ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ELLEN SAADA

Un modèle du votant en milieu aléatoire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, nº 1 (1995), p. 263-271

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_1_263_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, (In Memoriam C. KIPNIS)

Vol. 31, n° 1, 1995, p. 263-271. *Probabilités et Statistiques*

Un modèle du votant en milieu aléatoire

par

Ellen SAADA

C.N.R.S. U.R.A. 1378, Université de Rouen,
Mathématiques, 76821 Mont Saint-Aignan Cedex, France.

RÉSUMÉ. – C'est un processus $(\eta_t)_{t\geq 0}$ d'espace d'états $\{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d > 1$, où les liens entre chaque site de $\mathbb{Z}^d$ et ses plus proches voisins ont pour loi la mesure produit de Bernoulli ν_p, $0 < p < 1$. Alors $\eta_t(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, a les transitions du modèle du votant ou de l'antivotant, suivant la valeur des liens avec ses voisins. Nous prouvons que ce processus est ergodique, en utilisant une relation de dualité analogue à celle introduite par Matloff pour le modèle de l'antivotant.

ABSTRACT. – This process $(\eta_t)_{t\geq 0}$ has state space $\{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d > 1$, where the distribution of the links between each site of $\mathbb{Z}^d$ and its nearest neighbors is the Bernoulli product measure ν_p, $0 < p < 1$. The transitions of $\eta_t(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, are either those of the voter model, or of the anti-voter model, according to the value of its links with its neighbors. We prove that this process is ergodic, using a duality relation similar to the one introduced by Matloff for the anti-voter model.

Key words: Voter model, anti-voter model, duality.

Classification A.M.S. : 60 K 35, 82 C 22.

1. INTRODUCTION

A l'heure où l'étude de modèles du votant non linéaires bat son plein ([2], [1], [4], ...), je voulais rappeler un résultat obtenu avec Claude Kipnis, sur l'ergodicité d'un modèle du votant plus classique, mais en milieu aléatoire.

On se place sur $\mathbb{Z}^d (d > 1)$, où chaque site est relié à ses $2d$ plus proches voisins par un lien. A l'instant initial, on affecte à chaque lien la valeur $+1$ ou -1 avec les probabilités respectives p et $1-p$ ($p \in]0,1[$), de façon indépendante : c'est le milieu aléatoire. On note ω une configuration de liens, et $\omega(xy)$ la valeur du lien entre les sites x et y. D'autre part, sur chaque site x de $\mathbb{Z}^d$ se trouve une particule d'opinion $+1$ ou -1, d'où la configuration initiale du processus, $\eta \in \{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Pour l'évolution, chaque site est muni d'une horloge exponentielle de paramètre 1 (toutes les horloges sont indépendantes). Lorsque l'horloge située en x sonne, un des sites voisins, y, est choisi avec probabilité $1/2d$; la particule en x prend soit l'opinion de la particule en y, soit l'opinion opposée, suivant que $\omega(xy)$ vaut $+1$ ou -1. Le choix des voisins et les temps exponentiels sont indépendants entre eux, et indépendants des v.a. $\omega(xy)$.

Pour chaque réalisation des v.a. $\omega(xy)$, nous obtenons ainsi un processus $(\eta_t)_{t\geq 0}$ que nous appellerons modèle du votant en milieu aléatoire. Le cas $p = 1$ correspondrait au modèle du votant linéaire (dont [3] contient une étude détaillée), et le cas $p = 0$ au modèle de l'anti-votant (analysé dans [5] et [6]).

Nous prouvons ici que le processus en milieu aléatoire est toujours ergodique (Théorème 3) ; la démonstration suit la méthode utilisée dans [5].

Dans le cas $d = 1$ (non traité), il est clair que le processus n'est pas ergodique (cf. [5], proposition 2.2): les deux masses de Dirac $\delta_{\eta(\omega)}$ et $\delta_{-\eta(\omega)}$ sur les configurations $\eta(\omega)$ et $-\eta(\omega)$ sont invariantes, où

$$\begin{cases} \eta(\omega)(x) = \eta(\omega)(y) & \text{si } |x-y| = 1 \text{ et } \omega(xy) = 1 \\ \eta(\omega)(x) = -\eta(\omega)(y) & \text{si } |x-y| = 1 \text{ et } \omega(xy) = -1 \\ \eta(\omega)(0) = 1 & \\ [-\eta(\omega)](x) = -\eta(\omega)(x). & \end{cases}$$

2. L'ERGODICITÉ DU PROCESSUS

Étant donné un milieu ω, $(\eta_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov sur $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, de semi-groupe $S(t)$, et de prégénérateur défini par

$$Lf(\eta) = \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}^d \\ \|x-y\|=1}} \frac{1}{2d} \times 1_{\{\eta(x)=\eta(y)\}} \times \frac{1-\omega(xy)}{2}[f(\eta^x) - f(\eta)]$$
$$+ \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}^d \\ \|x-y\|=1}} \frac{1}{2d} \times 1_{\{\eta(x)\neq\eta(y)\}} \times \frac{1+\omega(xy)}{2}[f(\eta^x) - f(\eta)]$$

où

$$\eta^x(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si } z \neq x \\ -\eta(x) & \text{si } z = x, \end{cases}$$

$\|x\| = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$ si $x = (x_1, \cdots, x_d)$ et f ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées.

La construction du processus se fait comme dans [3], chap. I. Il s'étudie à l'aide de deux processus de Markov (de sauts) auxiliaires, qui dépendent de la même configuration de liens ω que $(\eta_t)_{t\geq 0}$.

* Le processus $\alpha(t) = (x(t), a(t))$ évolue sur $S = \mathbb{Z}^d \times \{-1, +1\}$. Ses coordonnées $x(t)$ et $a(t)$ sont les position et opinion d'une particule à l'instant t. Ses sauts suivent un processus de Poisson de paramètre 1, avec les probabilités de transition

$$Q((x,a),(y,a)) = \frac{1}{2d} \times \frac{1+\omega(xy)}{2} \quad \text{si} \quad \|x-y\| = 1$$
$$Q((x,a),(y,-a)) = \frac{1}{2d} \times \frac{1-\omega(xy)}{2} \quad \text{si} \quad \|x-y\| = 1$$

Ce processus s'étend à $\bigcup_{i=1}^{n} S^i$ ($n \geq 1$ entier) ; on note également $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_i(t))$ (où les $\alpha_k(t)$ sont des copies indépendantes du processus initial), l'évolution de i particules et $V(t)$ est le semi-groupe associé.

* Le processus $\sigma(t)$ de matrice générateur q et de semi-groupe $U(t)$ est défini sur $L_n \setminus D_n$, où $L_n = \{\Delta\} \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} S^i\right]$, Δ est un point-cimetière et

$D_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{[(x_1, a_1), \cdots, (x_i, a_i)] \ : \exists\ 1 \leq k < \ell \leq i$ tels que $x_k = x_\ell\}$. A partir de la configuration initiale $\sigma(0) \equiv \alpha(0) \in S^i \backslash D_n$, $\sigma(t)$ évolue comme $\alpha(t)$ jusqu'au premier instant T où $\alpha(T)$ rencontre D_n : $x_k(T) = x_\ell(T)$ pour $k < \ell \leq i$. Alors, si $a_k(T) \neq a_\ell(T)$, $\sigma(T) = \Delta$; sinon la particule α_ℓ meurt, et les autres se déplacent comme avant, jusqu'à la rencontre suivante de D_n.

Les processus $(\eta_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma(t))_{t\geq 0}$ sont en dualité, par la relation suivante (qui se démontre comme dans [5]) :

Pour tous $t \geq 0$, $\sigma_0 = [(x_1, a_1), \cdots, (x_k, a_k)] \in L_n \backslash D_n$, μ *probabilité sur* $\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$(\mu S(t))\{\eta(x_1) = a_1, \cdots, \eta(x_k) = a_k\} = \mathbb{E}^{\sigma_0} f_\mu(\sigma(t)) \tag{1}$$

où $\mu S(t)$ *est la distribution à l'instant t du processus* $(\eta_s)_{s\geq 0}$ *de loi initiale* μ, $\mathbb{E}^{\sigma_0}$ *est l'espérance du processus* $\sigma(t)$ *d'état initial* σ_0, *et* f_μ *est la fonction définie sur* $L_n \setminus D_n$ *par*

$$\begin{cases} f_\mu[(x_1, a_1), \cdots, (x_i, a_i)] = \mu\{\eta(x_1) = a_1, \cdots, \eta(x_i) = a_i\} \\ f_\mu(\Delta) = 0. \end{cases}$$

L'ergodicité du modèle du votant résultera des propriétés suivantes de $(\alpha(t))_{t\geq 0}$:

PROPOSITION 1. – *Pour presque toute configuration de liens* ω *(relativement à la mesure de Bernoulli* ν_p*),*

a) La seule fonction harmonique φ *pour Q, à valeurs dans [0,1], qui vérifie* $\varphi(x, 1) + \varphi(x, -1) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{Z}^d$ *est la fonction constante* $1/2$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} |\mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t) = (y, -1)) - \mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t) = (y, -1))| = 0,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}^{(x,1)}\{a(t) = 1\} = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}^{(x,-1)}\{a(t) = 1\} = 1/2,$$

où $\mathbb{P}^{(x,\pm 1)}$ *est la loi du processus* $\alpha(t) = (x(t), a(t)) \in S$ *d'état initial* $(x, \pm 1)$.

c) Pour tous $n \geq 1$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in S^n$ *et* μ *probabilité sur* $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$\lim_{t \to +\infty} V(t) f_\mu(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (1/2)^n.$$

Démonstration. – a) Soit φ une fonction à valeurs dans [0,2], harmonique pour Q et telle que $\varphi(x,1) + \varphi(x,-1) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Elle est solution de l'équation

$$\varphi(x,1) = Q\varphi(x,1) = 1 + \frac{1}{2d} \sum_{y:\|y-x\|=1} \omega(xy)\varphi(y,1) - \frac{1}{2d} \sum_{y:\|y-x\|=1} \omega(xy) \tag{2}$$

d'où

$$|\varphi(x,1) - 1| \leq \frac{1}{2d} \sum_{y:\|y-x\|=1} |\varphi(y,1) - 1|,$$

autrement dit la fonction $g(x) = |\varphi(x,1) - 1|$ ($x \in \mathbb{Z}^d$) est bornée et sous-harmonique pour la probabilité de transition P sur $\mathbb{Z}^d$ définie par $p(y,z) = 1/2d$ si $\|y - z\| = 1$. Cette fonction est donc une constante C si $d = 2$, ou est de la forme $g(x) = C - \left(\sum_{n=0}^{\infty} P^n\right)(Pg - g)(x)$ si $d \geq 3$ (par la décomposition de Riesz et le théorème de Choquet-Deny), avec $\lim_{\|x\| \to +\infty} (g(x) - C) = 0$. Si $C \neq 0$, ceci implique qu'il existe $A = A(C)$ tel que si $\|x\| > A$, (2) s'écrit

$$\varepsilon(x)C = \frac{1}{2d} \sum_{y:\|y-x\|=1} \omega(xy)\varepsilon(y)C$$

avec $\varepsilon(z) \in \{-1,+1\}$ pour $z \in \mathbb{Z}^d$ $\left(\text{car } \varepsilon(x) - \frac{1}{2d} \sum_{y:\|y-x\|=1} \omega(xy)\varepsilon(y)\right.$ est à valeurs dans $\left.\left\{0, \pm\frac{1}{d}, \pm\frac{2}{d}, \cdots, \pm 1\right\}\right)$.

Par conséquent, pour tout y tel que $\|y - x\| = 1$,

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(y)\omega(xy). \tag{3}$$

D'autre part, pour presque toute configuration ω, il existe un site $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|x\| > A$ et

$$\begin{cases} \omega(x, x + e_1) = -1 \\ \omega(x + e_1, x + e_1 + e_2) = -1 \\ \omega(x + e_1 + e_2, x + e_2) = -1 \\ \omega(x + e_2, x) = 1, \end{cases}$$

où $(e_1, \cdots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. L'application successive de (3) aux sites $x, x+e_1, x+e_1+e_2, x+e_2$ conduit à la contradiction $\varepsilon(x) = -\varepsilon(x)$.

Autrement dit $C = 0$ et $\varphi(x,1) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.

b) Cette démonstration et la suivante suivent celles de [5]. Soit ψ une fonction définie sur S, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $\psi(x,1)+\psi(x,-1) \equiv 1$. Soit une suite $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de temps croissante vers $+\infty$. La boule unité faible * de $l_\infty(S)$ est séquentiellement compacte donc il existe une suite extraite (notée également $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$) telle que $V(t_i)\psi$ converge vers une fonction φ qui est harmonique pour Q, par la

PROPOSITION 2 ([5], citée dans [3]). – *Soit $\{q(x,y),\ x,y \in S\}$ la matrice générateur d'un processus de Markov de sauts de probabilités de transition $q_t(x,y)$, avec $\sup_{x\in S}|q(x,x)| < +\infty$. Si pour des fonctions uniformément bornées f_n sur S et une suite t_n qui croît vers $+\infty$, $g(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{y\in S} q_{t_n}(x,y)f_n(y)$ existe pour tout $x \in S$, alors g est harmonique pour le processus.*

Alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}\varphi(x,1) + \varphi(x,-1) &= \lim_{i\to+\infty} [V(t_i)\psi(x,1) + V(t_i)\psi(x,-1)]\\ &= \lim_{i\to+\infty} [\mathbb{E}^{(x,-1)}\psi(\alpha(t_i)) + \mathbb{E}^{(x,1)}\psi(\alpha(t_i))]\\ &= \lim_{i\to+\infty} \mathbb{E}^{(x,-1)}[\psi(\alpha(t_i)) + \psi(x(t_i), -a(t_i))]\\ &= \lim_{i\to+\infty} \mathbb{E}^{(x,-1)}(1) = 1,\end{aligned}$$

d'où $\varphi(x,1) = \varphi(x,-1) = 1/2$ par le a).

Dans le cas particulier où $\psi(x,a) = 1_{\{1\}}(a)$, cela donne $\lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}^{(x,-1)}(a(t_i) = 1) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}^{(x,1)}(a(t_i) = 1) = 1/2$, donc

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}^{(x,-1)}(a(t) = 1) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}^{(x,1)}(a(t) = 1) = 1/2. \tag{4}$$

Sinon cela donne

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to+\infty} \{\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i) = (y,-1))\psi(y,-1)\\ &\qquad + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i) = (y,1))\psi(y,1)\}\\ &= \lim_{i\to+\infty} \{\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i) = (y,-1))\psi(y,-1)\\ &\qquad + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i) = (y,1))\psi(y,1)\}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to+\infty}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\{\mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))\\
&\qquad -\mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))\}\psi(y,-1) \qquad (5)\\
&= \lim_{i\to+\infty}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\{\mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i)=(y,1))\\
&\qquad -\mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i)=(y,1))\}\psi(y,1)\\
&= \lim_{i\to+\infty}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\{\mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))\\
&\qquad -\mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))\}\psi(y,1), \qquad (6)
\end{aligned}$$

par symétrie. En égalant (5) et (6) et en utilisant $\psi(y,1)=1-\psi(y,-1)$,

$$\begin{aligned}
&2\lim_{i\to+\infty}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\{\mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))-\mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))\}\psi(y,-1)\\
&= \lim_{i\to+\infty}\mathbb{P}^{(x,-1)}(a(t_i)=-1)-\lim_{i\to+\infty}\mathbb{P}^{(x,1)}(a(t_i)=-1)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

par (4). Autrement dit, pour $x\in\mathbb{Z}^d$ fixé, la suite de fonctions $\{\mathbb{P}^{(x,-1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))-\mathbb{P}^{(x,1)}(\alpha(t_i)=(y,-1))\}$ converge vers 0 faiblement dans $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, donc fortement.

c) Comme pour tout $z=(z_1,\cdots,z_n)\in(\mathbb{Z}^d)^n$,

$$\sum_{c=(c_1,\cdots,c_n)\in\{-1,+1\}^n} f_\mu[(z_1,c_1),\cdots,(z_n,c_n)]=1,$$

on a pour $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S^n$

$$\begin{aligned}
&V(t)f_\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\\
&= \sum_{z\in(\mathbb{Z}^d)^n}\sum_{c\neq(1,\cdots,1)}\Big\{\mathbb{P}^\alpha(\alpha(t)=[(z_1,c_1),\cdots,(z_n,c_n)])\\
&\qquad -\mathbb{P}^\alpha(\alpha(t)=[(z_1,1),\cdots,(z_n,1)])\Big\}f_\mu[(z_1,c_1),\cdots,(z_n,c_n)]\\
&\quad +\sum_{z\in(\mathbb{Z}^d)^n}\mathbb{P}^\alpha(\alpha(t)=[(z_1,1),\cdots,(z_n,1)]).
\end{aligned}$$

Par le b), chacun de ces deux termes tend vers 0:

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{z\in(\mathbb{Z}^d)^n} \mathbb{P}^\alpha(\alpha(t) = [(z_1, 1)\cdots,(z_n, 1)])$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}^\alpha([a_1(t) = 1,\cdots, a_n(t) = 1]) = \frac{1}{2^n}$$

par la deuxième partie du b) et l'indépendance des $\alpha_i(t)$, $1 \le i \le n$.

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{z\in(\mathbb{Z}^d)^n} |\mathbb{P}^\alpha(\alpha(t) = (z, c)) - \mathbb{P}^\alpha(\alpha(t) = (z, d))| = 0$$

si $c, d \in \{-1, +1\}^n$ ne diffèrent que d'une coordonnée; ceci se déduit simplement de la première partie du b) (cf. [5]).

□

THÉORÈME 3. – *Pour presque toute configuration de liens* ω, *le processus* $(\eta_t)_{t\ge0}$ *a une unique mesure invariante* ν, *qui vérifie*

a) Pour toute probabilité initiale μ, $\lim_{t\to+\infty} \mu S(t) = \nu$.

b) Pour tous $a \in \{-1, +1\}$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\nu\{\eta(x) = a\} = 1/2$.

c) Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = [(x_1, a_1), \cdots, (x_n, a_n)] \in S^n \setminus D_n$,

$$|\nu\{\eta(x_1) = a_1, \cdots, \eta(x_n) = a_n\} - (1/2)^n| \le g(\alpha)$$

où $g(\alpha) = \mathbb{P}^\alpha(x_i(t) = x_j(t)$ *pour* $i \ne j$ *et un* $t > 0)$.

Démonstration. – Elle suit celle de [5]. Le processus est de Feller sur un espace compact, d'où l'existence de ν. Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures invariantes pour le processus, on montre par récurrence que $f_{\nu_1|S^k} = f_{\nu_2|S^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ ($f_{\nu_1|S^k}$ est la restriction de f_{ν_1} à S^k): l'invariance de ν_1 et ν_2 et la relation de dualité (1) impliquent que pour tout t, $U(t)f_{\nu_1} = f_{\nu_1}$ et $U(t)f_{\nu_2} = f_{\nu_2}$, d'où $f_{\nu_1|S} = f_{\nu_2|S}$ par la proposition 1a). Puis, pour tout $\alpha \in S^n \setminus D_n$, sous l'hypothèse $f_{\nu_1|S^k} = f_{\nu_2|S^k}$ pour tout $k < n$,

$$f_{\nu_1}(\alpha) - f_{\nu_2}(\alpha) = \mathbb{E}^\alpha[f_{\nu_1}(\sigma(t)) - f_{\nu_2}(\sigma(t))]$$

est non nul seulement avant l'instant T où $\sigma(t)$ atteint $\{\Delta\} \cup S^{n-1}$. Mais avant T, $\sigma(t) = \alpha(t)$,

$$\begin{aligned} f_{\nu_1}(\alpha) - f_{\nu_2}(\alpha) &= \lim_{t\to+\infty}[V(t)f_{\nu_1}(\alpha) - V(t)f_{\nu_2}(\alpha)] \\ &\quad - \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}^\alpha[f_{\nu_1}(\alpha(t)) - f_{\nu_2}(\alpha(t)); t \ge T] \end{aligned}$$

est nulle par la proposition 1c).

a) Cela résulte du corollaire suivant de la proposition 2 (cf. [5] ou [3]): *Si μ est une probabilité sur S, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui croît vers $+\infty$ tels que $\tilde{\nu} = \lim_{n \to +\infty} \mu S(t_n)$ existe, alors $\tilde{\nu}$ est invariante pour le processus $(\eta_t)_{t \geq 0}$.*

b) Par la symétrie entre les 1 et les -1 dans l'évolution, la probabilité $\tilde{\nu}$ définie par

$$\tilde{\nu}\{\eta(x_1) = a_1, \cdots, \eta(x_n) = a_n\} = \nu\{\eta(x_1) = -a_1, \cdots, \eta(x_n) = -a_n\}$$

(pour $[(x_1, a_1), \cdots, (x_n, a_n)] \in S^n$) est invariante, d'où $\nu = \tilde{\nu}$ et $\tilde{\nu}\{\eta(x_1) = a_1\} = \nu\{\eta(x_1) = -a_1\} = \nu\{\eta(x_1) = a_1\} = 1/2$.

c) Ceci découle de l'inégalité $\|U(t)f_\nu - V(t)f_\nu\| \leq g$ sur $L_n \setminus D_n$, de la relation de dualité (1) et de la proposition 1c).

□

REMERCIEMENTS

Merci à O. Benois, K. Ravishankar et au referee pour sa lecture attentive.

RÉFÉRENCES

[1] E. ANDJEL, T. M. LIGGETT and T. MOUNTFORD, Clustering in one dimensional threshold voter models, *Stoch. proc. Appl.* Vol. **42**, 1992, pp. 73-90.

[2] J. T. COX and R. DURRETT (1991), Nonlinear voter models, in Random Walks, Brownian Motion and Interacting Particle Systems, *A Festschrift in honor of Frank Spitzer*, Birkhäuser, 1991, pp. 189-201.

[3] T. M. LIGGETT, *Interacting particle systems*, Springer, 1985.

[4] T. M. LIGGETT, *Coexistence in threshold voter models*, preprint, 1993.

[5] N. S. MATLOFF, Ergodicity conditions for a dissonant voting model, *Ann. Probab.* Vol. **5**, 1977, pp. 371-386.

[6] N. S. MATLOFF, A dissonant voting model : Nonergodic case, *Zeitschrift für Wahrsh.* Vol. **51**, 1980, pp. 63-78.

(Manuscrit reçu le 22 mars 1994;
version révisée le 16 juin 1994.)