Annales de l'I. H. P., section B

C. Kipnis
C. Léonard

Grandes déviations pour un système hydrodynamique asymétrique de particules indépendantes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, nº 1 (1995), p. 223-248
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_1_223_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, (In Memoriam C. KIPNIS)

Vol. 31, n° 1, 1995, p. 223-248. *Probabilités et Statistiques*

Grandes déviations pour un système hydrodynamique asymétrique de particules indépendantes

par

C. KIPNIS †

Ceremade, U.R.A. C.N.R.S. 749, Université Paris IX-Dauphine, France.

et

C. LÉONARD

Équipe de Modélisation Stochastique et Statistique, U.R.A. C.N.R.S. D 0743, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

ABSTRACT. – We study the large deviations from the hydrodynamical limit of the density field of independent asymmetrical random walks. A non-variational expression of the large deviation rate function is derived.

Key words: Large deviations, random walks, random measures, hydrodynamical limit.

RÉSUMÉ. – On étudie les grandes déviations de la limite hydrodynamique du champ de densité de marches aléatoires indépendantes et asymétriques. En particulier, nous donnons une expression non-variationnelle de la fonction de taux des grandes déviations.

Mots clés : Grandes déviations, marches aléatoires, mesures aléatoires, limite hydrodynamique.

Claude Kipnis est décédé avant la rédaction définitive de cet article. Je souhaite de tout mon cœur avoir respecté l'esprit dans lequel il avait entrepris cette étude.

C. Léonard

Classification A.M.S. : 60 F 10, 60 J 15, 60 G 57.

0. INTRODUCTION

Nous étudions les grandes déviations de la limite hydrodynamique d'un grand nombre de particules se mouvant selon des marches aléatoires indépendantes sur un réseau. À l'inverse de systèmes fortement dépendants comme ceux étudiés par M. D. Donsker et S. R. S. Varadhan dans [DoV] et C. Kipnis, S. Olla et S. R. S. Varadhan dans [KOV], le système considéré ici est simple dans la mesure où seul le champ de densité empirique intervient dans les martingales gérant son évolution. Dans le même esprit, la limite hydrodynamique pour des particules browniennes indépendantes a été étudiée dans [KiO].

La condition de centrage du cas symétrique permet d'accélérer les particules de manière à obtenir une limite diffusive. La limite hydrodynamique a dans cette situation un statut de théorème central limite. La fonction de taux des grandes déviations est la conjuguée de Legendre d'une fonction quadratique, et des considérations classiques sur les espaces L^2 permettent de l'identifier sous une forme non-variationnelle.

Ce n'est plus le cas lorsque les marches aléatoires ne sont pas centrées. Les particules ne peuvent être accélérées aussi violemment et la limite hydrodynamique a cette fois-ci un statut de loi des grands nombres. Il en résulte que la fonction de taux des grandes déviations est, comme l'information de Kullback, la conjuguée de Legendre d'une fonction construite à partir d'une exponentielle : la log-Laplace de la loi de Poisson. Son identification sous une forme non-variationnelle est plus inconfortable que dans le cas quadratique.

L'objectif principal de cet article est d'obtenir une formulation non-variationnelle de la fonction de taux des grandes déviations dans le cas asymétrique. Nous suivons la démarche développée dans [Lé1] et [Lé2], où ce travail a été effectué pour un système de particules lié à l'équation de Boltzmann et pour des petites perturbations avec sauts. L'approche habituelle (quadratique) ne convient plus. Celle que nous exposons ici repose en grande partie sur des considérations d'analyse convexe. Les espaces fonctionnels qui jouent le rôle des espaces L^2 sont alors des espaces d'Orlicz associés à la log-Laplace et à la transformée de Cramér de la loi de Poisson.

La méthode présentée dans cet article s'applique sans difficulté à la représentation non-variationnelle de la fonction de taux des grandes déviations de certains modèles de réaction-diffusion ([JLV]).

En section 1, nous présentons le système de particules. La majoration des grandes déviations est énoncée au théorème 2.3 avec une fonction de taux donnée sous forme variationnelle. Puis, à la section 3, nous en donnons une formulation non-variationnelle (théorèmes 3.4 et 3.5) qui nous permet, en section 4, de prouver la minoration des grandes déviations.

Une version détaillée de cet article ([KLé]) est disponible en prépublication.

1. PRÉSENTATION DU MODÈLE. NOTATIONS

On se donne une famille de processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}_N^d}$, où $\mathbb{Z}_N^d = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$. Un état $\eta = (\eta(i))_{i\in\mathbb{Z}_N^d}$ est une configuration, $\eta(i)$ représente le nombre de particules présentes au site $i \in \mathbb{Z}_N^d$. Pour tout $N \geq 1$, le générateur A_N du processus est donné, pour toute fonction f cylindrique sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}_N^d}$, par (noter l'accélération en Nt)

$$A_N f(\eta) = N \sum_{i\in\mathbb{Z}_N^d} \eta(i) \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} c(k)\big(f(\eta^{i,i+k}) - f(\eta)\big), \ \eta \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}_N^d}$$

où

$$\eta^{i,i+k}(j) = \begin{cases} \eta(j) & \text{si } j \notin \{i, i+k\} \\ \eta(i) - 1 & \text{si } j = i \qquad\qquad \text{et } \eta(i) \neq 0 \\ \eta(i+k) + 1 & \text{si } j = i+k \qquad \text{et } \eta(i) \neq 0 \end{cases}$$

les égalités étant entendues dans $\mathbb{Z}_N^d$, et où $(c(k))_{k\in\mathbb{Z}_*^d}$ est tel que : $c(k) \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}_*^d$, et il existe un nombre fini de $k \in \mathbb{Z}_*^d$ tels que $c(k) > 0$.

Puisque le taux de sauts de la configuration est linéaire en η, ce processus de Markov correspond à la superposition de marches aléatoires indépendantes qui sautent de k avec l'intensité $c(k)$.

On s'intéresse au processus empirique Y^N donné par

$$t \in [0,T] \mapsto Y_t^N = \frac{1}{N^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}_N^d} \eta_t(i)\delta_{i/N} \in M^+(S),$$

où η est régi par le générateur A_N et $M^+(S)$ est l'ensemble des mesures positives bornées sur l'ensemble des sites $S = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$. Leurs réalisations sont dans l'ensemble $D_M = D([0,T], M^+(S))$ des trajectoires càdlàg de $[0,T]$ dans $M^+(S)$, où $M^+(S)$ est muni de la topologie faible

$\sigma(M^+(S), C(S))$ et où l'on impose aux trajectoires d'être continues à gauche en T : $\mu_{T^-} = \mu_T$, $\mu \in D_M$. L'ensemble D_M est muni de la topologie de Skorokhod et de la tribu des projections (qui coïncide avec sa tribu de Borel).

On choisit des conditions initiales déterministes: $Y_0^N(\omega) = \rho_o^N, \forall \omega$, telles que pour une mesure $\rho_o \in M^+(S)$,

$$\rho_o^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho_o, \text{ donc } Y_t^N(S) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho_o(S) := m \tag{1.1}$$

où $Y_t^N(S)$ est la masse totale de Y_t^N.

On a la loi des grands nombres : $Y^N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \rho$, où $\rho \in C([0,T], M^+(S))$ est la solution de l'équation faible, de condition initiale: $\rho(0) = \rho_o$,

$$\begin{aligned} \int_S G(T,x)\,\rho(T,dx) - \int_S G(0,x)\,\rho(0,dx) \\ - \int_{[0,T]\times S} (\partial_t + v\cdot\partial_x)G(t,x)\,\rho(t,dx)dt = 0, \end{aligned}$$

pour tout G de $C^{1,1}([0,T]\times S)$, où $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)k \in \mathbb{R}^d$.

2. LA MAJORATION DES GRANDES DÉVIATIONS

Rappelons que le logarithme de la transformée de Laplace de la loi de Poisson recentrée de paramètre 1 est la fonction convexe

$$\tau(u) = e^u - u - 1,\ u \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

PROPOSITION 2.1. (Majoration sous forme variationnelle pour les compacts). – *On suppose qu'il existe $\rho_o \in M^+(S)$ tel que les conditions initiales satisfassent* (1.1). *Alors, pour tout compact C de D_M, on a*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d+1}} \log \mathbb{P}(Y^N \in C) \le - \inf_{\mu\in C} I(\mu)$$

où pour tout $\mu \in D_M$

$$I(\mu) = I_{\rho_o}(\mu_0) + I_o(\mu),$$

I_{ρ_o} étant défini pour tout $\zeta \in M^+(S)$, par

$$I_{\rho_o}(\zeta) = \begin{cases} 0 & si\ \zeta = \rho_o \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} I_o(\mu) = \sup_{G \in C^{1,2}([0,T]\times S)} \Big\{ & \int_S G(T,x)\,\mu(T,dx) - \int_S G(0,x)\,\mu(0,dx) \\ & - \int_{[0,T]\times S} (\partial_t + v\cdot\partial_x) G(t,x)\,\mu_t(dx)dt \\ & - \int_{[0,T]\times S} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)\tau\big(k\cdot\partial_x G(t,x)\big)\Big)\,\mu_t(dx)dt \Big\}. \end{aligned}$$

Preuve. – À l'aide de la formule d'Itô, on montre que

$$\begin{aligned} Z_t^N(\eta) = \exp\Bigg(N^{d+1}\Bigg[& \langle G(t,\cdot), Y_t^N(\eta)\rangle \\ & - \langle G(0,\cdot), Y_0^N(\eta)\rangle - \int_0^t \langle \partial_s G(s,\cdot), Y_s^N(\eta)\rangle\, ds \\ & - \int_0^t \Big(\frac{1}{N^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d_N} \eta_s(i) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k) N[G(t,(i+k)/N) - G(t,i/N)]\Big)\, ds \\ & - \int_0^t \Big(\frac{1}{N^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d_N} \eta_s(i) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)\tau\big(N[G(t,(i+k)/N) - G(t,i/N)]\big)\Big)\, ds\Bigg]\Bigg) \\ = \exp\Bigg(N^{d+1}\Bigg[& \langle G(t,\cdot), Y_t^N(\eta)\rangle - \langle G(0,\cdot), Y_0^N(\eta)\rangle \\ & - \int_0^t \langle (\partial_s + v\cdot\partial_x) G(s,\cdot), Y_s^N(\eta)\rangle\, ds \\ & - \int_0^t \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)\tau\big(k\cdot\partial_x G(s,\cdot)\big), Y_s^N(\eta)\Big\rangle\, ds + O(1/N)\Bigg]\Bigg) \end{aligned}$$

est une surmartingale. De ce fait, pour toute fonction $g \in C(S)$,

$$\mathbb{E}\Big(e^{N^{d+1}\langle g, Y_0^N\rangle} Z_T^N \Big) \le \mathbb{E} e^{N^{d+1}\langle g, Y_0^N\rangle}. \tag{2.2}$$

En notant

$$\begin{aligned}\theta(G,\mu) = &\int_S G(T,x)\,\mu(T,dx) - \int_S G(0,x)\,\mu(0,dx)\\ &- \int_{[0,T]\times S} (\partial_t + v\cdot\partial_x)G(t,x)\,\mu_t(dx)dt\\ &- \int_{[0,T]\times S}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)\tau\big(k\cdot\partial_x G(t,x)\big)\Big)\,\mu_t(dx)dt, \qquad (2.3)\end{aligned}$$

on a $\frac{1}{N^{d+1}}\log Z_T^N(\eta) = \theta(G, Y^N(\eta)) + O(1/N)$, ce qui avec (1.1) et (2.2) donne pour toutes fonctions $g \in C(S)$ et $G \in C^{1,2}$: $\Lambda(g,G) := \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d+1}}\log \mathbb{E}e^{N^{d+1}(\langle g, Y_0^N\rangle + \theta(G,Y^N))} \leq \langle g, \rho_o\rangle$. Mais, pour toute fonction G de $C^{1,2}([0,T]\times S)$, $\theta(G,\cdot)$ est continue, de sorte qu'un raisonnement traditionnel en grandes déviations ([DZe], lemma 4.4.5), nous permet d'affirmer que pour tout compact C de D_M :

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d+1}}\log\mathbb{P}(Y^N\in C) \leq -\inf_{\mu\in C}\sup\{\langle g,\mu_0\rangle + \theta(G,\mu) - \Lambda(g,G)\,;\\ g\in C(S), G\in C^{1,2}([0,T]\times S)\}.$$

$$\text{Or, } \sup\{\langle g,\mu_0\rangle + \theta(G,\mu) - \Lambda(g,G)\,;\, g\in C(S), G\in C^{1,2}([0,T]\times S)\}\\ \geq \sup_{g\in C(S)}\langle g, \mu_0 - \rho_o\rangle + \sup_{G\in C^{1,2}}\theta(G,\mu) = I_{\rho_o}(\mu_0) + I_o(\mu).$$

Ce qui achève la preuve de la majoration. ■

De manière à étendre les majorations de la proposition 2.1 des ensembles compacts aux ensembles fermés, il nous faut maintenant prouver le résultat de tension exponentiel suivant.

LEMME 2.2. (Tension exponentielle). – *Pour tout* $L > 0$, *il existe un ensemble* K_L *compact dans* D_M *tel que:* $\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d+1}}\log\mathbb{P}(Y^N \notin K_L) \leq -L$.

Preuve. – Nous suivons ici la voie traditionnelle, voir par exemple [KOV]. Pour tout $m \geq 0$, on note $M_m^+(S)$ l'ensemble des mesures ζ positives sur S telles que $\zeta(S) \leq m+1$, et on le munit de la topologie affaiblie par $C(S)$: l'espace des fonctions continues sur le compact S. On désigne par $D_{M_m} = D([0,T], M_m^+(S))$ l'ensemble des trajectoires càdlàg et bornées de $[0,T]$ dans $M_m^+(S)$. Compte tenu de (1.1), on voit que pour tout N suffisamment grand, les processus Y^N sont à valeurs dans D_{M_m}. De ce fait, il nous suffit de prouver le lemme dans D_{M_m} au lieu de D_M.

Puisque S est compact, il en est de même pour $M_m(S)$. D'après [Jak], un ensemble K de D_{M_m} est relativement compact si pour toute fonction G d'une famille $\mathcal{G} \subset C(S)$ séparant les éléments de $M_m(S)$ et stable par addition, $\{(t \mapsto \langle G, \mu(t)\rangle) \,;\, \mu \in K\}$ est relativement compact dans $D([0,T], \mathbb{R})$. Il suffit donc que pour toute $G \in \mathcal{G}$, $\lim_{\delta \to 0} \sup\{|\langle G, \mu(t) - \mu(s)\rangle| \,;\, |s-t| < \delta, \mu \in K\} = 0$. En tirant parti de la séparabilité de $C(S)$, on voit qu'il nous suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute G dans $C^1(S)$, nous avons

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d+1}} \log \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\langle G, Y_t^N - Y_s^N \rangle| \geq \varepsilon \right) = -\infty. \tag{2.4}$$

Pour cela, considérons la martingale

$$\begin{aligned} M_G^N(t) = &\langle G, Y_t^N\rangle - \langle G, Y_u^N\rangle \\ &- \int_u^t \frac{1}{N^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}_N^d} \eta_s(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} c(k) N \left(G(\frac{i+k}{N}) - G(\frac{i}{N}) \right) ds, \ t \geq u. \end{aligned}$$

En tant qu'espérance d'une surmartingale, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \Bigg(N^{d+1} \lambda M_G^N(t) - N^{d+1} \int_u^t \frac{1}{N^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}_N^d} \eta_s(i) \\ \times \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} c(k) \tau \left(N\lambda [G(\frac{i+k}{N}) - G(\frac{i}{N})] \right) ds \Bigg) \leq 1. \end{aligned}$$

De plus, il existe des constantes $C_c, C_G > 0$ ne dépendant que de $c(\cdot)$ et de G telles que

$$\begin{aligned} \int_u^t \frac{1}{N^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}_N^d} \eta_s(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} c(k) \tau \left(N\lambda [G(\frac{i+k}{N}) - G(\frac{i}{N})] \right) ds \\ \leq (m+1) C_c \tau(C_G \lambda)(t-u), \end{aligned}$$

de sorte qu'en appliquant l'inégalité de Doob à la sousmartingale $e^{N^{d+1}\lambda M_G^N(t)}$, on obtient pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{u \leq t \leq u+\delta} M_G^N(t) > \varepsilon \right) \leq \exp(-\varepsilon \lambda N^{d+1} + \delta N^{d+1} C \tau(C\lambda)).$$

On en déduit (2.4) en faisant tendre λ vers l'infini, en considérant la fonction $-G$ à la place de G et en remarquant que $|\langle G, Y_t^N\rangle - \langle G, Y_u^N\rangle| \leq |M_G^N(t)| + C(t-u)$. Ce qui achève la preuve du lemme. ■

Une conséquence classique (voir [DZe], lemme 1.2.18) de la majoration sur les compacts (proposition 2.1) et de la tension exponentielle (lemme 2.2) est l'extension de la majoration aux ensembles fermés.

THÉORÈME 2.3. (Majoration sous forme variationnelle). – *On suppose qu'il existe* $\rho_o \in M^+(S)$ *tel que les conditions initiales satisfassent* (1.1). *Alors, pour tout fermé* C *de* D_M, *on a*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d+1}} \log \mathbb{P}(Y^N \in C) \leq - \inf_{\mu\in C} I(\mu).$$

La fonction de taux I *est donnée sous forme variationnelle dans l'énoncé de la proposition* 2.1.

3. ÉTUDE DE LA FONCTION DE TAUX

Dans cette section, nous allons donner aux théorèmes 3.4 et 3.5 une expression non-variationnelle de la fonction de taux I_o. La méthode que nous présentons maintenant a déjà été développée dans [Lé1] lors de l'étude des grandes déviations pour des systèmes de particules en lien avec l'équation de Boltzmann spatialement homogène.

Au sujet des espaces d'Orlicz. Il sera utile pour l'étude de I_o d'avoir recours à certains espaces d'Orlicz. Rappelons quelques notions de base sur ces espaces. On pourra se reporter à [KRu] ou à l'appendice de [Nev].

On se donne un espace polonais X muni de sa tribu de Borel ainsi qu'une mesure positive bornée ρ sur X. On appelle fonction d'Orlicz, toute fonction convexe $\theta : [0,\infty[\to [0,\infty[$ telle que $\theta(u) = 0 \iff u = 0$ et $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\theta(u)}{u} = +\infty$. On montre aisément qu'alors

$$\|H\|_\theta = \inf\left\{c > 0\,;\ \int_X \theta\left(\frac{|H|}{c}\right) d\rho \leq 1\right\}$$

définit une norme sur l'espace $B(X)$ des fonctions boréliennes, où l'on identifie les fonctions égales ρ-presque partout. L'espace d'Orlicz $L^\theta(X,\rho)$ est défini par

$$L^\theta(X,\rho) = \{H \in B(X)\,;\ \|H\|_\theta < +\infty\}.$$

Muni de la norme $\|\cdot\|_\theta$, c'est un espace de Banach. On note $E^\theta(X,\rho)$ l'adhérence de l'espace des fonctions boréliennes bornées dans $L^\theta(X,\rho)$. Dans le cadre des espaces d'Orlicz, le théorème de Riesz est le suivant. On identifie le dual topologique de $E^\theta(X,\rho)$ avec l'espace d'Orlicz $L^{\theta^*}(X,\rho)$ pour le crochet de dualité $\langle G,H\rangle = \int_X GH\,d\rho$, $G \in L^{\theta^*}(X,\rho), H \in E^\theta(X,\rho)$ où θ^* est la transformée de Legendre de θ : $\theta^*(v) = \sup_{u\geq 0}\{uv - \theta(u)\}$, $v \geq 0$. La transformée de Legendre de la fonction τ donnée en (2.1) est

$$\tau^*(v) = \begin{cases} (v+1)\log(v+1) - v & \text{si } v > -1 \\ +1 & \text{si } v = -1 \\ +\infty & \text{si } v < -1. \end{cases}$$

Les restrictions à $[0,\infty[$ de τ et τ^* sont des fonctions d'Orlicz; on note $L^\tau, E^\tau, L^{\tau^*}$ et E^{τ^*} les espaces d'Orlicz correspondants. Remarquons qu'en général $E^\tau \underset{\neq}{\subset} L^\tau$, $(E^\tau)' = L^{\tau^*} = E^{\tau^*}$ et $(E^\tau)'' = (E^{\tau^*})' = L^\tau$.

Étude de I_o. Première étape. Prenons μ dans D_M. Pour tout $G \in C^{1,2}$ on pose

$$\begin{aligned} l_\mu(G) = &\int_S G(T,x)\,\mu_T(dx) - \int_S G(0,x)\,\mu_0(dx) \\ &- \int_{[0,T]\times S} (\partial_t + v\cdot\partial_x)G(t,x)\,\mu_t(dx)dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

et on définit la mesure bornée sur $[0,T] \times S \times E$:

$$\Lambda_\mu(dtdxd\Delta) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)\delta_k(d\Delta)\right)\mu_t(dx)dt$$

où $E = \{k \in \mathbb{Z}^d\,;\, c(k) > 0\}$. On considére l'espace d'Orlicz $L^\tau([0,T] \times S \times E, \Lambda_\mu)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{\tau,\mu}$ et pour tout $G \in C^{1,2}$, on note $\Delta\cdot\partial_x G : (t,x,\Delta) \in [0,T] \times S \times E \mapsto \Delta\cdot\partial_x G(t,x) \in \mathbb{R}$. Du fait que

$$\tau(u) \leq \tau(|u|),\ \forall u \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

on voit aisément que

$$\lambda l_\mu(G) - \int_{[0,T]\times S\times E} \tau(|\lambda\Delta\cdot\partial_x G|)\,d\Lambda_\mu \leq I_o(\mu),\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, G \in C^{1,2}.$$

Donc, en prenant $\lambda = 1/\|\Delta\cdot\partial_x G\|_{\tau,\mu}$ et $\lambda = -1/\|\Delta\cdot\partial_x G\|_{\tau,\mu}$, on obtient $|l_\mu(G)| \leq (1 + I_o(\mu))\|\Delta\cdot\partial_x G\|_{\tau,\mu}$, pour toute fonction $G \in C^{1,2}$ et si μ

est tel que $I_o(\mu) < \infty$, en passant au quotient, on voit que l_μ est une forme linéaire sur $\Delta\cdot\partial C^{1,2} = \{\Delta\cdot\partial_x G\,;\, G \in C^{1,2}\}$ qui est continue pour la norme $\|\cdot\|_{\tau,\mu}$. Puisque $\Delta\cdot\partial C^{1,2}$ est inclus dans $E^\tau([0,T]\times S\times E, \Lambda_\mu)$, d'après le théorème d'extension de Hahn-Banach et le théorème de Riesz pour les espaces d'Orlicz, il existe une (en fait, une infinité) fonction K mesurable sur $[0,T]\times S\times E$ telle que $K \in L^{\tau^*}([0,T]\times S\times E, \Lambda_\mu)$ et

$$l_\mu(G) = \int_{[0,T]\times S\times E} \Delta \cdot \partial_x G(t,x) K(t,x,\Delta)\, \Lambda_\mu(dtdxd\Delta), \quad \forall G \in C^{1,2}. \tag{3.3}$$

Bien sûr, (3.3) s'écrit aussi

$$\int_S G(T,x)\,\mu_T(dx) - \int_S G(0,x)\,\mu_0(dx) - \int_{[0,T]\times S} \times \Big(\partial_t + \big[v + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)K(t,x,\Delta)k\big]\cdot\partial_x\Big)G(t,x)\,\mu_t(dx)dt = 0. \tag{3.4}$$

À l'aide de l'identité

$$uv - \tau(u) = \tau^*(v) - e^u\tau^*\Big(\frac{v+1}{e^u} - 1\Big), \ \forall u \in \mathbb{R}, v \geq -1, \tag{3.5}$$

on voit que si $K \geq -1$, alors

$$\begin{aligned} I_o(\mu) &= \sup_{G\in C^{1,2}} \Big\{ l_\mu(G) - \int_{[0,T]\times S\times E} \tau(\Delta\cdot\partial_x G)\, d\Lambda_\mu \Big\} \\ &= \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K)\, d\Lambda_\mu \\ &\quad - \inf_{G\in C^{1,2}} \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*\Big(\frac{K+1}{e^{\Delta\cdot\partial_x G}} - 1\Big) e^{\Delta\cdot\partial_x G}\, d\Lambda_\mu \\ &= I\Big((K+1)\cdot\Lambda_\mu \mid \Lambda_\mu\Big) - \inf_{G\in C^{1,2}} I\Big((K+1)\cdot\Lambda_\mu \mid e^{\Delta\cdot\partial_x G}\cdot\Lambda_\mu\Big) \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $I(\alpha \mid \beta) = \displaystyle\int \tau^*\Big(\frac{d\alpha}{d\beta} - 1\Big)\, d\beta$ est l'« information de Kullback » de la mesure positive α par rapport à la mesure positive β.

Se pose alors le problème suivant : montrer qu'il existe une unique fonction $K = K_\mu$ satisfaisant (3.4) tel que

$$K_\mu \geq -1 \quad \text{et} \tag{3.7.a}$$

$$\inf_{G\in C^{1,2}} I\Big((K_\mu+1)\cdot\Lambda_\mu \mid e^{\Delta\cdot\partial_x G}\cdot\Lambda_\mu\Big) = 0. \tag{3.7.b}$$

Alors pour cette K_μ privilégiée, on aura $I_o(\mu) = \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_\mu)\, d\Lambda_\mu$. Remarquons que l'inégalité (3.2) nous interdit de prouver (3.7.*a*) directement. Nous allons résoudre (3.7) par une méthode d'analyse convexe.

Un peu d'analyse convexe. Soient $\mathcal{C}$ un espace vectoriel, $\mathcal{C}^\sharp$ son dual algébrique et Γ une fonction convexe positive définie sur $\mathcal{C}$ telle que $\Gamma(0) = 0$. Sa transformée de Legendre est définie par

$$\Gamma^* : l \in \mathcal{C}^\sharp \mapsto \sup_{g\in\mathcal{C}}\{\langle l, g\rangle - \Gamma(g)\} \in [0, \infty].$$

On voit facilement qu'avec $\mathcal{C} = \Delta\cdot\partial C^{1,2}$, $l(\Delta\cdot\partial_x G) = l_\mu(G)$ donné par (3.1) et $\Gamma(g)$ donné par $\Gamma_\mu(g) = \int_{[0,T]\times S\times E} \tau(g)\, d\Lambda_\mu$, $g \in \Delta\cdot\partial C^{1,2}$, $I_o(\mu)$ s'écrit : $I_o(\mu) = \Gamma_\mu^*(l_\mu)$. Notre but est donc d'exprimer Γ^* sous une forme non-variationnelle.

Rappelons un résultat général. Soient U et V deux espaces vectoriels en dualité pour le crochet : $(u, v) \in U \times V \mapsto \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, une fonction $f : U \mapsto]-\infty, +\infty]$ et sa transformée de Legendre f^* définie par $f^* : v \in V \mapsto \sup_{u\in U}\{\langle u, v\rangle - f(u)\} \in]-\infty, +\infty]$.

Si u appartient au domaine effectif de f : $\operatorname{dom} f = \{u \in U\,;\, f(u) < +\infty\}$, le sousdifférentiel de f en u est défini par : $\partial_V f(u) = \{v \in V\,;\, f(u) + \langle h, v\rangle \le f(u+h), \forall h \in U\}$.

On définit la biconjuguée de Legendre de f par $\bar f : u \in U \mapsto \sup_{v\in V}\{\langle u, v\rangle - f^*(v)\} \in]-\infty, +\infty]$. On appelle régularisée convexe $\sigma(U, V)$-semicontinue inférieurement de la fonction f la plus grande fonction $\sigma(U, V)$-semicontinue inférieurement qui minore f.

PROPOSITION 3.1.

(a) pour tout $u \in$ dom f tel que $\partial_V f(u) \neq \emptyset$ et tout $v \in V$, on a :

$$v \in \partial_V f(u) \iff f(u) + f^*(v) = \langle u, v\rangle$$

(b) $v \in \partial_V f(u) \implies u \in \partial_U f^*(v)$

(c) si f est convexe et $\sigma(U, V)$-semicontinue inférieurement, on a :

$$v \in \partial_V f(u) \iff u \in \partial_U f^*(v)$$

(d) si f est convexe et minorée par une fonction affine $\sigma(U, V)$-continue, alors $\bar f$ est la régularisée convexe $\sigma(U, V)$-semicontinue inférieurement de f.

Preuve. – Voir [EkT], Proposition 5.1, Corollaire 5.2 et Proposition 3.3. ■

Revenons maintenant à l'étude de Γ. On suppose que Γ est Gâteaux-différentiable sur $\mathcal{C}$ et on note $\Gamma'(g) \in \mathcal{C}^\sharp$ la dérivée au sens de Gâteaux définie par

$$\langle \Gamma'(g), h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\Gamma(g+th)-\Gamma(g)}{t}, \quad g, h \in \mathcal{C}.$$

Si nous appliquons la proposition 3.1 avec $(U, f) = (\mathcal{C}, \Gamma)$ et $(V, f^*) = (\mathcal{C}^\sharp, \Gamma^*)$, on obtient pour tous les l de la forme $\Gamma'(g)$, $g \in \mathcal{C}$: $\Gamma^*(l) = \langle l, g_l\rangle - \Gamma(g_l)$ où g_l est tel que : $\Gamma'(g_l) = l$. Mais le domaine effectif de Γ^* est strictement plus grand que $\{\Gamma'(g)\,;\, g \in \mathcal{C}\}$ dans le cas qui nous intéresse. C'est pourquoi nous introduisons la fonction $\overline{\Gamma}$ définie sur le bidual algébrique $\mathcal{C}^{\sharp\sharp}$ de $\mathcal{C}$ par

$$\overline{\Gamma} : \xi \in \mathcal{C}^{\sharp\sharp} \mapsto \sup_{l\in\mathcal{C}^\sharp}\{\langle \xi, l\rangle - \Gamma^*(l)\} \in [0, \infty].$$

On note $\operatorname{idom}\Gamma^*$ l'ensemble des points internes de $\operatorname{dom}\Gamma^*$, c'est-à-dire l'ensemble des $l \in \mathcal{C}^\sharp$ tels que pour tout m dans l'espace affine engendré par $\operatorname{dom}\Gamma^*$, il existe $\alpha > 0$ tel que le segment $[l, l+\alpha(m-l)]$ soit inclus dans $\operatorname{dom}\Gamma^*$.

De même, on note $\mathcal{C}$-idom $\overline{\Gamma}$ l'ensemble des points $\xi \in \operatorname{dom}\overline{\Gamma}$ tels que pour tout $g \in \mathcal{C}$, il existe $\alpha > 0$ tel que le segment $[\xi, \xi+\alpha(g-\xi)]$ soit inclus dans $\operatorname{dom}\overline{\Gamma}$.

On dit que $\overline{\Gamma}$ est Gâteaux-différentiable dans les directions de $\mathcal{C}$ au point $\xi \in \mathcal{C}$-idom $\overline{\Gamma}$, si pour tout $g \in \mathcal{C}$ la limite $\langle \overline{\Gamma}'(\xi), g\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{\overline{\Gamma}(\xi+tg)-\overline{\Gamma}(\xi)}{t}$ existe. Puisque $\overline{\Gamma}$ est convexe, $\overline{\Gamma}'(\xi)$ est un élément de $\mathcal{C}^\sharp$.

PROPOSITION 3.2. – *Pour tout l de* $\operatorname{idom}\Gamma^*$, *il existe $\xi_l \in \mathcal{C}^{\sharp\sharp}$ satisfaisant*

$$\xi_l \in \partial\Gamma^*(l), \quad l \in \partial\overline{\Gamma}(\xi_l) \quad et \quad \Gamma^*(l) = \langle \xi_l, l\rangle - \overline{\Gamma}(\xi_l).$$

*En particulier, si $\mathcal{C}$-*idom *$\overline{\Gamma}$ = dom $\overline{\Gamma}$ et si $\overline{\Gamma}$ est Gâteaux-différentiable dans les directions de $\mathcal{C}$ sur tout son domaine, on a*

$$l = \overline{\Gamma}'(\xi_l) \quad et \tag{3.8}$$

$$\Gamma^*(l) = \langle \overline{\Gamma}'(\xi_l), \xi_l\rangle - \overline{\Gamma}(\xi_l). \tag{3.9}$$

Si de plus $\overline{\Gamma}$ *est strictement convexe, pour tout* l *de* $\operatorname{idom}\Gamma^*$, *il existe un unique* $\xi_l \in \mathcal{C}^{\sharp\sharp}$ *satisfaisant l'égalité* (3.8).

Preuve. – Du fait que Γ^* est convexe, d'après le théorème de Hahn-Banach géométrique, pour tout $l \in \operatorname{idom}\Gamma^*$, il existe au moins une forme $\xi_l \in \mathcal{C}^{\sharp\sharp}$ telle que: $\xi_l \in \partial\Gamma^*(l)$. De plus, Γ^* est $\sigma(\mathcal{C}^\sharp, \mathcal{C})$-semicontinue inférieurement et *a fortiori* $\sigma(\mathcal{C}^\sharp, \mathcal{C}^{\sharp\sharp})$-semicontinue inférieurement; on peut donc appliquer les parties (*a*) et (*c*) de la proposition 3.1, ce qui nous donne la première assertion de la proposition 3.2.

On obtient alors (3.8) et (3.9), en remarquant que lorsque $\overline{\Gamma}$ est Gâteaux-différentiable dans les directions de $\mathcal{C}$ en ξ, $\partial\overline{\Gamma}(\xi) = \{\overline{\Gamma}'(\xi)\}$.

Maintenant, nous vérifions par l'absurde la dernière affirmation de la proposition. Supposons qu'il existe ξ et ξ' distincts tels que $\xi, \xi' \in \partial\Gamma^*(l)$. Alors, (proposition 3.1.(*c*)) $l \in \partial\overline{\Gamma}(\xi)$ et $l \in \partial\overline{\Gamma}(\xi')$. Puisque d'après la proposition 3.1.(*d*), $\overline{\Gamma}$ est l'enveloppe supérieure de ses minorants affines, elle est affine sur le segment $[\xi, \xi']$ (car dans le cas contraire, le théorème de Hahn-Banach nous permettrait d'aboutir à une contradiction), par conséquent elle n'est pas strictement convexe. ■

Étude de I_o. Deuxième étape. De manière à utiliser la proposition 3.2, il convient de connaître la fonction $\overline{\Gamma}_\mu$ associée à Γ_μ et $\mathcal{C} = \Delta\cdot\partial C^{1,2}$. Ce résultat qui a été prouvé dans [Lé1] (voir aussi [KLé]), est le suivant.

Soient N^τ : l'adhérence dans L^τ de $\mathcal{C}$ pour la topologie $\sigma(L^\tau, L^{\tau^*})$, ainsi que N^1 : l'adhérence dans L^1 de $\mathcal{C}$. On note $N_{\tau,1}$ l'ensemble des fonctions g dont la partie positive g_+ est dans N^τ et la partie négative g_- dans N^1. On note $\mathcal{C}\cdot\Lambda_\mu$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\sharp$ constitué des éléments de la forme $g \mapsto \int gh\, d\Lambda_\mu$ où h décrit $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 3.3. – *La biconjuguée de Legendre :* $\overline{\Gamma}_\mu$, *de* Γ_μ *sur* $\mathcal{C}^{\sharp\sharp}$ *est donnée, pour tout* $\xi \in \mathcal{C}^{\sharp\sharp}$, *par*

$$\overline{\Gamma}_\mu(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,T]\times S\times E} \tau(\xi)\, d\Lambda_\mu & \begin{array}{l} si\ \xi \in N_{\tau,1} \\ et \displaystyle\int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(e^\xi - 1)\, d\Lambda_\mu < +\infty \end{array} \\ +\infty & sinon, \end{cases}$$

où l'on a identifié ξ *et* $\xi' \in \mathcal{C}^{\sharp\sharp}$ *lorsque* $\xi_{|\mathcal{C}\cdot\Lambda_\mu} = \xi'_{|\mathcal{C}\cdot\Lambda_\mu}$.

Preuve. – Voir [Lé1] ou ([KLé], corollaire 5.7). ■

Notons que d'après (3.3), nous avons

$$\operatorname{dom}\Gamma_\mu^* \subset L^{\tau^*}([0,T]\times S\times E, \Lambda_\mu). \tag{3.10}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4. (Formulation non-variationnelle de I_o). – *Pour que $\mu \in D_M$ soit tel que $I_o(\mu) < +\infty$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction mesurable $K : [0,T] \times S \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction G de $C^{1,2}([0,T] \times S)$*

$$\begin{aligned}\int_S G(T,x)\,\mu_T(dx) - \int_S G(0,x)\,\mu_0(dx) \\ - \int_{[0,T]\times S} \Big(\partial_t + \big[v + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)K(t,x,k)k\big]\cdot\partial_x\Big) \\ \times G(t,x)\,\mu_t(dx)dt = 0. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

et

$$\int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K)\,d\Lambda_\mu < +\infty, \qquad (3.12)$$

(donc $K \geq -1$, Λ_μ-presque partout).

Dans ce cas, il existe une unique fonction mesurable $K = K_\mu$ qui vérifie (3.11) *et* (3.12) *et telle que*

$$\inf_{G\in C^{1,2}} I\Big((K_\mu + 1)\cdot\Lambda_\mu \mid e^{\Delta\cdot\partial_x G}\cdot\Lambda_\mu\Big) = 0. \qquad (3.13)$$

De plus,

$$\begin{aligned}I_o(\mu) &= \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_\mu)\,d\Lambda_\mu \\ &= \inf\Big\{\int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K)\,d\Lambda_\mu\,;\ K \textit{ mesurable vérifiant } (3.11)\Big\}. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Remarque. – S'il existe $C > 0$ tel que pour tous t, k, x, x' on ait : $|K_\mu(t,x,k) - K_\mu(t,x',k)| \leq C|x - x'|$, alors l'équation différentielle ordinaire $\frac{d}{dt}x_t = v + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)K_\mu(t,x_t,k)k$ de condition initiale $x_0 = z$, admet une unique solution $x_t = \xi^z_t, 0 \leq t \leq T$ et (3.11) admet pour unique solution: $\mu_t = \int_S \delta_{\xi^z_t}\,\rho_o(dz)$, $0 \leq t \leq T$. En particulier, si ρ_o n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue; μ_t ne l'est pas non plus.

Preuve. – On a déjà constaté qu'avec l_μ donné par (3.1) et $\Gamma_\mu(g) = \int \tau(g)\, d\Lambda_\mu$, $g \in \Delta\cdot\partial C^{1,2}$, $I_o(\mu)$ s'écrit $I_o(\mu) = \Gamma_\mu^*(l_\mu)$.

Soit $\mu \in D_M$ tel que $I_o(\mu) < \infty$. On note $\mathcal{C} = \Delta\cdot\partial C^{1,2}$, $\Gamma = \Gamma_\mu$ et $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_\mu$. Avec l'identification du théorème 3.3 : $\xi \sim \xi' \in \mathcal{C}^{\#\#}$ lorsque $\xi_{|\mathcal{C}\cdot\Lambda_\mu} = \xi'_{|\mathcal{C}\cdot\Lambda_\mu}$, on constate que $\overline{\Gamma}$ est strictement convexe. De plus, $\mathcal{C}$-idom $\overline{\Gamma}$ = dom $\overline{\Gamma}$ (*a priori* $\mathcal{C}$-idom $\overline{\Gamma} \subset$ dom $\overline{\Gamma}$), $\overline{\Gamma}$ est Gâteaux différentiable dans les directions de $\mathcal{C}$ sur dom $\overline{\Gamma}$ et pour tout $\xi \in$ dom $\overline{\Gamma}$: $\overline{\Gamma}'(\xi) = (e^\xi - 1)\cdot\Lambda_\mu$.

Cas intérieur. – On suppose que $l_\mu \in \operatorname{idom}\Gamma^*$.

En appliquant la proposition 3.2, on obtient l'existence d'un unique $\xi_\mu \in$ dom $\overline{\Gamma}$ satisfaisant (3.8), c'est-à-dire :

$$l_\mu(G) = \int_{[0,T]\times S\times E} \Delta\cdot\partial_x G\,(e^{\xi_\mu} - 1)\, d\Lambda_\mu, \forall G \in C^{1,2}.$$

De plus (3.9) s'écrit:

$$\begin{aligned}\Gamma^*(l_\mu) &= \int_{[0,T]\times S\times E} \Big((e^{\xi_\mu} - 1)\xi_\mu - \tau(\xi_\mu)\Big)\, d\Lambda_\mu \\ &= \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(e^{\xi_\mu} - 1)\, d\Lambda_\mu.\end{aligned}$$

Ce qui, compte tenu de (3.10), en posant $K_\mu = e^{\xi_\mu} - 1$, nous donne (3.11) et (3.12) avec $K = K_\mu$, ainsi que la première égalité de (3.14).

Cas frontière. – On suppose que $l_\mu \in \operatorname{dom}\Gamma^* \setminus \operatorname{idom}\Gamma^*$.

Alors, il existe $l_1 \in \operatorname{idom}\Gamma^*$ tel que $[l_1, l_\mu] \subset \operatorname{dom}\Gamma^*$. Posons $l_n = \dfrac{1}{n} l_1 + \dfrac{n-1}{n} l_\mu$, $n \geq 1$. Puisque Γ^* est convexe et semicontinue inférieurement, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma^*(l_n) = \Gamma^*(l_\mu). \tag{3.15}$$

Pour tout $n \geq 1$, l_n est intérieur et d'après ce qui précède, il existe K_n tel que

$$l_n(G) = \int_{[0,T]\times S\times E} \Delta\cdot\partial_x G\, K_n\, d\Lambda_\mu, \ \forall G \in C^{1,2} \text{ et}$$

$$\Gamma^*(l_n) = \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_n)\, d\Lambda_\mu. \tag{3.16}$$

Puisque $l_\mu = 2l_2 - l_1$, on obtient avec $K_\mu = 2K_2 - K_1$, que pour tout $n \geq 1$, $K_n = 2\frac{n-1}{n}K_2 - \frac{n-2}{n}K_1$ et que $l_\mu(G) = \int \Delta \cdot \partial_x G\, K_\mu\, d\Lambda_\mu$, $\forall G \in C^{1,2}$, c'est-à-dire (3.11) avec $K = K_\mu$. Compte tenu de (3.10), K_1 et K_2 sont dans $L^{\tau^*}([0,T] \times S \times E, \Lambda_\mu)$ de sorte que $|K_n| \leq 2|K_2| + |K_1| \in L^{\tau^*}([0,T] \times S \times E, \Lambda_\mu)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir : $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_n)\, d\Lambda_\mu = \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_\mu)\, d\Lambda_\mu$. D'où il vient, avec (3.15) et (3.16), que : $\Gamma^*(l_\mu) = \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_\mu)\, d\Lambda_\mu$, c'est-à-dire (3.12) avec $K = K_\mu$, ainsi que la première égalité de (3.14).

Étudions maintenant la réciproque. Soit $\mu \in D_M$. On montre à l'aide de (3.5), comme en (3.6), que pour toute fonction mesurable $K \geq -1$ associée à μ par (3.11), on a : $I_o(\mu) \leq \int \tau^*(K)\, d\Lambda_\mu$. De sorte que

$$I_o(\mu) \leq \inf \left\{ \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K)\, d\Lambda_\mu \,;\, K \text{ vérifie } (3.11) \right\} \tag{3.17}$$

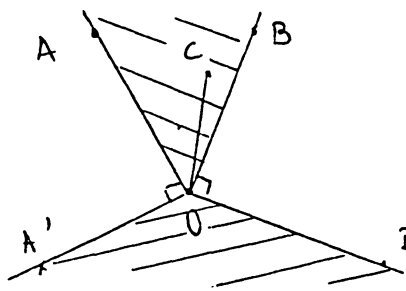
et que s'il existe K satisfaisant (3.11) et (3.12), on a $I_o(\mu) < +\infty$. Dans ce cas, on a déjà montré l'existence de K_μ satisfaisant (3.11) et tel que $I_o(\mu) = \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K_\mu)\, d\Lambda_\mu$, ce qui avec (3.17) nous donne la deuxième égalité de (3.14).

Finalement, (3.13) est une conséquence directe de (3.6) et l'unicité de K_μ provient de la stricte convexité de la fonction $K \mapsto \int \tau^*(K)\, d\Lambda_\mu$ que l'on minimise sur l'ensemble convexe $\{K\,;\, K \text{ satisfait } (3.11)\}$. Ce qui achève la preuve du théorème. ■

De manière à préciser d'avantage la fonction de taux, nous introduisons, comme dans [Lé2], les notions de vitesses admissibles et de forces duales.

Vitesses admissibles et forces duales. Soit $V = \{\sum_{k\in E} \alpha_k k\,;\, \alpha_k \geq 0, k \in E\}$ le cône convexe de sommet $0 \in \mathbb{R}^d$ engendré par E. On appelle face de V en un point frontière w, l'intersection de V avec tous les hyperplans de support de V en w. Puisque E est fini, V est un polyhèdre et possède un nombre fini $J \geq 0$ de faces : $V_j, 1 \leq j \leq J$. On pose $J = 0$ si $V = \mathbb{R}^d$. Pour chacune de ces faces V_j, on choisit une normale extérieure $n_j \in \mathbb{R}^d$ telle que $V \subset \{u \in \mathbb{R}^d\,;\, n_j \cdot u \leq 0\}$ et $V \cap \{u \in \mathbb{R}^d\,;\, n_j \cdot u = 0\} = V_j$. Un tel n_j existe toujours, il suffit de le choisir dans l'intérieur intrinsèque du cône des normales extérieures aux hyperplans de support de V en w.

On appelle V : le cône des *vitesses admissibles* et celui engendré par $\{n_j\,;\, 1 \leq j \leq J\}$: le cône des *forces infinies*.



$E = \{A, B, C\}, V = AOB$. Les faces de V sont OA, OB et $\{O\}$. Le cône des forces infinies est $A'OB'$, $n_{OA} \in OA'$, $n_{OB} \in OB'$ et tout vecteur choisi dans l'intérieur de $A'OB'$ convient pour $n_{\{O\}}$.

On dira que nous sommes dans une situation *non-dégénérée* si $V = \mathbb{R}^d$. Dans ce cas, il n'y a pas de forces infinies.

Par convention, on pose $V_0 = V$ et $n_0 = 0$. L'ensemble des *forces duales* est défini par $V^* = \bigcup_{0 \leq j \leq J} \{n_j\} \times E_j$ où E_j est l'espace vectoriel engendré par V_j (considéré comme le dual de V_j). On note $V^* \ni (n, u) = \infty n + u$ et pour tout $k \in E$, on définit le « produit scalaire » $k \cdot (\infty n + u) = \begin{cases} k \cdot u & \text{si } n \cdot k = 0 \\ -\infty & \text{si } n \cdot k < 0 \end{cases}$. Remarquons que n est choisi de telle sorte que $k \cdot n \leq 0, \forall k \in E$.

Par convention on pose $e^{-\infty} = 0$, ce qui nous permet de définir la fonction

$$\varphi : \infty n + u \in V^* \mapsto \varphi(\infty n + u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d_*} e^{k \cdot (\infty n + u)} c(k) k \in V.$$

Notons que pour tout $0 \leq j \leq J$ et tout $u \in E_j$, $\varphi(\infty n_j + u) = \sum_{k \in V_j} e^{k \cdot u} c(k) k$ est un point intérieur de la face V_j. Dans le cas non-dégénéré, φ s'écrit : $u \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{k \in E} e^{k \cdot u} c(k) k \in \mathbb{R}^d$.

Une conséquence immédiate de la preuve du théorème 3.5 plus bas, est que l'application φ est bijective. Ce paramétrage de V est l'analogue de l'inversion de la matrice de diffusion lors de l'étude des grandes déviations de diffusions.

Champs de forces duales. De manière à introduire un paramétrage analogue pour les trajectoires $\mu \in D_M$ telles que $I_o(\mu) < \infty$, nous définissons un ensemble de champs de forces duales $\mathcal{V}^*(\mu)$.

DÉFINITION. – *Pour tout $\mu \in D_M$, $\mathcal{V}^*(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $h : [0,T] \times S \to V^*$ telles que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} c(k) \int_{[0,T]\times S} \tau^*(e^{k\cdot h(t,x)} - 1)\, \mu_t(dx)dt < \infty$$

et il existe une suite $(H^n)_{n\geq 1}$ de $C^{1,2}([0,T] \times S)$ satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} c(k) \int_{[0,T]\times S} \mathbf{1}_{\{(t,x)\,;\,k\cdot h(t,x)=-\infty\}} e^{k\cdot\partial_x H^n(t,x)}\, \mu_t(dx)dt$$
$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} c(k) \int_{[0,T]\times S} \mathbf{1}_{\{(t,x)\,;\,k\cdot h(t,x)>-\infty\}}$$
$$\times\, \tau\Big(k\cdot [\partial_x H^n(t,x) - h(t,x)]\Big) e^{k\cdot h(t,x)}\, \mu_t(dx)dt \Bigg) = 0.$$

Dans $\mathcal{V}^*(\mu)$ on identifie h_1 et h_2 lorsque $k \cdot h_1(t,x) = k \cdot h_2(t,x)$ (dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) Λ_μ-presque partout.

Remarques. – $*$ L'ensemble $\mathcal{V}^*(\mu)$ n'est pas un espace vectoriel en général.

$*$ Du fait que $\tau(-|u|) \leq \tau(u), \forall u \in \mathbb{R}$, la convergence de la deuxième somme implique la convergence vers 0 de $\mathbf{1}_{\{k\cdot h>-\infty\}} k\cdot(\partial_x H^n - h)$ dans $L^1([0,T] \times S \times E, e^{k\cdot h}\Lambda_\mu)$, alors que la première somme exprime la convergence vers 0 de $e^{k\cdot\partial_x H^n(t,x)}$ dans $L^1([0,T]\times S\times E, \mathbf{1}_{\{k\cdot h=-\infty\}}\Lambda_\mu)$. On en déduit que, quitte à extraire une sous-suite de $(H^n)_{n\geq 1}$, pour Λ_μ-presque tous $(k,t,x) : k\cdot h(t,x) = \lim_{n\to\infty} k\cdot \partial_x H^n(t,x) \in [-\infty, \infty[$.

THÉORÈME 3.5. (Formulation non-variationnelle de I_o, suite) – *Pour tout μ de D_M, $I_o(\mu)$ est fini si et seulement s'il existe un champ de forces h dans $\mathcal{V}^*(\mu)$ tel que pour toute fonction H de $C^{1,2}$*

$$\int_S H(T,x)\, \mu_T(dx) - \int_S H(0,x)\, \mu_0(dx)$$
$$- \int_{[0,T]\times S} \Big(\partial_t + [\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} c(k) e^{k\cdot h(t,x)} k] \cdot \partial_x\Big) H(t,x)\, \mu_t(dx)dt = 0. \quad (3.18)$$

Dans ce cas, (3.18) *admet une unique solution* $h = h_\mu$ *dans* $\mathcal{V}^*(\mu)$ *et*

$$I_o(\mu) = \int_{[0,T]\times S} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} c(k)\tau^*\big(e^{k\cdot h_\mu(t,x)} - 1\big)\Big)\,\mu_t(dx)dt. \tag{3.19}$$

De plus, la fonction K_μ *du théorème* 3.4 *est donnée par :* $K_\mu(t,x,k) = e^{k\cdot h_\mu(t,x)} - 1$.

Preuve. – Commençons par prouver le critère de finitude de $I_o(\mu)$. D'après le théorème 3.4, $I_o(\mu)$ est fini si et seulement s'il existe K satisfaisant (3.11) et (3.12). La condition suffisante du critère (3.18) en découle. Montrons la condition nécessaire. Soit $\mu \in D_M$ tel que $I_o(\mu) < +\infty$. D'après le théorème 3.4, on peut choisir $K = K_\mu$ telle que $I_o(\mu) = \int \tau^*(K_\mu)\,d\Lambda_\mu$. Montrons que K_μ est de la forme $e^{k\cdot h_\mu} - 1$ avec h_μ dans $\mathcal{V}^*(\mu)$. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a $uv - \tau(u) = \tau^*(v) - \beta(u,v)$ avec $\beta(u,v) = \begin{cases} (v+1)\tau(u - \log(v+1)) & \text{si } v > -1 \\ e^u & \text{si } v = -1 \\ +\infty & \text{si } v < -1 \end{cases}$. On en déduit que si K satisfait (3.11), alors

$$\begin{aligned} I_o(\mu) &= \sup_{H\in C^{1,2}} \int_{[0,T]\times S\times E} \Big(K\,\Delta\cdot\partial_x H - \tau(\Delta\cdot\partial_x H)\Big)\,d\Lambda_\mu \\ &= \int_{[0,T]\times S\times E} \tau^*(K)\,d\Lambda_\mu \\ &\quad - \inf_{H\in C^{1,2}} \int_{[0,T]\times S\times E} \beta(\Delta\cdot\partial_x H, K)\,d\Lambda_\mu. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Par conséquent, $\inf_{H\in C^{1,2}} \int \beta(\Delta\cdot\partial_x H, K_\mu)\,d\Lambda_\mu = 0$. D'où il vient que $K_\mu \geq -1$, Λ_μ-presque partout et que

$$\inf_{H\in C^{1,2}} \Bigg(\int_{\{K_\mu+1=0\}} e^{\Delta\cdot\partial_x H}\,d\Lambda_\mu + \int_{\{K_\mu+1>0\}} \tau\Big(\Delta\cdot\partial_x H - \log(K_\mu+1)\Big)(K_\mu+1)\,d\Lambda_\mu\Bigg) = 0.$$

De ce fait, il existe $h_\mu \in \mathcal{V}^*(\mu)$ tel que $K_\mu(t,x,\Delta) = e^{\Delta\cdot h_\mu(t,x)} - 1$, Λ_μ-presque partout. On en déduit (3.18) en écrivant (3.11) avec $K = K_\mu$, ainsi que (3.19) à l'aide de (3.14).

Maintenant, montrons l'unicité de la solution de (3.18) en $h \in \mathcal{V}^*(\mu)$. Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{V}^*(\mu)$ des solutions de (3.18). Les fonctions $K_1 = e^{\Delta \cdot h_1} - 1$ et $K_2 = e^{\Delta \cdot h_2} - 1$ sont solutions de (3.11). Puisque $h_1, h_2 \in \mathcal{V}^*(\mu)$, on a

$$\begin{aligned} &\inf_{H \in C^{1,2}} \int_{[0,T]\times S\times E} \beta(\Delta \cdot \partial_x H, K_1)\, d\Lambda_\mu \\ &= \inf_{H \in C^{1,2}} \int_{[0,T]\times S\times E} \beta(\Delta \cdot \partial_x H, K_2)\, d\Lambda_\mu = 0, \end{aligned}$$

ce qui avec (3.20) nous donne: $I_o(\mu) = \int \tau^*(K_1)\, d\Lambda_\mu = \int \tau^*(K_2)\, d\Lambda_\mu$. Mais d'après le théorème 3.4, K_μ est l'unique fonction K satisfaisant (3.11) et $I_o(\mu) = \int \tau^*(K)\, d\Lambda_\mu$. Par conséquent $K_1 = K_2 = K_\mu$. Ce qui achève la preuve du théorème. ■

4. LA MINORATION DES GRANDES DÉVIATIONS

Le point technique qui diffère des situations « quadratiques » (en regard de la situation « exponentielle » due à la fonction τ que nous étudions ici) est le lemme 4.1. Nous ne prouvons la minoration que dans le cas de la dimension 1 et dans le cas non-dégénéré (on interdit que tous les sauts s'effectuent du même côté). Commençons par montrer deux lemmes préliminaires.

LEMME 4.1. – *On se place dans le cas $d = 1$ et on suppose qu'il existe $k_+, k_- \in \mathbb{N}$ tels que $c(k_+) > 0$ et $c(-k_-) > 0$. Soit $\mu \in D_M$ tel que $I_o(\mu) < +\infty$. Alors il existe une suite $(\mu^n)_{n\geq 1}$ de D_M telle que $\lim_{n\to\infty} \mu^n = \mu$, $\lim_{n\to\infty} I_o(\mu^n) = I_o(\mu)$ et pour tout $n \geq 1$ le champ de forces h^n associé à μ^n par* (3.18) *est de la forme $h^n = \partial_x H^n$ avec H^n dans $C^{1,2}([0,T] \times S)$.*

Remarque. – L'existence de k_+ et k_- garantit la non-dégénérescence.

Preuve. – Soit $\tilde{\mu}$ le prolongement de μ à $[-1, T+1]$ qui coïncide avec μ sur $[0,T]$ et tel que $t \in [0,1] \mapsto \tilde{\mu}(T+t)$ et $t \in [0,1] \mapsto \tilde{\mu}(-t) := \nu(t)$ sont solutions au sens faible de $\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)\tilde{\mu}(T+t) = 0 \\ \tilde{\mu}(T) = \mu_T \end{cases}$ et de $\begin{cases} (\partial_t - v\partial_x)\nu(t) = 0 \\ \nu(0) = \mu_0 \end{cases}$. La trajectoire $\tilde{\mu}$ satisfait une équation analogue à (3.18) sur $[-1, T+1]$ avec

$\tilde{h}_\mu(t,x) = \begin{cases} h_\mu(t,x) & \text{si } t \in [0,T] \\ 0 & \text{si } t \in [-1,0[\cup]T,T+1] \end{cases}$ et l'analogue de (3.19) s'écrit

$$\begin{aligned}\tilde{I}_o(\tilde{\mu}) := \sup_{G \in C^{1,2}([-1,T+1]\times S)} \Big\{ & \int_S G(T+1,x)\, \tilde{\mu}(T+1,dx) \\ & - \int_S G(-1,x)\, \tilde{\mu}(-1,dx) \\ & - \int_{[-1,T+1]\times S} (\partial_t + v \cdot \partial_x) G(t,x)\, \tilde{\mu}_t(dx)dt \\ & - \int_{[-1,T+1]\times S} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} c(k)\tau\big(k \cdot \partial_x G(t,x)\big) \Big) \tilde{\mu}_t(dx)dt \Big\} = I_o(\mu).\end{aligned}$$

Noter qu'en tant que bornes supérieures de fonctions affines continues $\tilde{I}_o$ et I_o sont convexes et semicontinues inférieurement. Ce prolongement permet de régulariser μ par convolution. Soit $\{\rho^n(t,x)\,;\, n \geq 1\}$ une suite régularisante positive sur $[-1, T+1] \times S$. On désigne par μ^n la restriction à $[0,T] \times S$ de $\rho^n * \tilde{\mu}$. Compte tenu de la continuité de $t \mapsto \mu_t$ (c'est une conséquence simple de l'inégalité de Hölder pour les espaces d'Orlicz et du théorème 3.5), on a bien sûr $\lim_{n\to\infty} \mu^n = \mu$.

Puisque les générateurs A_N sont stationnaires en temps et en espace, $\tilde{I}_o$ est invariante par les translations en temps et en espace. Or $\tilde{I}_o$ est convexe, donc $I_o(\mu^n) = \tilde{I}_o(\rho^n * \tilde{\mu}) \leq \tilde{I}_o(\tilde{\mu}) = I_o(\mu)$ et $\limsup_{n\to\infty} I_o(\mu^n) \leq I_o(\mu)$. D'autre part, I_o étant semicontinue inférieurement : $\liminf_{n\to\infty} I_o(\mu^n) \geq I_o(\mu)$, d'où il vient que : $\lim_{n\to\infty} I_o(\mu^n) = I_o(\mu)$.

Nous montrons maintenant la régularité de h^n. On identifie μ^n et sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,T] \times S$. On choisit la suite régularisante ρ^n strictement positive sur $[0,T] \times S$, de sorte que $\inf_{(t,x)\in[0,T]\times S} \mu^n(t,x) > 0$. Pour la suite de la preuve, on laissera tomber l'indice n.

L'équation (3.18) s'écrit, pour presque tout t,

$$\partial_t \mu(t,x) + \partial_x(v(t,x)\mu(t,x)) = 0 \tag{4.1}$$

avec

$$v(t,x) = \varphi(h(t,x)); u \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(u) := \sum_{k \in E} c(k) k e^{ku}. \tag{4.2}$$

Du fait que nous sommes dans une situation non-dégénérée, e^{ku} ne prend que des valeurs finies. La solution générale de (4.1) est

$$v(t,x) = \frac{c(t) - \int_0^x \partial_t \mu(t,y)\,dy}{\mu(t,x)} \tag{4.3}$$

où $t \mapsto c(t)$ est une fonction mesurable.

La fonction φ de (4.2) est C^∞ et sa dérivée ne s'annule pas, elle admet donc une fonction réciproque φ^{-1} qui est aussi C^∞. D'après (4.3), $x \mapsto h(t,x) = \varphi^{-1}(v(t,x))$ est C^∞ pour presque tout t.

Il nous reste à nous assurer de la régularité de $t \mapsto c(t)$. Pour cela, nous montrons dans un premier temps que du fait que h est dans $\mathcal{V}^*(\mu)$, nous avons pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\int_S h(t,x)\,dx = 0. \tag{4.4}$$

En effet, il existe une suite $(H^m)_{m\geq 1}$ de $C^{1,2}$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\in E} \int_{[0,T]\times S} \tau(k[\partial_x H^m(t,x) - h(t,x)])e^{kh(t,x)}\mu_t(dx)dt = 0.$$

Or pour presque tout t, $\inf_x \mu(t,x) > 0$ et $\inf_{k,x} e^{kh(t,x)} > 0$ (puisque $h(t,\cdot)$ est continue), donc $\lim_{m\to\infty} \int_S |\partial_x H^m(t,x) - h(t,x)|\,dx = 0$. On en déduit (4.4) en remarquant que pour tout $m \geq 1$ et tout $t \in [0,T]$, $\int_S \partial_x H^m(t,x)\,dx = 0$.

En combinant (4.2), (4.3) et (4.4), on obtient : $\int_S \varphi^{-1}\left(\frac{c(t) - \int_0^x \partial_t\mu(t,y)\,dy}{\mu(t,x)}\right) dx = 0$. On en déduit la régularité de $t \mapsto c(t)$ à l'aide du théorème d'inversion locale et de la régularité de φ^{-1} et de μ. ■

Soient P_N la loi de Y_N et H une fonction dans $C^{1,2}$. On considère une nouvelle loi P_N^H sur D_M analogue à P_N, associée au générateur de Markov A_N^H donné pour toute fonction f cylindrique sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}_N}$, par

$$A_N^H f(\eta) = N \sum_{i\in\mathbb{Z}_N} \eta(i) \sum_{k\in\mathbb{Z}_*} c(k) e^{N[H(t,\frac{i+k}{N}) - H(t,\frac{i}{N})]} \left(f(\eta^{i,i+k}) - f(\eta)\right),$$
$$\eta \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}_N}$$

et de même loi marginale initiale que P_N. Nous allons voir que, lorsque N est grand, les événements rares sous P_N sont essentiellement les événements typiques sous les P_N^H lorsque H varie. La densité de Radon-Nykodym de P_N^H par rapport à P_N est donnée par la formule de Girsanov :

$$\frac{dP_N^H}{dP_N}(\eta) = \exp\Bigg(N \sum_{i\in\mathbb{Z}_N} \Big[\sum_{0\le t\le T} [\eta_t(i) - \eta_{t^-}(i)]\, H(t, \frac{i}{N}) \\ - \int_0^T \eta_t(i) \sum_{k\in\mathbb{Z}_*} c(k)\Big(e^{N[H(t,\frac{i+k}{N})-H(t,\frac{i}{N})]} - 1\Big)\, dt\Big]\Bigg).$$

Ce qui, avec la formule d'Itô, nous donne avec $\mu_t^N(\eta) := \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathbb{Z}_N} \eta_t(i)\delta_{\frac{i}{N}}$:

$$\frac{dP_N^H}{dP_N}(\eta) = \exp\Bigg(N^2\Big[\langle H(T,\cdot),\mu_t^N(\eta)\rangle - \langle H(0,\cdot),\mu_0^N(\eta)\rangle \\ - \int_0^T \langle(\partial_t + v\cdot\partial_x)H(t,\cdot),\mu_t^N(\eta)\rangle\, dt \\ - \int_0^T \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}_*} c(k)\tau\big(k\cdot\partial_x H(t,\cdot)\big),\mu_t^N(\eta)\Big\rangle\, dt + O(1/N)\Big]\Bigg). \qquad (4.5)$$

De manière à éviter de montrer la compacité des ensembles de niveau lors de la preuve du lemme suivant, nous introduisons une topologie plus faible sur D_M en considérant $\mu \in D_M$ comme la mesure $\mu_t(dx)dt$ sur $[0,T]\times S$ et en munissant $M^+([0,T]\times S)$ de la topologie affaiblie par $C([0,T]\times S)$.

LEMME 4.2. (Loi des grands nombres). – *Soit* $\mu_* \in D_M$ *associé via* (3.18) *au champ de forces* $h_* = \partial_x H_*$ *avec* H_* *dans* $C^{1,2}([0,T]\times S)$. *Alors,* $P_N^{H_*}$*-presque sûrement on a :* $Y^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu_*$ *faiblement dans* D_M.

Preuve. – Nous commençons par montrer que $P_N^{H_*}$ satisfait une majoration de grandes déviations dans D_M faible. Pour cela on reprend la preuve de la proposition 2.1 en opérant les remplacements

$$c(k) \longrightarrow c(k)e^{kh_*(t,x)} \quad \text{et} \quad v \longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}_*} kc(k)e^{kh_*(t,x)} := v_*(t,x). \qquad (4.6)$$

L'analogue de $\theta(G,\cdot)$ (*voir* (2.3)) en opérant (4.6) est faiblement continue, de sorte que la preuve de la proposition 2.1 peut se transcrire et nous donne la majoration pour les compacts faibles et pour la fonction de taux $I_*(\cdot)$: obtenue à partir de $I(\cdot)$ à l'aide de (4.6).

Compte tenu de (1.1), pour N suffisament grand, $Y_t^N(dx)dt$ a presque sûrement une masse inférieure à $(m+1)T$. De ce fait, le domaine de $I_{o,*}$ est inclus dans l'ensemble faiblement compact des mesures positives sur $[0,T] \times S$ de masse inférieure ou égale à $(m+1)T$. On en déduit immédiatement que le domaine de I_* est inclus dans ce compact. Par conséquent, la majoration précédente a lieu pour les fermés faibles.

On a $I_*(\mu) = 0$ si et seulement si μ est une solution faible de $\begin{cases}(\partial_t + v_*(t,x)\partial_x)\mu = 0\\ \mu_0 = \rho_o\end{cases}$. Puisque v_* est Lipschitzienne bornée, cette équation admet une unique solution faible et $I_*(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_*$.

Soit U un voisinage ouvert faible de μ_*. On vient de voir que pour tout $\mu \notin U$: $I_*(\mu) > 0$. De plus I_* étant faiblement semicontinue inférieurement (en tant qu'enveloppe supérieure de fonctions continues) et U^c étant faiblement compact, on a : $\inf_{\mu \in U^c} I_*(\mu) > 0$. La majoration des grandes déviations nous donne alors

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log P_N^{H_*}(U^c) \leq - \inf_{\mu \in U^c} I_*(\mu) = -a,$$

avec $a > 0$. On achève la preuve du lemme à l'aide du lemme de Borel-Cantelli. ■

THÉORÈME 4.3. (Minoration). – *On se place dans le cas $d = 1$ et on suppose qu'il existe $k_+, k_- \in \mathbb{N}$ tels que $c(k_+) > 0$ et $c(-k_-) > 0$ ainsi que $\rho_o \in M^+(S)$ tel que les conditions initiales satisfassent* (1.1). *Alors, pour tout ouvert U de D_M, on a*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log \mathbb{P}(Y^N \in U) \geq - \inf_{\mu \in U} I(\mu).$$

Preuve. – On commence par montrer cette minoration pour les ouverts faibles. Il suffit bien sûr de prouver que pour tout $\mu \in D_M$ et tout voisinage ouvert U de μ,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log \mathbb{P}(Y^N \in U) \geq -I(\mu). \tag{4.7}$$

Si $I(\mu) = +\infty$, il n'y a rien à montrer. Prenons $\mu \in U$ tel que $I(\mu) < \infty$. En tenant compte du lemme 4.1, il nous suffit de prouver (4.7) pour les μ_* associés par (3.18) à un champ de force

$$h_* = \partial_x H_* \text{ avec } H_* \text{ dans } C^{1,2}. \tag{4.8}$$

En effet, soit $(\mu^n)_{n\geq 1}$ une suite de D_M tendant vers μ et satisfaisant les propriétés de l'énoncé du lemme 4.1. Pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage ouvert U_δ de μ inclus dans U contenant un μ^n tel que $I(\mu^n) \leq I(\mu) + \delta$. Donc, $\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log P_N(U) \geq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log P_N(U_\delta) \geq -I(\mu^n)$
$\geq -I(\mu) - \delta$, d'où le résultat puisque δ est arbitraire.

Il nous reste donc à montrer (4.7) pour les μ_* satisfaisant (4.8). Commençons par remarquer que si $P \ll Q$ et $Q(A) > 0$, alors $\log P(A) \geq \log Q(A) + E_Q\left(\frac{\mathbf{1}_A}{Q(A)} \log \frac{dP}{dQ}\right)$ (grâce à l'inégalité de Jensen). À l'aide de la remarque précédente, de (4.5), du lemme 4.2 et de (4.8), on voit que pour tout voisinage ouvert faible U_* de μ_* :

$$\begin{aligned}
\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log P_N(U_*) &= \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \log E_{P_N^{H_*}}\left(\frac{dP_N}{dP_N^{H_*}} \mathbf{1}_{U_*}\right) \\
&\geq -\Bigg[\langle H_*(T,\cdot), \mu_*(T)\rangle - \langle H_*(0,\cdot), \mu_*(0)\rangle \\
&\quad - \int_{[0,T]\times S} (\partial_t + v\cdot\partial_x) H_*(t,x)\, \mu_*(t,dx)dt \\
&\quad - \int_{[0,T]\times S} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_*} c(k)\tau\big(k\cdot h_*(t,x)\big)\Big)\, \mu_*(t,dx)dt\Bigg] \\
&= -\int_{[0,T]\times S} \sum_{k\in\mathbb{Z}_*} c(k)\Big(k\cdot h_*(t,x)(e^{k\cdot h_*(t,x)} - 1) \\
&\quad - \tau(k\cdot h_*(t,x))\Big)\Big)\, \mu_*(t,dx)dt \\
&= -I(\mu_*)
\end{aligned}$$

en remarquant que $u(e^u - 1) - \tau(u) = \tau^*(e^u - 1)$ et où la dernière égalité est donnée par (3.19).

Nous venons d'obtenir la minoration pour les ouverts faibles. Compte tenu du théorème 2.3, $(P_N)_{N\geq 1}$ satisfait un principe de grandes déviations dans D_M faible ainsi que la tension exponentielle dans D_M muni de la topologie de Skorokhod. Nous sommes dans les conditions d'applications du principe de contraction inverse (*voir* [DZe], corollary 4.2.6) qui nous permet d'étendre le principe de grandes déviations à la topologie de Skorokhod. Ce qui achève la preuve du théorème. ■

RÉFÉRENCES

[DoV] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan, Large Deviations from a Hydrodynamical Scaling Limit, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **42**, 1989, p. 247-270.

[DZe] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, 1993, Jones and Bartlett Publishers.

[EkT] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems,* 1976, North-Holland, Amsterdam.

[Jak] A. Jakubowski, On the Skorokhod topology, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **B22**, 1986, p. 263-285.

[JLV] G. Jona-Lasinio, C. Landim and M. E. Vares, Large deviations for a reaction diffusion model, *Prob. Th. Rel. Fields*, Vol. **97**, 1993, p. 339-361.

[KiO] C. Kipnis and S. Olla, Large deviations from the hydrodynamical limit for a system of independent Brownian particles, *Stochastics and Stoch. Rep.*, Vol. **33**, 1990, p. 17-25.

[KLé] C. Kipnis et C. Léonard, *Grandes déviations pour un système hydrodynamique asymétrique de particules indépendantes. Version détaillée,* Prépublications de l'Université d'Orsay, 1994.

[KOV] C. Kipnis, S. Olla and S. R. S. Varadhan, Hydrodynamics and Large Deviation for Simple Exclusion Process, *Comm. Pure and Appl. Math.*, Vol. **42**, 1989, p. 115-137.

[KRu] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces,* 1961, P. Noordhoff Ltd.

[Lé1] C. Léonard, Large deviations for particle systems associated with spatially homogeneous Boltzmann type equations, to appear in *Prob. Th. Rel. Fields.*

[Lé2] C. Léonard, *Large deviations for small random perturbations with jumps,* 1994, en préparation.

[Nev] J. Neveu, *Martingales à temps discret,* 1972, Masson.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1994;
révisé le 5 juillet 1994.)