)$ tend vers $r(D)$ quand a tend vers $-\infty$. Pour $a = 0$, $u_0^D(x) = \mathbf{E}_x T/2$. Enfin, l'examen de la preuve de M.-Th. Kohler-Jobin montre que la fonction u_a^D est toujours majorée par le maximum de la fonction u_a^B correspondant à la boule $B = B(R(a))$. Il reste à tout remettre dans le bon ordre. Si B est la boule de rayon $R(0)$ centrée en l'origine, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(dT) &= 2d\,u_0^D(x) \leq 2d\,\sup u_0^B = 2d\,u_0^B(0)\\ &= R(0)^2 \leq R(-\infty)^2 = r(D)^2 = \mathbf{E}_0(dT^*).\end{aligned}$$

Dans cette preuve, le seul résultat auxiliaire utilisé est le suivant : soit u positive sur D et nulle sur ∂D, soit D^* la boule de même volume que D et u^* le réarrangement de u. Notons ∇u le gradient de u et ∇u^* celui de u^*. Alors la transformation de réarrangement $u \mapsto u^*$ diminue le gradient au sens où l'on a toujours

$$\int_D \|\nabla u(x)\|^2\,dx \geq \int_{D^*} \|\nabla u^*(x)\|^2\,dx.$$

A présent, cette dernière inégalité isopérimétrique est beaucoup plus simple. On la démontre pour n'importe quelle fonction positive croissante et convexe en lieu et place de $t \mapsto t^2$ par une simple application de l'inégalité de Jensen comme dans [4]. Par contre, l'inégalité de réarrangement semble nécessaire pour obtenir la comparaison des lois de T et de T^*. ■

Nous donnons à présent deux extensions directes de ce qui précède.

– On peut reprendre le principe de la démonstration du théorème 6 pour montrer le

THÉORÈME 10. – *Soit f une fonction sous-harmonique et nulle à l'origine. Supposons que le laplacien Δf de f est intégrable et soit g une fonction nulle à l'origine telle que $\Delta g = (\Delta f)^*$. Alors tout domaine D de volume fini vérifie*

$$\mathbf{E}_0 f(W_T) \leq \mathbf{E}_0 g(W_{T^*}).$$

En particulier, si f est une fonction sous-harmonique dont le laplacien Δf est une fonction radiale, décroissante et intégrable, tout domaine D de volume fini vérifie

$$\mathbf{E}_0 f(W_T) \leq \mathbf{E}_0 f(W_{T^*}).$$

On peut en particulier imposer que g soit radiale. On doit alors simplement résoudre l'équation différentielle

$$r\,G''(r) + (d-1)\,G'(r) = r\,F(r) \qquad \text{et} \qquad G(0) = 0$$

pour $F(\|x\|) = (\Delta f)^*(x)$ et poser $g(x) = G(\|x\|)$.

– On peut déduire rapidement du corollaire 7 l'**inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn**. Cette inégalité bien connue stipule que la première valeur propre $\lambda_1(D)$ du Laplacien sur un domaine D avec condition de Dirichlet au bord doit vérifier

$$\lambda_1(D) \geq \lambda_1(D^*).$$

La formulation en langage courant de cette inégalité est que les tambours circulaires sont, pour une aire donnée, ceux qui ont le son le plus grave. Il suffit pour la démontrer d'utiliser la caractérisation probabiliste de $\lambda_1(D)$:

$$\lambda_1(D) = \sup \{\lambda > 0\,;\, \mathbf{E}_x(e^{\lambda T}) < +\infty\}$$

(où le point x de D est arbitraire) et de remarquer que $t \mapsto e^{\lambda t}$ est croissante pour $\lambda \geq 0$.

3. LES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DE c_d

Nous donnons la preuve probabiliste de quelques propriétés de c_d. Remarquons en particulier la simplicité du raisonnement qui assure que $c_d(p)$ est toujours finie.

PROPOSITION 11 (Sakai). – *En toute dimension d, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) *La fonction* $p \mapsto \log c_d(1/p)$ *est convexe et décroissante. Donc* c_d *est croissante.*

(ii) *Pour tout p, la constante* $c_d(p)$ *est finie.*

Démonstration. – (i) Pour tout domaine borné D contenant l'origine, posons

$$c(D,p) = (\mathbf{E}_0 \|W_T\|^p)^{1/p}.$$

La mesure de probabilité m image de $\mathbf{P}_0$ par l'application $\|W_T\|$ est une mesure sur $\mathbf{R}^+$ et $c(D,\cdot)$ est sa fonction des moments c'est-à-dire que l'on a

$$c(D,p) = \left(\int_0^{+\infty} r^p\, dm(r)\right)^{1/p}.$$

Comme toute fonction des moments, $c(D,\cdot)$ est croissante ; en passant au supremum sur tous les domaines D de rayon équivalent 1, on voit que c_d est croissante. De même, d'après une propriété générale des fonctions de moments, $p \mapsto \log c(D,1/p)$ est convexe donc $p \mapsto \log c_d(1/p)$ aussi.

(ii) Nous montrons que $c_d(2p)$ est finie dès que $p \geq 1$ est entier. Soit D un domaine borné de rayon équivalent égal à 1 tel que $\mathbf{E}_0||W_T||^{2p} \geq 1$. Introduisons la martingale M_p et utilisons l'inégalité de Hölder pour les exposants q/p et $1 - q/p$ avec $1 \leq q \leq p$. Il vient

$$\mathbf{E}_0||W_T||^{2p} = \mathbf{E}_0\left(\sum_{q=1}^{p}(-1)^{q+1}\, m(p,q)\, T^q||W_T||^{2(p-q)}\right)$$
$$\leq \sum_{q=1}^{p} m(p,q)\,(\mathbf{E}_0T^p)^{q/p}\,(\mathbf{E}_0||W_T||^{2p})^{1-q/p}.$$

Or, $\mathbf{E}_0||W_T||^{2p} \geq 1$ et tout moment de T est borné par le moment du même ordre de T_1 donc

$$(\mathbf{E}_0||W_T||^{2p})^{1/p} \leq \sum_{q=1}^{p} m(p,q)\,(\mathbf{E}_0T_1^p)^{q/p}.$$

Le membre de droite est une constante et l'inégalité est valable en particulier pour la boule B_1 donc le membre de droite est plus grand que 1. On voit qu'on a construit de cette façon une majoration de $\mathbf{E}_0||W_T||^{2p}$ valable pour tout domaine D tel que $r(D) = 1$ et donc du même coup une majoration de $c_d(2p)^2$. Enfin, si p n'est pas un entier pair, $c_d(p)$ est finie car la fonction c_d est croissante. ■

Remarque. – On peut majorer $c_d(p)$ plus directement en utilisant les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy. Cette méthode nous a été indiquée par R. Durrett. En effet, $\mathbf{E}_0||W_T||^p$ est contrôlé par un multiple de $\mathbf{E}_0T^{p/2}$ indépendant du domaine d'après Burkholder-Davis-Gundy, $\mathbf{E}_0T^{p/2}$ est toujours inférieur au produit $r(D)^p\,\mathbf{E}_0T_1^{p/2}$ et ceci fournit bien une majoration de $c_d(p)$. ■

4. LE CAS $p \leq d$

On montre que $c_d(p) = 1$ pour $p \leq d$ et on trouve tous les domaines extrêmaux dans ce cas. La formulation brownienne simplifie grandement la preuve de M. Sakai du fait que $c_d(d) = 1$. La preuve du fait que les domaines extrêmaux sont essentiellement des boules est nouvelle.

THÉORÈME 12 (Sakai). – *Soit $p \leq d$. Tout domaine D de $\mathbf{R}^d$ contenant l'origine vérifie*

$$\mathbf{E}_0||W_T||^p \leq r(D)^p.$$

Rappelons que B_r désigne la boule de rayon r centrée en l'origine. Les fonctions u_r, w_r et v_r sont définies sur $D \cap B_r$ par

$$u_r(x) = \mathbf{P}_x(\,\|W_T\| > r\,),$$

$$w_r(x) = \mathbf{P}_x(\,T_r < T\,) \qquad \text{et} \qquad v_r(x) = \mathbf{P}_x(\,W(T_r) \in D\,).$$

Le théorème repose sur le lemme trivial suivant.

LEMME 13. – *Les fonctions u_r, v_r et w_r sont harmoniques sur $D \cap B_r$. De plus, $u_r \leq w_r \leq v_r$.*

Démonstration du lemme. – Chacune des trois fonctions considérées est de la forme

$$x \mapsto \mathbf{P}_x(W(T(A^c)) \in C)$$

pour certains ensembles A et C appropriés, elle est donc harmonique sur l'intérieur de A. Chaque ensemble A contient $D \cap B_r$ donc les trois fonctions sont harmoniques sur cet ouvert. Les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement continues. Une figure permet donc de se convaincre facilement des implications suivantes :

$$W(T_r) \notin D \Rightarrow T \leq T_r \Rightarrow W_T \in \overline{B_r}.$$

Finalement, $1 - v_r \leq 1 - w_r \leq 1 - u_r$.

Démonstration du théorème. – Montrons que u_r (resp. v_r) correspond au membre de gauche (resp. au membre de droite) de l'inégalité du théorème. Supposons que D est borné. La fonction $r \mapsto u_r(0)$ est la fonction de répartition de $\|W_T\|$ donc

$$\mathbf{E}_0\|W_T\|^p = \int_0^{+\infty} p\,r^{p-1}\,u_r(0)\,dr.$$

Calculons l'intégrale analogue au membre de droite en y remplaçant $u_r(0)$ par $v_r(0)$. Les trajectoires du mouvement brownien sont isotropes donc $W(T_r)$ est uniformément distribuée sur ∂B_r quand le mouvement brownien part du centre de la boule. Par conséquent, $v_r(0)$ est la mesure relative de la portion de ∂B_r située dans D. Notons $d\sigma_r$ la mesure uniforme sur ∂B_r et σ la masse totale de la sphère unité ∂B_1. La masse totale de ∂B_r est alors σr^{d-1}. On en déduit

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} p\,r^{p-1}\,v_r(0)\,dr\\ &\quad = \int_0^{+\infty} p\,r^{p-1}\,dr \int_{\partial B_r \cap D} \frac{d\sigma_r(x)}{\sigma r^{d-1}} = \frac{p}{\sigma}\int_D \|x\|^{p-d}\,dx.\end{aligned}$$

Pour $p = d$, le membre de droite vaut $(d/\sigma) \times \text{Vol } D = r(D)^d$ et le lemme fournit $u_r \leq v_r$ qui est le dernier pas dans la preuve du théorème pour $p = d$. Si $p < d$, la fonction c_d est croissante donc $c_d(p) = 1$. ■

Caractérisons à présent les ensembles extrêmaux. Nous utilisons une description brownienne des ensembles polaires (*voir* par exemple [12]) : un ensemble borélien E est polaire si et seulement si le mouvement brownien ne touche jamais E c'est-à-dire si et seulement si $T(E)$ est presque sûrement infini pour un point de départ du mouvement brownien arbitraire. En dimension $d = 2$, les ensembles polaires sont les ensembles de capacité logarithmique nulle.

PROPOSITION 14 (Sakai). – *Pour $p \leq d$, les domaines extrêmaux sont de la forme $D = B \backslash E$ où B est une boule et E est un ensemble polaire.*

Démonstration. – D'après le calcul qui figure dans notre preuve de l'égalité $c_d(d) = 1$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine soit extrêmal est que $u_r(0) = v_r(0)$ presque sûrement en $r \geq 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Admettons pour l'instant le lemme suivant.

LEMME 15. – *Si $v_r(0) = u_r(0)$ et si $D \backslash B_r$ n'est pas vide, alors $E(r) = B_r \backslash D$ est polaire.*

Terminons la démonstration de la proposition : soit $r = \sup(\|x\|, x \in D)$ et $r_n < r$ une suite de nombres réels de limite r telle que $v_{r_n}(0) = u_{r_n}(0)$ pour tout n. Soit $B = B_r$ et E la réunion des ensembles $E(r_n)$. Alors on a $D = B \backslash E$ et l'ensemble E est polaire car E est une réunion dénombrable d'ensembles polaires.

Démonstration du lemme. – On a trivialement

$$v_r(0) - u_r(0) \geq \mathbf{P}_0(W(T_r) \in D, \, T \leq T_r).$$

Par ailleurs, $\{T \leq T_r\} = \{T(B_r \backslash D) \leq T_r\}$ pour tout point de départ $x \in B_r$. Pour tout sous-ensemble E de B_r, posons

$$Q(E) = \mathbf{P}_0(W(T_r) \in D, \, T(E) \leq T_r).$$

Ainsi, $Q(E)$ est la probabilité que le mouvement brownien partant de l'origine sorte de B_r en un point de D en étant passé par E auparavant. Montrons que E est polaire dès que $Q(E) = 0$. En d'autres termes, nous voulons montrer que le mouvement brownien ne passe pas par E dès que ses trajectoires sortant de B_r en un point de D ne passent par E avant leur sortie de B_r. On terminera la preuve en choisissant un réel r satisfaisant les hypothèses du lemme et $E = B_r \backslash D$. Jusqu'ici, E était un sous-ensemble quelconque de B_r. Le mouvement brownien est fortement markovien donc on peut utiliser la propriété de Markov au temps $T(E) \wedge T_r$ comme suit :

$$\begin{aligned} Q(E) &= \mathbf{E}_0\big(\mathbf{E}_{W_{T(E)}}[1(W(T_r) \in D)] \cdot 1(T(E) \leq T_r)\big) \\ &= \mathbf{E}_0\big(\mathbf{P}_{W_{T(E)}}(W(T_r) \in D) \cdot 1(T(E) \leq T_r)\big). \end{aligned}$$

La mesure relative de $\partial B_r \cap D$ dans ∂B_r est strictement positive car D est ouvert donc la probabilité $\mathbf{P}_x(W(T_r) \in D)$ est strictement positive pour tout point de départ x dans B_r. Supposons à présent que $Q(E) = 0$. On déduit de ce qui précède que $T_r < T(E)$ presque sûrement c'est-à-dire que le mouvement brownien ne touche jamais E avant T_r.

Fixons $s > 0$ et posons $E_s = E \cap \overline{B}(r - 2s)$. Si E_s est toujours polaire, E est une réunion dénombrable d'ensembles polaires et tout fonctionne. Montrons que E_s est toujours polaire. Soit x dans B_r. En conditionnant comme ci-dessus, on montre

$$\mathbf{P}_x(T(E_s) < T_r) \leq \mathbf{P}_x(T(E) < T_r) = 0.$$

Rappelons que le λ-potentiel d'équilibre de E_s en $x \in B_r$ est défini comme étant

$$\mathbf{E}_x \exp(-\lambda T(E_s)).$$

Nous avons montré qu'il est majoré par $\mathbf{E}_x \exp\,(-\lambda T_r)$si $\|x\| \leq r - s$ et par $\mathbf{E}_x \exp\,(-\lambda T_{r-2s})$ si $r - s \leq \|x\| < r$. Le maximum du λ-potentiel d'équilibre de E_s sur B_r et par conséquent sur $\mathbf{R}^d$ tout entier est strictement inférieur à 1 donc la λ-capacité de E_s est nulle ([12], pages 42-43) et E_s est polaire. ■

5. LE CAS $p = 4$

S. Kobayashi [8] montre que la constante de Sakai pour $d = 2$ et $p = 4$ si l'on se restreint aux domaines simplement connexes est $c_2^s(4) = 1$. Ce résultat semble indiquer que la conjecture de Sakai en dimension $d = 2$ est correcte c'est-à-dire que l'on a $c_2(4) = 1$. Signalons par ailleurs que nous savons calculer explicitement la constante de Sakai pour des couronnes concentriques en dimensions $d = 2$ et $d = 4$ et qu'elle vaut alors 1 également. Le cas $d = 2$ est particulièrement intéressant car les couronnes planes ne sont pas simplement connexes donc leur cas n'est couvert par aucun autre résultat. Nous ne reprenons pas ce calcul.

Nous utilisons les résultats concernant le mouvement brownien que nous avons rappelés ci-dessus pour estimer directement $c_d(4)$ en toute dimension $d \geq 1$. La martingale M_2 intervient de façon cruciale. Chacune de nos techniques peut être adaptée à l'étude de $c_d(2p)$ en remplaçant simplement M_2 par la martingale M_p. Le principe des démonstrations reste le même mais celles-ci deviennent alors plus longues.

Les estimations directes de $c_d(p)$ que nous démontrons pour $p = 4$ sont entièrement nouvelles. Il semble difficile de les atteindre en utilisant les techniques analytiques développées par M. Sakai et S. Kobayashi. Les résultats que nous démontrons dans cette section sont regroupés ci-dessous [pour le (ii), rappelons que les valeurs de $\hat{c}_3(4)$ et de $c_3^s(4)$ sont inconnues].

THÉORÈME 16. – *Pour $p = 4$, on dispose des majorations suivantes :*

(i) $c_d(4)$ *est majorée par une fonction explicite de la dimension d. Nous exprimons ci-dessous cette fonction comme une fonction de d et des premiers moments du temps de sortie T_1 de la boule unité de $\mathbf{R}^d$. On obtient par exemple $c_2(4) < 1,80$.*

(ii) *La constante de Sakai $c_d^*(p)$ restreinte aux domaines étoilés autour de l'origine vérifie*

$$c_d^*(4) \leq \sqrt{1 + 4/d}.$$

On obtient par exemple $c_3^*(4) \leq \sqrt{7/3} < 1,53$.

(iii) *La constante de Sakai $c_d'(p)$ restreinte aux domaines D tels que $D \subset B(\sqrt{2}r(D))$ vérifie*

$$c_d'(4) \leq \sqrt[4]{3 + 8/d}.$$

On obtient par exemple $c_2'(4) \leq \sqrt[4]{7} < 1,63$.

Nous utilisons la martingale M_2 pour démontrer (i) comme nous avions utilisé M_1 pour traiter le cas de l'exposant $p = 2$. La différence essentielle tient au fait qu'il est difficile de manipuler la loi conjointe de (T, W_T) qui intervient alors. C'est pourquoi nous obtenons seulement des estimations de $c_d(4)$. Notre technique fonctionne en toute dimension.

Démonstration de (i). – Notons $a^4 = \mathbf{E}_0 \|W_T\|^4$. Le théorème d'arrêt de Doob appliqué à la martingale M_2 entre les instants 0 et T donne

$$a^4 = 2(d+2)\,\mathbf{E}_0(T\|W_T\|^2) - d(d+2)\,\mathbf{E}_0 T^2.$$

Le terme rectangle peut être majoré à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0(T\|W_T\|^2) &\leq (\mathbf{E}_0(T^2\|W_T\|^2))^{1/2}\,(\mathbf{E}_0\|W_T\|^2)^{1/2}\\ &\leq (\mathbf{E}_0 T^4)^{1/4}\,(\mathbf{E}_0\|W_T\|^4)^{1/4}\,(\mathbf{E}_0(dT))^{1/2}.\end{aligned}$$

Donc $a^4 - ba + e \leq 0$ avec

$$b = 2(d+2)(\mathbf{E}_0(dT))^{1/2}\,(\mathbf{E}_0 T^4)^{1/4} \qquad \text{et} \qquad e = d(d+2)\mathbf{E}_0 T^2.$$

Supposons temporairement que D est la boule unité. On obtient $a^4 - b_1 a + e_1 \leq 0$ où b_1 et e_1 sont les valeurs de b et e pour la boule unité. De manière évidente, la suite du raisonnement ne peut donner un meilleur résultat que cette condition.

Revenons au cas général et cherchons une relation en a valable pour tout domaine D indépendamment des valeurs particulières prises par b et e pour ce domaine. Pour cela, nous devons trouver une inégalité reliant b et e pour tout domaine. Une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz alliée à nos résultats de symétrisation fournit une majoration de b :

$$\mathbf{E}_0 T \leq (\mathbf{E}_0 T^2)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad b \leq 2(d+2)\sqrt{d}\,(\mathbf{E}_0 T^2)^{1/4}\,(\mathbf{E}_0 T_1^4)^{1/4}.$$

Donc $e \geq b^4/f$ pour $f = 16\,d\,(d+2)^3\,\mathbf{E}_0 T_1^4$ et le polynôme $a^4 - ba + b^4/f$ est négatif. Que se passe-t-il si on remplace b par un réel plus grand, par exemple b_1, dans ce polynôme ? Le sens de variation du polynôme quand b varie est donné par le signe de $(4b^3/f - a)$. Supposons donc que $a \geq 4b_1^3/f$; alors $a \geq 4b^3/f$ pour tout $b \leq b_1$ donc le polynôme décroît quand on remplace b par b_1 et en particulier

$$p(a) = a^4 - b_1 a + e_2 \leq 0 \qquad \text{pour} \qquad e_2 = b_1^4/f = (d+2)/d.$$

On a majoré a par $4b_1^3/f$ ou par la plus grande racine réelle de p.

Numériquement, on obtient en dimension 2 :

$$\mathbf{E}_0 T_1^4 = 211/384, \quad b_1 \approx 6,89,$$

$$e_1 = (d+4)/d = 3 \qquad \text{et} \qquad e_2 = (d+2)/d = 2.$$

La meilleure borne possible que l'on obtient en remplaçant D par la boule unité après la première étape de notre démonstration serait $a < 1,73$. La borne effective n'est pas très différente : $4b_1^3/f = 2/(d\,(\mathbf{E}_0 T_1^4)^{1/4}) \approx 1,16$ et la condition portant sur la plus grande racine de p fournit la majoration $a < 1,80$. ∎

Remarque. – On peut majorer $\mathbf{E}_0(T\|W_T\|^2)$ en faisant appel à des inégalités de type Hölder. On trouve alors pour chaque $k \geq 2$ une inégalité similaire à celle donnée ci-dessus, soit :

$$a^4 - b(k)a^{4/k} + e \leq 0 \quad \text{avec} \quad b(k) = 2(d+2)(\mathbf{E}_0(dT))^{1-2/k}\,(\mathbf{E}_0 T^k)^{1/k}.$$

Si $D = B_1$ comme ci-dessus, la meilleure borne possible devient :

$$a^4 - b_1(k)u^{4/k} + e_1 \leq 0 \qquad \text{pour} \quad b_1(k) = 2(d+2)(\mathbf{E}_0 T_1^k)^{1/k}.$$

En dimension $d = 2$, on peut vérifier numériquement à l'aide du programme MATLAB que $k = 4$ donne la meilleure de toutes ces conditions « théoriques ». Par conséquent, $c_2(4) < 1,73$ est bien la meilleure borne que l'on peut obtenir par ces méthodes. ■

Nous démontrons maintenant (ii). Nous allons en fait exposer dans le cas $p = 4$ une nouvelle technique d'estimation de $c_d(p)$ valable pour tout exposant et reposant sur un problème biharmonique.

Démonstration de (ii). – Nous avons jusqu'ici borné $\mathbf{E}_0||W_T||^4$ en étudiant des propriétés de la solution u du problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } D, \qquad u(x) = ||x||^4 \quad \text{sur } \partial D.$$

On peut en fait choisir n'importe quelle fonction v définie sur $D \cup \partial D$ et vérifiant $u(0) = v(0)$. Imposons que v soit nulle sur le bord ∂D et prenons par exemple

$$v(x) = \mathbf{E}_x||W_T||^4 - ||x||^4 - ||x||^2 \cdot \mathbf{E}_x(dT).$$

Bien sûr, v n'est pas harmonique mais on a bien $v = 0$ sur ∂D et $v(0) = u(0)$. De plus, un calcul élémentaire montre que v est biharmonique. Le laplacien de cette fonction est de la forme

$$\Delta v = -2(d+4)||x||^2 - 2d^2\,\mathbf{E}_x T - 4d\,(x \cdot \nabla(\mathbf{E}_x T)).$$

Soit D un domaine étoilé autour de l'origine et dont la frontière est de classe C^1. Que vaut le laplacien Δv sur le bord ? L'application $x \mapsto \mathbf{E}_x T$ est positive sur D et nulle sur ∂D donc son gradient est dirigé suivant la normale intérieure de ∂D et en particulier, le produit scalaire $(x \cdot \nabla(\mathbf{E}_x T))$ est négatif. On a démontré que v est solution du système suivant :

$$\Delta^2 v = 0 \ \text{ sur } D, \quad \Delta v(x) \geq -2(d+4)||x||^2 \ \text{ sur } \partial D, \quad v = 0 \ \text{ sur } \partial D.$$

Le principe du maximum montre que la solution du même système avec une égalité à la place de l'inégalité majore v. En explicitant cette nouvelle fonction en termes de mouvement brownien, on obtient une majoration ponctuelle de v sur D :

$$v(x) \leq (d+4)\,\mathbf{E}_x(T||W_T||^2) \quad \text{sur } D.$$

Par ailleurs, le théorème d'arrêt appliqué une nouvelle fois à la martingale M_2 permet d'exprimer $v(0)$ comme

$$v(0) = 2(d+2)\mathbf{E}_0(T\|W_T\|^2) - d(d+2)\mathbf{E}_0T^2.$$

En combinant ces deux expressions, on obtient

$$\mathbf{E}_0\|W_T\|^4 \leq (d+2)(d+4)\,\mathbf{E}_0T^2 \leq r(D)^4\,(d+4)^2/d^2$$

pour tout domaine étoilé de classe C^1. On termine en écrivant un domaine étoilé quelconque comme une réunion croissante de domaines étoilés de classe C^1. ■

Nous introduisons à présent un deuxième domaine contenant D pour montrer (iii) dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

(iii) *Soit D un domaine de volume fini contenant l'origine. Si la boule de rayon $\sqrt{2}\cdot r(D)$ centrée en l'origine contient D, on a*

$$\mathbf{E}_0\|W_T\|^4 \leq (3+8/d)\,r(D)^4.$$

Démonstration de (iii). – La martingale M_1 peut servir à évaluer la martingale M_2. Rappelons que le théorème d'arrêt implique que $a^4 = \mathbf{E}_0\|W_T\|^4$ s'explicite selon

$$a^4 = 2(d+2)\,\mathbf{E}_0(TM_1(T)) + d(d+2)\,\mathbf{E}_0T^2.$$

Soit $S \geq T$ un deuxième temps d'arrêt. Conditionnons $TM_1(S)$ par la tribu $\mathcal{F}_T$ du passé de W jusqu'à l'instant T. Il vient :

$$\mathbf{E}_0(TM_1(S)) = \mathbf{E}_0(T\mathbf{E}_0(M_1(S)|\mathcal{F}_T)) = \mathbf{E}_0(TM_1(T)).$$

Choisissons pour S le premier instant T_R de sortie de la boule B_R de rayon R centrée en l'origine. La condition $S \geq T$ impose $D \subset B_R$. Alors $M_1(S) = R^2 - dT_R$ et deux lignes de calcul conduisent à l'égalité

$$\begin{aligned} a^4 =& 2(d+2)(R^2 - \mathbf{E}_0(dT))\mathbf{E}_0T \\ &+ d(d+2)\,\mathbf{E}_0T^2 - 2d(d+2)(\mathbf{E}_0T^2 - (\mathbf{E}_0T)^2) \\ &- 2d(d+2)\,\mathbf{E}_0(T(T_R - T)). \end{aligned}$$

Les troisième et quatrième termes de cette somme sont négatifs. Le deuxième terme est borné par $d(d+2)\mathbf{E}_0T_r^2$. Le premier terme est maximal pour $\mathbf{E}_0(dT) = R^2/2$. Supposons donc que $R = r\sqrt{2}$ convient. En regroupant tout, on obtient (iii). ■

Remarque. – On peut généraliser légèrement (iii) comme suit. Majorons le premier terme en remarquant que l'application $t \mapsto (R^2 - t)\, t$ est croissante pour $t \leq R^2/2$. Si on choisit un réel R tel que $R^2 \geq 2r^2$, on assure donc que $\mathbf{E}_0(dT) \leq r^2 \leq R^2/2$. On obtient finalement

$$(R^2 - \mathbf{E}_0(dT))\mathbf{E}_0 T \leq (R^2 - \mathbf{E}_0(dT_r))\mathbf{E}_0 T_r = (R^2 - r^2)r^2/d,$$

c'est-à-dire que si la boule $B(b \cdot r)$ contient D pour un $b \geq \sqrt{2}$, on a montré la majoration suivante : $a^4 \leq ((2b^2 - 1) + 4b^2/d)\, r^4$. ■

RÉFÉRENCES

[1] M. Aizenman et B. Simon, Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators, *Comm. on Pure and Applied Math.*, vol. **35**, 1982, p. 209-273.

[2] H. Alexander, B. A. Taylor et J. L. Ullman, Areas of projections of analytic sets, *Inventiones Math.*, vol. **16**, 1972, p. 335-341.

[3] C. Bandle, On symmetrizations in parabolic equations, *Journal d'Analyse Math.*, vol. **30**, 1976, p. 98-112.

[4] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman, 1980.

[5] H. Brascamp, E. Lieb et J. Luttinger, A general rearrangement inequality for multiple integrals, *J. Functional Analysis*, vol. **17**, 1974, p. 227-237.

[6] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, 1970.

[7] S. Kobayashi, Image areas and H_2 norms of analytic functions, *Proc. AMS*, vol. **91**, 1984, p. 257-261.

[8] S. Kobayashi, Dirichlet integrals and H_4 norms of analytic functions, *Bulletin of the Nagaoka University of Technology*, vol. **11**, 1989.

[9] M.-Th. Kohler-Jobin, Une propriété de monotonie isopérimétrique qui contient plusieurs théorèmes classiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **284**, série A, 1977, p. 917-920.

[10] L. Payne, Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected regions, *Studies in Math. Analysis and Related Topics*, Stanford Univ. Press, 1962.

[11] G. Pólya et G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, 1951.

[12] S. Port et C. Stone, *Brownian motion and classical potential theory*, Academic Press, 1978.

[13] D. Revuz et M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer Verlag, 1991.

[14] M. Sakai, Isoperimetric inequalities for the least harmonic majorant of $\|x\|^p$, *Trans. AMS*, vol. **299**, n° 2, 1987, p. 431-472.

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1992;
révisé le 26 octobre 1993.)